

# شاهکار هوش مصنوعی: حل مسئله ریاضی ۳۰ ساله تنها در ۶ ساعت\* حساب کاربری عمومی در وی چت

ترجمه و تنظیم: سمیه رهنما و سعید علیخانی\*\*



## ترنس تائو: چت‌جی‌پی‌تی و مدل‌های دیگر شکست خوردند

هیچ دخالت انسانی وجود ندارد.

شب گذشته، جامعه ریاضی شوکه شد! هوش مصنوعی ریاضی‌دان به نام «ارسطو»<sup>۱</sup> نسخه ساده شده‌ای از یک مسئله ۳۰ ساله را تنها در ۶ ساعت و با یک کلیک حل کرد و تحسین فراوانی از ترنس تائو برنده مدال فیلدز، دریافت نمود. عصر اثبات الهامی<sup>۲</sup> در حوزه ریاضیات فرا رسیده است.

حتی ترنس تائو، برنده مدال فیلدز، هوش مصنوعی ریاضی‌دان «ارسطو» را بسیار تمجید کرد.

یک مسئله باز ریاضی که به مدت سی سال حل نشده باقی مانده بود، سرانجام حل شد.



فهرست مسائل پال اردوش، همچون قلعه‌ی اورست در جهان ریاضیات، نمادی چالش‌برانگیز از مرزهای دانش بشری است. پاداش حل این مسائل، که عمدتاً از ده‌ها تا هزاران دلار متغیر است، در نگاه اول ناچیز می‌نماید. با این حال، ارزش و اعتبار معنوی این دستاورد برای ریاضی‌دانان آن‌قدر بالاست که گویی مدال افتخاری بی‌همتا را دریافت کرده‌اند.

ولاد تائف<sup>۴</sup> بنیانگذار HarmonicMath، با تحسین اظهار داشت که جامعه‌ی ریاضیات در حال پشت سر گذاشتن تحولی بزرگ است. اکنون دوران اثبات الهامی فرا رسیده است!

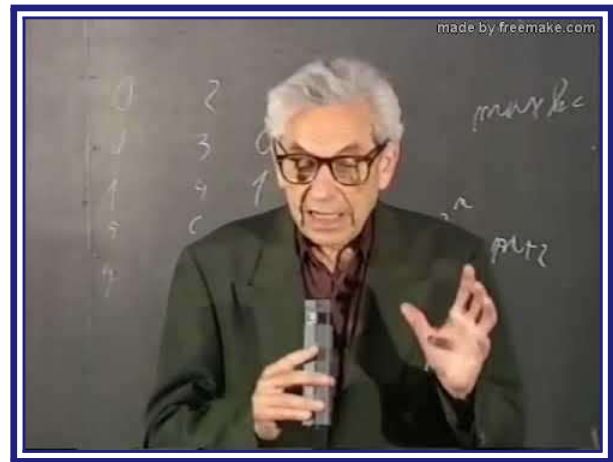
<sup>۱</sup> Aristotle  
<sup>۲</sup> Vibe proving  
<sup>۳</sup> Erdős Problem # 124  
<sup>۴</sup> Vlad Tenev

شود؟ این موضوع به لایه‌های عمیق «ریاضیات ترکیباتی» مربوط می‌شود و روش‌های سنتی درگیر شرط بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (gcd) و حالت‌های مرزی باقی مانده و از آن فراتر نرفته بودند تا دیشب که این دیوار فرو ریخت.

### نحوه حل و اثبات ارسطو

تیم هارمونیک یک نمونه اولیه از «ابر-هوش ریاضی» به نام «ارسطو» ایجاد کرده‌اند. این مدل ترکیبی از یادگیری تقویتی، جستجوی درخت مونت کارلو و زبان صوری Lean را به کار می‌گیرد. پس از وارد کردن صورت مسئله، این سیستم صدها میلیون راهبرد اثبات را جست‌جو کرد و در نهایت یک قضیه ۱۰۰٪ قابل تأیید ارائه داد.

ریاضی‌دان، بوریس الکسیف<sup>۵</sup> اظهار داشت که این قضیه، مورد علاقه او در میان سه قضیه‌ای است که هوش مصنوعی تولید کرده است.



مسئله شماره ۱۲۴ اردوش، که در مقاله‌ای با عنوان Com-plete sequences of sets of integer powers در مجله Acta Arithmetica «در دنباله‌های کامل مجموعه‌هایی از توان‌های صحیح» در مطرح شده بود، سی سال بود که حل نشده باقی مانده بود. مسئله شماره ۱۲۴ به شرح زیر است:

فرض کنید  $k$  عدد طبیعی  $d_i \geq 2$  برای  $i = 1, 2, \dots, k$  داده شده‌اند. اگر شرط

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{(d_i - 1)} \geq 1,$$

برقرار باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی  $m$  همواره ضرایب صحیح نامنفی  $a_i$  (به‌ازای هر  $i$ ) وجود دارند به‌طوری‌که:  $n = \sum_{i=1}^k a_i$  علاوه بر این، هر یک از  $a_i$ ها در سامانه‌ی نمایش اعداد (ارقام) بر مبنای  $d_i$  فقط می‌توانند مقادیری از مجموعه  $\{0, 1\}$  باشند. به بیان دقیق‌تر، برای هر  $i$  عدد  $a_i$  در بسط بر مبنای  $d_i$  فقط از ارقام ۰ و ۱ تشکیل شده است.

```

theorem erdos_124 (k : ℕ) (d : Fin k → ℕ) (d1 : 2 ≤ d 1) → 1 ≤ ∑ i : Fin k, (1 : ℚ) / (d i - 1) → ∃ f : Fin k → ℕ, (∑ i : Fin k, f i) = 1
  /-
  26 An algebraic inequality derived from the use of Descartes' combinatorial theory based on the fact
  27 from the result is:
  28
  29
  30
  31
  32
  33
  34
  35
  36
  37
  38
  39
  40
  41
  42
  -/
  
```

مترجم در این عکس منظور از  $Fin\ k$  که مخفف کلمه متناهی است، مجموعه  $k$  عضوی است.

جمعیتی من این است که ارسطو یک «نسخه» از این مسئله را حل کرده است (در واقع یا برهانی به سبک مسائل العیاضی)، اما نه «نسخه‌ی مورد نظر».

نتیجه‌ی من این است که مسئله در یکی از صورت‌بندی‌های آن حل شده است (که در واقع از نوعی روش اثبات به سبک رقیب‌های ریاضی استفاده می‌کند)، اما این نسخه از مسئله حل نشده است.

من موافقم که مسئله [BEG1۹۶] همچنان (در حال حاضر) باز است و طرح شما برای بازنگاه‌اش این مسئله از طریق تغییر بیان آن، معقول است. به‌طور جایگزین، می‌توان مسئله دیگری را ابداع کرد و میان آن‌ها پیوند برقرار کرد. در این خصوص، ترجیحی ندارم.

من موافقم که مسئله [BEG1۹۶] در حال حاضر (فعلاً) حل نشده باقی مانده است و شما قصد دارید با اصلاح صورت مسئله، آن را بازنگاه کنید. به‌طور جایگزین، می‌توان مسئله دیگری افزود و آن‌ها را به یکدیگر مرتبط ساخت.

فرض کنید  $d_1 < d_2 < \dots < d_k \leq 3$  اعداد صحیح باشند، به طوری‌که

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \frac{1}{d_i - 1} \geq 1$$

آیا تمام اعداد صحیح به اندازه کافی بزرگ را می‌توان به شکل مجموع  $\sum_i c_i a_i$  نوشت که در آن  $c_i \in \{0, 1\}$  و هر  $a_i$  در مبنای  $d_i$  تنها دارای ارقام ۰ و ۱ باشد؟

لازم به یادآوری است که مسئله ۱۲۴ در واقع در دو صورت‌بندی متمایز توسط پال اردوش مطرح شده است. آنچه هوش مصنوعی ارسطو اخیراً به آن دست یافته، حل صورت ساده‌شده (و از حیث ساختاری متعادل‌تر) این مسئله است، درحالی‌که صورت‌بندی کامل‌تر

به‌عبارت ساده، این مسئله به‌طور اساسی می‌پرسد: آیا تحت محدودیت‌های شدید، هر عدد به اندازه کافی بزرگی می‌تواند همیشه به‌صورت «باینری» و بدون تأثیر گرفتن از پایه (مبنا) نمایش داده



## هوش مصنوعی در حال برداشت «میوه‌های در دسترس ریاضیات» است.

ترنس تائو معتقد است: هوش مصنوعی در حال برداشت «میوه‌های در دسترس»<sup>۷</sup> در ریاضیات است. ترنس تائو در Mathstodon با اشاره به سال‌ها تجربه خود، واقعیت کنونی را این‌گونه تشریح کرد: وضعیت حاکم بر مسائل حل‌نشده ریاضی از یک «توزیع دم‌بلند»<sup>۸</sup> پیروی می‌کند، و اتوماسیون مبتنی بر هوش مصنوعی عمدتاً در انتهای بسیار کوتاه و در دسترس این دم‌بلند متمرکز شده است.



تعداد زیادی از مسائل وجود دارند که در واقع اثبات یا رد آنها نسبتاً آسان است، اما به دلیل محدودیت تعداد ریاضی‌دانان متخصصی که عملاً می‌توانند وقت خود را به تحقیق اختصاص دهند، این مسائل کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. به بیان دیگر، درون این «دم» دراز، در واقع انبوهی از «میوه‌های در دسترس» پنهان شده‌اند که هوش مصنوعی اکنون در آستانه چیدن آنهاست.

بی‌تردید، اگر راهی برای حل خودکار این مسائل در مقیاس انبوه یافت شود، احتمالاً حجم قابل‌توجهی از نتایج ریاضی جدید تولید

و عمومی‌تر آن، کماکان به عنوان یک چالش باز در نظریه‌ی اعداد و ترکیبیات باقی مانده است.

اگرچه زمان حل مسئله توسط ارسطو بالغ بر ۶ ساعت شد و سیستم Lean همان برهان را در کمتر از ۱ دقیقه تأیید کرد، مدیر وب‌سایت مسائل اردوش، اعلام کرد که عملکرد ارسطو تحسین‌برانگیزترین دستاورد در این زمینه بوده است!



## شکست مدل‌های بزرگ زبان و نقص فنی توصیف مسئله

هم ChatGPT و هم Gemini در حل این مسئله شکست خوردند. ترنس تائو در این باره اظهار داشت: «تا آنجا که من می‌دانم، ابزارهای تحقیقاتی عمیق جیمینای و چت‌جی‌پی‌تی هیچ مقاله جدید و ارزشمندی در مورد این مسئله نیافته‌اند.»

جیمینای یک مشاهده ساده ارائه داد: اگر عدد ۱ از مجموعه مینا حذف شود، آنگاه شرط ب.م.م (بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک) برای تحقق تساوی به یک شرط لازم تبدیل می‌شود؛ این سامانه سپس شرط  $\sum_i \frac{1}{(d_i-1)} \geq 1$  را توضیح داده و آن را به تحقیقاتی موازی در حوزه‌ی مجموعه‌های کانتور به ویژه لم «شکاف نیوهاوس»<sup>۶</sup> مرتبط ساخت. با این حال، نتوانست مقالات جدیدی را که مستقیماً به این مسئله پرداخته باشند، بیابد.

از سوی دیگر، چت‌جی‌پی‌تی عمدتاً بر همان صفحه‌ی وب اولیه به عنوان منبع اصلی و معتبر تکیه کرد و به ارائه‌ی خلاصه‌ای از برهان ارسطو، سایر مقالات ارجاع‌شده در آن صفحه و نیز صفحات مسائل مرتبط بسنده کرد. نتیجه آن که اطلاعات جدید مستقلاً به دست نیامد، اما به‌طور حتم، خلاصه‌ها و ارتباط‌های تولیدشده توسط این هوش‌های مصنوعی برای خوانندگان جالب توجه خواهد بود.

خواهد شد.

ریاضی‌دانانی که روی این مسائل تحقیق می‌کنند، هم‌اکنون به صورت عملی از ترکیب ابزارهای هوش مصنوعی و دستیاران اثبات صوری استفاده می‌کنند.

برخی از آنان اثبات‌های موجود را در Lean تأیید می‌کنند، برخی تولید عبارات‌های مرتبط با این مسائل در دنباله‌های اعداد صحیح را بر عهده می‌گیرند و برخی دیگر به پر کردن گام‌های اثبات مفقوده در یک ایده از پیش موجود می‌پردازند. اخیراً نوع دیگری از «میوه‌های در دسترس» در محدوده ابزارهای خودکار کشف شده است. مسائلی که به دلیل ایرادات فنی در بیان، به‌طور غیرمنتظره‌ای حلشان آسان شده است.

مسئله ۱۲۴ اردوش نمونه‌ی شاخصی است. نسخه‌ی کامل این مسئله تا حدی دشوار است و در سه مقاله از اردوش ظاهر شده است. با این حال، یک فرض کلیدی در دو مورد از آنها حذف شده بود، و همین امر باعث شد که این نسخه در واقع نتیجه مستقیمی از معیار براون باشد. هیچ‌کس متوجه این موضوع نشد تا زمانی که بوریس آلکسیف مسئله را به ارسطو سپرد. به‌طور غیرمنتظره، هوش مصنوعی به‌صورت مستقل در عرض چند ساعت خلأ موجود را یافت و اثبات صوری را در سامانه Lean تکمیل کرد. مشاهده می‌شود که هوش مصنوعی در حال روشن کردن «جنگل تاریک» ریاضیات است. همان‌طور که ترنس تائو گفته است: «ابزارهای خودکار ابتدا ساده‌ترین مسائل را پاکسازی می‌کنند، بخش واقعاً دشوار را جدا می‌سازند و به ریاضی‌دانان انسانی اجازه می‌دهند انرژی خود را بر چیزهای ارزشمند متمرکز کنند.»

\* این مقاله از حساب کاربری عمومی «New Intelligence Yuan» در وی‌چت است. نویسنده آن New Intelligence Yuan و ویراستار آن Taozi است. این مطلب در این لینک منتشر شده است.

[1] <https://www.erdosproblems.com/forum/thread/124post-1892>

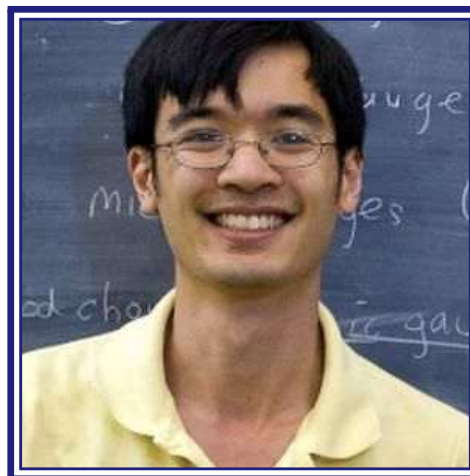
[2] <https://x.com/SebastienBubeck/status/1994946303546331508?s=20>

[3] <https://mathstodon.xyz/@tao/115639983683442577>

[4] <https://x.com/thomasfbloom/status/1995094668879462466?s=2036Kr>

\*\* دانشگاه یزد

«پروژه‌ی نظریه‌های معادلاتی» سال گذشته برای ترنس تائو نمونه‌ای عینی از این اصل بود. در این پروژه، آنان با حجمی عظیم متشکل از ۲۲ میلیون امکان استلزام در حوزه جبر جهانی روبرو بودند. فرآیندی که حل دستی آن توسط انسان، بدون شک به زمانی بسیار طولانی نیاز داشت. با به‌کارگیری یک روش خودکارسازی نظام‌مند و نسبتاً ساده موفق شدند بخش عمده‌ای از این احتمالات را تنها در چند روز پیمایش و تحلیل کنند.



سپس، آن‌ها از روش‌های پیچیده‌تر برای مقابله با دشواری‌های سرسختی که در دوره‌های قبلی حل نشده باقی مانده بودند، استفاده کردند. در نهایت، حل تعداد اندکی از مسائل به‌خصوص سخت باقیمانده، چندین ماه زمان از ریاضی‌دانان انسانی گرفت.

وضعیت کنونی پایگاه مسائل اردوش: در حال حاضر، پایگاه اینترنتی مسائل اردوش ۱۱۰۸ مسئله را ثبت کرده است که هر کدام حداقل در یکی از مقالات اردوش ظاهر شده‌اند. این مسائل طیفی را تشکیل می‌دهند:

- مسائل مشهور دشوار: مانند مسئله شناخته‌شده E3.
- انبوهی از مسائل گمنام: تعداد زیادی مسئله کم‌شناخته‌تر و کم‌توجه‌دیده‌شده نیز وجود دارد که حتی خود اردوش نیز هرگز به سراغ بازبینی آن‌ها نرفت.

هوش مصنوعی و «معماهای از پیش حل شده»: در هفته‌های اخیر، نزدیک به ده برچسب «حل نشده» روی این پایگاه ناگهان حذف شدند. همه این موارد از طریق جستجوی ادبیات با کمک هوش مصنوعی کشف شدند. در واقع، این مسائل پیش‌تر توسط دیگران حل شده بودند، اما راه‌حل آن‌ها در جامعه ریاضیات یا این فهرست خاص ناشناخته مانده بود.