

## کالیگاری<sup>\*</sup>، دیمیتروف<sup>†</sup> و تنگ<sup>‡</sup> جایزه فرانک نلسون کول<sup>§</sup> در نظریه اعداد ۲۰۲۶ را دریافت می کنند<sup>\*</sup>

ترجمه و تنظیم: حسن دقیق<sup>\*\*</sup>



از راست: تنگ، دیمیتروف و کالیگاری

یک زیرگروه هم‌نهشتی باشد، یعنی گاما شامل هسته‌ی هم‌ریختی  $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}})$  برای یک  $N \geq 1$  باشد و  $f$  یک فرم پیمانه‌ای برای  $\Gamma$  باشد، آنگاه نظریه‌ی عملگرهای هکه نتیجه می‌دهد که مخرج‌های ضرایب فوریه  $f$  کراندار هستند. چیزی که از اوایل قرن بیستم معلوم بوده است.

برای زیرگروه‌های غیرهم‌نهشتی نظریه‌ای مشابه نظریه هکه در دسترس نیست و لذا حساب فرم‌های پیمانه‌ای آن ناشناخته‌تر است. حدس مخرج‌های بی‌کران پیش‌بینی می‌کند که برای زیرگروه غیرهم‌نهشتی  $\Gamma$  اگر  $f$  یک فرم پیمانه‌ای برای  $\Gamma$  باشد که فرم پیمانه‌ای برای هیچ زیرگروه هم‌نهشتی نیست، آنگاه مخرج‌های ضرایب  $f$  بی‌کران هستند. این حدس از سال ۱۹۶۸ مطرح بوده است، اما تنها حالات بسیار خاصی از آن پیش‌تر اثبات شده بودند، مانند حالاتی که در نظریه‌ی میدان‌های هم‌مدیس مهم هستند. مقاله‌ی راهگشای کالیگاری، دیمیتروف و تنگ مسئله این حدس را به صورت کامل و به شکلی تعمیم یافته حل می‌کند، و ابزاری ارائه می‌دهد که هم به طور کلاسیک الهام بخش و هم بسیار بدیع است.

نویسندگان، معادلات دیفرانسیلی را که فرم‌های پیمانه‌ای در آن صدق می‌کنند به همراه آنالیز مختلط به کار می‌گیرند تا کران‌هایی برای هولونومی بسازند تا بُعد فضاهای فرم‌های پیمانه‌ای با ضرایب فوریه دارای مخرج‌های کران‌دار را کنترل کنند.

آنان سپس از نظریه‌ی گروه‌ها استفاده می‌کنند تا نشان دهند

انجمن ریاضی آمریکا فرانک کالیگاری (دانشگاه شیکاگو)، وسلین دیمیتروف (انستیتو فناوری کالیفرنیا) و یون چینگ تنگ (دانشگاه کالیفرنیا، برکلی) را به عنوان دریافت‌کنندگان جایزه فرانک نلسون کول در نظریه‌ی اعداد سال ۲۰۲۶، برای مقاله نوآورانه «حدس مخرج‌های بی‌کران<sup>۱</sup>» که در مجله انجمن ریاضی آمریکا چاپ کرده‌اند، تعیین نموده است.

بر اساس تارنمای جایزه، این مقاله یک «اثبات بدیع و برجسته» برای پاسخ به حدسی است که از سال ۱۹۶۸ پابرجا بوده است. کار این نویسندگان نشان می‌دهد که مخرج‌های ضرایب هر فرم پیمانه‌ای مدولار غیرهم‌نهشت بیکران هستند. این به سوالی پاسخ می‌دهد که بیش از نیم قرن باز باقی مانده بود.

### از تارنمای جایزه

جایزه سال ۲۰۲۶ فرانک نلسون کول در نظریه‌ی اعداد به فرانک کالیگاری، وسلین دیمیتروف و یون چینگ تنگ برای مقاله‌ی آنان با عنوان «حدس مخرج‌های بی‌کران» اهدا می‌شود. این مقاله که دارای نوآوری برجسته‌ای است تکنیک‌هایی از نظریه‌ی اعداد، آنالیز مختلط، معادلات دیفرانسیل و نظریه‌ی گروه‌ها را ترکیب می‌کند تا یک حدس سال ۱۹۶۸ را درباره فرم‌های پیمانه‌ای  $f$  با وزن صحیح برای یک زیرگروه  $\Gamma$  با اندیس متناهی از  $SL_2(\mathbb{Z})$  حل نماید. اگر  $\Gamma$

<sup>\*</sup>Frank Calegari    <sup>†</sup>Vesselin Dimitrov    <sup>‡</sup>Yunqing Tang    <sup>§</sup> Frank Nelson Cole Prize    <sup>1</sup>The unbounded denominators conjecture

## درباره فرانک کالیگاری

فرانک کالیگاری در ملیورن استرالیا متولد شد و کارشناسی علوم خود را با درجه‌ی عالی از دانشگاه ملیورن و دکترای خود را از دانشگاه کالیفرنیا برکلی تحت راهنمایی کن ریبیت دریافت کرد. بعد از یک دوره‌ی پسادکتر در هاروارد استاد دانشگاه نورث وست شد و سپس به دانشگاه شیکاگو منتقل شد، جایی که در حال حاضر عضو هیئت علمی است. او در یک دوره‌ی پنج ساله همکار انستیتوی آمریکایی ریاضی و بورسیه سلون بود در سال ۲۰۱۳ به‌عنوان عضو انجمن ریاضی آمریکا انتخاب شد و در سال ۲۰۲۵ به عضویت آکادمی هنر و علوم آمریکا درآمد. در سال ۲۰۲۲ او سخنران ویژه در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی دانان به‌صورت مجازی بود و به‌همراه وسلین دیمیتروف و یون چینگ تنگ برای سخنرانی در بخش نظریه‌ی اعداد این کنگره در سال ۲۰۲۶ در فیلادلفیا دعوت شده است.

## درباره وسلین دیمیتروف

وسلین دیمیتروف در صوفیه بلغارستان متولد شد و مدرک کارشناسی هنر خود را از کالج هاروارد و دکترای خود را از دانشگاه بیل تحت راهنمایی الکساندر گنجارف دریافت کرد. پس از پیوستن به مؤسسه فناوری جورجیا، دوره‌های پسادکتری را در مؤسسه مطالعات پیشرفته (دو بار)، دانشگاه کمبریج و دانشگاه تورنتو گذراند. در نهایت به‌عنوان عضو هیئت علمی به مؤسسه فناوری کالیفرنیا پیوست. او به‌همراه فرانک الگاری و یون چینگ تنگ در بخش نظریه‌ی اعداد کنگره بین‌المللی ریاضی دانان در سال ۲۰۲۶ سخنرانی خواهد کرد.

## درباره یون چینگ تنگ

یون چینگ تنگ، دانشیار دانشگاه کالیفرنیا برکلی است. او در سال ۲۰۲۲ به دانشگاه برکلی پیوست. او کارشناسی خود را در سال ۲۰۱۱ از دانشگاه هاروارد تحت راهنمایی مارک کیسین دریافت کرد. او همچنین همکاری موقت با مؤسسه‌ی مطالعات پیشرفته دانشگاه پرینستون داشته و همچنین در مرکز ملی پژوهش‌های علمی فرانسه دانشگاه ساکلی پاریس و کلتک کار کرده است. تنگ جایزه رامونوجان ساسترا، یک فلووشپ تحقیقاتی اسلون و جایزه تحقیقاتی مایکروسافت (AWM) را دریافت کرده است. او به‌همراه فرانک کالیگاری و وسلین دیمیتروف برای سخنرانی در بخش نظریه‌ی اعداد کنگره بین‌المللی ریاضی دانان ۲۰۲۶ دعوت شده است.

که یک مثال نقض برای حدس مخرج‌های بی کران، آنقدر مثال‌های نقض به‌دست خواهد داد که کران به‌دست آمده برای این ابعاد را نقض کند. انتظار می‌رود روش‌های این نویسندگان به پیشرفت‌هایی در هندسه حسابی و از جمله مطالعه تناوب‌ها و مقادیر خاص تابع  $L$ -ها بیانجامد.

## پاسخ فرانک کالیگاری

من بی‌اندازه از دریافت این جایزه سپاسگزارم. مسیر حرفه‌ای من وام‌دار مربیان و راهنمایان بسیار و همکاران برجسته‌ای (از جمله هم‌راهم در دریافت این جایزه مشترک) است که خوش‌شانسی همکاری با آنان را در طول سالین داشتم. من از همه آنان ممنونم. همچنین از همسر من جنیفر و دخترم لیلی به‌خاطر عشق و حمایت آنان تشکر می‌کنم.

## پاسخ وسلین دیمیتروف

از اینکه می‌بینم این اثر حدس مخرج‌های بی کران مورد توجه‌ی جایزه کول قرار گرفته است، خوشحال و سپاسگزارم. ابتدا و بیش از همه از همکارانم در این جایزه‌ی مشترک برای ساعات بی‌شمار گفت‌وگو و پروژه‌ی گسترده‌تری که به‌ویژه منجر به این مقاله شد و همچنین از مؤسسه‌ی مطالعات پیشرفته پرینستون جایی که اقامت من به‌عنوان یک محقق پسادکتری در سال ۲۰۱۸ این همکاری را میسر کرد، تشکر می‌نمایم.

## پاسخ یون چینگ تنگ

از دریافت این جایزه مشترک به‌همراه فرانک کالیگاری و وسلین دیمیتروف بسیار سربلند و سپاسگزارم. کار کردن با همکاران برجسته‌ام، فرانکلین و وسلین تجربه‌ای فوق‌العاده برای من بوده است. همچنین خیلی خوش‌شانس بوده‌ام که چندین مربی بی‌نظیر و همکاران بزرگ دیگری داشته باشم. صمیمانه قدردان همه‌ی آنان به خاطر ریاضیات و دوستی‌هایشان هستم. کارهای آندره، بوست، چارلز و دیگران در زمینه‌ی قضایای جبری‌سازی حسابی الهام‌بخش پژوهش ما بوده است. بابت ریاضیات زیبایی که از آنها آموخته‌ام، سپاسگزارم.

## درباره جایزه

جایزه فرانک نلسون کول به افتخار بازنشستگی پروفیسور فرانک نلسون کول از انجمن ریاضی آمریکا، بنیانگذاری شد. او به مدت ۲۵ سال به عنوان دبیر انجمن ریاضی آمریکا و ۲۱ سال به عنوان سردبیر بولتن انجمن خدمت کرد. اعتبار اولیه جایزه توسط پروفیسور کول، از محل پولی که هنگام بازنشستگی دریافت کرد، اهدا شد و با کمک اعضای انجمن افزایش یافت. این اعتبار بعداً توسط پسرش چارلز کول دو برابر شد و اعضای خانواده نیز از آن حمایت کردند. همچنین کمک‌هایی از سوی جورج لاستیگ و یک اهدا کننده‌ی ناشناس به آن افزوده شد. مبلغ فعلی این جایزه ۵۰۰۰ دلار آمریکاست و هر سه سال یک بار اهدا می‌شود.

## توضیحات مترجم در مورد فرم‌های مدولار

یک فرم پیمانه‌ای نوع ویژه‌ای از تابع تحلیلی روی نیم صفحه‌ی بالایی مختلط

$$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\},$$

است که تحت عمل گروه پیمانه‌ای

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\},$$

به شکل بسیار متقارنی رفتار می‌کند.

به طور دقیق تر، برای یک عدد صحیح  $k$  (که وزن نامیده می‌شود)،

یک فرم پیمانه‌ای از وزن  $k$  سه شرط زیر را برآورده می‌کند:

۱. شرط پیمانه‌ای:

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

۲. هولومورف بودن:  $f$  روی  $\mathcal{H}$  هولومورف است.

۳. هولومورف بودن در بینهایت:  $f$  یک بسط فوریه به فرم زیر

دارد:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

(یعنی هیچ جمله‌ای با توان منفی  $q$  وجود ندارد؛ به بیان دیگر، وقتی  $\text{Im}(\tau) \rightarrow 0$  تابع قطب ندارد.)

فرض کنید  $N$  یک عدد صحیح مثبت باشد. زیرگروه هم‌نهشتی اصلی سطح  $N$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{array}{l} a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}, \\ b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \end{array} \right\}.$$

این گروه را گروه پیمانه‌ای سطح  $N$  یا گروه تابع‌نمای اصلی می‌نامند.

فرض کنیم  $\Gamma$  یک زیرگروه هم‌نهشتی شامل  $\Gamma(N)$  و  $f$  یک فرم مدولار برای  $\Gamma$  باشد. در این صورت  $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$  و

بنابراین  $f(\tau + N) = f(\tau)$ . از این تناوب و هولومورفیک بودن  $f$  در بی‌نهایت، نتیجه می‌شود  $f$  در همسایگی بی‌نهایت دارای سری فوریه‌ای به شکل  $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$  است که  $q = e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}$ .

این سه ریاضی‌دان ثابت کرده‌اند که اگر  $f \in \mathbb{Q}[[q]]$  یک فرم مدولار برای  $\Gamma$  باشد، که در آن  $\Gamma$  یک زیر گروه هم‌نهشتی نیست، آنگاه مخرج ضرایب فوریه فوق بی‌کران است.

† Calegari, Dimitrov, and Tang to Receive 2026 AMS Frank Nelson Cole Prize for Number Theory, News from the AMS, November 03, 2025.

\*\* دانشگاه کاشان