

چکیده مبسوط مقالات

# پنجاه و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران

۲۶-۲۴ مرداد ماه  
دانشگاه فردوسی مشهد

55th Annual Iranian Mathematics Conference  
14-16 August, 2024  
Ferdowsi University of Mashhad, Iran

55th



03240-74315

چکیده مبسوط سخنرانی ها

پنجاه و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران

۲۴-۲۶ مرداد ماه ۱۴۰۳  
دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مطالب

۳	نمایه نویسندگان
۱	سخنرانان مدعو
۷	آنالیز ریاضی
۴۵	آمار و احتمال
۵۵	آموزش ریاضی
۷۱	تحقیق در عملیات
۸۱	جبر
۸۷	جبر خطی عددی
۹۶	حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال
۱۱۱	ریاضیات مالی
۱۱۶	علوم کامپیوتر
۱۲۷	کدگذاری و رمزنگاری
۱۴۵	کنترل و بیهنه سازی
۱۵۰	گراف و ترکیبیات
۱۷۷	معادلات و سیستم های دینامیکی

## نمایه نویسندگان

- آقایی، مهدی، ۱۸۳  
 احمدی دستجردی، داود، ۱۸۳  
 الیاسی، نیره، ۱۱۷  
 امامی، مؤگان، ۱۵۹  
 امین طوسی، محمود، ۱۵۱  
 ایرانمیش، علی، ۸۲  
 ایواز، کریم، ۱۷۸  
 بهمنی، ابوالفضل، ۱۵۹  
 ترابی، حمید، ۱۷۳  
 توسلی بنایی، نغمه، ۱۳۳  
 جدائی، آرش، ۱۴۶  
 جعفری، فاطمه، ۱۲۸  
 خجسته سالکویه، داود، ۸۸  
 خجسته سالکویه، داود، ۲  
 درخوشی، قادر، ۱۷۸  
 دستوری، کاوه، ۸۲  
 رئیسی، الهه، ۱۳۳  
 رحمتی، فرهاد، ۱۳۳  
 سالاری، فرزانه، ۱۲۱  
 سجادمش، مجتبی، ۱۰۲  
 سعیدی، زهرا، ۱۴۱  
 شیخ برادران، فهیمه، ۱۶۳  
 صالحیان متی کلایی، بهزاد، ۱۵۵  
 صدیق بهزادی، شادان، ۹۷  
 ضابطزاده، سید محمود، ۱۰۶  
 طاهرخانی، علی، ۱۶۳  
 عبادپور گلنبر، جواد، ۲۴  
 عرفانیان، احمد، ۱۶۷  
 عیسی لوی اصل، عاطفه، ۱۳۷  
 مدرسی، نویده، ۱۱۲  
 مشهدی، سمانه، ۱۴۱  
 میرزاوزیری، مجید، ۱۶۷  
 ناصریان، عذرا، ۱۵۹  
 نصیری، قربانعلی، ۱۶۷  
 نظامی، عطیه، ۹۲  
 نظری، علی محمد، ۹۲  
 نوروزی، مهناز، ۱۳۷  
 نیکنام، محمدرضا، ۱۴۶  
 هادیان دهکردی، مسعود، ۱۲۸  
 کعبی نژاد، پرستو، ۷۲  
 کوکبی، مجید، ۱۷۳  
 گروه‌ای، فاطمه، ۹۷  
 یحیوی، پارسا، ۱۱۲  
 اسدی پور، میثم، ۳۴  
 اکبری توتکابنی، محمد، ۲۸  
 بیشه نیاسر، مرتضی، ۱۲، ۲۰  
 دادی پور، فرزاد، ۴۱  
 راهدار، سحر، ۷۷  
 رضایی، حمید، ۳۴  
 رضوانی فرد، فائزه، ۶۱  
 شمس، مهدی، ۴۶  
 مسعودی، محسن، ۲  
 موحدنیا، احسان، ۵۶  
 مکاری، ماندانا، ۸، ۱۶  
 پورمحمدباقر، لطیفه، ۶۶  
 کامل میرمصطفائی، سیدمحمدتقی، ۵۰  
 اشتها، سارا، ۵۶  
 ایزدی نیا، حسین، ۵۶  
 حجتی، نادر، ۴۱  
 خضیراوی، سعیده، ۱۲، ۲۰  
 رادمهر، فرزاد، ۶۱  
 رحیمی ده‌چراغی، امید، ۵۰  
 رفیع پور، ابوالفضل، ۶۱  
 قربانی مقدم، خاطره، ۷۷  
 قنبری، رضا، ۷۷  
 مختاری، امیرحسین، ۳۸  
 نصیری، جلال الدین، ۶  
 گودرزی، هانیه، ۲۸

# سخنرانان مدعو

## روش‌های تکراری شکافت نیمه‌معین مثبت / نیمه‌معین مثبت برای حل دستگاه معادلات خطی

داود خجسته سالکویه<sup>۱\*</sup> و محسن مسعودی<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان  
 khojasteh@guilan.ac.ir, masoudi\_mohsen@phd.guilan.ac.ir

چکیده. در این سخنرانی، ابتدا تاریخچه‌ای از روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی را مرور می‌کنیم. سپس روی روش تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی‌کج تمرکز کرده و به‌نوعی این روش را تعمیم داده و روش تکراری شکافت نیمه‌معین مثبت / نیمه‌معین مثبت را ارائه می‌دهیم. این روش برای دستگاه‌هایی که ماتریس ضرائب آنها معین مثبت غیرهرمیتی هستند، قابل استفاده است. روش ارائه‌شده با کمک یک شکافت از ماتریس ضرائب به دو ماتریس نیمه‌معین مثبت و یک ماتریس معین مثبت هرمیتی به‌عنوان ماتریس انتقال، به‌دست می‌آید. شرایط همگرایی روش را بررسی کرده و پیش‌حالت‌ساز به‌دست‌آمده را مطالعه می‌کنیم.

۱. مقدمه

### دستگاه معادلات خطی

$$Au = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{C}^n, \quad (1.1)$$

را در نظر بگیرید که در آن ماتریس  $A$  از ابعاد بزرگ، تنگ، نامنفرد و معین مثبت غیرهرمیتی (ماتریس  $A + A^*$  معین مثبت هرمیتی) است. روش‌های تکراری زیادی وجود دارند که می‌توان از آنها برای حل دستگاه (۱.۱) استفاده کرد، اما همگرایی آنها تضمین شده نیست. در سال ۲۰۰۳، بای و همکارانش در [۲] روش تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی‌کج (HSS)

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 65F10, 65F50.

واژگان کلیدی. دستگاه معادلات خطی، روش تکراری، پیش‌حالت‌ساز، معین مثبت، همگرایی.  
\* سخنران

را برای حل دستگاه (۱.۱) ارائه کردند که بدون هیچ شرطی همگراست. روش تکراری HSS به طور خلاصه به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{cases} (\alpha I + H)u^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)u^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)u^{(k+1)} = (\alpha I - H)u^{(k+\frac{1}{2})} + b, \end{cases}$$

که در آن  $S = (A - A^*)/2$  و  $H = (A + A^*)/2$  به ترتیب بخش های هرمیتی و هرمیتی کج  $A$  هستند و  $\alpha > 0$ . این روش به سرعت مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفت و نسخه های مختلفی از آن را ارائه نمودند. برای مثال، بای و همکارانش در [۱]، شکافت معین مثبت و هرمیتی کج (PSS) و در [۳] روش شکافت نرمال و هرمیتی کج (NSS) را ارائه کردند. در [۴]، بنزی یک تعمیم از روش HSS با نام GHSS ارائه نمود. در این مقاله، روش تکراری شکافت نیمه معین مثبت / نیمه معین مثبت (PPS)<sup>۱</sup> را برای حل (۱.۱) ارائه می کنیم. روش تکراری PPS یک تعمیم از همه روش هایی است که پیش تر ذکر شد.

**نمادها:** برای هر ماتریس  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، از نمادهای  $\rho(A)$ ،  $\sigma(A)$ ،  $\mathcal{N}(A)$  و  $\varepsilon(A)$  به ترتیب برای فضای پوچ، طیف، شعاع طیفی و مجموعه همه بردارهای ویژه ماتریس  $A$  استفاده می کنیم. اگر  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  یک ماتریس معین مثبت هرمیتی و  $Q = U^*DU$  تجزیه شور ماتریس  $Q$  باشد، آنگاه  $Q^{\frac{1}{2}}$  را به صورت  $Q^{\frac{1}{2}} = U^*D^{\frac{1}{2}}U$  تعریف می کنیم.

## ۲. روش تکراری PPS

فرض کنید که ماتریس  $A$  دارای شکافتی به صورت

$$A = P_1 + P_2, \quad P_1, P_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \text{نیمه معین مثبت هستند} \quad (1.2)$$

باشد. در این صورت، می گوئیم ماتریس  $A$  دارای شکافت نیمه معین مثبت / نیمه معین مثبت است. اکنون، دو شکافت زیر را در نظر بگیرید

$$A = (Q + P_2) - (Q - P_1) = (Q + P_1) - (Q - P_2),$$

که در آن  $Q$  یک ماتریس معین مثبت هرمیتی دلخواه است. بدیهی است که هر دو ماتریس  $Q + P_1$  و  $Q + P_2$  نامنفرد هستند. اکنون، همانند روش HSS، روش تکراری زیر را می سازیم

$$\begin{cases} (Q + P_2)u^{(k+\frac{1}{2})} = (Q - P_1)u^{(k)} + b, \\ (Q + P_1)u^{(k+1)} = (Q - P_2)u^{(k+\frac{1}{2})} + b, \end{cases} \quad (2.2)$$

که در آن  $u^{(0)} \in \mathbb{C}^n$  یک حدس اولیه است. این روش را PPS می نامیم.

فرض کنید  $P_2$  یک ماتریس هرمیتی کج باشد و  $Q = \alpha I$ . در این صورت، اگر  $P_1$  معین مثبت هرمیتی (معین مثبت) باشد، روش PPS به روش HSS (PSS) تبدیل می شود. اگر  $P_1$  یک ماتریس نرمال ( $P_1 P_1^* = P_1^* P_1$ ) و معین مثبت باشد، روش PPS به روش NSS تبدیل می شود. همچنین، اگر ماتریس  $A$  به صورت  $A = H_1 + H_2 + S$  نوشته شود به طوری که ماتریس های  $H_1$  و  $H_2$  نیمه معین مثبت متقارن و ماتریس  $S$  هرمیتی کج هستند و قرار دهیم

<sup>1</sup>Positive semidefinite / Positive semidefinite Splitting (PPS)

روش‌های تکراری شکافت نیمه‌معین مثبت / نیمه‌معین مثبت برای حل دستگاه معادلات خطی

$P_1 = H_1$  و  $P_2 = H_2 + S$  آنگاه روش تکراری GHSS به دست می‌آید. بنابراین، روش PPS تعمیمی از روش‌های HSS، NSS، PSS، و GHSS است. با حذف  $u^{k+\frac{1}{2}}$  از (۲.۲) داریم

$$u^{k+1} = Gu^k + c,$$

که در آن

$$G = (Q + P_1)^{-1}(Q - P_2)(Q + P_2)^{-1}(Q - P_1),$$

و  $c = 2(Q + P_1)^{-1}Q(Q + P_2)^{-1}b$  می‌توان دید که  $A = M - N$ ، که در آن

$$M = \frac{1}{2}(Q + P_2)Q^{-1}(Q + P_1), \quad N = \frac{1}{2}(Q - P_2)Q^{-1}(Q - P_1),$$

و به علاوه  $G = M^{-1}N$ . نشان می‌دهیم که تحت شرایطی روش PPS همگراست، یعنی  $\rho(G) < 1$ . در این صورت، مقادیر ویژه ماتریس

$$M^{-1}A = I - G,$$

در درون دایره‌ای به مرکز  $(1, 0)$  و شعاع ۱ قرار دارند. بنابراین، می‌توان ماتریس  $M$  را به عنوان یک پیش‌حالت‌ساز برای دستگاه (۱.۱) به کار برد. در این صورت، یک روش تکراری مبتنی بر زیرفضای کرایلف، مانند الگوریتم GMRES، برای حل دستگاه معادلات خطی

$$M^{-1}Au = M^{-1}b,$$

سرعت مناسبی خواهد داشت. با توجه به اینکه ضریب  $\frac{1}{2}$  تأثیری در حالت دستگاه ندارد، می‌توان پیش‌حالت‌ساز PPS را به صورت

$$P := (Q + P_2)Q^{-1}(Q + P_1),$$

در نظر گرفت. فرض کنید  $(I - \hat{P}_1)(I - \hat{P}_2)(I + \hat{P}_2)^{-1}(I + \hat{P}_1)^{-1}$  که در آن به ازای  $i = 1, 2$ ،  $\hat{P}_i := Q^{-\frac{1}{2}}P_iQ^{-\frac{1}{2}}$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \sigma(Q^{-\frac{1}{2}}(I + \hat{P}_1)^{-1}(I - \hat{P}_2)(I + \hat{P}_2)^{-1}(I - \hat{P}_1)Q^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sigma(Q^{-\frac{1}{2}}(I + \hat{P}_1)^{-1}(I + \hat{P}_2)^{-1}(I - \hat{P}_2)(I - \hat{P}_1)Q^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sigma(Q^{-\frac{1}{2}}\hat{G}Q^{\frac{1}{2}}) = \sigma(\hat{G}). \end{aligned}$$

اکنون، می‌توانیم لم و قضایای زیر را ثابت کنیم.

**لم ۱.۲.** فرض کنید  $A$  یک ماتریس معین مثبت و دارای شکافتی به صورت (۱.۲) باشد. اگر  $(\lambda, x)$  یک زوج ویژه  $G$  باشد، آنگاه  $|\lambda| \leq 1$ . به علاوه، اگر  $x^*(P_1 + P_2^*)x > 0$ ، آنگاه  $|\lambda| < 1$ .

**قضیه ۲.۲.** فرض کنید ماتریس معین مثبت  $A$  دارای یک شکافت به شکل (۱.۲) باشد و

$$\begin{cases} m_1(x) := x^* \left( I + \hat{A}^* \hat{A} + \hat{P}_2 \hat{P}_1 + \hat{P}_1^* \hat{P}_2^* + \hat{P}_1^* \hat{P}_2^* \hat{P}_2 \hat{P}_1 \right) x, \\ m_2(x) := x^* \left( \hat{A} + \hat{A}^* + \hat{A}^* \hat{P}_2 \hat{P}_1 + \hat{P}_1^* \hat{P}_2^* \hat{A} \right) x, \end{cases}$$

د. خجسته سالکویه و م. مسعودی

که در آن  $\hat{A} = Q^{-\frac{1}{2}} A Q^{-\frac{1}{2}}$ . در این صورت، برای هر  $\hat{x} \in \varepsilon(\hat{G})$  خواهیم داشت

$$m_1(\hat{x}) \geq m_2(\hat{x}) \geq \epsilon, \quad m_1(\hat{x}) > \epsilon,$$

و

$$\rho(G) = \max_{\hat{x} \in \varepsilon(\hat{G})} \sqrt{\frac{m_1(\hat{x}) - m_2(\hat{x})}{m_1(\hat{x}) + m_2(\hat{x})}}.$$

بنابراین،  $\rho(G) < 1$  اگر و تنها اگر برای هر  $\hat{x} \in \varepsilon(\hat{G})$  داشته باشیم  $m_2(\hat{x}) > \epsilon$ .

**قضیه ۳.۲.** فرض کنید ماتریس  $A$  معین مثبت باشد که شکافتی به صورت (۱.۲) دارد. اگر  $\rho(G) < 1$ ، آنگاه  $\varepsilon(G) \subseteq \mathcal{N}(P_1) \cup \mathcal{N}(P_2 + P_2^*)$ .

**نتیجه ۴.۲.** فرض کنید ماتریس  $A$  معین مثبت باشد به طوری که شکافتی به صورت (۱.۲) دارد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه روش  $PPS$  به ازای هر ماتریس معین مثبت هرمیتی  $Q$  همگراست:

- ماتریس  $P_2$  هرمیتی کج باشد؛
- $\mathcal{N}(P_1) \cup \mathcal{N}(P_2 + P_2^*) = \mathbb{C}^n$ .

شکافت نیمه معین مثبت / نیمه معین مثبت برای یک ماتریس دلخواه، یکتا نیست. بنابراین، برای یک ماتریس دلخواه روش های تکراری  $PPS$  متنوعی می توان نوشت. در زمان ارائه سخنرانی، شیوه های مناسب انتخاب ماتریس های  $P_1$ ،  $P_2$ ، و ماتریس انتقال بیان می شود. همچنین، نتایج عددی برای نشان دادن کارایی پیش حالت ساز  $PPS$  ارائه خواهد شد. با ایده شکافت نیمه معین مثبت / نیمه معین مثبت، برای برخی از مسائل کاربردی می توان شکافتی را نوشت که توسط هیچکدام از روش های پیشین تولید نمی شوند، اما از کارایی بیشتری برخوردار است.

### ۳. قدردانی

این مقاله توسط بنیاد ملی علوم ایران (INSF) با شماره ۴۰۰۶۳۰۰ حمایت مالی می شود.

### مراجع

- [1] Z.-Z. Bai, G.H. Golub, L.-Z. Lu, and J.-F. Yin, *Block triangular and skew-Hermitian splitting methods for positive-definite linear systems*, SIAM J. Sci. Comput. 26 (2005), 844–863.
- [2] Z.-Z. Bai, G.H. Golub, and M.K. Ng, *Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24 (2003), 603–626.
- [3] Z.-Z. Bai, G.H. Golub, and M.K. Ng, *On successive-overrelaxation acceleration of the Hermitian and skew-Hermitian splitting iterations*, Numer. Linear Algebra Appl. 14 (2007), 319–335.
- [4] M. Benzi, *A Generalization of the Hermitian and Skew-Hermitian Splitting*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 31 (2009) 360–374.
- [5] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Press, New York, 1995.

## از زبان شناسی رایانشی تا هوش مصنوعی مولد: کاربردها و مشکلات

جلال الدین نصیری \*

گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

چکیده. در دهه‌های اخیر، پیشرفت‌های چشمگیری در حوزه‌های زیان‌شناسی رایانشی، پردازش زبان طبیعی و هوش مصنوعی مولد به وقوع پیوسته است. این سه زمینه تحقیقاتی، با وجود تفاوت‌های بنیادین ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند و هر یک به نحوی در توسعه و بهبود دیگری نقش داشته‌اند. در این سخنرانی به بررسی کاربردها و چالش‌های مرتبط با این حوزه‌ها خواهیم پرداخت. زیان‌شناسی رایانشی به مطالعه و مدل‌سازی زبان‌های انسانی با استفاده از روش‌های محاسباتی می‌پردازد زبان شناسی رایانشی بر ساختارهای زبانی، قوانین دستوری نظریه‌های زیان‌شناختی متمرکز است و سعی در مدل‌سازی دقیق‌تر و علمی‌تر زبان‌های انسانی دارد. پردازش زبان طبیعی (NLP) شاخه‌ای از هوش مصنوعی است که به تعامل بین کامپیوتر و زبان انسانی می‌پردازد این حوزه شامل وظایفی مانند درک، تفسیر و تولید زبان انسانی دارد. پردازش زبان طبیعی به طور مستقیم با توسعه الگوریتم‌ها و مدل‌هایی سر و کار دارد که قادر به تحلیل و تولید زبان انسانی هستند و در کاربردهایی مانند ترجمه ماشینی، تشخیص و تولید گفتار، تجزیه و تحلیل احساسات و بهبود موتورهای جستجو مورد استفاده قرار می‌گیرد. هوش مصنوعی مولد که شاخه‌ای از هوش مصنوعی است، بر ایجاد محتوای جدید نظیر متن، تصویر، موسیقی و حتی ویدیو تمرکز دارد. این حوزه با استفاده از تکنیک‌هایی مانند شبکه‌های عصبی مولد تخصصی (GANs) و مدل‌های زبانی بزرگ مثل (GPT) نتایجی با کیفیت بالا تولید کند که در بسیاری از موارد به خروجی‌های انسانی بسیار نزدیک است. کاربردهای هوش مصنوعی مولد شامل تولید محتوای خودکار، طراحی هنری، نوآوری در رسانه‌ها و حتی توسعه بازی‌های ویدیویی می‌باشد. هوش مصنوعی مولد و مدل‌های زبانی بزرگ (LLMs) کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف دارند هوش مصنوعی مولد برای تولید متن، تصویر، موسیقی، صدا و ویدیو استفاده می‌شود که در خلق آثار هنری تبلیغات بازی‌های ویدیویی و تولید محتواهای خلاقانه نقش دارد. مدل‌های زبانی بزرگ نیز در ترجمه ماشینی تحلیل و خلاصه‌سازی متون پاسخگویی به سوالات تکمیل و تصحیح متون تولید کد برنامه نویسی و تحلیل داده‌های متنی به کار می‌روند. این فناوری‌ها با بهبود تعاملات انسان و ماشین افزایش کارایی و دقت در پردازش زبان و تولید محتوا تأثیرات قابل توجهی در حوزه‌های مختلف ایجاد کرده‌اند. در این سخنرانی، به بررسی جزئیات این کاربردها و چالش‌ها خواهیم پرداخت. هدف از این بررسی، ارائه دیدگاهی جامع و چند جانبه نسبت به آینده زیان‌شناسی رایانشی، پردازش زبان طبیعی و هوش مصنوعی مولد است تا بتوان از این فناوری‌ها به نحو احسن بهره‌برداری نمود و مشکلات احتمالی را به حداقل رساند.

\* سخنران

# آنالیز ریاضی

## معرفی یک روش تکرار کم هزینه بر پایه حسابان کسری و بررسی پایداری آن

ماندانا مکاری<sup>1</sup> \*

<sup>1</sup> گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران  
 m\_mocari@yahoo.com

چکیده. در این مقاله بر پایه مشتق کسری کانفورمبل روش تکرار کسری فرناندو ارایه می‌شود. برای بررسی پایداری آن از صفحات همگرایی با حدس‌های اولیه حقیقی استفاده می‌شود. نشان داده می‌شود که با مقادیر اولیه حقیقی می‌توان همه ریشه‌ها را محاسبه کرد. همچنین حوزه‌های جذب با وضوح بالا، جزئیات دقیق و چشم نواز ترسیم می‌شود.

### ۱. پیش‌گفتار

حساب کسری سالیان زیادی است که به عنوان منبع مفیدی جهت حل معادلات غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های تکرار متفاوتی جهت یافتن ریشه‌های معادلات با استفاده از مشتق کسری کاپوتو و ریمن-لیوویل مدل شده‌اند، که برای آگاهی بیشتر می‌توان به منبع [۱] و منابع موجود در آن مراجعه کرد. در سال‌های اخیر نوع جدیدی از مشتق کسری به نام مشتق کانفورمبل توسط [۲] ارایه شده‌است. این مشتق کسری خیلی از ویژگی‌های مشتق کلاسیک را دارد. تابع  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  را که از نقطه  $a$  شروع می‌شود، در نظر می‌گیریم. مشتق چپ کانفورمبل تابع  $f$  از مرتبه  $\alpha \in (0, 1]$  که  $\alpha, a, x \in \mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(T_{\alpha}^a f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}.$$

اگر این حد وجود داشته باشد، آنگاه تابع  $f$   $\alpha$ -مشتق‌پذیر گفته می‌شود. در ضمن مشتق کانفورمبل را به صورت  $(T_{\alpha}^a f)(x) = (x-a)^{1-\alpha} f'(x)$  نیز می‌توان نشان داد. در این

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 65F10; Secondary 26A33, 54A20.

واژگان کلیدی. مشتق کسری کانفورمبل، صفحات همگرایی، پایداری.  
 \* سخنران

مقاله روش تکرار فرناندو برحسب مشتق کانفورمبل ارایه می‌شود. ثابت می‌شود که مرتبه همگرایی آن مشابه حالت کلاسیک ۳ هست. پایداری آن با استفاده از صفحات همگرایی و حوزه‌های جذب برحسب مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a$  بررسی می‌شود. به‌علاوه، مولف به شیوه‌ای جدید نسبت به مقالاتی که قبلاً ارایه شده‌است، بهترین شرایط همگرایی را بدست می‌آورد.

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش با توجه به بسط تیلور کانفورمبل تابع  $f$ ، مشابه مرجع [۱] روش تکراری فرناندو بر پایه مشتق کسری کانفورمبل ارایه و سپس مرتبه همگرایی آن محاسبه می‌شود.

**قضیه ۱.۲.** فرض کنیم که  $f$  تابعی حقیقی پیوسته روی بازه  $I \subseteq \mathbb{R}$  باشد، که این بازه شامل  $\bar{x}$  ریشه  $f(x)$  است. همچنین  $(T_\alpha^a f)(x)$  مشتق کسری کانفورمبل  $f(x)$  از مرتبه  $\alpha \in (0, 1]$  است که از  $a$  شروع می‌شود. فرض کنیم  $(T_\alpha^a f)(x)$  پیوسته باشد و در  $\bar{x}$  صفر نباشد. همچنین  $x_0$  را یک حدس اولیه نزدیک  $\bar{x}$  در نظر می‌گیریم، آنگاه مرتبه همگرایی روش فرناندو کسری کانفورمبل از مرتبه  $\alpha \in (0, 1]$  که به صورت زیر نشان داده می‌شود حداقل ۳ است:

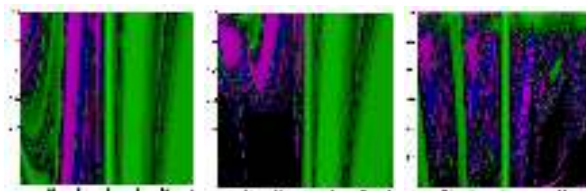
$$(1.2) \quad \begin{cases} y_k = a + \left( (x_k - a)^\alpha - \alpha \frac{f(x_k)}{(T_\alpha^a f)(x_k)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x_{k+1} = a + \left( (x_k - a)^\alpha - \alpha \frac{2f(x_k)}{(T_\alpha^a f)(x_k) + (T_\alpha^a f)(y_k)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

معادله خطا نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$e_{k+1} = \frac{1}{2} (2c_2^2 + c_3) (\alpha^2 (\bar{x} - a)^{2(\alpha-1)}) e_k^3 + O(e_k^4),$$

$$c_j = \frac{1}{j! \alpha^j} \frac{(T_\alpha^a f)^{(j)}(\bar{x})}{(T_\alpha^a f)(\bar{x})}, \quad j = 2, 3, \dots$$

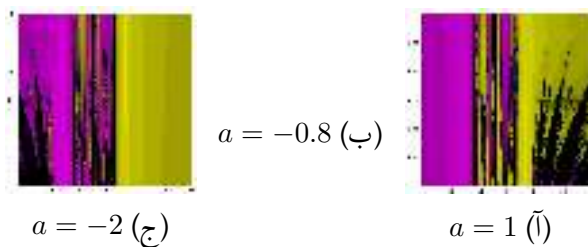
برهان. گام اول روش (۱.۲) همان روش نیوتن کانفورمبل است که در مرجع [۱] مرتبه دو همگرایی آن بدست آمده‌است. در ادامه می‌توان با استفاده از بسط تیلور کانفورمبل که در همان مرجع به آن اشاره شده‌است، مرتبه همگرایی ۳ را برای روش بدست آورد.  $\square$



(آ)  $a = 1$       (ب)  $a = -2$       (ج)  $a = -4$

شکل ۱. صفحات همگرایی تابع  $f(x)$  برای مقادیر متفاوت  $a$

یک روش تکرار کم هزینه برپایه حسابان کسری



شکل ۲. صفحات همگرایی تابع  $g(x)$  برای مقادیر متفاوت  $a$

### ۳. تحلیل پایداری

بررسی پایداری روش تکرار کسری ۱۰۲ با استفاده از صفحه‌های همگرایی و حوزه‌های جذب انجام می‌شود. برای تعاریف و قضایای مربوط به آن‌ها به مرجع [۳] مراجعه کنید. توابع

$$f(x) = 2x^{3/2} + x^{5/2} - 0.17x^2 - 0.3x + 3\sqrt{x} - 0.5,$$

$$g(x) = -x^4 - 1.65x^3 + 0.6x + 0.3,$$

طوری انتخاب شده‌است که هم ریشه‌های حقیقی و هم ریشه‌های مختلط داشته باشند. تعداد نقاط تقسیم  $400 \times 400$  برای رسم هر کدام از صفحات دینامیکی در نظر گرفته شده‌است. در حوزه‌های جذب،  $x$  ها روی محور افقی و  $y$  ها روی محور عمودی قرار دارد و همچنین برای صفحات همگرایی روی محور  $x$  حدس‌های اولیه حقیقی در بازه  $-3 \leq x \leq 3$  و روی محور  $y$  ها مقادیر  $\alpha \in (0, 1]$  قرار دارد. هر رنگ در صفحات همگرایی و حوزه‌های جذب مربوط به همگرایی به یکی از ریشه‌هاست. نقطه‌های قرمز در حوزه‌های جذب ریشه‌ها را نشان می‌دهند. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب صفحات همگرایی  $f(x)$  و  $g(x)$  را نشان می‌دهند که در آنها تاثیر انتخاب  $a$  را می‌توان بر همگرایی به ریشه‌ها مشاهده کرد. استفاده از  $a$  و انتخاب مناسب آن می‌تواند بهترین همگرایی به ریشه‌ها را نتیجه دهد. شکل‌های ۳ و ۴ نیز به ترتیب حوزه‌های جذب  $f(x)$  و  $g(x)$  هستند. قسمت‌های مشکی در همه تصاویر نشان دهنده نقاط واگرایی هستند.

جدول ۱. نتایج عددی روش تکرار کانفورمبل فرناندو برای  $x_0 = -1$  و  $a = -2$

$\alpha$	$\bar{x}$	$ f(x_i) $	تعداد تکرارها	$ACOC$	تابع
0.44	$\bar{x}_1 = -1.01356 - 1.42631i$	$3.89995 \times 10^{-8}$	14	2.98235	$f(x)$
0.73	$\bar{x}_2 = -1.01356 + 1.42631i$	$2.7967 \times 10^{-10}$	7	3.0084	$f(x)$
0.51	$\bar{x}_3 = 0.0276726$	$7.6358 \times 10^{-5}$	11	2.70846	$f(x)$
0.04	$\bar{x}_1 = -1.46605$	$7.62807 \times 10^{-8}$	5	2.95447	$g(x)$
0.09	$\bar{x}_4 = 0.671493$	$3.64526 \times 10^{-8}$	11	2.70358	$g(x)$
0.55	$\bar{x}_3 = -0.427722 + 0.348992i$	$1.58042 \times 10^{11}$	11	2.81259	$g(x)$
0.57	$\bar{x}_2 = -0.427722 - 0.348992i$	$9.52619 \times 10^{-10}$	7	2.82388	$g(x)$

م. مکاری

#### ۴. تحلیل عددی

در این قسمت با استفاده از مقدار اولیه‌ای که به کمک صفحه‌های همگرایی انتخاب می‌شود، ریشه‌های توابع بدست می‌آید. در جدول ۱ تعداد تکرارها تا رسیدن به ریشه، حدس اولیه، مقدار تابع به ازای تکرار آخر،  $a$ ،  $\alpha$  و  $ACOC$  تعریف شده در [۴]، گزارش شده‌است.

$$(A) a = 1, \alpha = .25 \quad (B) a = 1, \alpha = .95 \quad (C) a = -2, \alpha = .5 \quad (D) a = -4, \alpha = .05$$

شکل ۳. حوزه‌های جذب تابع  $f(x)$  و تاثیر انتخاب  $a$  و  $\alpha$  بر همگرایی روش و کاهش نقاط مشکی

$$(A) a = 1, \alpha = .35 \quad (B) a = -.8, \alpha = .8 \quad (C) a = -.8, \alpha = .9 \quad (D) a = -4, \alpha = .1$$

شکل ۴. حوزه‌های جذب تابع  $g(x)$  و تاثیر انتخاب  $a$  و  $\alpha$  بر همگرایی روش و کاهش نقاط مشکی

#### مراجع

- [1] G. Candelario, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, *An optimal and low computational cost fractional Newton-type method for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics Letters, 124 (2022), 107650.
- [2] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. 264 (2014), 65–70.
- [3] M. Moccari, T. Lotfi, *On a two-step optimal Steffensen-type method: Relaxed local and semi-local convergence analysis and dynamical stability*, J. Math. Anal. Appl. 468 (2018), no. 1, 240–269.
- [4] M. Moccari, T. Lotfi, and V. Torkashvand, *On the stability of a two-step method for a fourth-degree family by computer designs along with applications*. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 14 (2023), no. 4, 261–282.

## یک روش بلوکی تک‌گامی با سه نقطه بین‌گامی بهینه برای حل سیستم معادلات سخت با طول‌گام متغیر

سعیده خضیراوی<sup>۱\*</sup> و مرتضی بیشه نیاسر<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان  
 saeedeh.khaziravi65@gmail.com  
 mbish@kashanu.ac.ir

چکیده. در این مقاله سعی داریم یک روش تک‌گامی بلوکی جدید با سه نقطه بین‌گامی بهینه برای حل سیستم‌های دیفرانسیل سخت ارائه دهیم. مشخصه‌های روش مانند صفرپایداری و سازگاری بررسی می‌شود. به منظور عملکرد بهتر روش از یک تکنیک طول‌گام متغیر استفاده می‌کنیم. نتایج عددی بیانگر دقت و کارایی روش موردنظر است.

### ۱. پیش‌گفتار

#### معادله دیفرانسیل

$$u'(t) = w(t, u) \quad (1.1)$$

با شرایط اولیه  $u(t_0) = u_0$  که در آن  $t \in [t_0, t_N]$  و  $u \in R^m$  و  $w : [t_0, t_N] \times R^m \rightarrow R^m$  می‌باشد را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم تابع  $w(t, u)$  در شرط لیبشیتز که وجود و یکتایی جواب را تضمین می‌کند، صدق می‌کند [۱]. از این معادله برای مدلسازی بسیاری از مسائل کاربردی در رشته‌های مکانیک، برق و شیمی استفاده شده است. در این مقاله قصد داریم یک روش بلوکی تک‌گامی با سه نقطه بین‌گامی بهینه بیابیم و برای تقریب جواب اعمال کنیم. از مزایای روش بلوکی می‌توان به این نکته اشاره کرد که محدودیت‌های دالکوئیس را ندارد و یک

2024 Mathematics Subject Classification. Primary 47J55; Secondary 65L05, 65L20.

واژگان کلیدی. ۱- معادلات دیفرانسیل معمولی ۲- معادلات سخت ۳- طول‌گام متغیر ۴- تخمین و کنترل خطا

\* سخنران

روش خودآغازگر است و همزمان مقدار جواب را در چندین نقطه به دست می‌آورد. از روش‌های بلوکی می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری و معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی نیز استفاده کرد [۲].

## ۲. روش بلوکی با سه نقطه بین‌گامی

فرض می‌کنیم یک افراز دلخواه به صورت  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  از بازه  $[t_0, t_N]$  مفروض باشد  $h = t_{j+1} - t_j$ . جواب تقریبی معادله (۱.۱) را به صورت  $u(t) \simeq r(t) = \sum_{j=0}^5 a_j t^j$  در نظر می‌گیریم. آنگاه  $u'(t) \simeq r'(t) = \sum_{j=1}^5 j a_j t^{j-1}$  با درونیابی  $u(t)$  در نقطه  $t_n$  و  $u'(t)$  در نقاط  $t_n, t_{n+c_1}, t_{n+c_2}, t_{n+c_3}$  که  $0 < c_1 < c_2 < c_3 < 1$  معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$r(t_n) = u_n, \quad r'(t_{n+j}) = w_{n+j} \quad j = 0, c_1, c_2, c_3, 1.$$

معادلات فوق را می‌توان به فرم ماتریسی بازنویسی کرد. درمیان دستگاه فوق مخالف صفر است، لذا دارای جواب یکتاست. با حل دستگاه و یافتن ضرائب  $a_j$  و جایگذاری در  $r(t)$  و اعمال تغییر متغیر  $t = t_n + xh$  داریم:

$$u(t_n + xh) \simeq r(t_n + xh) = \alpha_0(x)u_n + h(\beta_0(x)w_n + \beta_{c_1}(x)w_{n+c_1} + \beta_{c_2}(x)w_{n+c_2} + \beta_{c_3}(x)w_{n+c_3} + \beta_1(x)w_{n+1}) \quad (1.2)$$

که در آن  $\alpha_0(x) = 1$  و  $\{\beta_i(x)\}_{i=0, c_1, c_2, c_3, 1}$  برحسب  $c_1, c_2, c_3$  و  $x$  حاصل می‌شود، که به دلیل پرچم بودن ضرائب از آوردن آنها خودداری می‌کنیم. در ادامه برای یافتن مقادیر بهینه  $c_1, c_2, c_3$  کافی ست خطای برشی در  $u_{n+1}$  کمینه شود، چرا که برای ادامه فرایند تقریب در زیربازه‌های بعدی فقط به مقدار  $u_{n+1}$  احتیاج داریم. برای این کار با در نظر گرفتن  $x = 1$  و اعمال عملگر تفاضل خطی روی رابطه متناظر با  $u_{n+1}$  نتیجه می‌شود که:

$$L_1[u(t_n), h] = \frac{1^0 c_1 c_2 c_3 - 5(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) + 3(c_1 + c_2 + c_3) - 2}{7200} h^6 u^{(6)}(t_n) + O(h^7).$$

برای یافتن یک روش با دقت بهینه، کافی ست ضریب پیشرو در رابطه فوق را صفر کنیم. بی‌نهایت جواب می‌توان برای صفرشدن ضریب پیشرو یافت. یکی از جواب‌ها به صورت،  $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{21}}$  و  $c_2 = \frac{1}{2}$  و  $c_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{21}}$  است، که ما در ادامه از آن استفاده می‌کنیم. با اختیار این مقادیر و جایگزینی در (۱.۲) و با در نظر گرفتن  $x = c_1, c_2, c_3, 1$  روش بلوکی

روش بلوکی برای سیستم معادلات سخت

به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \frac{h}{1200} (-136w_{n+c_1} + 590w_{n+c_2} + 441w_{n+c_3} + 136w_{n+1}) \\
 u_{n+c_1} &= u_n + \frac{h}{2116800} \left( 4(8192\sqrt{21} - 22113)w_n + 63(6174 - 1091\sqrt{21})w_{n+c_1} + \right. \\
 &\quad + 63(6174 - 1091\sqrt{21})w_{n+c_1} + 20(26019 - 5696\sqrt{21})w_{n+c_2} + 567(686 - 149\sqrt{21})w_{n+c_3} \\
 &\quad \left. + 4(8192\sqrt{21} - 37863)w_{n+1} \right); \\
 u_{n+c_2} &= u_n + \frac{h}{4800} (-932w_n + 63(5\sqrt{21} + 14)w_{n+c_1} + 1180w_{n+c_2} + 63(14 - 5\sqrt{21})w_{n+c_3} \\
 &\quad + 388w_{n+1}); \\
 u_{n+c_3} &= u_n + \frac{h}{2116800} \left( -4(8192\sqrt{21} + 22113)w_n + 567(149\sqrt{21} + 686)w_{n+c_1} \right. \\
 &\quad \left. + 20(5696\sqrt{21} + 26019)w_{n+c_2} + 63(1091\sqrt{21} + 6174)w_{n+c_3} + 4(8192\sqrt{21} + 37863)w_{n+1} \right) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در سرتاسر این مقاله  $u_{n+j}$  تقریبی از  $u(t_{n+j})$  و  $w_{n+j}$  تقریبی از  $w(t_{n+j}, u(t_{n+j}))$  است. با فرض داشتن  $u_n$  می توان با حل دستگاه فوق، مقادیر  $u_{n+1}$ ،  $u_{n+c_1}$ ،  $u_{n+c_2}$  و  $u_{n+c_3}$  را به دست آورد. با داشتن  $u_{n+1}$  همین فرآیند را برای زیربازه بعدی اعمال می کنیم تا  $u_{n+2}$  به دست آید. این فرآیند تا رسیدن به نقطه پایانی بازه ادامه می یابد.

### ۳. آنالیز روش

در این بخش سازگاری، صفرپایداری، همگرایی و ناحیه پایداری مطلق مورد بررسی قرار می گیرند. در ابتدا عملگر تفاضل خطی را روی (۲.۲) اعمال می کنیم، پس از اعمال بسط تیلور و ساده سازی جملات، ضریب پیشرو در عملگر تفاضل خطی به صورت زیر حاصل می شود:

$$\Theta_\tau = \left( \frac{25h^2 u^{(\tau)}(t_n)}{170698175}, -\frac{h^2 u^{(\tau)}(t_n)}{71680}, \frac{25h^2 u^{(\tau)}(t_n)}{170698175}, 0 \right)^T$$

پس روش دارای مرتبه حداقل ۵ است لذا روش سازگار است. از طرفی چندجمله ای مشخصه نوع اول روش به صورت  $\rho(z) = z^3(z-1)$  می باشد. مشاهده می شود که ریشه های  $\rho(z)$  در شرط ریشه صدق می کنند، پس روش صفرپایدار است. لذا بنا به سازگاری و صفرپایداری، روش همگرا خواهد بود. برای بررسی ناحیه مطلقاً پایداری روش، ابتدا شکل ماتریسی روش (۲.۲) را به صورت  $\bar{R}U_n = h\bar{S}U'_n$  بازنویسی می کنیم که در آن  $\bar{R}$  و  $\bar{S}$  ماتریس های ضرایب روش بلوکی هستند. در ادامه با فرض  $u' = \eta u$  ( $\eta$  عددی مختلط است) و با جایگذاری، به رابطه  $U_{n+1} = S(z)U_n$  خواهیم رسید که در آن  $\eta h = z$ . مقادیر ویژه  $S(z)$  نیز به صورت  $\{0, 0, 0, \frac{5z^4 + 198z^2 + 2076z^2 + 10080z + 20160}{5z^4 - 198z^2 + 2076z^2 - 10080z + 20160}\}$  به دست می آید. از طرفی ناحیه مطلقاً پایداری روش نقاطی از صفحه مختلط است که به ازای آن  $|\rho(S(z))| < 1$ . از آنجایی که نیمه چپ صفحه مختلط در ناحیه  $\{z \in C : |\rho(S(z))| < 1\}$  قرار دارد، لذا روش  $A$ -پایدار است.

### ۴. استراتژی کنترل طول گام

به منظور کنترل طول گام بنا به روش به کار گرفته شده در [۳] از روش عددی با مرتبه  $p = 4$  به صورت  $u_{n+1}^* = u_n + \frac{h}{33} (\gamma w_{n+c_1} + 18w_{n+c_2} + 7w_{n+c_3})$  استفاده می کنیم. در ادامه، ضریب EST

را به صورت  $EST = \|u_{n+1} - u_{n+1}^*\|$  تعریف می‌کنیم که در آن  $\|\cdot\|$  نرم ماکسیمم است. با فرض داشتن ATOL که خطای مطلق از پیش تعریف شده است. چنانچه  $EST \leq ATOL$  آن‌گاه نتایج حاصل شده روی  $[t_n, t_{n+1}]$  قابل قبول است و با طول گام جدید  $h_{new} = 2h_{old}$  به سراغ گام بعدی می‌رویم. چنانچه  $EST > ATOL$  آن‌گاه نتایج حاصل شده قابل قبول نیست و این مرحله با طول گام جدید به صورت  $h_{new} = \mu h_{old} \left(\frac{ATOL}{EST}\right)^{\frac{1}{1+p}}$  تکرار می‌شود که در آن  $0 < \mu < 1$  عامل تنظیم‌کننده است.

### ۵. نتایج عددی

مثال ۱.۵. سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، غیرخطی و سخت زیر را در بازه  $[0, 2]$  در نظر بگیرید [۴].

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -10004u_1(t) + 10000u_2(t)^4 & u_1(0) &= 1 \\ u_2'(x) &= u_1(t) - u_2(t)(1 + u_2(t)^2) & u_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

جواب دقیق این سیستم عبارت است از  $u_1(t) = e^{-4t}$  و  $u_2(t) = e^{-t}$ . بیشینه خطا به ازای پارامترهای مختلف در جدول ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱: بیشینه خطا در فاصله  $[0, 2]$

ATOL	Max error for proposed method		Max error for ode15s method	
	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$
$10^{-4}$	$2.4108 \times 10^{-6}$	$1.0035 \times 10^{-6}$	0.0011	$1.4421 \times 10^{-5}$
$10^{-3}$	$1.7324 \times 10^{-5}$	$1.2800 \times 10^{-7}$	0.0011	$1.0346 \times 10^{-4}$
$10^{-2}$	$1.5444 \times 10^{-4}$	$1.6972 \times 10^{-6}$	0.0029	$8.3535 \times 10^{-4}$
$10^{-1}$	$1.4864 \times 10^{-3}$	$2.7607 \times 10^{-5}$	0.0103	0.008
$5 \times 10^{-1}$	$7.4441 \times 10^{-3}$	$4.5447 \times 10^{-5}$	0.0228	0.0215

### مراجع

1. P. Henrici, *Discrete Variable Methods in ODEs*, (Wiley, Nef York, 1962))
2. R. Higinio, A. Kaur and V. Kanwar, *Using a cubic B-spline method in conjunction with a one-step optimized hybrid block approach to solve nonlinear partial differential equations*, Computational and Applied Mathematics 41 (2022), no. 1, 34.
3. U.M. Ascher and L.R. Petzold, *computer methods for ordinary differential equations and differential algebraic equations*, society for industrial and applied mathematics(SIAM), publishian (1998).
4. R. Higinio and M. Ajani Rufai, *A new one-step method with three intermediate points in a variable step-size mode for stiff differential systems*, Journal of Mathematical Chemistry 61 (2023), no. 4, 673-688.

## معرفی یک روش تکرار کم هزینه بر پایه حسابان کسری و بررسی پایداری آن

ماندانا مکاری<sup>1</sup> \*

<sup>1</sup> گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران  
 m\_mocari@yahoo.com

چکیده. در این مقاله بر پایه مشتق کسری کانفورمبل روش تکرار کسری فرناندو ارایه می‌شود. برای بررسی پایداری آن از صفحات همگرایی با حدس‌های اولیه حقیقی استفاده می‌شود. نشان داده می‌شود که با مقادیر اولیه حقیقی می‌توان همه ریشه‌ها را محاسبه کرد. همچنین حوزه‌های جذب با وضوح بالا، جزییات دقیق و چشم نواز ترسیم می‌شود.

### ۱. پیش‌گفتار

حساب کسری سالیان زیادی است که به عنوان منبع مفیدی جهت حل معادلات غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های تکرار متفاوتی جهت یافتن ریشه‌های معادلات با استفاده از مشتق کسری کاپوتو و ریمن-لیوویل مدل شده‌اند، که برای آگاهی بیشتر می‌توان به منبع [۱] و منابع موجود در آن مراجعه کرد. در سال‌های اخیر نوع جدیدی از مشتق کسری به نام مشتق کانفورمبل توسط [۲] ارایه شده‌است. این مشتق کسری خیلی از ویژگی‌های مشتق کلاسیک را دارد. تابع  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  را که از نقطه  $a$  شروع می‌شود، در نظر می‌گیریم. مشتق چپ کانفورمبل تابع  $f$  از مرتبه  $\alpha \in (0, 1]$  که  $\alpha, a, x \in \mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(T_{\alpha}^a f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}.$$

اگر این حد وجود داشته باشد، آنگاه تابع  $f$   $\alpha$ -مشتق‌پذیر گفته می‌شود. در ضمن مشتق کانفورمبل را به صورت  $(T_{\alpha}^a f)(x) = (x-a)^{1-\alpha} f'(x)$  نیز می‌توان نشان داد. در این

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 65F10; Secondary 26A33, 54A20.

واژگان کلیدی. مشتق کسری کانفورمبل، صفحات همگرایی، پایداری.  
 \* سخنران

مقاله روش تکرار فرناندو برحسب مشتق کانفورمبل ارایه می‌شود. ثابت می‌شود که مرتبه همگرایی آن مشابه حالت کلاسیک ۳ هست. پایداری آن با استفاده از صفحات همگرایی و حوزه‌های جذب برحسب مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $a$  بررسی می‌شود. به‌علاوه، مولف به شیوه‌ای جدید نسبت به مقالاتی که قبلاً ارایه شده‌است، بهترین شرایط همگرایی را بدست می‌آورد.

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش با توجه به بسط تیلور کانفورمبل تابع  $f$ ، مشابه مرجع [۱] روش تکراری فرناندو بر پایه مشتق کسری کانفورمبل ارایه و سپس مرتبه همگرایی آن محاسبه می‌شود.

**قضیه ۱.۲.** فرض کنیم که  $f$  تابعی حقیقی پیوسته روی بازه  $I \subseteq \mathbb{R}$  باشد، که این بازه شامل  $\bar{x}$  ریشه  $f(x)$  است. همچنین  $(T_\alpha^a f)(x)$  مشتق کسری کانفورمبل  $f(x)$  از مرتبه  $\alpha \in (0, 1]$  است که از  $a$  شروع می‌شود. فرض کنیم  $(T_\alpha^a f)(x)$  پیوسته باشد و در  $\bar{x}$  صفر نباشد. همچنین  $x_0$  را یک حدس اولیه نزدیک  $\bar{x}$  در نظر می‌گیریم، آنگاه مرتبه همگرایی روش فرناندو کسری کانفورمبل از مرتبه  $\alpha \in (0, 1]$  که به صورت زیر نشان داده می‌شود حداقل ۳ است:

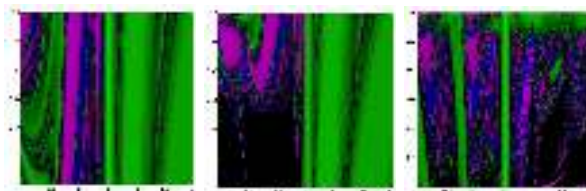
$$(1.2) \quad \begin{cases} y_k = a + \left( (x_k - a)^\alpha - \alpha \frac{f(x_k)}{(T_\alpha^a f)(x_k)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x_{k+1} = a + \left( (x_k - a)^\alpha - \alpha \frac{2f(x_k)}{(T_\alpha^a f)(x_k) + (T_\alpha^a f)(y_k)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

معادله خطا نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$e_{k+1} = \frac{1}{2} (2c_2^2 + c_3) (\alpha^2 (\bar{x} - a)^{2(\alpha-1)}) e_k^3 + O(e_k^4),$$

$$c_j = \frac{1}{j! \alpha^j} \frac{(T_\alpha^a f)^{(j)}(\bar{x})}{(T_\alpha^a f)(\bar{x})}, \quad j = 2, 3, \dots$$

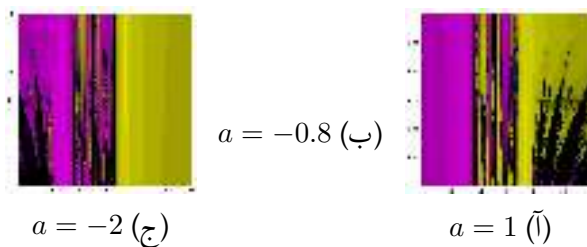
برهان. گام اول روش (۱.۲) همان روش نیوتن کانفورمبل است که در مرجع [۱] مرتبه دو همگرایی آن بدست آمده‌است. در ادامه می‌توان با استفاده از بسط تیلور کانفورمبل که در همان مرجع به آن اشاره شده‌است، مرتبه همگرایی ۳ را برای روش بدست آورد.  $\square$



(آ)  $a = 1$       (ب)  $a = -2$       (ج)  $a = -4$

شکل ۱. صفحات همگرایی تابع  $f(x)$  برای مقادیر متفاوت  $a$

یک روش تکرار کم هزینه برپایه حسابان کسری



شکل ۲. صفحات همگرایی تابع  $g(x)$  برای مقادیر متفاوت  $a$

### ۳. تحلیل پایداری

بررسی پایداری روش تکرار کسری ۱۰۲ با استفاده از صفحه‌های همگرایی و حوزه‌های جذب انجام می‌شود. برای تعاریف و قضایای مربوط به آن‌ها به مرجع [۳] مراجعه کنید. توابع

$$f(x) = 2x^{3/2} + x^{5/2} - 0.17x^2 - 0.3x + 3\sqrt{x} - 0.5,$$

$$g(x) = -x^4 - 1.65x^3 + 0.6x + 0.3,$$

طوری انتخاب شده‌است که هم ریشه‌های حقیقی و هم ریشه‌های مختلط داشته باشند. تعداد نقاط تقسیم  $400 \times 400$  برای رسم هر کدام از صفحات دینامیکی در نظر گرفته شده‌است. در حوزه‌های جذب،  $x$  ها روی محور افقی و  $y$  ها روی محور عمودی قرار دارد و همچنین برای صفحات همگرایی روی محور  $x$  حدس‌های اولیه حقیقی در بازه  $-3 \leq x \leq 3$  و روی محور  $y$  ها مقادیر  $\alpha \in (0, 1]$  قرار دارد. هر رنگ در صفحات همگرایی و حوزه‌های جذب مربوط به همگرایی به یکی از ریشه‌هاست. نقطه‌های قرمز در حوزه‌های جذب ریشه‌ها را نشان می‌دهند. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب صفحات همگرایی  $f(x)$  و  $g(x)$  را نشان می‌دهند که در آنها تاثیر انتخاب  $a$  را می‌توان بر همگرایی به ریشه‌ها مشاهده کرد. استفاده از  $a$  و انتخاب مناسب آن می‌تواند بهترین همگرایی به ریشه‌ها را نتیجه دهد. شکل‌های ۳ و ۴ نیز به ترتیب حوزه‌های جذب  $f(x)$  و  $g(x)$  هستند. قسمت‌های مشکی در همه تصاویر نشان دهنده نقاط واگرایی هستند.

جدول ۱. نتایج عددی روش تکرار کانفورمبل فرناندو برای  $x_0 = -1$  و  $a = -2$

$\alpha$	$\bar{x}$	$ f(x_i) $	تعداد تکرارها	ACOC	تابع
0.44	$\bar{x}_1 = -1.01356 - 1.42631i$	$3.89995 \times 10^{-8}$	14	2.98235	$f(x)$
0.73	$\bar{x}_2 = -1.01356 + 1.42631i$	$2.7967 \times 10^{-10}$	7	3.0084	$f(x)$
0.51	$\bar{x}_3 = 0.0276726$	$7.6358 \times 10^{-5}$	11	2.70846	$f(x)$
0.04	$\bar{x}_1 = -1.46605$	$7.62807 \times 10^{-8}$	5	2.95447	$g(x)$
0.09	$\bar{x}_4 = 0.671493$	$3.64526 \times 10^{-8}$	11	2.70358	$g(x)$
0.55	$\bar{x}_3 = -0.427722 + 0.348992i$	$1.58042 \times 10^{11}$	11	2.81259	$g(x)$
0.57	$\bar{x}_2 = -0.427722 - 0.348992i$	$9.52619 \times 10^{-10}$	7	2.82388	$g(x)$

م. مکاری

#### ۴. تحلیل عددی

در این قسمت با استفاده از مقدار اولیه‌ای که به کمک صفحه‌های همگرایی انتخاب می‌شود، ریشه‌های توابع بدست می‌آید. در جدول ۱ تعداد تکرارها تا رسیدن به ریشه، حدس اولیه، مقدار تابع به ازای تکرار آخر،  $a$ ،  $\alpha$  و  $ACOC$  تعریف شده در [۴]، گزارش شده‌است.

$$(A) a = 1, \alpha = .25 \quad (B) a = 1, \alpha = .95 \quad (C) a = -2, \alpha = .5 \quad (D) a = -4, \alpha = .05$$

شکل ۳. حوزه‌های جذب تابع  $f(x)$  و تاثیر انتخاب  $a$  و  $\alpha$  بر همگرایی روش و کاهش نقاط مشکی

$$(A) a = 1, \alpha = .35 \quad (B) a = -.8, \alpha = .8 \quad (C) a = -.8, \alpha = .9 \quad (D) a = -4, \alpha = .1$$

شکل ۴. حوزه‌های جذب تابع  $g(x)$  و تاثیر انتخاب  $a$  و  $\alpha$  بر همگرایی روش و کاهش نقاط مشکی

#### مراجع

- [1] G. Candelario, A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, *An optimal and low computational cost fractional Newton-type method for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics Letters, 124 (2022), 107650.
- [2] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. 264 (2014), 65–70.
- [3] M. Moccari, T. Lotfi, *On a two-step optimal Steffensen-type method: Relaxed local and semi-local convergence analysis and dynamical stability*, J. Math. Anal. Appl. 468 (2018), no. 1, 240–269.
- [4] M. Moccari, T. Lotfi, and V. Torkashvand, *On the stability of a two-step method for a fourth-degree family by computer designs along with applications*. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 14 (2023), no. 4, 261–282.

## یک روش بلوکی تک‌گامی با سه نقطه بین‌گامی بهینه برای حل سیستم معادلات سخت با طول‌گام متغیر

سعیده خضیراوی<sup>۱\*</sup> و مرتضی بیسه نیاسر<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان  
 saeedeh.khaziravi65@gmail.com  
 mbish@kashanu.ac.ir

چکیده. در این مقاله سعی داریم یک روش تک‌گامی بلوکی جدید با سه نقطه بین‌گامی بهینه برای حل سیستم‌های دیفرانسیل سخت ارائه دهیم. مشخصه‌های روش مانند صفرپایداری و سازگاری بررسی می‌شود. به منظور عملکرد بهتر روش از یک تکنیک طول‌گام متغیر استفاده می‌کنیم. نتایج عددی بیانگر دقت و کارایی روش موردنظر است.

### ۱. پیش‌گفتار

#### معادله دیفرانسیل

$$u'(t) = w(t, u) \quad (1.1)$$

با شرایط اولیه  $u(t_0) = u_0$  که در آن  $t \in [t_0, t_N]$  و  $u \in R^m$  و  $w : [t_0, t_N] \times R^m \rightarrow R^m$  می‌باشد را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم تابع  $w(t, u)$  در شرط لیبشیتز که وجود و یکتایی جواب را تضمین می‌کند، صدق می‌کند [۱]. از این معادله برای مدلسازی بسیاری از مسائل کاربردی در رشته‌های مکانیک، برق و شیمی استفاده شده است. در این مقاله قصد داریم یک روش بلوکی تک‌گامی با سه نقطه بین‌گامی بهینه بیابیم و برای تقریب جواب اعمال کنیم. از مزایای روش بلوکی می‌توان به این نکته اشاره کرد که محدودیت‌های دالکوئیس را ندارد و یک

2024 Mathematics Subject Classification. Primary 47J55; Secondary 65L05, 65L20.

واژگان کلیدی. ۱- معادلات دیفرانسیل معمولی ۲- معادلات سخت ۳- طول‌گام متغیر ۴- تخمین و کنترل خطا

\* سخنران

روش خودآغازگر است و همزمان مقدار جواب را در چندین نقطه به دست می‌آورد. از روش‌های بلوکی می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری و معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی نیز استفاده کرد [۲].

## ۲. روش بلوکی با سه نقطه بین‌گامی

فرض می‌کنیم یک افراز دلخواه به صورت  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  از بازه  $[t_0, t_N]$  مفروض باشد  $h = t_{j+1} - t_j$ . جواب تقریبی معادله (۱.۱) را به صورت  $u(t) \simeq r(t) = \sum_{j=0}^5 a_j t^j$  در نظر می‌گیریم. آنگاه  $u'(t) \simeq r'(t) = \sum_{j=1}^5 j a_j t^{j-1}$  با درونیابی  $u(t)$  در نقطه  $t_n$  و  $u'(t)$  در نقاط  $t_n, t_{n+c_1}, t_{n+c_2}, t_{n+c_3}$  که  $0 < c_1 < c_2 < c_3 < 1$  معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$r(t_n) = u_n, \quad r'(t_{n+j}) = w_{n+j} \quad j = 0, c_1, c_2, c_3, 1.$$

معادلات فوق را می‌توان به فرم ماتریسی بازنویسی کرد. درمیان دستگاه فوق مخالف صفر است، لذا دارای جواب یکتاست. با حل دستگاه و یافتن ضرائب  $a_j$  و جایگذاری در  $r(t)$  و اعمال تغییر متغیر  $t = t_n + xh$  داریم:

$$u(t_n + xh) \simeq r(t_n + xh) = \alpha_0(x)u_n + h(\beta_0(x)w_n + \beta_{c_1}(x)w_{n+c_1} + \beta_{c_2}(x)w_{n+c_2} + \beta_{c_3}(x)w_{n+c_3} + \beta_1(x)w_{n+1}) \quad (1.2)$$

که در آن  $\alpha_0(x) = 1$  و  $\{\beta_i(x)\}_{i=0, c_1, c_2, c_3, 1}$  برحسب  $c_1, c_2, c_3$  و  $x$  حاصل می‌شود، که به دلیل پرچم بودن ضرائب از آوردن آنها خودداری می‌کنیم. در ادامه برای یافتن مقادیر بهینه  $c_1, c_2, c_3$  کافی ست خطای برشی در  $u_{n+1}$  کمینه شود، چرا که برای ادامه فرایند تقریب در زیربازه‌های بعدی فقط به مقدار  $u_{n+1}$  احتیاج داریم. برای این کار با در نظر گرفتن  $x = 1$  و اعمال عملگر تفاضل خطی روی رابطه متناظر با  $u_{n+1}$  نتیجه می‌شود که:

$$L_1[u(t_n), h] = \frac{1^0 c_1 c_2 c_3 - 5(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) + 3(c_1 + c_2 + c_3) - 2}{7200} h^6 u^{(6)}(t_n) + O(h^7).$$

برای یافتن یک روش با دقت بهینه، کافی ست ضریب پیشرو در رابطه فوق را صفر کنیم. بی‌نهایت جواب می‌توان برای صفرشدن ضریب پیشرو یافت. یکی از جواب‌ها به صورت،  $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{21}}$  و  $c_2 = \frac{1}{2}$  و  $c_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{21}}$  است، که ما در ادامه از آن استفاده می‌کنیم. با اختیار این مقادیر و جایگزینی در (۱.۲) و با در نظر گرفتن  $x = c_1, c_2, c_3, 1$  روش بلوکی

روش بلوکی برای سیستم معادلات سخت

به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \frac{h}{1200} (-136w_{n+c_1} + 590w_{n+c_2} + 441w_{n+c_3} + 136w_{n+1}) \\
 u_{n+c_1} &= u_n + \frac{h}{2116800} (4(8192\sqrt{21} - 22113)w_n + 63(6174 - 1091\sqrt{21})w_{n+c_1} + \\
 &+ 63(6174 - 1091\sqrt{21})w_{n+c_1} + 20(26019 - 5696\sqrt{21})w_{n+c_2} + 567(686 - 149\sqrt{21})w_{n+c_3} \\
 &+ 4(8192\sqrt{21} - 37863)w_{n+1}); \\
 u_{n+c_2} &= u_n + \frac{h}{4800} (-932w_n + 63(5\sqrt{21} + 14)w_{n+c_1} + 1180w_{n+c_2} + 63(14 - 5\sqrt{21})w_{n+c_3} \\
 &+ 388w_{n+1}); \\
 u_{n+c_3} &= u_n + \frac{h}{2116800} (-4(8192\sqrt{21} + 22113)w_n + 567(149\sqrt{21} + 686)w_{n+c_1} \\
 &+ 20(5696\sqrt{21} + 26019)w_{n+c_2} + 63(1091\sqrt{21} + 6174)w_{n+c_3} + 4(8192\sqrt{21} + 37863)w_{n+1}) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در سرتاسر این مقاله  $u_{n+j}$  تقریبی از  $u(t_{n+j})$  و  $w_{n+j}$  تقریبی از  $w(t_{n+j}, u(t_{n+j}))$  است. با فرض داشتن  $u_n$  می توان با حل دستگاه فوق، مقادیر  $u_{n+1}$ ،  $u_{n+c_1}$ ،  $u_{n+c_2}$  و  $u_{n+c_3}$  را به دست آورد. با داشتن  $u_{n+1}$  همین فرآیند را برای زیربازه بعدی اعمال می کنیم تا  $u_{n+2}$  به دست آید. این فرآیند تا رسیدن به نقطه پایانی بازه ادامه می یابد.

### ۳. آنالیز روش

در این بخش سازگاری، صفرپایداری، همگرایی و ناحیه پایداری مطلق مورد بررسی قرار می گیرند. در ابتدا عملگر تفاضل خطی را روی (۲.۲) اعمال می کنیم، پس از اعمال بسط تیلور و ساده سازی جملات، ضریب پیشرو در عملگر تفاضل خطی به صورت زیر حاصل می شود:

$$\Theta_\tau = \left( \frac{25h^2 u^{(\tau)}(t_n)}{170698175}, -\frac{h^2 u^{(\tau)}(t_n)}{71680}, \frac{25h^2 u^{(\tau)}(t_n)}{170698175}, 0 \right)^T$$

پس روش دارای مرتبه حداقل ۵ است لذا روش سازگار است. از طرفی چندجمله ای مشخصه نوع اول روش به صورت  $\rho(z) = z^3(z-1)$  می باشد. مشاهده می شود که ریشه های  $\rho(z)$  در شرط ریشه صدق می کنند، پس روش صفرپایدار است. لذا بنا به سازگاری و صفرپایداری، روش همگرا خواهد بود. برای بررسی ناحیه مطلقا پایداری روش، ابتدا شکل ماتریسی روش (۲.۲) را به صورت  $\bar{R}U_n = h\bar{S}U'_n$  بازنویسی می کنیم که در آن  $\bar{R}$  و  $\bar{S}$  ماتریس های ضرایب روش بلوکی هستند. در ادامه با فرض  $u' = \eta u$  ( $\eta$  عددی مختلط است) و با جایگذاری، به رابطه  $U_{n+1} = S(z)U_n$  خواهیم رسید که در آن  $\eta h = z$ . مقادیر ویژه  $S(z)$  نیز به صورت  $\{0, 0, 0, \frac{5z^4 + 198z^2 + 2076z^2 + 10080z + 20160}{5z^4 - 198z^2 + 2076z^2 - 10080z + 20160}\}$  به دست می آید. از طرفی ناحیه مطلقا پایداری روش نقاطی از صفحه مختلط است که به ازای آن  $|\rho(S(z))| < 1$ . از آنجایی که نیمه چپ صفحه مختلط در ناحیه  $\{z \in C : |\rho(S(z))| < 1\}$  قرار دارد، لذا روش  $A$ -پایدار است.

### ۴. استراتژی کنترل طول گام

به منظور کنترل طول گام بنا به روش به کار گرفته شده در [۳] از روش عددی با مرتبه  $p = 4$  به صورت  $u_{n+1}^* = u_n + \frac{h}{33} (\gamma w_{n+c_1} + 18w_{n+c_2} + 7w_{n+c_3})$  استفاده می کنیم. در ادامه، ضریب EST

را به صورت  $EST = \|u_{n+1} - u_{n+1}^*\|$  تعریف می‌کنیم که در آن  $\|\cdot\|$  نرم ماکسیمم است. با فرض داشتن ATOL که خطای مطلق از پیش تعریف شده است. چنانچه  $EST \leq ATOL$  آن‌گاه نتایج حاصل شده روی  $[t_n, t_{n+1}]$  قابل قبول است و با طول گام جدید  $h_{new} = 2h_{old}$  به سراغ گام بعدی می‌رویم. چنانچه  $EST > ATOL$  آن‌گاه نتایج حاصل شده قابل قبول نیست و این مرحله با طول گام جدید به صورت  $h_{new} = \mu h_{old} \left(\frac{ATOL}{EST}\right)^{\frac{1}{1+p}}$  تکرار می‌شود که در آن  $0 < \mu < 1$  عامل تنظیم کننده است.

### ۵. نتایج عددی

مثال ۱.۵. سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، غیرخطی و سخت زیر را در بازه  $[0, 2]$  در نظر بگیرید [۴].

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -10004u_1(t) + 10000u_2(t)^4 & u_1(0) &= 1 \\ u_2'(x) &= u_1(t) - u_2(t)(1 + u_2(t)^3) & u_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

جواب دقیق این سیستم عبارت است از  $u_1(t) = e^{-4t}$  و  $u_2(t) = e^{-t}$ . بیشینه خطا به ازای پارامترهای مختلف در جدول ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱: بیشینه خطا در فاصله  $[0, 2]$

ATOL	Max error for proposed method		Max error for ode15s method	
	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$
$10^{-4}$	$2.4108 \times 10^{-6}$	$1.0035 \times 10^{-6}$	0.0011	$1.4421 \times 10^{-5}$
$10^{-3}$	$1.7324 \times 10^{-5}$	$1.2800 \times 10^{-7}$	0.0011	$1.0346 \times 10^{-4}$
$10^{-2}$	$1.5444 \times 10^{-4}$	$1.6972 \times 10^{-6}$	0.0029	$8.3535 \times 10^{-4}$
$10^{-1}$	$1.4864 \times 10^{-3}$	$2.7607 \times 10^{-5}$	0.0103	0.0008
$5 \times 10^{-1}$	$7.4441 \times 10^{-3}$	$4.5447 \times 10^{-5}$	0.0228	0.0215

### مراجع

1. P. Henrici, *Discrete Variable Methods in ODEs*, (Wiley, Nef York, 1962))
2. R. Higinio, A. Kaur and V. Kanwar, *Using a cubic B-spline method in conjunction with a one-step optimized hybrid block approach to solve nonlinear partial differential equations*, Computational and Applied Mathematics 41 (2022), no. 1, 34.
3. U.M. Ascher and L.R. Petzold, *computer methods for ordinary differential equations and differential algebraic equations*, society for industrial and applied mathematics(SIAM), publishian (1998).
4. R. Higinio and M. Ajani Rufai, *A new one-step method with three intermediate points in a variable step-size mode for stiff differential systems*, Journal of Mathematical Chemistry 61 (2023), no. 4, 673-688.

## روش اسپکتراول برای حل و بررسی مسئله مقدار اولیه-مرزی شامل معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول با شرایط مرزی عمومی غیرموضعی

جواد عبادپور گلنبر \*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
ebadpour.j@gmail.com  
ebadpourgolnbar.j@pmu.ac.ir

چکیده. در این مقاله روش ما مبتنی بر روش اسپکتراول برای حل مسأله مقدار اولیه شامل معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول که مشتقات آن نسبت به زمان و مکان بیان شده‌اند که ابتدا با استفاده از تبدیل لاپلاس از مسئله مقدار اولیه-مرزی، مسئله اسپکتراول آن ساخته می‌شود که یک مسئله مقدار مرزی شامل معادله برحسب پارامتر و متغیرهای مکان می‌باشد و شرایط مرزی این مسئله اسپکتراول به صورت یک مسئله مقدار مرزی شامل معادله دیفرانسیل تعمیم یافته-کوشی ریمان شامل پارامتر درمی‌آید با استفاده از تبدیلات انتگرالی معادله الحاقی را به دست می‌آوریم و با حل آن به جواب اساسی رسیده و سپس شرایط سازگاری را به دست آورده و در نتیجه به جواب مسأله می‌رسیم.

### ۱. پیش‌گفتار

مسائل مقدار اولیه - مرزی مدل ریاضی مسائل فیزیک و مهندسی هستند که در آنها علاوه بر شرایط مرزی نسبت به متغیرهای مکان، شرایط اولیه نسبت به زمان نیز داده می‌شود. روش‌های تحقیقی و تقریبی مختلفی برای حل این مسائل وجود دارد که در مباحث کلاسیک کتابی به آنها پرداخته می‌شود. روش‌های پیشرفته‌ای نیز اخیراً توسط مؤلفین و محققین بسیاری برای بررسی و حل این مسائل ارائه شده است ([۳] و [۵]) که مهمترین آنها استفاده از روش‌های جداسازی

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 35F15; Secondary 45B05, 35J56, 5N80.

واژگان کلیدی. اسپکتراول، مسئله مقدار اولیه-مرزی، شرایط مرزی عمومی، معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، تبدیلات لاپلاس .  
\* سخنران

متغیرها و تبدیلات انتگرالی به منظور ساختن جواب‌های تقریبی است البته روش‌های مستقلی هم مثل روش تجزیه آدومیان، گالرکین، کانترویچ و ... برای بررسی و حل این مسائل ارائه شده‌اند که عموماً به صورت روش‌های عددی و تقریبی هستند [۵]. بنابراین هدف اصلی این مقاله، تبدیل مسئله مقدار مرزی اولیه داده شده به یک مسئله مقدار مرزی شامل پارامتر می‌باشد که مسئله اسپکتراال نامیده می‌شود [۲].

## ۲. بیان ریاضی مسأله مقدار اولیه-مرزی

مسأله اصلی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} + a(x)u(x, t) + f(x, t) \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (1.2)$$

که شرایط مرزی و مقدار اولیه عبارتند از:

$$\alpha_1(x_1)u(x_1, \gamma_1(x_1), t) + \alpha_2(x_1)u(x_1, \gamma_2(x_1), t) = \alpha(x, t), \quad x_1 \in [a_1, b_1] \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \bar{D}. \quad (3.2)$$

## ۳. ساختن مسئله کمکی (اسپکتراال)

روش‌های مختلفی برای ساختن مسئله اسپکتراال حاصل از یک مسئله مقدار اولیه-مرزی وجود دارد که مهم‌ترین آنها با استفاده از روش فوریه یا همان روش متغیرهای جدا است. در این مقاله مسئله اسپکتراال را با استفاده از تبدیل انتگرالی لاپلاس انجام می‌دهیم. به این منظور، از طرفین معادله (۲.۲) و شرایط مرزی (۳.۲) تبدیل لاپلاس می‌گیریم و بعد از اعمال محاسبات خاص روی مساله به روابط زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}(x, \lambda)}{\partial x_2} + i \frac{\partial \tilde{u}(x, \lambda)}{\partial x_1} - \lambda \tilde{u}(x, \lambda) = F(x, \lambda) \\ \alpha_1(x) \tilde{u}(x_1, \lambda_1(x_1), \lambda) + \alpha_2(x_1) \tilde{u}(x_1, \gamma_2(x_1), \lambda) = \tilde{\alpha}(x_1, \lambda) \end{cases} \quad (1.3)$$

فرض کنید  $V$  تابع دلخواهی باشد. مزدوج  $V$  یعنی  $\bar{V}$  را به طرفین معادله دیفرانسیل (۱.۳) ضرب می‌کنیم و در ناحیه  $D$  انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} (\ell \tilde{u}, v) &= \int_D \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \bar{V}(x, \lambda) dx + i \int_D \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \bar{V}(x, \lambda) dx \\ &\quad - \lambda \int_D \tilde{u}(x, \lambda) \bar{V}(x, \lambda) dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

روش اسپکترا برای حل و بررسی مسئله مقدار اولیه

با استفاده از قضیه گاوس-آستروگراسکی و پس از ساده کردن به رابطه زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \ell^* V &\equiv -\frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x_2} + i\frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x_1} - \bar{\lambda}V(x, \lambda) \\ &= g(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

رابطه (2.3) همان الحاقی معادله اسپکترا (1.3) می‌باشد.

#### 4. محاسبه جواب اساسی معادله الحاقی به دست آمده

اکنون در این قسمت به محاسبه جواب اساسی معادله الحاقی می‌پردازیم. با توجه به تعریف جواب اساسی انتظار داریم که اگر جواب فوق را در معادله (2.3) قرار دهیم، تساوی زیر حاصل شود

$$\ell^* V(x - \xi, \lambda) = \delta(x - \xi) \quad (1.4)$$

که در آن  $\delta(x - \xi)$  تابع دلتای دیراک است. روش‌های مختلفی برای محاسبه جواب اساسی وجود دارد که جواب معادلات دیفرانسیل عادی بیشتر از روش تغییر پارامترهای لاگرانژ است [4].

در این مقاله جواب اساسی را با استفاده از تبدیل فوریه محاسبه می‌کنیم. این روش برای معادلات دیفرانسیل جزئی روش مناسبی است و به منظم‌سازی تکین‌های معادله الحاقی به جواب اساسی زیر می‌رسیم:

$$V(x - \xi, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{e^{-i\bar{\lambda}(x_1 - \xi_1)} + \tau[(x_1 - \xi_1) + i(x_2 - \xi_2)]}{x_1 - \xi_1 + i(x_2 - \xi_2)} \quad (2.4)$$

#### 5. محاسبه شرایط سازگاری

برای محاسبه این شرایط طرفین رابطه (1.3) را در  $\bar{V}$  ضرب کرده و سپس در ناحیه  $D$  انتگرال می‌گیریم و با اعمال دستور گاوس-آستروگراسکی و استفاده از خاصیت دلتای دیراک به شرایط سازگاری که به صورت زیر است می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \tilde{u}(\xi_1, \gamma_k(\xi_1), \lambda) &= \int_D F(x, \lambda) \bar{V}(x_1 - \xi_1, x_2 - \gamma_k(\xi_1), \lambda) dx \\ &- \int_{a_1}^{b_1} \tilde{u}(x_1, \gamma_1(x_1), \lambda) \bar{V}(x_1 - \xi_1, \gamma_1(x_1) - \gamma_k(\xi_1), \lambda) \\ &\cdot [i\gamma_1'(x_1) - 1] dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \tilde{u}(x_1, \gamma_2(x_1), \lambda) \\ &\cdot \bar{V}(x_1 - \xi_1, \gamma_2(x_1) - \gamma_k(\xi_1), \lambda) [1 - i\gamma_2'(x_1)] dx_1 \quad \xi_1 \in (a_1, b_1), k = 1, 2 \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد

ج. عبادپور گلنبر

قضیه ۱.۵. اگر  $D$  ناحیه کراندار مستوی در  $\mathbb{R}^2$  با مرز لیاپانف باشد و

$$\Gamma = \overline{D} \setminus D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

و  $\alpha(x)$ ،  $f(x, t)$  و  $\alpha(x_1, t)$  توابع پیوسته و  $\alpha_p(x_1)$ ،  $p = 1, 2$  از دسته هولدر باشند و  $k(x, \xi)$  و  $k_p(x_1, \xi_1)$  هستی‌های تکیننی ضعیف باشند، در این صورت هر جواب معادله (۱.۳) در شرایط ضروری (۱.۵) صدق می‌کنند.

با استفاده از شرایط ضروری با همان روند [۱] می‌توان به جواب معادله رسید.

### مراجع

۱. جواد عبادپور گلنبر، به دست آوردن شرایط سازگاری معادله کوشی - ریمان تعمیم یافته و اثبات یگانگی جواب، پنجاه و چهارمین کنفرانس ریاضی ایران، ۳-۱ شهریور ۱۴۰۲ دانشگاه زنجان.
2. B. Costa, *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, A Mathematical Journal 6 (2004), no. 4, 1-32
3. M. Jahanshahi and M. Sajjadmanesh, *A New Method for Investigation and Recognizing of Self-Adjoint Boundary Value Problem*, Journal of Contemporary Applied Mathematics 2 (2012), no. 1.
4. K. Atkinson, D. Chien and O. Hansen, *A Spectral method for elliptic equation: The Dirichlet Problem*, Advances in Computational Mathematics 33 (2010), 169-189.
5. J. Shen, T. Tang and L. Wang, *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, Springer-Verlag, 2011.

## نتایجی در نیمگروه جزئی سیستم‌های دینامیکی جزئی

هانیه گودرزی<sup>۱\*</sup> و محمد اکبری توتکابنی<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان  
 hanieh.godarzi74@gmail.com  
 tootkaboni.akbari@gmail.com

چکیده. زوج  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$  یک سیستم دینامیکی نامیده می‌شود هرگاه  $X$  یک فضای توپولوژیک فشرده و  $\{T_s\}_{s \in S}$  اکشن سیستم یک نیمگروه باشد. ما در این مقاله هنگامیکه اکشن یک نیمگروه جزئی است و این نیمگروه روی قسمتی از  $X$  اثر می‌کند، رفتار سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۱. پیش‌گفتار

برای نیمگروه دلخواه  $S$  خانواده  $\mathcal{U}$  از تمام زیرمجموعه‌های  $S$  را یک فیلتر روی  $S$  گوئیم اگر  $\mathcal{U}$  شامل تهی نباشد و شامل اشتراک متناهی از اعضای خود باشد و برای هر  $A \in \mathcal{U}$  که  $B \in \mathcal{U}$ ،  $A \subseteq B$  یک ابرفیلتر روی  $S$  فیلتری است که مشمول در هیچ فیلتر دیگری نباشد. خانواده تمام ابرفیلترها روی  $S$  را با  $\beta S$  نمایش می‌دهیم که به همراه توپولوژی تولیدشده توسط  $\{\bar{A} = \{U \in \beta S : A \subseteq U\} : A \subseteq S\}$  یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده است. عمل نیمگروه  $S$  به  $\beta S$  توسیع داده می‌شود و آن را به یک نیمگروه فشرده توپولوژیک بدل می‌کند. یعنی انتقال‌های چپ  $\lambda_s(x) = sx : \beta S \rightarrow \beta S$  برای  $x \mapsto$  هر  $s \in S$  و نیز انتقال‌های راست  $r_p(x) = xp : \beta S \rightarrow \beta S$  برای هر  $p \in \beta S$  پیوسته‌اند، [۵].

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. نیمگروه جزئی، فشرده‌سازی استون-چنخ، سیستم مینیمال، به‌طور جزئی قطعه‌ای متصل، سیستم دینامیکی جزئی نیمگروه جزئی  $(P.S.P.D.S)$ .  
\* سخنران

می‌توان عمل طبیعی را به یک زیر مجموعه مشخص تحدید کرد بطوریکه عمل بتواند همچنان به خوبی رفتار کند، چنین ساختارهایی را عمل‌های جزئی می‌نامند. یک نیمگروه جزئی، یک زوج  $(S, *)$  است به‌طوری‌که عمل آن به صورت  $D \subseteq S \times S \rightarrow S$ : \* تعریف می‌شود به‌طوری‌که برای  $x, y \in S$ ، زوج  $(x, y) \in D$  معادل با این است که  $x * y$  تعریف شده است و اگر  $x * y * z$  تعریف شده باشد آنگاه  $x * (y * z)$  نیز تعریف شود و سپس باهم برابر باشند. این مفهوم در سال ۱۹۹۴ توسط برگلسون<sup>۱</sup>، بلس<sup>۲</sup> و هایندمن<sup>۳</sup> در مطالعه‌ی قضایای افزای برای نیمگروه آزاد روی حروف متغیر، پا به عرصه‌ی ریاضیات نهاد، [۲]. از جمله کاربردهای عمل جزئی می‌توان به شاخه‌های نظریه اطلاعات، نظریه رسته‌ها و نظریه کدگذاری اشاره کرد، [۱].

در مرجع [۳] خواص اولیه نیمگروه جزئی به صورت زیر بیان می‌شوند. برای  $x \in S$  مجموعه  $\{y \in S : x * y \text{ تعریف شده است}\} = \sigma_S(x) = \sigma(x)$  تعریف می‌شود. فرض کنید  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  گردایه‌ی زیرمجموعه‌های منتهای و ناتهی  $\mathbb{N}$  باشد آنگاه برای  $H \in \mathcal{P}_f(S)$ ،  $\sigma(H) = \bigcap_{s \in H} \sigma(s)$  است.  $(S, *)$  بسنده<sup>۴</sup> گفته می‌شود اگر و تنها اگر برای هر  $H \in \mathcal{P}_f(S)$ ،  $\sigma(H) \neq \emptyset$ .

همچنین  $\delta S = \bigcap_{x \in S} cl_{\beta S}(\sigma(x)) = \bigcap_{H \in \mathcal{P}_f(S)} cl_{\beta S}(\sigma(H))$  تعریف می‌شود. زیرمجموعه  $\delta S$  از  $\beta S$  یک نیمگروه توپولوژیکی راست فشرده تحت توپولوژی به‌ارث برده شده از  $\beta S$  می‌باشد (قضیه ۱۰.۲ از [۴] را ببینید). به‌عنوان مثال، هر نیمگروه، یک نیمگروه جزئی است. مثال دیگر  $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \uplus)$  یک نیمگروه جزئی است هرگاه برای هر  $A, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  که در شرط  $A \cap B = \emptyset$  صدق کند، رابطه  $A \uplus B = A \cup B$  برقرار باشد. همچنین  $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \uplus)$  نیمگروه جزئی بسنده می‌باشد.

فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی باشد.  $I \subseteq S$  را ایده‌آل چپ می‌نامیم اگر برای  $x \in S$  و  $y \in I$ ،  $x * y \in I$  باشد. همچنین  $I$  ایده‌آل راست می‌نامیم اگر برای  $x \in I$  و  $y \in \sigma(x)$ ،  $x * y \in I$  باشد.  $I$  را یک ایده‌آل می‌نامیم هرگاه ایده‌آل راست و چپ باشد.  $L$  زیرمجموعه  $S$  را ایده‌آل چپ مینیمال می‌نامیم هرگاه  $L$  یک ایده‌آل چپ  $S$  باشد و اگر  $J$  یک ایده‌آل چپ دیگری از  $S$  باشد که  $J \subseteq L$ ، آنگاه  $J = L$ . ایده‌آل راست مینیمال مشابه تعریف می‌شود. فرض کنید گردایه  $\{x * y \mid x \text{ تعریف شده است} \mid y \in S\}$  دارای خاصیت مقطع منتهای باشد، آنگاه  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی بسنده است. نیمگروه  $\delta S$  دارای ایده‌آل چپ، کوچکترین ایده‌آل دوطرفه  $K(\delta S)$ ، خودتوان، ایده‌آل چپ مینیمال می‌باشد. گردایه همه خودتوان‌ها را با  $E(\delta S) = \{e \in \delta S : e * e = e\} \neq \emptyset$  نمایش می‌دهیم. فرض کنید  $L$  ایده‌آل چپ مینیمال  $\delta S$  و  $R$  ایده‌آل راست مینیمال  $\delta S$  باشد آنگاه  $L \cap R$  یک گروه است (بنابراین هرکدام از  $L$  و  $R$  دارای خودتوان می‌باشند). حال سیستم دینامیکی توپولوژیکی را معرفی می‌کنیم.

<sup>1</sup>Bergelson

<sup>2</sup>Blass

<sup>3</sup>Hindman

<sup>4</sup>adequate

**تعریف ۱.۱.** یک زوج  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$  را یک سیستم دینامیکی می‌نامیم هرگاه دارای شرایط زیر باشد.

- (۱) فضای هاسدورف فشرده باشد.
- (۲)  $S$  نیمگروه باشد.
- (۳) برای هر  $s \in S$  نگاشت  $T_s : X \rightarrow X$  پیوسته باشد.
- (۴) برای هر  $s, t \in S$  شرط  $T_s \circ T_t = T_{st}$  برقرار باشد.

به عنوان مثال  $(\beta S, \{\lambda_s\}_{s \in S})$  یک سیستم دینامیکی است. برای سیستم دینامیکی  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$  یک زیر مجموعه  $Y$  از  $X$  را پایا<sup>۵</sup> می‌نامیم هرگاه در شرط  $T_s[Y] \subseteq Y$  صدق کند. یک سیستم را مینیمال می‌نامیم هرگاه دارای هیچ زیرمجموعه پایا محض بسته ناتهی از  $X$  نباشد. فرض کنید  $L$  ایده آل چپ  $\beta S$  باشد در اینصورت  $(L, \{\lambda_s\}_{s \in S})$  یک زیرسیستم مینیمال از سیستم دینامیکی  $(\beta S, \{\lambda_s\}_{s \in S})$  می‌باشد. مدار هر نقطه از سیستم را به صورت  $Orb(x, T) = \{T_s(x) : s \in S\}$  تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۲.۱.** سیستم دینامیکی  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$  را یک سیستم دینامیکی جزئی نیمگروه جزئی  $(P.S.P.D.S)$  می‌نامیم اگر دارای شرایط زیر باشد.

- (۱)  $X$  یک فضای هاسدورف فشرده و  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی باشد.
- (۲) برای هر  $x \in \beta S$ ،  $s * x$  تعریف شده است:  $L(x) = \{s \in S : s * x \text{ تعریف شده است}\}$  ناتهی باشد و گردایه‌ی  $\{L(x) : x \in X\}$  دارای خاصیت مقطع متناهی باشد.
- (۳) برای هر  $s \in S$ ، تعریف می‌کنیم

$$Dom(T_s) = \{x \in X : T_s(x) = s * x \text{ تعریف شده است}\}$$

- که یک زیرمجموعه ناتهی فشرده از  $X$  می‌باشد.
- (۴) به ازای هر  $s \in S$ ، نگاشت  $T_s : Dom(T_s) \rightarrow X$  پیوسته باشد.
  - (۵) به ازای هر  $s, t \in S$  و  $x \in X$ ، اگر  $s * t$  تعریف شده باشد آنگاه شرط  $T_s \circ T_t(x) = T_{s*t}(x)$  برقرار باشد.

مدار هر نقطه از سیستم را به صورت  $Orb(x) = \{T_s(x) : s \in L(x)\}$  تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۳.۱.** فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی بسنده فشرده باشد و  $A \subseteq S$ ، در اینصورت:

- (۱) مجموعه  $A$  را به طور جزئی متصل<sup>۶</sup> می‌نامیم هرگاه برای هر  $p \in \beta S$ ،  $H \in \mathcal{P}_f(L(p))$  به قسمی موجود باشد که  $R(H) \subseteq \cup_{t \in H} t^{-1}A$ .
- (۲) مجموعه  $A$  را به طور جزئی ضخیم<sup>۷</sup> می‌نامیم هرگاه برای هر  $p \in \beta S$  و برای هر  $F \in \mathcal{P}_f(L(p))$ ،  $t \in R(F)$  به قسمی موجود باشد که  $F * t \subseteq A$ .

<sup>5</sup>invariant

<sup>6</sup>partially syndetic

<sup>7</sup>partially thick

(۳) مجموعه  $A$  را به طور جزئی قطعه‌ای متصل<sup>۸</sup> می‌نامیم هرگاه برای هر  $s \in S$ ،  $H \in \mathcal{P}_f(R(s))$  به قسمی موجود باشد که برای هر مجموعه ناتهی متناهی  $T \in R(H)$ ،  $s \in R(T)$ ، موجود باشد به طوری که  $T * x \subseteq \bigcup_{t \in H} t^{-1}A$ .

قضیه ۴.۱. فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی بسنده باشد و  $A \subseteq S$ .

(۱) مجموعه  $A$  به طور جزئی ضخیم است هرگاه  $S \setminus A$  به طور جزئی متصل نباشد.

(۲) مجموعه  $A$  به طور جزئی متصل است هرگاه  $S \setminus A$  به طور جزئی ضخیم نباشد.

قضیه ۵.۱. فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی بسنده باشد و  $p \in \delta_R(S)$ . آنگاه موارد زیر معادلند.

(۱)  $p \in K(\beta S)$

(۲) برای هر  $p \in A$ ،  $\{s \in S : s^{-1}A \in p\}$  به طور جزئی متصل است.

(۳) برای هر  $p, q \in \overline{L(p)}$ ،  $p \in (\beta S * q) * p$ .

برای  $H \in \mathcal{P}_f(S)$ ،  $L(H) = \bigcap_{s \in H} L(s)$  تعریف می‌کنیم. نیمگروه  $(S, *)$  جزئی بسنده چپ می‌نامیم هرگاه  $L(H) \neq \emptyset$  باشد. همچنین معرفی می‌کنیم  $R(x) = \{s \in S : x * s \text{ تعریف شده است}\}$ .

تعریف ۶.۱. سه تایی  $(S, *, \tau)$  را یک نیمگروه جزئی بسنده چپ توپولوژیکی راست می‌نامیم هرگاه  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی بسنده چپ،  $(S, \tau)$  یک فضای توپولوژیکی و نگاشت  $r_s: \overline{L(s)} \rightarrow S$  با ضابطه  $r_s(x) = x * s$  برای هر  $s \in S$  و  $x \in \overline{L(s)}$  پیوسته باشد.

قضیه ۷.۱. فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی بسنده چپ توپولوژیکی راست فشرده باشد. آنگاه،  $E(S) \neq \emptyset$ .

فرض کنید  $(X, \tau)$  یک فضای توپولوژیکی فشرده باشد. مجموعه تمام توابع جزئی روی  $X$  را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\Xi_X^X = \{f : D_f \subseteq X \rightarrow X : f \text{ یک تابع است}\}.$$

برای  $f, g \in \Xi_X^X$  ترکیب توابع  $g \circ f(x) = g(f(x))$  برای  $x \in D_f$  و  $f(x) \in D_g$  تعریف می‌کنیم. آنگاه  $(\Xi_X^X, \circ)$  یک نیمگروه جزئی است و برای هر  $f \in \Xi_X^X$ ،  $L(f) = \{g \in \Xi_X^X : g \circ f, g \in L(f)\}$  در حقیقت برای هر  $f \in \Xi_X^X$ ،  $R_f \subseteq D_g$  تعریف شده است. همچنین  $X_\infty = X \cup \{\infty\}$  تعریف می‌کنیم آنگاه  $\{\infty\}, X \cup \{\infty\}$  یک  $\tau_\infty = \tau_X \cup \{\infty\}$  توپولوژی هاوسدورف روی  $X_\infty$  است و  $(X_\infty, \tau_\infty)$  یک فضای توپولوژیکی هاوسدورف فشرده می‌باشد. واضح است که  $\infty$  یک نقطه تنهای  $X_\infty$  است. برای هر  $f \in \Xi_X^X$ ، تابع  $f_\infty: X_\infty \rightarrow X_\infty$  با ضابطه‌ی

$$f_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ \infty & x \notin D_f. \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

<sup>8</sup>partially piecewise syndetic

لم ۸.۱. فرض کنید  $(X, \tau)$  یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده باشد.

(۱)  $(\Xi_X^X, \circ)$  یک نیمگروه جزئی است.

(۲) تابع  $\varphi : f \mapsto f_\infty : \Xi_X^X \rightarrow X_\infty^{X_\infty}$  دوسویی است.

(۳) برای هر  $g \in \Xi_X^X$  و هر  $f \in L(g)$  داریم  $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$ .

فرض کنید  $\tau = \{\varphi^{-1}(U) : X_\infty^{X_\infty} \text{ در } U \text{ باز است}\}$  از آنجاکه  $\varphi : \Xi_X^X \rightarrow X_\infty^{X_\infty}$  دوسویی و  $X_\infty^{X_\infty}$  با توپولوژی حاصلضربی یک فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده است. از آنجاییکه  $\tau$  یک توپولوژی روی  $\Xi_X^X$  و  $\varphi$  پیوسته است بنابراین  $\Xi_X^X$  و  $X_\infty^{X_\infty}$  همسان ریخت هستند. تور  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$  به طور نقطه وار در  $\Xi_X^X$  به  $f$  همگراست اگر برای هر  $x \in \bigcap_{n=1}^\infty \text{Dom } f_n$  رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$\lim_{\alpha} f_\alpha(x) = f(x) \iff \lim_{\alpha} \varphi(f_\alpha)(x) = \varphi(f)(x).$$

لم ۹.۱. فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیکی فشرده باشد. آنگاه،  $\Xi_X^X$  یک نیمگروه جزئی توپولوژیکی راست است.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید  $(X, \tau)$  یک فضای توپولوژیکی باشد آنگاه برای هر  $f, \lambda_f \in \Xi_X^X$  پیوسته است اگر و تنها اگر  $f$  پیوسته باشد.

فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی باشد. سیستم  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$  را یک  $(P.S.P.D.S)$  مینیمال جهانی می‌نامیم هرگاه  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$   $(P.S.P.D.S)$  مینیمال باشد و برای هر  $\varphi : X \rightarrow Y$   $(P.S.P.D.S)$  دیگری چون  $(Y, \{R_s\}_{s \in S})$ ، تابع پیوسته پوشا  $\varphi : X \rightarrow Y$  به قسمی موجود باشد که شرط  $R_s \circ \varphi = \varphi \circ T_s$  برای هر  $s \in S$  برقرار شود.

قضیه ۱۱.۱. فرض کنید  $(S, *)$  یک نیمگروه جزئی و  $L$  ایده‌آل چپ مینیمال  $(P.S.P.D.S)$  باشد. اگر  $(Y, \{R_s\}_{s \in S})$  یک  $(P.S.P.D.S)$  مینیمال باشد، برای  $y \in Y$  و  $L \subseteq \overline{L(y)}$ ، زوج  $(L, \{\lambda_s\}_{s \in S})$  یک توسعه سیستم دینامیکی نیمگروه جزئی مینیمال  $(Y, \{R_s\}_{s \in S})$  می‌باشد.

اگر  $(X, \{T_s\}_{s \in S})$  یک  $(P.S.P.D.S)$  باشد، آنگاه بستار  $\{T_s : s \in S\}$  در  $\Xi_X^X$  یک نیمگروه جزئی می‌باشد که نیمگروه پوششی جزئی<sup>۹</sup>  $(P.S.P.D.S)$  می‌نامیم. لم زیر نشان می‌دهد نوع خاصی از سیستم‌های نمادین یک  $(P.S.P.D.S)$  است. بدین منظور معرفی می‌کنیم

$$\Omega = \bigcup_{\emptyset \neq A \subseteq S} \{0, 1\}^A \text{ و نیز } \{0, 1\}^A = \{f : A \rightarrow \{0, 1\}\}$$

لم ۱۲.۱. فرض کنید  $(S, *)$  نیمگروه جزئی بسنده باشد. برای هر  $s \in S$  تابع  $T_s : \{0, 1\}^{L(s)*s} \rightarrow \Omega$  با ضابطه  $T_s(f)(t) = f(t*s) = f \circ \rho_s(t)$  را تعریف می‌کنیم. آنگاه،  $(\Omega, \{T_s\}_{s \in S})$  یک  $(P.S.P.D.S)$  می‌باشد. برای  $s \in S$  و  $p \in \overline{R(s)}$ ،  $f \in \{0, 1\}^{L(s)*s}$ ، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$(T_p(f))(s) = 1 \iff \{t \in S : f(t) = 1\} \in s * p.$$

<sup>۹</sup>partial enveloping semigroup

ه.گودرزی و م.ا. توتکابنی

### مراجع

1. J.E. McLeod, *Notions of size in adequate partial semigroups*, PhD diss., Howard University (2001).
2. V. Bergelson, A. Blass and N. Hindman, *Partition theorems for spaces of variable words*, Proceedings of the London Mathematical Society 3 (1994), no. 3, 449-476.
3. A. Ghosh, *A study on some combinatorial sets in partial semigroups*, Asian-European Journal of Mathematics 16 (2023), nol. 02, 2350028.
4. N. Hindman and R. McCutcheon, *VIP systems in partial semigroups*, Discrete Mathematics 240 (2001), 45-70.
5. N. Hindman and D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications*, Walter de Gruyter (2011).

## عملگر الحاقی یک عملگر آمیخته

میثم اسدی پور<sup>۱\*</sup> و حمید رضایی<sup>۲</sup>

<sup>۱،۲</sup> گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج  
 Asadipour.mey@yu.ac.ir  
 rezaei@yu.ac.ir

چکیده. در این مقاله نشان داده ایم که علیرغم وجود عملگرهای دوگان ابردوری، عملگر الحاقی یک عملگر آمیخته، یک عملگر آمیخته نیست و به بیان دیگر هیچ عملگر دوگان آمیخته ای وجود ندارد.

### ۱. پیش‌گفتار

مفهوم ابردوری در واقع بررسی و مطالعه عملگرهای خطی، پیوسته ای است که دارای یک مدار چگال در فضای باناخ زمینه هستند. برای روشن تر شدن مطلب فرض کنیم  $X$  یک فضای باناخ تفکیک پذیر روی میدان اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  باشد، در این صورت عملگر  $T \in B(X)$  را ابردوری گوییم هرگاه به ازای حداقل یک بردار ناصفر  $x \in X$  مدار  $x$  تحت عملگر  $T$  در  $X$  چگال باشد، به عبارت دیگر

$$\overline{Orb(T, x)} := \overline{\{T^k x; k \in \mathbb{N}\}} = X.$$

به عنوان یک کاربرد از قضیه کاتگوری بئر، می توان مشاهده کرد که عملگر  $T$  ابردوری است اگر و فقط اگر برای هر دو زیرمجموعه باز ناتهی  $U$  و  $V$  از  $X$ ، عدد صحیح مثبت  $n$  وجود دارد به طوری که اشتراک  $T^n(U) \cap V$  ناتهی است. بنابراین روی فضاهای باناخ تفکیک پذیر می توان عملگر ابردوری را براساس زیرمجموعه های باز  $X$  معرفی کرد و این مطلب انگیزه ای برای تعریف عملگرهای آمیخته روی فضاهای مذکور

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. عملگر ابردوری، عملگر ضعیف آمیخته، عملگر آمیخته .  
\* سخنران

می شود.  $T \in B(X)$  را یک عملگر آمیخته گوئیم هرگاه به ازای هر دو زیرمجموعه باز ناتهی  $U$  و  $V$  از  $X$ ، عدد صحیح مثبت  $N$  موجود است به طوری که به ازای هر  $n > N$  اشتراک  $T^n(U) \cap V$  ناتهی باشد. تشابه تعاریف عملگرهای تریای توپولوژیک و آمیخته این سوال را مطرح می کند که آیا یک عملگر تریای توپولوژیک وجود دارد که آمیخته نباشد؟ برای مشاهده پاسخ مثبت به این سوال می توان به [۳] مراجعه کرد. بنابراین نمودار زیر برای درک بهتر موارد فوق مناسب است.

عملگر ابردوری  $\Leftrightarrow$  عملگر تریای توپولوژیک  $\Rightarrow$  عملگر آمیخته  $\Rightarrow$  عملگر تریای توپولوژیک

همچنین با فرض وجود دو عملگر آمیخته  $S, T$  و عملگر تریای توپولوژیک  $K$  روی  $X$  می توان به راحتی مشاهده کرد که عملگرهای  $T \oplus K$  و  $T \oplus S$  به ترتیب تریای توپولوژیک و آمیخته هستند. بیان نکته ای حائز اهمیت است که عملگر  $T \in B(X)$  آمیخته است اگر و فقط اگر فضای باناخ تفکیک پذیر  $X$  دارای بعد نامتناهی باشد.

برای کسب اطلاع بیشتر از ویژگی هایی درباره عملگرهای ابردوری، تریای توپولوژیک و آمیخته و ارتباط میان آنها مراجع [۲] و [۳] مفید خواهند بود.

در بخش بعد با معرفی یک مجموعه معین، به این سوال پاسخ خواهیم داد که آیا عملگر  $T \in B(X)$  وجود دارد که دوگان آمیخته باشد؟ با این توضیح که اگر هر دو عملگر  $T$  و  $T^*$  ابردوری (آمیخته) باشند، آنگاه عملگر  $T$  را دوگان ابردوری (آمیخته) گوئیم. به جهت بیان انگیزه بررسی سوال مذکور توضیح این مطلب ضروریست که نویسنده مقاله [۴] وجود یک عملگر دوگان ابردوری روی هر فضای باناخ تفکیک پذیر با بعد نامتناهی که فضای دوگان آن تفکیک پذیر است را اثبات کرده است.

## ۲. دست آوردهای پژوهش

همان طور که در بخش قبل بیان شد در این بخش قصد داریم که به این سوال پاسخ دهیم که آیا عملگر  $T \in B(X)$  وجود دارد که دوگان آمیخته باشد؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا مجموعه حدی بردار  $x \in X$  تحت عملگر  $T$  را که با نماد  $L_T(x)$  نمایش می دهیم معرفی می کنیم و سپس به کمک این مجموعه نشان خواهیم داد که هیچ عملگر آمیخته روی فضای باناخ تفکیک پذیر  $X$  وجود ندارد به طوری که عملگر  $T^*$  روی فضای  $X^*$ ، آمیخته باشد.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم  $T \in B(X)$  و بردار  $x \in X$ . در این صورت مجموعه حدی بردار  $x$  تحت  $T$  را با نماد  $L_T(x)$  نشان می دهیم و شامل همه بردارهای  $y \in X$  است که به ازای یک دنباله صعودی اکید  $\{k_n\}_n$  از اعداد صحیح مثبت، دنباله  $\{T^{k_n}x\}_n$  همگرا به  $y$  است.

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره این تعریف می توان به [۱] مراجعه کرد. قضیه بعد در واقع توصیف یک بردار ابردوری برای عملگر ابردوری برحسب تعریف بالاست.

عملگر الحاقی یک عملگر آمیخته

**قضیه ۲.۲.** فرض کنیم  $T \in B(X)$  و بردار  $x \in X$ . در این صورت  $x$  یک بردار ابردوری برای  $T$  است اگر و فقط اگر  $L_T(x) = X$ .

برهان. فرض کنیم  $x$  یک بردار ابردوری برای  $T$  است. همچنین فرض کنیم عدد حقیقی مثبت  $r$  و عدد صحیح نامنفی  $k$  داده شده اند. با توجه به اینکه  $X$  یک فضای باناخ و فاقد نقطه تنها است بنابراین

$$B(T^k x, r) \cap X \setminus \{T^k x\} \neq \emptyset.$$

در نتیجه عدد صحیح  $k_r > k$  وجود دارد به طوری که

$$T^{k_r} x \in Orb(T, x) \cap B(T^k x, r)$$

و این به معنی آنست که  $T^k x \in L_T(x)$  و یا اینکه  $Orb(T, x) \subseteq L_T(x)$ . با توجه به اینکه مجموعه  $L_T(x)$  در واقع مجموعه نقاط حدی مجموعه مدار  $Orb(T, x)$  است، در نتیجه از بسته بودن آن شمول

$$X = \overline{Orb(T, x)} \subseteq L_T(x)$$

حاصل می شود. اثبات در جهت دیگر قضیه بدیهی است و بنابراین اثبات کامل است.

□

برای حصول هدف اصلی این مقاله، نتیجه زیر از قضیه قبل، مفید خواهد بود.

**نتیجه ۳.۲.** فرض کنیم عملگر  $T \in B(X)$  دوگان ابردوری است. در این صورت بردار ناصفر  $x^*$  از  $X^*$  وجود دارد به طوری که مجموعه  $L_{T^*}(x^*)$  ناتهی است.

قضیه زیر را می توان قضیه اصلی این مقاله معرفی کرد.

**قضیه ۴.۲.** فرض کنیم عملگر  $T \in B(X)$  یک عملگر آمیخته است. آنگاه به ازای هر بردار ناصفر  $x^* \in X^*$  مجموعه  $L_{T^*}(x^*)$  یک مجموعه تهی است.

برهان. برای رسیدن به یک تناقض فرض می کنیم به ازای یک بردار ناصفر  $x^* \in X^*$  مجموعه  $L_{T^*}(x^*)$  ناتهی است. بنابر تعریف ۱.۲ یک دنباله اکیداً صعودی  $\{k_n\}_n$  شامل اعداد صحیح مثبت وجود دارد به طوری که دنباله  $\{(T^*)^{k_n} x^*\}_n$  در  $X^*$  همگرا و می توان عدد  $M$  را به عنوان یک کران این دنباله در نظر گرفت. اکنون دو مجموعه باز

$$U = \{x \in X; \|x\| < 1\}, \quad V = (x^*)^{-1} \left( \overline{B(\circ, M)} \right)^c$$

را در نظر گرفته و آمیخته بودن عملگر  $T$  وجود عدد صحیح مثبت  $N$  را تضمین می کند به طوری که به ازای هر صحیح  $m > N$  اشتراک  $T^m(U) \cap V$  ناتهی است. اکنون اگر عدد صحیح مثبت  $n$  را به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته به طوری که  $k_n \geq N$ ، آنگاه بردار  $x \in U$  وجود دارد به طوری که  $T^{k_n} x \in V$  و این تناقض

$$M < |\langle T^{k_n} x, x^* \rangle| = |\langle x, (T^*)^{k_n} x^* \rangle| \leq \|(T^*)^{k_n} x^*\|$$

را نتیجه می دهد. بنابراین به ازای هر بردار ناصفر  $x^* \in X^*$  مجموعه  $L_{T^*}(x^*)$  یک مجموعه تهی است.

□

م. اسدی پور و ح. رضایی

اکنون می توان نتیجه زیر را با توجه به نتیجه ۳.۲ و قضیه ۴.۲ را ارائه داد.  
نتیجه ۵.۲. عملگر الحاقی هر عملگر آمیخته روی فضای  $X$ ، عملگری آمیخته نیست.

### مراجع

1. M. Asadipour and B. Yousefi, *On some properties of J-class operators*, Commun. Korean Math. Soc. 34 (2019), no. 1, 145-154.
2. F. Bayart and E. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
3. K.G. Grosse-Erdmann and A. Peris, *Linear Chaos*, Springer, 2011.
4. H. Salas, *A Hypercyclic Operator whose Adjoint is Also Hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 765-770.

## بررسی نگاشت‌های خطی روی جبرهای عملگری

امیر حسین مختاری<sup>۱\*</sup>

دانشکده فنی و مهندسی فردوس، دانشگاه بیرجند  
*a.mokhtari@birjand.ac.ir*

چکیده. فرض کنید  $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$  یک جبر عملگری استاندارد روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  با بعد بزرگتر از یک و نسبت به عمل الحاقی بسته باشد. در این مقاله، همه نگاشت‌های خطی  $\delta, \tau : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  که در خاصیت زیر صدق می‌کنند به طور کامل مشخص می‌شوند.

$$A, B \in \mathcal{A}, AB^* = 0 \implies A\tau(B)^* + \delta(A)B^* = 0$$

### ۱. پیش‌گفتار

در این مقاله<sup>۱</sup>، همه جبرها و فضاها ی برداری روی اعداد مختلط و همه جبرها را شرکت‌پذیر در نظر می‌گیریم. اگر  $\mathcal{A}$  یک جبر و  $\mathcal{M}$  یک  $\mathcal{A}$ -دومدول باشد، نگاشت خطی  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$  یک اشتقاق نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $a, b \in \mathcal{A}$  داشته باشیم

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

از بین مسائل مربوط به اشتقاق‌ها، می‌توانیم به توصیف و خواص نگاشت‌هایی که در شرط زیر صدق می‌کنند اشاره کنیم.

$$a, b \in \mathcal{A}, ab = 0 \implies a\delta(b) + \delta(a)b = 0.$$

اخیراً، مسئله مشخصه سازی نگاشت‌های خطی روی  $\mathcal{A}$ -جبرها مانند اشتقاق‌ها در عناصر متعامد در چندین حالت مورد بررسی قرار گرفته است که یکی از این حالات در ادامه آمده است.

---

2020 Mathematics Subject Classification. 47L10, 47C10, 47B49, 47B47.

واژگان کلیدی. جبر عملگری استاندارد، اشتقاق،  $\mathcal{A}$ -جبر، عناصر متعامد.

\* سخنران

<sup>۱</sup> این مقاله برگرفته از مقاله مشترک [۵] می‌باشد.

۱. مختاری

فرض کنیم  $B$  یک  $*$ -جبر و  $A$  یک  $*$ -زیرجبر  $B$  و  $\delta : A \rightarrow B$  یک نگاشت خطی باشد و شرایط زیر را روی  $\delta$  در نظر بگیریم.

$$a, b \in A, ab^* = 0 \implies a\delta(b)^* + \delta(a)b^* = 0 \quad (1.1)$$

$$a, b \in A, a^*b = 0 \implies a^*\delta(b) + \delta(a)^*b = 0 \quad (2.1)$$

قهرمانی در [۳] شرایط بالا را برای حالتی که  $A = L^1(G), B = M(G)$  و  $\delta$  یک نگاشت خطی پیوسته است مورد بررسی قرار داده است.

در مقاله [۲]، نگاشت‌های خطی پیوسته  $\delta : A \rightarrow B$  که در خاصیت (۱.۱) صدق کنند با فرض این‌که  $A$  یک  $C^*$  جبر و  $B = A^{**}$  مورد بررسی قرارگرفت و نشان داده شد که نگاشت  $*$ -اشتقاق پیوسته  $d : A \rightarrow A^{**}$  و عنصر  $v \in A^{**}$  موجود است به طوری که برای هر  $a \in A$  داشته باشیم  $\delta(a) = d(a) + va$ .

## ۲. نتایج اصلی

فرض کنیم  $A$  یک جبر و  $\Upsilon(A)$  مجموعه همه ترکیبات خطی خودتوان‌های  $A$  را مشخص کند. به منظور اثبات نتیجه اصلی این مقاله به لم بعدی نیاز داریم که اثباتش در [۴] آمده است.

لم ۱.۰۲ [۴، قضیه ۱.۰۳] فرض کنیم  $A$  یک جبر یک‌دار با عنصر یکه  $1$  و  $\mathcal{X}$  یک فضای برداری و  $\phi : A \times A \rightarrow \mathcal{X}$  یک نگاشت دوخطی باشد که برای  $a, b \in A$  در شرط زیر صدق کند.

$$ab = 0 \implies \phi(a, b) = 0$$

آنگاه برای هر  $a \in A$  و  $x \in \Upsilon(A)$  داریم

$$\phi(a, x) = \phi(ax, 1), \quad \phi(x, a) = \phi(1, xa)$$

تا آخر این بخش  $A$  را یک جبر عملگر استاندارد در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  با بعد بزرگتر یا مساوی  $2$  در نظر می‌گیریم که تحت عملیات الحاقی بسته است. حال قضیه اصلی مقاله را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۰۲. اگر  $\delta, \tau : A \rightarrow B(\mathcal{H})$  نگاشت‌های خطی باشند که برای  $A, B \in A$  در شرط زیر صدق کنند

$$AB^* = 0 \implies A\tau(B)^* + \delta(A)B^* = 0,$$

آنگاه توابع  $R, S, T \in B(\mathcal{H})$  موجودند به طوری که برای هر  $A \in A$  داشته باشیم

$$\delta(A) = AS - RA; \quad \tau(A) = T^*A - AS^*$$

در ادامه قضیه مشابهی را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۰۲. اگر  $\delta, \tau : A \rightarrow B(\mathcal{H})$  نگاشت‌های خطی باشند که برای  $A, B \in A$  در شرط زیر صدق کنند

$$A^*B = 0 \implies A^*\tau(B) + \delta(A)^*B = 0,$$

آنگاه توابع  $R, S, T \in B(\mathcal{H})$  موجودند به طوری که برای هر  $A \in A$  داریم

$$\delta(A) = S^*A - AR^*; \quad \tau(A) = AT - SA$$

نگاشت‌های خطی روی جبرهای عملگری

از دو قضیه قبل نتیجه زیر حاصل می‌شود که اثبات آن در [۱] آمده است که در واقع قضایای قبل گسترشی از [۱، قضیه ۴.۲] می‌باشد.

نتیجه ۴.۲. نگاشت خطی  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  را در نظر می‌گیریم.  
(۱) اگر  $\delta$  در شرط زیر صدق کند

$$AB^* = 0 \implies A\delta(B)^* + \delta(A)B^* = 0,$$

آنگاه نگاشت‌های  $R, S \in B(\mathcal{H})$  موجودند آن‌چنان که برای هر  $A \in \mathcal{A}$  و  $ReS \in Z(B(\mathcal{H}))$  داریم

$$\delta(A) = AS - RA.$$

(۲) اگر  $\delta$  در شرط زیر صدق کند

$$A^*B = 0 \implies A^*\delta(B) + \delta(A)^*B = 0,$$

آنگاه نگاشت‌های  $S, T \in B(\mathcal{H})$  موجودند آن‌چنان که برای هر  $A \in \mathcal{A}$  و  $ReS \in Z(B(\mathcal{H}))$  داریم

$$\delta(A) = AT - SA.$$

#### مراجع

1. A. Barari, B. Fadaee and H. Ghahramani, *Linear maps on standard operator algebras characterized by action on zero products*, Bull. Iran. Math. Soc. 45 (2019), 1573-1583
2. B. Fadaee and H. Ghahramani, *Linear maps on  $C^*$ -algebras behaving like (anti-)derivations at orthogonal elements*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43 (2020), 2851-2859.
3. H. Ghahramani, *Linear maps on group algebras determined by the action of the derivations or anti-derivations on a set of orthogonal elements*, Results Math. 73 (2018), 132-146.
4. H. Ghahramani, *On derivations and Jordan derivations through zero products*, Operator Matrices 8 (2014), 759-771.
5. H. Ghahramani and A.H. Mokhtari, *Characterizing linear maps of standard operator algebras through orthogonality*, Acta Sci. Math. (Szeged) 88 (2022), 777-786.

## یک ثابت هندسی برای فضاهای باناخ بر مبنای P-فاصله زاویه ای

نادر حجتی<sup>۱</sup> \* و فرزاد دادی پور<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم و فناوری های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان  
*n.hojati@student.kgut.ac.ir*  
*f.dadipour@kgut.ac.ir*

چکیده. در این مقاله ضمن معرفی یک ثابت هندسی برای فضاهای باناخ بر مبنای مفهوم  $p$ -فاصله زاویه ای، کران های بالا و پائین آن را تعیین می کنیم. همچنین با بررسی اینکه اخذ کران پائین یک مشخصه سازی برای فضاهای ضرب داخلی است و این که اخذ کران بالا برای ثابت منتسب به فضای باناخ  $l^\infty$  رخ می دهد، نشان می دهیم این کران های بالا و پائین بهترین انتخاب ممکن می باشند. در پایان رابطه ثابت معرفی شده با مدول تحدب فضای زمینه را به دست می آوریم.

### ۱. پیشگفتار

در طول سالیان متمادی پرداختن به مفاهیم مرتبط با ثابت های هندسی از قبیل: معرفی ثابت برای فضاهای نرم دار، گسترش ثابت های تعریف شده، بررسی ویژگی های هندسی فضای مورد بحث بر مبنای تعیین ثابت آن و همچنین تعیین جایگاه فضای مربوطه از رده فضاهای باناخ تا فضاهای هیلبرت مورد توجه پژوهشگران این حوزه بوده است. یکی از مسیرهای معرفی ثابت های هندسی بر مبنای تحلیل نامساوی های تابعی می باشد. نامساوی دانکل و ویلیامز به عنوان بهبودی از نامساوی مثلثی برای بردارهای یکه، به صورت زیر بیان شد. [۱] در هر فضای نرم دار  $X$  برای هر دو عنصر غیر صفر  $x, y \in X$  داریم.

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|} \quad (1.1)$$

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 46B20; Secondary 47A30.

واژگان کلیدی. فضای باناخ،  $p$ -فاصله زاویه ای، ثابت دانکل-ویلیامز، مدول تحدب.  
\* سخنران

نامساوی دانکل-ویلیامز بهبودها، تعمیم ها و معکوس های متنوعی دارد که در طول سالیان مورد مطالعه و بررسی محققان و پژوهشگران متعددی قرار گرفته، همچنین مطالعه هندسه فضاهای باناخ بر مبنای نامساوی دانکل-ویلیامز اجزاء و نسبت های به کار رفته در آن مورد توجه علاقمندان این حوزه واقع شده است. کرک واسمایلی نشان دادند. که اگر در نامساوی (۱.۱) به جای ۴ عدد ۲ را قرار دهیم به یک مشخصه سازی برای فضاهای هیلبرت می رسیم. کوچکترین عددی که می تواند به جای ۴ در نامساوی (۱.۱) جایگزین شود، معیاری است. برای آن که نشان دهد، فضای زمینه چه میزان به فضای هیلبرت نزدیک یا دور است. این عدد را در سال ۲۰۰۸ آقای ملادو و همکارانشان [۲] ثابت دانکل ویلیامز نامیده و به صورت زیر تعریف کردند.

(۲.۱)

$$DW(X) := \sup \left\{ \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x - y\|} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| : x, y \in X, x \neq 0, y \neq 0, x \neq y \right\}$$

همچنین بدست آوردند که در هر فضای باناخ  $2 \leq DW(X) \leq 4$  و اگر  $DW(X) = 2$  فقط اگر  $X$  فضای هیلبرت باشد. اخیراً فو و همکارانشان در سال ۲۰۲۳ و ۲۰۲۴ با محدود کردن بردارها در رابطه (۲.۱) به بردارهایی که به معنای تعامد متساوی الساقین، تعامد سینگر و تعامد بیرخوف برهم عمودباشند، ضمن معرفی ثابت های جدید  $DW_I(X)$ ,  $DW_S(X)$  و  $DW_B(X)$  برای فضاهای باناخ، کران های بالا و پایین این ثابت ها را بدست آورده و به مطالعه هندسه فضاهای زمینه پرداختند [۳].

## ۲. نتایج اصلی

در این بخش ابتدا ثابت  $DW_{p,q}(X)$  را به عنوان گسترش ثابت دانکل-ویلیامز معرفی می کنیم و ضمن یافتن کران های بالا و پایین آن، نشان می دهیم که این کران ها بهترین انتخاب ممکن می باشند. به علاوه ثابت  $DW_{p,q}(X)$  طیفی از فضاهای نرم دار را به دست می آوریم و در ادامه رابطه این ثابت نوتعریف را با مدول تحذب بررسی می نماییم. اما نخست به یاد آوری مفاهیم فاصله زاویه ای و  $p$ -فاصله زاویه ای می پردازیم. فرض کنید  $(X, \|\cdot\|)$  یک فضای نرم دار باشد، فاصله زاویه ای یا فاصله کلارکسون بین دو بردار غیر صفر  $x, y \in X$  به صورت  $\alpha[x, y] := \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$  تعریف می شود. در سال ۲۰۰۶ مالیگراندا  $p$ -فاصله زاویه ای  $(p \in \mathbb{R})$  بین دو بردار غیر صفر  $x, y \in X$  را به عنوان تعمیمی از فاصله زاویه ای به صورت زیر ارائه داد.

$$\alpha_p[x, y] := \left\| \frac{x}{\|x\|^{1-p}} - \frac{y}{\|y\|^{1-p}} \right\|$$

در ادامه ثابت  $DW_{p,q}(X)$  را برای فضای نرم دار  $(X, \|\cdot\|)$  تعریف می کنیم، فرض کنید  $p \in [0, 1)$  و  $q > 0$  مفروض باشند، به ازای هر دو بردار متمایز و غیر صفر  $x$  و  $y$  قرار می

دهیم:

$$f_{p,q}(x, y) := \frac{(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q})^{\frac{1}{q}}}{\|x - y\|} \alpha_p[x, y] \quad (1.2)$$

اینک ثابت  $DW_{p,q}(X)$  را چنین تعریف می کنیم:

$$DW_{p,q}(X) := \sup\{f_{p,q}(x, y) : x, y \in X, x \neq \circ, y \neq \circ, x \neq y\} \quad (2.2)$$

با توجه به روابط (۲.۱)، (۱.۲) و (۲.۲) مشاهده می شود که  $DW_{0,1}(X) = DW(X)$  و لذا ثابت  $DW_{p,q}(X)$ ، مفهوم ثابت دانکل-ویلیامز را به هر عدد  $p \in [0, 1)$  و  $q > 0$  گسترش می دهد. در قضیه زیر ضمن تعیین کران های بالا و پایین برای ثابت  $DW_{p,q}(X)$  نشان می دهیم اخذ کران پایین برای این ثابت نوتعریف، رده فضاهای ضرب داخلی را مشخصه سازی می کند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید  $(X, \|\cdot\|)$  یک فضای نرم دار باشد و  $p \in [0, 1)$  و  $q > 0$  را دلخواه می گیریم. گزاره های زیر برقرار می باشند:

$$(i) \quad DW_{p,q}(X) \in [2^{\frac{1}{q}}, 2^{\frac{1}{q}}(2-p)]$$

$$(ii) \quad DW_{p,q}(X) = 2^{\frac{1}{q}} \text{ اگر و فقط اگر نرم } \|\cdot\| \text{ از یک ضرب داخلی القا شود.}$$

در مثال بعدی ضمن محاسبه  $DW_{p,q}(l^\infty)$  نشان می دهیم عدد  $2^{\frac{1}{q}}(2-p)$  به عنوان کران بالای  $DW_{p,q}(X)$  بهترین انتخاب ممکن است.

مثال ۲.۲. فضای باناخ  $l^\infty$  مشتمل بر همه دنباله های کراندار را با نرم زیر در نظر می گیریم.  $\|x\| = \sup_{j \in N} |\xi_j|$  فرض کنیم  $x = (\xi_j)_{j \in N}$  و  $y_t = (1-t, 1+t, \dots)$  در آن عدد مثبت دلخواه و به اندازه کافی کوچک است، آنگاه داریم.

$$DW_{p,q}(l^\infty) = 2^{\frac{1}{q}}(2-p)$$

در ادامه با استفاده از نامساوی های نرم دار رابطه بین ثابت  $DW_{p,q}(X)$  با مدول تحدب [۴] را بررسی می کنیم اما نخست به یادآوری مفهوم مدول تحدب فضاهای نرم دار می پردازیم. فضای نرم دار  $(X, \|\cdot\|)$  مفروض است. تابع  $\delta_X : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$  با ضابطه

$$\delta_X(\epsilon) := \inf\{1 - \|\frac{1}{2}(x+y)\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \epsilon\}$$

مدول تحدب  $X$  نامیده می شود، مدول تحدب را می توان معیاری برای سنجش اینکه دایره یک فضای زمینه چقدر گرد است، انگاشت. این معیار به ازای همه وترهای هم طول، تعیین می کند که نقطه میانی این وترها چقدر تا کره یک فاصله دارند و فاصله کمینه را به دست می آورد. در ادامه ارتباط بین مدول تحدب و ثابت  $DW_{p,q}(X)$  را بدست می آوریم.

قضیه ۳.۲. اگر  $X$  فضای باناخ باشد و  $p \in [0, 1)$ ،  $q \in (0, 1]$  آنگاه داریم

$$DW_{p,q}(X) \leq \sup_{0 \leq t \leq 2} \min\left\{2^{\frac{1}{q}+1} - 2^{\frac{1}{q}} \delta_X(t), 2^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{1}{q}} t\right\}.$$

### مراجع

1. C.F. Dunkl and K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly. 71 (1964), no. 71, 53–54.
2. A. Jimenez-Melado, E. Llorens-Fuster and E.M. Mazcuñan-Navarro, *The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 342 (2008), 298-310.
3. Y. Fu, Y. Li, H. Xie *The Dunkl-Williams constant related to Birkhoff orthogonality in Banach spaces*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 50 (2024), no. 16.
4. Z. Yang, Y. Li, *A New Geometric Constants in Banach Spaces Related to the Isosceles Orthogonality*, Kyungpook Math. J. 62 (2022), 271-287.

# آمار و احتمال

## ویژگی خودتوانی آماره نوردای ماکسیمال از دیدگاه نظریه گروه‌ها

مهدی شمس\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان  
 mehdishams@kashanu.ac.ir

چکیده. در این مقاله ثابت می‌شود ترکیب براوردگرهای هم‌وردا با آماره نوردای ماکسیمالی که از روی براوردگر هم‌وردا ساخته می‌شود، عضو خنثی عمل گروه را می‌دهد. در پایان، برای براوردگر هم‌وردای ضعیف، این مسئله تعمیم داده می‌شود.

### ۱. مقدمه

پس از خلاصه کردن داده‌ها توسط آماره، به دنبال روش‌هایی برای پیدا کردن براوردگرهای بهینه هستیم که یکی از این روش‌ها استفاده از اصول نوردایی است. ایتون [۲] روشی برای ساختن آماره نوردای ماکسیمال بر حسب یک تابع هم‌وردا ارائه داد. شمس [۵] روش ایتون را برای براوردگرهای هم‌وردای ضعیف گسترش داد. در این مقاله، بعد از بیان مفاهیم مقدماتی، رابطه بین آماره نوردای ماکسیمال با براوردگر هم‌وردای متناظر و همچنین ویژگی خودتوانی آماره نوردای ماکسیمال مشخص شده و از این طریق رابطه بین درایه‌های آماره‌های نوردای ماکسیمال پیدا می‌شود. در پایان این حالت برای براوردگرهای هم‌وردای ضعیف تعمیم داده می‌شود.

گروه  $G$  با عمل  $*$  که در آن تابع روی  $G \times G$  به  $G$  با ضابطه  $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2^{-1}$  پیوسته است را گروه توپولوژیکی نامند. اگر این گروه روی فضای  $\mathcal{X}$  عمل کند، در این حالت  $\mathcal{X}$  را  $G$ -فضا می‌نامند. برای یک  $G$ -فضا مانند  $\mathcal{X}$ ، مجموعه  $Gx = \{g \times x : g \in G\}$  مدار  $G$  روی  $x \in \mathcal{X}$  و مجموعه  $G_x = \{g : g \times x = x\}$  را ثابت‌ساز  $G$  در  $x$  می‌نامند [۱]. اگر  $\mathcal{X}$  و  $\mathcal{Y}$  دو  $G$ -فضا باشند و عمل گروه  $G$  روی آنها به ترتیب با  $\times$  و  $\otimes$  نشان داده

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 54H11; Secondary 62F10.

واژگان کلیدی. آماره نوردای ماکسیمال، براوردگر هم‌وردا، خانواده مکان و مقیاس، تابع همگن درجه یک.

\* سخنران

شود و تابع  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} : f$  اندازه‌پذیر باشد، در این صورت،  $f$  را  $G$ -هم‌وردآگویند، اگر برای هر  $x \in \mathcal{X}$  و  $g \in G$   $f(g \times x) = g \otimes f(x)$  [۲]. تابع  $f$  را  $G$ -هم‌وردای ضعیف گویند، اگر خودریختی  $\alpha_f \in \text{Aut}(G)$  وجود داشته باشد که برای هر  $x \in \mathcal{X}$  و  $g \in G$   $f(g \times x) = \alpha_f(g) \otimes f(x)$  [۵]. تابع  $f$  را  $G$ -ناوردآگویند، اگر برای هر  $x \in \mathcal{X}$  و  $g \in G$   $f(g \times x) = f(x)$  [۴]. تابع  $f$  را  $G$ -ناوردای ماکسیمال گویند، هرگاه  $f(x_1) = f(x_2)$  نتیجه دهد برای یک  $g \in G$   $x_1 = g \times x_2$ . تابع  $f$  را  $G$ -تک‌وردا گویند، هرگاه برای هر  $x \in \mathcal{X}$   $G_x = G_{f(x)}$  [۵]. عمل  $G$  روی  $\mathcal{X}$  آزاد است، هرگاه برای هر  $x \in \mathcal{X}$   $G_x = \{e\}$  [۱]. عمل  $G$  روی  $\mathcal{X}$  انتقالی است، هرگاه برای یک  $(x, x')$  و بنا بر این برای تمام  $x \in \mathcal{X}$   $G_x = G_{x'}$ . به عبارت دیگر برای هر  $x, x' \in \mathcal{X}$  یک  $g \in G$  وجود داشته باشد که  $x' = g \times x$  [۱]. عمل  $G$  روی  $\mathcal{X}$  بدیهی است، هرگاه برای هر  $x \in \mathcal{X}$   $G_x = G$  [۱]. قابل ذکر است، در مواقعی که دچار ابهام نشویم، عمل گروه نظیر  $g \times x$  را با نماد  $gx$  نشان می‌دهیم.

ایتون [۲]، در قضیه زیر روشی برای محاسبه آماره ناوردای ماکسیمال به کمک توابع هم‌وردا ارائه کرد.

لم ۱.۱. برای تابع هم‌وردای  $G \rightarrow \mathcal{X} : \tau$ ، تابع  $f(x) = (\tau(x))^{-1}x$  یک آماره ناوردای ماکسیمال است [۲].

قضیه زیر تعمیم لم ۱.۱ برای یافتن آماره‌های ناوردای ماکسیمال توسط براوردگرهای هم‌وردای ضعیف است.

قضیه ۲.۱. فرض کنید تابع  $\delta : \mathcal{X} \rightarrow G$  هم‌وردای ضعیف باشد، یعنی برای هر  $g \in G$  و  $x \in \mathcal{X}$  یک  $\alpha \in \text{Aut}(G)$   $\beta(g) = (\alpha(g))^{-1}g \in G_x$ ، در این صورت تابع  $f(x) = (\delta(x))^{-1}x$  یک آماره ناوردای ماکسیمال است [۵].

گزاره ۳.۱. اگر  $\mathcal{X}$ ،  $\mathcal{Y}$  و  $\mathcal{Z}$ ، سه  $G$ -فضا باشند، در این صورت اگر  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  هم‌وردا و تک‌وردا و  $h : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  ناوردای ماکسیمال باشد، در این صورت  $k_1 = h \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  ناوردای ماکسیمال است.

۲. ترکیب توابع هم‌وردا با ناوردای ماکسیمال و ویژگی خودتوان بودن

آماره‌های ناوردای ماکسیمال تجزیه مداری یکسانی روی  $\mathcal{X}$  ایجاد می‌کنند و از این جهت معادل یکدیگر هستند. دو مثال زیر، یعنی خانواده مکان (گروه جمعی) و مقیاس (گروه ضربی) مطلب را روشن می‌سازد.

مثال ۱.۲. در یک خانواده با پارامتر مکان، گروه جمعی  $G = \mathbb{R}$  روی  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  با ضابطه  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  عمل می‌کند که  $\mu \times \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mu \mathbf{e}_n = (x_1 + \mu, \dots, x_n + \mu)$  و  $\mu \in \mathbb{R}$   $\mathbf{e}_n = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$  با استفاده از لم ۱.۱ و به‌کارگیری براوردگرهای هم‌وردای  $\delta_1(\mathbf{x}) = \bar{x}$  و  $\delta_2(\mathbf{x}) = x_n$ ، به ترتیب آماره‌های ناوردای ماکسیمال

$$f_1(\mathbf{X}) = (\delta_1(\mathbf{X}))^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{X} - \bar{X}\mathbf{e}_n = (X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$$

و  $f_2(\mathbf{X}) = (\delta_2(\mathbf{X}))^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X} - X_n \mathbf{e}_n = (X_1 - X_n, \dots, X_{n-1} - X_n, 0)$  ساخته می‌شوند که افزایهای یکسانی روی  $\mathcal{X}$  تولید می‌کنند. مشاهده می‌شود ترکیب برآوردگر هم‌وردا با آماره ناوردای ماکسیمال عضو خنثی گروه جمعی یعنی  $0$  را می‌دهد، یعنی  $\delta_1(f_1(\mathbf{x})) = 0$  و  $\delta_2(f_2(\mathbf{x})) = 0$ . در حقیقت ترکیب برآوردگر هم‌وردا با آماره ناوردای ماکسیمال  $f_1$  رابطه بین درایه‌های آماره‌های ناوردای ماکسیمال را تعیین می‌کند که میانگین درایه‌های آماره برابر با عضو خنثی گروه جمعی هست. همچنین  $f_1 \circ f_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$  و  $f_2 \circ f_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$  که نشان می‌دهد آماره‌های ناوردای ماکسیمال  $f_i$  خودتوان هستند (ترکیب تابع با خودش، برابر خود تابع است) و چون تابع  $k(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = (a_2 - a_1, \dots, a_{n-2} - a_{n-1}, a_{n-1})$  یک تناظر یک‌به‌یک بین  $f_2(\mathbf{X}) = (X_1 - X_2, X_2 - X_3, \dots, X_{n-1} - X_n)$  و  $f_3(\mathbf{X}) = (X_1 - X_2, X_2 - X_3, \dots, X_{n-1} - X_n)$  ایجاد می‌کند و لذا  $f_3(\mathbf{X})$  نیز ناوردای ماکسیمال است. اکنون می‌توان از گزاره ۳.۱ استفاده کرد و برای تابع  $G$ -تک‌وردا و  $G$ -هم‌وردا  $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، به صورت  $f_0(\mathbf{x}) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$  این نتیجه حاصل می‌شود که  $k_1(\mathbf{X}) = f_1 \circ f_0(\mathbf{X}) = (X_{(1)} - \bar{X}, \dots, X_{(n)} - \bar{X})$  و  $k_2(\mathbf{X}) = f_2 \circ f_0(\mathbf{X}) = (X_{(1)} - X_{(n)}, \dots, X_{(n-1)} - X_{(n)}, 0)$  نیز ناوردای ماکسیمال هستند. به طور مشابه، مشاهده می‌شود که  $\delta_1(k_1(\mathbf{x})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x}) = 0$  و  $\delta_2(k_2(\mathbf{x})) = 0$ ،  $k_2 \circ k_2(\mathbf{x}) = k_2(\mathbf{x})$  و  $k_1 \circ k_1(\mathbf{x}) = k_1(\mathbf{x})$ .

**مثال ۲.۲.** در یک خانواده با پارامتر مقیاس، گروه ضربی  $G = \mathbb{R}^+$  روی

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n - \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_n\}$$

به صورت  $\sigma \times \mathbf{x} = (\sigma x_1, \dots, \sigma x_n)$  عمل می‌کند که در آن  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  و  $\sigma > 0$ . با استفاده از لم ۱.۱ و به کارگیری برآوردگرهای هم‌وردا  $\delta_3(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  و  $\delta_4(\mathbf{x}) = x_{(n)} - x_{(1)}$  به ترتیب  $f_3(\mathbf{X}) = f_3 \circ f_0(\mathbf{X}) = \left( \frac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}, \dots, \frac{X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \right)$  و  $f_4(\mathbf{X}) = \left( \frac{X_1}{X_{(n)} - X_{(1)}}, \dots, \frac{X_n}{X_{(n)} - X_{(1)}} \right)$  و  $\sigma$ -جبر یکسانی تولید کرده و در تناظر یک‌به‌یک با هم هستند. به راحتی مشاهده می‌شود  $f_4 \circ f_4(\mathbf{x}) = f_4(\mathbf{x})$  و  $f_3 \circ f_3(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x})$ ،  $\delta_4(f_4(\mathbf{x})) = 1$ ،  $\delta_3(f_3(\mathbf{x})) = 1$  با استفاده از گزاره ۳.۱، آماره‌های  $k_3(\mathbf{X}) = f_3 \circ f_0(\mathbf{X}) = \left( \frac{X_{(1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}, \dots, \frac{X_{(n)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \right)$  و  $k_4(\mathbf{X}) = f_4 \circ f_0(\mathbf{X}) = \left( \frac{X_{(1)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}, \dots, \frac{X_{(n)}}{X_{(n)} - X_{(1)}} \right)$  نیز ناوردای ماکسیمال هستند.

اکنون می‌خواهیم تعمیم مثال‌های ۱.۲ و ۲.۲ را در حال کلی که یک گروه توپولوژیکی روی فضای متغیر تصادفی عمل می‌کند مطرح کنیم.

**قضیه ۳.۲.** اگر  $\delta: \mathcal{X} \rightarrow G$  یک تابع هم‌وردا و  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ،  $f(x) = (\delta(x))^{-1}x$  ناوردای ماکسیمال باشد، آنگاه  $\delta(f(x)) = e$  و برای هر تابع دلخواه هم‌وردا و تک‌وردا  $\tau: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ،  $\delta(f(\tau(x))) = e$ .

در مثال بعدی، کاربرد قضیه ۳.۲ در مسئله نیل [۳] بررسی و تحلیل می‌شود.

**مثال ۴.۲.** فرض کنید  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \stackrel{i.i.d.}{\sim} f_{X,Y}(x, y) = (\sigma e^{-\sigma x}) (\frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y}{\sigma}})$  که در آن  $x, y, \sigma > 0$ . اگر عمل گروه  $G = \mathbb{R}^+ - \{0\}$  روی  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  و  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^+$  برای هر  $g \in G$ ،  $(z_1, z_2) \in \mathcal{X}$  و  $y \in \mathcal{Y}$ ،  $g \times (z_1, z_2) = (g^{-1}z_1, gz_2)$ ،  $g \otimes y = gy$  باشد، رده توابع  $G$ -هموردای  $\delta : \mathcal{X} \rightarrow G$  به صورت  $\delta(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{z_2/z_1}}{\psi(\sqrt{z_1 z_2})}$  هستند که  $\psi : G \rightarrow G$  یک تابع دلخواه روی گروه است. با توجه به لم ۱.۱، تابع  $f(z_1, z_2) = (\delta(z_1, z_2))^{-1}(z_1, z_2) = \left( \frac{\sqrt{z_1 z_2}}{\psi(\sqrt{z_1 z_2})}, \sqrt{z_1 z_2} \psi(\sqrt{z_1 z_2}) \right)$  و نتیجه‌های قضیه ۳.۲ برقرار است، یعنی  $f(f(z_1, z_2)) = f(z_1, z_2)$  و  $\delta(f(z_1, z_2)) = 1$  در حالتی که برای هر  $g \in G$ ،  $\psi(g) = 1$ ،  $\delta(z_1, z_2) = \sqrt{z_2/z_1}$  تابع هموردا و کمک تابع هموردای  $f(z_1, z_2) = (\sqrt{z_1 z_2}, \sqrt{z_1 z_2})$  آماره ناوردای ماکسیمال متناظر با آن است. اکنون به کمک تابع هموردای  $\tau(z_1, z_2) = \zeta(\sqrt{z_2/z_1})$  که  $\zeta$  تابع همگن درجه ۱ است، یعنی برای هر  $x$  و  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ،  $\zeta(\lambda x) = \lambda \zeta(x)$  نیز می‌توان به نتایج مشابه رسید. به راحتی مشاهده می‌شود که  $\tau$  هموردا هست. حال از روی تابع هموردای  $\tau$  به کمک لم ۱.۱، آماره ناوردای ماکسیمال به صورت  $f(z_1, z_2) = \left( \zeta(\sqrt{z_2/z_1}) z_1, \frac{z_2}{\zeta(\sqrt{z_2/z_1})} \right)$  خواهد بود. همچنین  $f(f(z_1, z_2)) = f(z_1, z_2)$  و  $\tau(f(z_1, z_2)) = 1$ .

اکنون قضیه ۳.۲ را در حالت هموردای ضعیف گسترش می‌دهیم.

**قضیه ۵.۲.** تحت شرایط قضیه ۳.۲، برای هر  $x \in \mathcal{X}$ ،  $\delta(f(x)) \in G_x$  و  $f \circ f = f$  همچنین برای هر تابع دلخواه هموردا و تک‌وردای  $\tau : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ،  $\delta(f(\tau(x))) \in G_x$ .

در حالت خاص که گروه  $G$  روی فضای  $\mathcal{X}$  آزاد است، شرط این که برای هر  $g \in G$  و  $x \in \mathcal{X}$ ،  $\alpha(g) = g$  یا به عبارت دیگر  $\alpha = 1_G$  و تابع هموردای ضعیف، همان هموردا خواهد بود و برای هر  $x \in \mathcal{X}$ ،  $\delta(f(x)) \in G_x = \{e\}$  تبدیل می‌شود.

### مراجع

1. A. Deitmar and S. Echterhoff, Principles of Harmonic Analysis, Springer, New York, 2009.
2. M. L. Eaton, Group Invariance Applications in Statistics, Institute of Mathematical Statistics and American Statistical Association, Hayward, California, 1989.
3. R. A Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference*, Hafner, New York, 1973.
4. E. L. Lehmann and J. P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*, 3rd edition, Springer, New York, 2005.
5. M. Shams, 2021, *On weakly equivariant estimators*, Statistical Papers, 62 (2021), no. 4, 1611–1650.

## برآوردیابی بیز پارامتر توزیع ایکس‌گاما بر اساس دو گونه نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار با اندازه نمونه نابرابر

امید رحیمی ده‌چراغی<sup>۱</sup> و سیدمحمدتقی کامل میرمصطفائی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه آمار، دانشگاه مازندران  
orahimi55@gmail.com  
m.mirmostafae@umz.ac.ir

چکیده. در این مقاله، برآوردیابی بیز پارامتر توزیع ایکس‌گاما با استفاده از روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم و مینیم با اندازه نمونه نابرابر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. بر اساس نتایج شبیه‌سازی مقاله، برآوردگرهای مبتنی بر نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با اندازه نمونه نابرابر بهترین عملکرد در بین سه طرح نمونه‌گیری مطرح شده دارد.

### ۱. پیش‌گفتار

در دهه‌های اخیر گونه‌های جدیدی از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار توسط پژوهشگران مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با اندازه نمونه نابرابر یکی از این گونه‌هاست که توسط [۳] با ایده‌ای بسیار نزدیک به [۲] پیشنهاد شده است که در این مقاله، آن را با نماد اختصاری Max نشان می‌دهیم. برای استخراج یک نمونه  $n$  تایی مبتنی بر Max ابتدا  $n$  نمونه به ترتیب به اندازه‌های  $1, 2, \dots, n$  در نظر می‌گیریم و پس از رتبه‌بندی تخمینی هر کدام از این نمونه‌ها، بزرگ‌ترین واحد مرتب شده از هر نمونه برای اندازه‌گیری انتخاب می‌شود. اگر  $Z = \{Z_i; i = 1, \dots, n\}$  نمایانگر نمونه مستخرج مبتنی بر روش Max در یک چرخه باشد، آن‌گاه تحت فرض رتبه‌بندی کامل  $Z_i$  با  $i$  امین آماره مرتب از نمونه‌ای به حجم  $i$  با تابع چگالی احتمال  $f_{(i:i)}(x) = i f(x)[F(x)]^{i-1}$  هم‌توزیع است که در آن  $F(x)$  و

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 62F15; Secondary: 65C60.

واژگان کلیدی. برآوردیابی بیز، توزیع ایکس‌گاما، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار ماکسیم با اندازه نمونه نابرابر، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار مینیم با اندازه نمونه نابرابر.

\* سخنران

$f(x)$  به ترتیب تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال جامعه اصلی می‌باشند. نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار مینیم با اندازه نمونه نابرابر مانند روش Max است با این تفاوت که پس از رتبه‌بندی تخمینی هر کدام از نمونه‌ها، کوچک‌ترین واحد مرتب شده از هر نمونه برای اندازه‌گیری انتخاب می‌شود که در این مقاله، این سبک از نمونه‌گیری را به اختصار با Min نشان می‌دهیم. اگر  $Y = \{Y_i; i = 1, \dots, n\}$  نمایانگر نمونه مستخرج مبتنی بر روش Min در یک چرخه باشد، آن‌گاه تحت فرض رتبه‌بندی کامل  $Y_i$  با اولین آماره مرتب از نمونه‌ای به حجم  $i$  با تابع چگالی احتمال  $f_{(1:i)}(x) = i f(x)[1 - F(x)]^{i-1}$ ، هم‌توزیع است. می‌توان عملیات نمونه‌گیری را در هر یک از روش‌های فوق  $m$  چرخه تکرار نمود. یکی از توزیع‌های جدید طول عمر با انعطاف‌پذیری بالاتر نسبت به توزیع نمایی، توزیع ایکس گاما می‌باشد که توسط [۱۰] معرفی شده است. اگر  $X$  دارای توزیع ایکس گاما با پارامتر  $\theta$  باشد، آن‌گاه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن به ترتیب زیر می‌باشند

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} \left(1 + \frac{\theta}{2} x^2\right) e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0,$$

$$F(x; \theta) = 1 - \frac{1 + \theta + \theta x + \frac{\theta^2}{2} x^2}{1 + \theta} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

برآوردیابی کلاسیک پارامتر توزیع ایکس گاما بر اساس دو گونه نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار با اندازه نمونه نابرابر توسط [۱] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در ادامه، به بررسی برآوردیابی بیز پارامتر توزیع ایکس گاما مبتنی بر روش‌های Max و Min می‌پردازیم.

## ۲. استنباط بیزی مبتنی بر روش‌های Max و Min

فرض کنید  $Z = \{Z_{ji}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  یک نمونه استخراج شده در  $m$  چرخه از توزیع ایکس گاما به حجم  $n_0 = m \times n$  مبتنی بر روش Max باشد و  $z = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{mn})$  نشان‌دهنده نمونه مشاهده شده متناظر باشد. با فرض آن‌که توزیع پیشین برای  $\theta$ ، توزیع گاما با ابر پارامترهای مثبت  $a$  و  $b$  به صورت

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-b\theta} \theta^{a-1} \quad a > 0, b > 0. \quad (1.2)$$

باشد، آن‌گاه تابع چگالی پسین  $\theta$  به شرط  $z$  به صورت زیر است

$$\pi(\theta|z) = \frac{\theta^{2mn+a-1}}{D(1+\theta)^{mn}} \left( \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\theta}{2} z_{ji}^2\right) \right) e^{-\theta \left(b + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n z_{ji}\right)}$$

$$\times \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{1 + \theta + \theta z_{ji} + \frac{\theta^2}{2} z_{ji}^2}{1 + \theta} e^{-\theta z_{ji}} \right]^{i-1}, \quad (2.2)$$

$$D = \int_0^{\infty} \frac{\theta^{2mn+a-1}}{(\lambda + \theta)^{mn}} \left( \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\theta}{\gamma} z_{ji} \right) \right) e^{-\theta \left( b + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n z_{ji} \right)} \\ \times \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{\lambda + \theta + \theta z_{ji} + \frac{\theta^2}{\gamma} z_{ji}^2}{\lambda + \theta} e^{-\theta z_{ji}} \right]^{i-1} d\theta.$$

اگر  $\hat{\theta}$  یک برآوردگر برای پارامتر  $\theta$  باشد، تابع زیان مربع خطا را به صورت  $L_1(\theta, \hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)^2$  و تابع زیان لاینکس [۱۱] به صورت  $L_2(\theta, \hat{\theta}) = e^{c(\hat{\theta} - \theta)} - c(\hat{\theta} - \theta) - 1$  تعریف می‌شوند که در آن  $c \neq 0$  می‌باشد. برآوردهای بیز پارامتر  $\theta$  تحت تابع‌های زیان مربع خطا و لاینکس را در روش Max به ترتیب عبارتند از

$$\hat{\theta}_{S.Max} = \int_0^{\infty} \theta \pi(\theta | z) d\theta, \\ \hat{\theta}_{L.Max} = \frac{-1}{c} \log \left( \int_0^{\infty} e^{-c\theta} \pi(\theta | z) d\theta \right).$$

برای تقریب برآوردهای بیز از الگوریتم متروپلیس-هستینگز بهره می‌گیریم.  
الگوریتم متروپلیس-هستینگز

گام اول: مقدار اولیه پارامتر  $\theta$  یعنی  $\theta_s$  را برآورد درست‌نمایی ماکسیمم در نظر می‌گیریم.  
گام دوم: فرض کنید  $s = 1$  باشد، برای مقدار  $\theta_{s-1}, \theta^*$  را از توزیع نرمال بریده شده به صورت  $N(\theta_{s-1}, \sigma^2) I_{\{\theta > 0\}}$  تولید می‌کنیم. سپس با احتمال

$$P = \min \left\{ \frac{\pi(\theta^* | z) q(\theta_{s-1} | \theta^*)}{\pi(\theta_{s-1} | z) q(\theta^* | \theta_{s-1})}, 1 \right\},$$

قرار می‌دهیم  $\theta_s = \theta^*$ ، که  $q(x|b)$  نمایانگر  $N(b, \sigma^2) I_{\{x > 0\}}$ ، در غیر این صورت قرار می‌دهیم  $\theta_s = \theta_{s-1}$ .

گام سوم: قرار می‌دهیم  $s = s + 1$  و گام دوم را  $S - 1$  بار دیگر تکرار می‌کنیم که  $S$  مقدار بزرگی آن است. فرض کنید  $M$  نقطه برش در الگوریتم باشد، سپس  $\{\theta_{M+1}, \theta_{M+2}, \dots, \theta_S\}$  نمونه تولید شده می‌باشد.

اکنون مقدارهای تقریبی برآوردگر بیز پارامتر  $\theta$  تحت تابع‌های زیان مربع خطا و لاینکس به ترتیب به صورت  $\hat{\theta}_{S.Max}^{MH} = \frac{1}{S^*} \sum_{s=M+1}^S \theta_s$  و  $\hat{\theta}_{L.Max}^{MH} = \frac{-1}{c} \log \left( \frac{1}{S^*} \sum_{s=M+1}^S e^{-c\theta_s} \right)$  است که در آن  $S^* = S - M$  می‌باشد. با رهیافتی مشابه، می‌توان برآوردهای بیز پارامتر  $\theta$  و تقریب‌های آن را مبتنی بر روش Min به دست آورد. همچنین به کمک روش چن و شائو [۴] فاصله‌های باورپذیری برای  $\theta$  یافت.

### ۳. مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، برای ارزیابی عملکرد برآوردگرهای مطرح شده در مقاله و مقایسه آن‌ها یک مطالعه شبیه‌سازی انجام دادیم. تعداد تکرارهای شبیه‌سازی را  $N = 2000$  و حجم نمونه  $n$  و تعداد چرخه  $m$  را به صورت  $(3, 6), (4, 10)$ ، همچنین مقدار پارامتر را  $\theta = 2, 3$  در نظر گرفتیم. برآورد ریسک ( $ER$ ) تحت تابع زیان مربع خطا و به صورت  $ER_{SEL}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta)^2$  و برآورد ریسک تحت تابع زیان لاینکس به صورت  $ER_{LEL}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e^{c(\hat{\theta}_i - \theta)} - c(\hat{\theta}_i - \theta) - 1)$  محاسبه می‌شوند، که  $\hat{\theta}_i$  برآورد به دست آمده برای  $\theta$  در تکرار  $i$  ام شبیه‌سازی است. همچنین در این شبیه‌سازی، معیارهای متوسط طول ( $AW$ ) و احتمال پوشش ( $CP$ ) برای فاصله‌های اطمینان مجانبی و باورپذیری ۹۵٪ محاسبه شده‌اند و نتایج در جدول ۱ گزارش شده‌اند، که نتایج برای حالت کلاسیک در داخل پیرانتز آمده است. با توجه به جدول ۱ در هر دو حالت کلاسیک و بیز می‌توان چنین گفت که برآوردگرهای مربوط به روش Max عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای مربوط به روش‌های Min و نمونه‌گیری تصادفی ساده (که به اختصار با SRS نشان داده می‌شود) دارند. همچنین متوسط طول برآوردگرهای فاصله‌ای ۹۵٪ مبتنی بر روش Max کوچک‌تر از دو طرح دیگر است. محاسبات مربوط به شبیه‌سازی به کمک نرم‌افزار آماری R [۹] و بسته‌های coda [۷، ۸] و truncnorm [۶] انجام شده است.

جدول ۱: نتایج عددی شبیه‌سازی

$\theta$	$(m, n)$		$ER_{SEL}$	$ER_{LEL}(c = +0.5)$	$ER_{LEL}(c = -0.5)$	AW	CP
۲	(۳, ۶)	SRS	۰.۱۶۹۴۷(۰.۱۶۸۳۳)	۰.۲۰۶۹(۰.۲۳۴۸)	۰.۲۱۶۶(۰.۱۹۳۰)	۱.۴۴۵۹۳(۱.۴۷۱۱۱)	۰.۸۵۲۰(۰.۸۵۴۰)
		Max	۰.۴۸۱۱(۰.۴۷۴۷)	۰.۵۵۹۳(۰.۵۰۶۰۸)	۰.۵۶۰۹(۰.۵۵۸۲)	۰.۸۴۳۵۹(۰.۸۵۲۸۶)	۰.۹۴۹۵(۰.۹۵۰۰)
		Min	۰.۱۶۹۷۱(۰.۱۶۷۵۶)	۰.۲۱۰۳(۰.۲۳۸۱)	۰.۲۱۵۰(۰.۱۹۰۳)	۱.۴۵۰۴۷(۱.۴۷۵۲۴)	۰.۸۵۵۵(۰.۸۵۹۰)
	(۴, ۱۰)	SRS	۰.۶۵۸۸(۰.۶۵۸۴)	۰.۸۱۵(۰.۸۶۰)	۰.۸۲۳(۰.۷۹۵)	۰.۹۴۲۳۸(۰.۹۵۵۴۵)	۰.۹۳۶۵(۰.۹۴۱۰)
		Max	۰.۱۵۵۶(۰.۱۵۴۸)	۰.۱۹۴(۰.۱۹۵)	۰.۱۹۵(۰.۱۹۲)	۰.۴۸۰۳۶(۰.۴۸۴۴۶)	۰.۹۴۹۵(۰.۹۵۰۰)
		Min	۰.۶۴۶۵(۰.۶۴۲۶)	۰.۷۹۹(۰.۸۳۹)	۰.۸۱۷(۰.۷۷۵)	۰.۹۴۷۸۲(۰.۹۶۰۴۹)	۰.۹۴۶۵(۰.۹۴۹۰)
۳	(۳, ۶)	SRS	۰.۳۹۹۹۸(۰.۳۹۷۱۴)	۰.۴۷۸۲(۰.۵۹۶۳)	۰.۵۲۱۵(۰.۴۳۷۸)	۲.۲۸۲۷۵(۲.۳۲۵۵۴)	۰.۹۴۹۰(۰.۹۵۵۵)
		Max	۰.۱۳۴۳۷(۰.۱۳۲۲۵)	۰.۱۶۶۲(۰.۱۷۶۹)	۰.۱۷۰۰(۰.۱۵۷۶)	۱.۳۵۴۱۴(۱.۳۶۵۴۴)	۰.۹۴۲۵(۰.۹۴۷۰)
		Min	۰.۴۰۹۶۳(۰.۴۰۵۹۴)	۰.۴۸۵۵(۰.۶۰۶۸)	۰.۵۳۷۸(۰.۴۴۹۰)	۲.۳۰۷۰۰(۲.۳۵۱۶۳)	۰.۹۴۸۵(۰.۹۵۲۵)
	(۴, ۱۰)	SRS	۰.۱۶۵۹۳(۰.۱۶۵۲۴)	۰.۲۰۴۳(۰.۲۲۳۹)	۰.۲۱۰۶(۰.۱۹۴۹)	۱.۵۰۱۱۲(۱.۵۱۸۹۱)	۰.۹۳۸۰(۰.۹۴۳۰)
		Max	۰.۴۰۰۱(۰.۳۹۵۸)	۰.۴۹۶(۰.۵۰۳)	۰.۵۰۵(۰.۴۸۹)	۰.۷۶۰۳۶(۰.۷۶۹۷۴)	۰.۹۴۷۰(۰.۹۴۷۰)
		Min	۰.۱۶۸۲۹(۰.۱۶۷۳۰)	۰.۲۰۶۴(۰.۲۲۷۰)	۰.۲۱۴۴(۰.۱۹۷۰)	۱.۵۱۸۳۶(۱.۵۲۷۷۸)	۰.۹۴۶۵(۰.۹۵۲۰)

### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآوردیابی پارامتر توزیع ایکس‌گاما بر اساس دو طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار با اندازه نمونه نابرابر مورد بحث قرار گرفت. بر اساس نتایج شبیه‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که برآوردگرهای مربوط به روش Max عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای مربوط به روش‌های Min و SRS دارند. این امر شاید به این دلیل باشد که ماکسیم‌های یک نمونه احتمالاً حاوی اطلاعات بیشتری در مورد پارامتر توزیع ایکس‌گاما در مقایسه با مینیم‌های آن نمونه باشند. همچنین مشاهده می‌شود که طرح Min در اکثر موارد حتی از طرح SRS نیز عملکرد ضعیف‌تری

دارد. لذا شاید بهتر باشد که برای مقایسه منصفانه تر طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار [۵] نیز مورد ارزیابی قرار گیرد و با طرح‌های مطرح شده در این مقاله مقایسه گردد.

سپاس‌گزاری

از داور محترم بابت نظرات ارزشمند قدردانی می‌گردد.

مراجع

۱. ا. رحیمی ده چراغی، س. م. ت. ک. میرمصطفائی، برآوردیابی کلاسیک پارامتر توزیع ایکس گاما بر اساس دو گونه نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار با اندازه نمونه نابرابر، ۵۴ امین کنفرانس ریاضی ایران (۱۴۰۲)، شماره ۱۹۰-۱۹۳.
2. M.T. Al-Odat, and M.F. Al-Saleh, *A variation of ranked set sampling*, J. Appl. Statist. Sci. 10 (2001), no. 2, 137-146.
3. B.S. Biradar, and C.D. Santosha, *Estimation of the mean of the exponential distribution using maximum ranked set sampling with unequal samples*, Open J. Stat. 4 (2014), no. 8, 641-649.
4. M.H. Chen, and Q.M. Shao, *Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals*, J. Comput. Graph. Statist. 8 (1999), no. 1, 69-92.
5. G.A. McIntyre, *A method for unbiased selective sampling, using ranked sets*, Aust. J. Agric. Res. 3, (1952), no. 4, 385-390.
6. O. Mersmann, H. Trautmann, D. Steuer, and B. Bornkamp, *truncnorm: Truncated normal distribution*, R package version 1.0-9, (2023), <https://CRAN.R-project.org/package=truncnorm>.
7. M. Plummer, N. Best, K. Cowles, and K. Vines, *CODA: Convergence diagnosis and output analysis for MCMC*, R News 6, (2006), no. 1, 7-11.
8. M. Plummer, N. Best, K. Cowles, K. Vines, D. Sarkar, D. Bates, R. Almond, R., and A. Magnusson, *coda: Output analysis and diagnostics for MCMC*, R package version 0.19-2 (2018), <https://CRAN.R-project.org/package=coda>.
9. R Core Team, *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2023.
10. S. Sen, S.S. Maiti, and N. Chandra, *The xgamma distribution: statistical properties and application*, J. Mod. Appl. Stat. Methods 15 (2016), no. 1, 774-788.
11. H.R. Varian, A Bayesian approach to real estate assessment, *In Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage*, Eds. Stephen E. Fienberg and Arnold Zellner, Amsterdam: North-Holland, (1975), 195-208.

# آموزش ریاضی

## نمونه عملی تولید محتوای واقعیت افزوده برای آموزش ریاضی پایه هفتم

احسان موحدنیا<sup>۱\*</sup>، سارا اشتهار<sup>۲</sup>، و حسین ایزدی نیا<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان

*movahednia@bkatu.ac.ir*

<sup>۲</sup> گروه ریاضی، آموزش و پرورش خوزستان

*seshtehar@gmail.com*

<sup>۳</sup> دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان

*real.hsn.izd@gmail.com*

چکیده. تفکر فضایی نقش بسیار مهمی در درک و حل مسائل پیچیده ریاضی ایفا می‌کند. به همین منظور، تقویت این مهارت برای دانش‌آموزان ضروری است. واقعیت افزوده به عنوان یک فناوری نوین می‌تواند به طور قابل توجهی در تقویت مهارت تفکر فضایی دانش‌آموزان مؤثر باشد، زیرا امکان تجربه و تعامل با مفاهیم ریاضی را در یک محیط مجازی فراهم می‌کند و به درک عمیق‌تر و بهتر این مفاهیم کمک می‌کند. هدف اصلی این مقاله، تولید محتوای واقعیت افزوده برای بخشی از فصل شش کتاب ریاضی پایه هفتم است. در این فصل به بررسی مشهورها و دید دانش‌آموز به این اشکال در زوایای مختلف پرداخته می‌شود. با استفاده از فناوری واقعیت افزوده و بهره‌مندی از نرم‌افزارهای طراحی سه‌بعدی مانند اسکچاپ و بلندر، سعی شده آموزش این بخش از کتاب ریاضی پایه هفتم ارتقا یابد.

### ۱. پیش‌گفتار

موسسه غیرانتفاعی رسانه‌های نوین<sup>۱</sup> موسسه‌ای پیشرو در به‌کارگیری فناوری‌های نوین حوزه آموزش و پرورش بود. شهرت این موسسه به انتشار گزارش‌های افق<sup>۲</sup> گره خورده بود که به بررسی و پیش‌بینی فناوری‌های نوظهور با پتانسیل اثرگذاری عمیق بر آموزش می‌پرداخت. این گزارش‌ها به

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 97G40; Secondary 97R60, 97R40.

واژگان کلیدی. آموزش ریاضی، واقعیت افزوده .  
\* سخنران

<sup>1</sup>NMC

<sup>2</sup>Horizon Reports

مثابه منابعی ارزشمند برای سیاستگذاران و مدیران آموزشی در برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری پیرامون آینده فناوری در آموزش عمل می‌کردند. این موسسه در سال ۲۰۱۷ به فعالیت خود خاتمه داد، اما دستاوردها و پژوهش‌های منتشرشده آن، همچنان میراثی ارزشمند به شمار می‌رود. موسسه غیرانتفاعی رسانه‌های نوین در گزارش سال ۲۰۰۸ خود به فناوری واقعیت مجازی و واقعیت افزوده اشاره کرده و از آن به عنوان فناوری نوظهوری که آینده‌ی آموزش را دگرگون می‌کند، نام برده بود [۱].

فناوری واقعیت‌افزوده اولین بار در دهه ۱۹۶۰ معرفی شد. ایوان ساترلند، استاد دانشگاه هاروارد که یکی از تاثیرگذارترین افراد در حوزه علوم کامپیوتر است، اولین نمایشگر<sup>۳</sup> نصب‌شده بر روی سر را ایجاد کرد. از طریق این سیستم، کاربر در کنار تجربه و دیدن اجسام واقعی محیط پیرامون، یک سری گرافیک‌های تولیدشده توسط کامپیوتر را به عنوان یک لایه اضافه‌شده به تصاویر واقعی درک و احساس می‌کند.

تعاریف مختلفی از فناوری واقعیت‌افزوده مطرح شده است. آروانیتیس<sup>۴</sup> و همکاران این فناوری را حاصل ترکیب دنیای واقعی با محتواهای تولیدشده توسط کامپیوتر معرفی کرده‌اند که قابلیت تشخیص، ردیابی و تعامل با اجسام را در زمان واقعی دارد [۲]. بوور<sup>۵</sup> و همکاران معتقدند که این فناوری، دنیای مجازی را با دنیای واقعی ترکیب می‌کند تا کاربران احساس واقعیت بیشتری داشته باشند. این تغییرات، اغلب با استفاده از ابزارهای خاصی انجام می‌شود و تاثیر آن‌ها با چشم غیرمسلح قابل مشاهده نیست [۳]. در واقعیت‌افزوده به دو عنصر هدف و محتوا نیاز است. ابتدا توسط دوربین گوشی یا عینک هوشمند هدف که می‌تواند تصویر، موقعیت جغرافیایی، عناصر نوری و غیره باشند، شناسایی می‌شوند و سپس محتوای واقعیت‌افزوده که همان تصاویر، فیلم‌ها، عناصر سه‌بعدی و سایر محتواهای دیجیتال هستند به هدف اضافه می‌شوند. در این فناوری همان‌طور که اشاره شد کاربر محتواهایی را در گوشی خود مشاهده می‌کند که در واقعیت وجود ندارد.

## ۲. کاربرد واقعیت‌افزوده در آموزش ریاضی

در حوزه آموزش ریاضی، استفاده از واقعیت‌افزوده می‌تواند به یادگیری و تعامل دانش‌آموزان به‌ویژه با مدل‌های سه‌بعدی در دنیای واقعی کمک و تفکر فضایی آن‌ها را تقویت کند. استفاده از این فناوری در هندسه و مفاهیم پیچیده دیگر افزایش یافته‌است. مطالعات نشان داده استفاده از واقعیت‌افزوده تأثیر مثبتی بر عملکرد و نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات به‌ویژه در کلاس‌هایی که بر روی هندسه سه‌بعدی و مفاهیم هندسی انتزاعی تمرکز دارند، داشته است [۶، ۷]. علاوه بر این، پژوهشگران تأیید می‌کنند که استفاده از محتواهای مبتنی بر واقعیت‌افزوده به یادگیری دانش‌آموزان، افزایش دانش و انگیزه آن‌ها در علوم، فناوری، مهندسی، هنر و ریاضیات<sup>۶</sup> نیز کمک می‌کند [۴، ۵].

<sup>3</sup>The Sword of Damocles

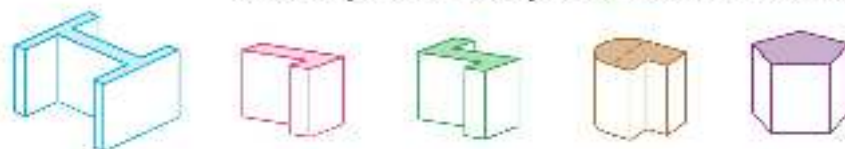
<sup>4</sup>P. Arvanitis

<sup>5</sup>M. Bower

<sup>6</sup>STEM

تولید محتوای واقعیت افزوده برای آموزش ریاضی پایه هفتم

ش. قاعده: مسوره‌ای زیر بر رسم کنید اندر واقع دید از بالا یا همان مقطع منشور است.



شکل ۱: سوال ۵ از صفحه ۷۲ کتاب ریاضی پایه هفتم



شکل ۲: ایجاد تغییرات برای پردازش بهتر تصویر

۳. تولید محتوای واقعیت افزوده برای آموزش فصل شش ریاضی پایه هفتم

در این بخش به تولید یک نمونه عملی از محتوای واقعیت‌افزوده برای آموزش بخشی از کتاب ریاضی پایه هفتم شکل ۲ می‌پردازیم. این فصل از کتاب ریاضی سال هفتم به حجم، هندسه و منشورها ارتباط دارد و تقویت مهارت تفکر فضایی دانش‌آموزان به‌عنوان یک هدف دنبال می‌شود. در ادامه به اختصار نحوه آماده‌سازی یک محتوای مبتنی بر واقعیت‌افزوده برای آموزش این بخش اشاره می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه با قرار دادن دوربین گوشی همراه بر روی یکی از تصاویر زیر، محتوای سه‌بعدی مربوط به آن تصویر ظاهر می‌شود.

برای این منظور ابتدا باید تصویر هدف به‌صورت محتوای سه‌بعدی طراحی شود. این کار با استفاده از نرم‌افزارهای طراحی مدل‌های سه‌بعدی همانند اسکچ‌آپ<sup>۷</sup> و بلندر<sup>۸</sup> انجام شده است. سپس برای پردازش بهتر، تصویر هدف که یکی از اشکال بالاست را کمی تغییر داده تا از حالت ساده خارج شود و شناسایی آن توسط گوشی همراه بهتر انجام شود. برای اتصال شکل ۲ و محتوای سه‌بعدی، نیازمند برنامه‌نویسی هستیم. برای این کار از زبان برنامه‌نویسی جاوا اسکریپت و فریم‌ورک Mind-ar استفاده کرده و آن را در قالب طراحی وب‌سایت دیدار انجام

<sup>7</sup>SketchUp

<sup>8</sup>Blender



شکل ۳: ورود به وب سایت دیدار و دسترسی به دوربین

داده‌ایم. با ورود به وبسایت <https://vr.did-ar.ir/3d>، شکل ۳ دسترسی به دوربین گوشی را ایجاد کرده و آن را بر روی شکل ۲ قرار می‌دهیم تا محتوای سه‌بعدی ظاهر شود.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به صورت اختصار یک نمونه عملی از کاربرد واقعیت افزوده در حوزه آموزش ریاضی ارائه شد. با استفاده از نرم‌افزارهای ویرایش تصویر و نرم‌افزارهای قدرتمند تولید فایل‌های سه‌بعدی، محتوای لازم را آماده کرده و نهایتاً با استفاده از وبسایت طراحی شده، اقدام به انتشار آن نمودیم. چالش اصلی، خلاقیت لازم برای تولید محتوای مبتنی بر واقعیت افزوده است. عدم اطلاع کافی طراحان و متخصصین گرافیک از ریاضیات و همین‌طور نداشتن تخصص فنی لازم ریاضیدانان، دبیران و مدرسان ریاضی از گرافیک یکی دیگر از چالش‌های پیش روی توسعه واقعیت افزوده برای آموزش ریاضی است. حاصل تلاش نویسندگان طراحی و راه‌اندازی وبسایت دیدار<sup>۹</sup> است که می‌توان از طریق این وبسایت فایل‌های سه‌بعدی ایجاد شده را به محتوای واقعیت افزوده تبدیل کرد. در این مقاله به صورت مقدماتی نحوه ساخت محتوای واقعیت افزوده به وسیله وبسایت دیدار بررسی شد. پلتفرم‌های مربوط به کشورهای دیگر نیز وجود دارند اما به دلیل محدودیت استفاده و هزینه بالا، مقرون به صرفه نیستند.

#### مراجع

1. The New Media Consortium and EDUCAUSE Learning Initiative. *The 2008 Horizon Report*. An EDUCAUSE Program, 2008.
2. T.N. Arvanitis, A. Petrou, J.F. Knight, S. Savas, S. Sotiriou, M. Gargalakos, E. Gialouri, *Human factors and qualitative pedagogical evaluation of a mobile augmented reality system for science education used by learners with physical disabilities*, Pers. Ubiquitous Comput. 13 (2009), no. 3, 243–250.
3. M. Bower, C. Howe, N. McCredie, A. Robinson, and D. and Grover, *Augmented Reality in education—cases, places and potentials*, Educ. Media Int. 51 (2013) no. 1, 1–15.
4. J. Garzón, and J. Acevedo, *Meta-analysis of the impact of augmented reality on students' learning gains*, Educational Research Review, 27 (2019) 244–260.

<sup>۹</sup>did-ar.ir

5. J. Jesionkowska, F. Wild, and Y. Deval, *Active learning augmented reality for STEAM education—A case study*, Educ. Sci. 10(8) (2020) no. 8, 198.
6. E. Liu, Y. Li, S. Cai, and X. Li, *The effect of augmented reality in solid geometry class on students' learning performance and attitudes*, In Smart Industry & Smart Education: Proceedings of the 15th International Conference on Remote Engineering and Virtual Instrumentation 15, 549–558. Springer International Publishing, 2019.
7. P. Thamrongrat, and E. L.-C. Law, (2019). *Design and evaluation of an augmented reality app for learning geometric shapes in 3D*, In Human-Computer Interaction—INTERACT 2019: 17th IFIP TC 13 International Conference, Paphos, Cyprus, September 2–6, 2019, Proceedings, Part IV 17, 364–385. Springer International Publishing, 2019.

## بررسی فهم دانشجویان مهندسی از تبدیلات لاپلاس در حل یک مسئله مدلسازی: آنالیز کنش‌شناسی

فائزه رضوانی فرد<sup>۱</sup> \* و فرزاد رادمهر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
*Faezeh.rezvanifard@mail.um.ac.ir*  
<sup>۲</sup> دانشیار رشته آموزش ریاضی، دانشگاه علوم و تحقیقات نروژ  
*farzad.radmehr@ntnu.no*

چکیده. تبدیلات لاپلاس یکی از مفاهیم اساسی در معادلات دیفرانسیل است که کاربردهای متعددی در رشته‌های مختلف مهندسی دارد. در این مقاله، با استفاده از ابزار آنالیز کنش‌شناسی در نظریه انسان‌شناسی تعلیمی<sup>۱</sup> (ATD)، فهم دانشجویان مهندسی از تبدیلات لاپلاس در حل یک مسئله مدلسازی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که دانشجویان در ایجاد ارتباط میان دانش خود در تبدیلات لاپلاس و مدار برای ساخت یک مدل معنادار توانمند نیستند. همچنین نتایج مصاحبه‌های صورت گرفته با دانشجویان نشان داد که آن‌ها در توضیح و توجیه تکنیک‌های خود توانمند نیستند. پیشنهاد می‌شود که اساتید ریاضی مسائل مدلسازی مرتبط با مهندسی را هنگام تدریس معادلات دیفرانسیل مطرح نمایند تا پلی میان معادلات دیفرانسیل و دروس مهندسی ایجاد شود. همچنین، اساتید باید دانشجویان را برای شرکت در گفت‌وگوهای مبتنی بر استدلال‌های ریاضی در کنار تکنیک‌های بکار رفته در حل مسائل تشویق نمایند. این رویکرد می‌تواند به افزایش درک دانشجویان از مفاهیم ریاضی کمک نماید.

### ۱. مقدمه

تبدیلات لاپلاس یکی از تکنیک‌های مؤثر در حل معادلات دیفرانسیل است که با تبدیل آن به یک عبارت جبری، حل آن را ساده‌تر می‌کند [۴]. تبدیلات لاپلاس دارای کاربردهای متفاوتی در ریاضیات و مهندسی است. در دروس معادلات دیفرانسیل مفهوم ریاضی آن در دامنه زمان بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد. اما در دروس مهندسی، تبدیلات لاپلاس به‌عنوان ابزاری برای بررسی

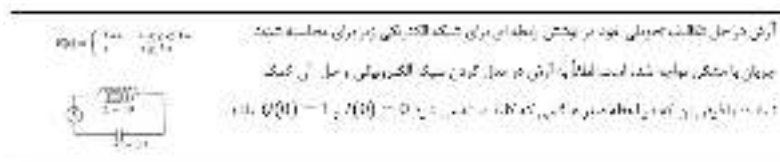
2010 Mathematics Subject Classification. 97I99.

واژگان کلیدی. آنالیز کنش‌شناسی، تبدیلات لاپلاس، مدلسازی، دانشجویان مهندسی.  
\* سخنران

واکنش سیستم‌های خطی به ورودی‌های مختلف در دامنه زمان و فرکانس مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این تفاوت باعث شده‌است که ارتباط میان دروس ریاضی و مهندسی برای شمار زیادی از دانشجویان مهندسی مشخص نباشد. در نتیجه آن‌ها در انتقال دانش ریاضی خود به مسائل دنیای واقعی با چالش‌هایی روبرو شوند. با استفاده از مسائل مدلسازی می‌توان تعادل مناسبی بین درک انتزاعی از مفاهیم ریاضیات و دروس مهندسی برقرار نمود [۵]. یکی از ابزارهای مهم برای تجزیه و تحلیل دانش ریاضی دانشجویان آنالیز کنش‌شناسی<sup>۱</sup> (PA) در چارچوب ATD است. هر کنش‌شناسی شامل دو بخش عملی<sup>۲</sup> و نظری<sup>۳</sup> است. بخش عملی شامل سوالات مختلف  $T$  و تکنیک‌هایی $\tau$  است که می‌توانند برای حل سوالات استفاده شوند. بخش نظری شامل تکنولوژی  $\theta$  و نظریه  $\Theta$  است. تکنولوژی، گفتمانی را فراهم می‌کند که تکنیک استفاده‌شده را توضیح می‌دهد و نظریه، تکنولوژی‌ها را توجیه می‌کند [۲]. پژوهش‌های مختلفی با استفاده از این ابزار، تکنیک‌ها و استدلال‌های دانشجویان را هنگام حل مسائل بررسی کرده‌اند. به‌عنوان مثال، [۳] با بررسی درک دانشجویان در دو سوال مکانیک و ریاضی مبتنی بر مفهوم مشتق با استفاده از AP دریافتند که دانشجویان در حل سوال مکانیک موفق عمل کردند اما در انتقال کنش‌شناسی خود به سوال ارائه‌شده در زمینه ریاضی با مشکل مواجه بودند.

## ۰۲. روش تحقیق

پژوهش حاضر بخشی از رساله دکتری نویسنده اول است که تحت نظارت نویسنده دوم انجام شده‌است. با توجه به محدودیت صفحه موجود، در این مقاله، یافته‌های مربوط به عملکرد سه گروه دو نفره از دانشجویان مهندسی در حل یک سوال مدلسازی مرتبط با تبدیلات لاپلاس (شکل ۱) گزارش شده‌است. به دانشجویان گفته شد در مورد تکنیک‌های خود با یکدیگر گفت‌وگو کنند و در مورد دلیل استفاده و پذیرش آن‌ها (قسمت نظری) بحث نمایند.



شکل ۱: سوال انتخاب شده در مصاحبه (کرایه‌چیان، صفحه ۳۲۸)

## ۰۳. نتایج

اولین بخش از PA، فهم دانشجویان از سوال است. دانشجویان پس از خواندن سوال با توجه به اظهارات آن‌ها دچار سردرگمی شده‌بودند: ”متوجه نمیشم این رو باید چیکار کنم؟...“ یعنی تبدیلات لاپلاس به این سوال ربط داره؟“ (گروه C). علت این سردرگمی می‌تواند این باشد که برای دانشجویان حل چنین سوالاتی ناآشنا بود: ”در تکلیف‌ها و سوالات امتحان چنین چیزی رو

<sup>1</sup>Praxeology analysis

<sup>2</sup>Praxis

<sup>3</sup>Logos

از ما نمی‌خوان. فقط کافی‌ه ما بتونیم تبدیل لاپلاس توابع مختلف رو حساب کنیم یا یک معادله دیفرانسیل رو با این روش حل کنیم“ (گروه A). هر سه گروه در دو قسمت عملی و نظری مسئله مدلسازی با چالش‌هایی روبرو شدند. دانشجویان گروه A در تکنیک خود به رابطه  $I = \frac{Q}{t}$  اشاره کردند و برای جریان در القاگر رابطه  $L \frac{dI}{dt}$  را نوشتند. از رابطه نادرست  $dI = \frac{dQ}{dt}$  به جای  $I = \frac{dQ}{dt}$  برای نمایش نرخ تغییر جریان با زمان استفاده کردند. این گروه در بیان تکنولوژی رابطه موجود میان مدل ذهنی خود و نمایش آن به صورت معادله دیفرانسیل موفق نبودند. گروه C در یادآوری روابط و تکنیک‌های مرتبط به مدار دچار مشکل شدند و نتوانستند هیچ رابطه‌ای بنویسند. دلیل این مشکل حذف شدن برخی از مباحث مرتبط با مدار در دروس قبلی (فیزیک) بود: ”اینا یادم نمیاد. اون قسمت‌های مرتبط با القاگر برای ما حذف شده بود. من فقط می‌دونم c خازنه“. گروه B ابتدا به رابطه‌های  $Q = CV$ ،  $V = \frac{Q}{C}$  و  $IC = \frac{Q}{V}$  جداگانه اشاره کردند. آن‌ها با توجه به قوانین مرتبط با مدار و رابطه‌های نوشته شده، رابطه  $U = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CV^2$  را نوشتند که با توجه به گفتمان آن‌ها  $U$ ،  $\frac{1}{2}LI^2$  و  $\frac{1}{2}CV^2$  به ترتیب نشان‌دهنده انرژی ذخیره شده در القاگر و خازن بود. با جایگذاری رابطه  $V = \frac{I}{C}$  در معادله و مقادیر داده شده در سوال، مدل را به صورت  $U = 5I^2 + 5I$  نوشتند. آن‌ها برای ایجاد ارتباط این مدل با معادلات دیفرانسیل با فرض  $I = \frac{dq}{dt}$  رابطه را به صورت  $U = 5q'' + 5q'$  بازنویسی کردند. این گروه در بکارگیری تکنیک مرتبط با خازن و القاگر دچار اشتباه شدند و تکنولوژی آن‌ها محدود به در نظر گرفتن نرخ تغییرات برای شدت جریان بدون ارائه نظریه‌ای مرتبط بود.

برای بررسی عملکرد دو گروه A و C در حل معادله دیفرانسیل با استفاده از تبدیلات لاپلاس، معادله دیفرانسیل پایه (۲)  $L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$  و رابطه  $I = \frac{dQ}{dt}$  به آن‌ها داده شد. از آن‌ها ابتدا خواسته شد که این روابط را توضیح دهند. هر دو گروه در شفاف‌سازی معادله دیفرانسیل و ارتباط‌های موجود مرتبط به قسمت نظری موفق نبودند. دانشجویان گروه A ابتدا به اشتباه خود در فرض رابطه‌ی  $dI = \frac{dQ}{dt}$  پی بردند. هر دو گروه با توجه به  $I = \frac{dQ}{dt}$  و جایگذاری در  $L \frac{dI}{dt}$ ، معادله (۱)  $L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = E(t)$  را نوشتند و سعی کردند با استفاده از تکنیک‌های مرتبط با تبدیلات لاپلاس آن را حل کنند. هر سه گروه از طرفین معادله (گروه A و C از معادله (۲) و گروه B از معادله (۱)) لاپلاس گرفتند. دانشجویان در استفاده از ویژگی‌های تبدیل لاپلاس برای محاسبه لاپلاس سمت چپ معادله مشکلی نداشتند. گروه A در استفاده از جدول تبدیل لاپلاس و ویژگی‌های تبدیل لاپلاس با مشکل روبرو شدند و ابتدا آن به صورت  $L\{100 - 100u_{10}(t)\} = \frac{100}{s} - \frac{100e^{-as}}{s}$  محاسبه نمودند اما مطمئن نبودند چه مقداری را جایگزین  $a$  نمایند. آن‌ها پس از بررسی چند مثال مشابه حل شده در جزوه و با اشاره به تکنیک استاد بدون ارائه تکنولوژی تصمیم گرفتند به جای  $a$  عدد  $10$  را جایگزین کنند. گروه B و گروه C با مراجعه به جدول لاپلاس و جزوه توانستند تبدیل لاپلاس تابع هوی سایید را بنویسند. گروه‌های A و C پس از ساده‌سازی به  $Q(s)$  رسیدند. برای بدست آوردن  $q(t)$ ، از تفکیک کسر استفاده نموده و سپس با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس و استفاده از جدول تبدیل لاپلاس، با اشاره به قضیه انتقال دوم و مثال حل شده مرتبط با معادله دیفرانسیل مقدار اولیه ناممکن (تابع دلتا دیراک) در جزوه  $q(t)$  را بدست آوردند. دانشجویان در گروه A پس از محاسبه  $q(t)$  آن را به عنوان جواب مسئله در نظر گرفتند در صورتی که شدت جریان مورد سوال بود. دانشجویان در گروه C برای بدست آوردن شدت جریان از  $q(t)$  مشتق گرفتند. آن‌ها در فرآیند مشتق‌گیری دچار

اشتباه محاسباتی شدند. با این حال، تشخیص آن‌ها در تکنیک استفاده‌شده برای بدست آوردن شدت جریان به عنوان تکنولوژی در نظر گرفته می‌شود. گروه B نیز، پس از ساده‌سازی به معادله  $5s^2 + 5s - 5s - 5 = L\{Q\} = 100 \frac{e^{-1.5s}}{s} - \frac{1}{s}$  دست‌یافتند و از ادامه حل آن به دلیل مشکل در تفکیک کسر (تکنیک اساسی در حل مسائل مقدار اولیه با روش تبدیلات لاپلاس) منصرف شدند: ”این خیلی سخت میشه چطوری حل کنیم؟... فکر نکنم اصلاً با لاپلاس بشه حل کرد یعنی خیلی سخت میشه با لاپلاس“. تکنیک‌های استفاده‌شده توسط هر دو گروه A و B هنگام حل معادله دیفرانسیل (۱) و (۲) بر مبنای الگوریتم‌های حفظ‌شده بود و قسمت نظری مرتبط با تکنیک‌ها بیشتر متمرکز به جزوه و سوال حل‌شده در جزوه بود.

#### ۴. بحث و نتیجه‌گیری

این مطالعه از طریق PA در نظریه ATD، یافته‌هایی را درباره فهم دانشجویان مهندسی از تبدیلات لاپلاس و رویکردهای آن‌ها در حل مسائل مدلسازی ارائه می‌دهد. تحلیل کنش‌شناسی نشان داد که دانشجویان در برقراری ارتباط میان دانش خود از مدار (قانون کرشهف برای ولتاژ) و ساخت یک مدل برای توصیف مدار داده‌شده با مشکل مواجه بودند. یکی از دلایل ممکن این است که دانشجویان در مفهوم‌سازی یک مقدار ثابت به عنوان نرخ تغییرات با مشکلاتی روبرو می‌شوند [۵]. با استفاده از مسائل مدلسازی مهندسی، می‌توان پلی موثر میان کنش‌شناسی تبدیلات لاپلاس در معادلات دیفرانسیل و کاربردهای مهندسی ایجاد کرد. این رویکرد، به بهبود عملکرد دانشجویان مهندسی در حل مسائل مدلسازی کمک می‌کند [۵]. عمده مشکلات دانشجویان مرتبط با تبدیل لاپلاس تابع هوی ساید، تفکیک کسر، استفاده از جدول لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس بود که با مطالعه [۴] همسو است. همچنین، دانشجویان مهندسی در توضیح تکنیک‌های خود بر جزوه، فرمول و تکنیک‌های ارائه‌شده توسط استاد تمرکز داشتند. به عبارت دیگر، آن‌ها بر یادگیری قسمت عملی نسبت به قسمت نظری توجه بیشتری داشتند. زیرا از نظر دانشجویان توضیح و توجیه تکنیک‌های استفاده‌شده در حل تکالیف و امتحان نهایی مورد انتظار نیست بنابراین این مطالب حائز اهمیت نیستند. این یافته‌ها با پژوهش [۳] در یک راستا است. امیدواریم این یافته‌ها اساتید معادلات دیفرانسیل را تشویق نماید از فعالیت‌های مبتنی بر استدلال‌ها و قضایای ریاضی بیشتر استفاده نمایند. این امر می‌تواند منجر به افزایش اهمیت دانشجویان به یادگیری قسمت نظری مرتبط به تکنیک‌های ریاضی شود.

#### مراجع

- الف. کرایه چیان، معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها با متلب، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۱۳۹۸.
- M. Bosch, Y. Chevillard, F. García, and J. Monaghan, *orking with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A Comprehensive Casebook*, Routledge, 2020.
- M. Hitier, and A. González-Martín, *It all depends on the sign of the derivative: A praxeological analysis of the use of the derivative in similar tasks in mathematics and mechanics*, Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12) (pp 2421–2428) (2022). Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME.
- A.M. Msomi, and S. Bansilal, *Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Solving Linear Ordinary Differential Equations Using the Method of Laplace*

- Transform*, International Electronic Journal of Mathematics Education (2022), no. 17, em0670.
5. S. Pennell, P. Avitabile, and J. White, *An engineering-oriented approach to the introductory differential equations course*, PRIMUS (2009), no. 19, 88–99.

## هم افزایی توامان اثر بخشی آموزش هوش مصنوعی و آموزش ریاضیات به دانش آموزان

لطیفه پورمحمدباقر<sup>۱</sup>\*

<sup>۱</sup> گروه کامپیوتر، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی  
[l\\_pmb@atu.ac.ir](mailto:l_pmb@atu.ac.ir)

چکیده. آموزش هوش مصنوعی به دانش آموزان به عنوان یک موضوع مهم در حوزه آموزش و فناوری در جامعه مطرح است. چالش های اساسی در این حوزه، شامل توانمندی های ذهنی و منطقی مورد نیاز، تفکر خلاق و الگوریتمیک برای دانش آموزان است. آموزش ریاضیات به دانش آموزان و تقویت توانمندی های علمی آنان در گذر از این چالش ها موثر است. از طرفی امروزه آموزش ریاضیات با کیفیت بالا از طریق استفاده از روش های تعاملی، بازی های آموزشی و پلتفرم های هوشمند امکان پذیر است. با ارائه آموزش به این شکل، آن ها نه تنها مهارت های فنی را کسب خواهند کرد، بلکه قدرت خلاقیت، تفکر محاسباتی و حل مسئله خود را نیز تقویت خواهند کرد. این آموزش ها نقشی مهم در توسعه شغلی دانش آموزان و پیشرفت فناوری در جامعه ایفا می کنند. از این رو تمرکز بر نقش متقابل آموزش هوش مصنوعی و آموزش ریاضیات و هم افزایی توامان این دو امر بر یکدیگر در بهره مندی دانش آموزان و افزایش کیفیت آموزشی آنان اثر گذار است. در این مقاله به بررسی تفصیلی این موضوع و ارائه راهکارهای پیشنهادی پرداخته شده است.

### ۱. مقدمه

در عصر فناوری اطلاعات و ارتباطات، هوش مصنوعی و برنامه نویسی به عنوان دو حوزه مهم و رو به پیشرفت مطرح هستند. با رشد روزافزون تکنولوژی، نیاز به آموزش افراد در زمینه هوش مصنوعی بیش از پیش احساس می شود. آموزش این مفاهیم به افرادی که درگیر فرآیندهای آموزشی هستند، از اهمیت بسیاری برخوردار است. در این میان پیش زمینه علمی افراد تاثیر

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 97B80; Secondary 68T01, 97C40, 97C70.

واژگان کلیدی. آموزش هوش مصنوعی، آموزش ریاضیات، رویکرد STEM.  
\* سخنران

میتقیم بر نحوه رویارویی آنها با مقوله آموزش هوش مصنوعی می باشد. آموزش هوش مصنوعی نیازمند تفکر خلاق و الگوریتمیک در مسائل مختلف و تمرکز بر راه حل های حل مسئله و مدل سازی است که این توانمندی ها با تمرکز بر آموزش ریاضی به دانش آموزان ممکن است.

۲. ضرورت و اهمیت آموزش هوش مصنوعی و بهره گیری از آن در ارتباط با دانش آموزان

هوش مصنوعی به عنوان یکی از پیشرفت های بزرگ دنیای مدرن، نقش کلیدی در تغییرات اجتماعی، اقتصادی و فرهنگی دارد. اما آموزش اصول و مفاهیم هوش مصنوعی به کودکان نیز از اهمیت چشمگیری برخوردار است. این آموزش نه تنها به آنها امکان می دهد تا با فناوری های آینده بهتر آشنا شوند، بلکه می تواند تفکر انتقادی، حل مسئله، همکاری و خلاقیت آنها را تقویت کند. مطالعات انجام شده نشان دهنده اثر بخشی یادگیری هوش مصنوعی بر دانش آموزان در مواردی همچون آمادگی برای آینده، تقویت مهارت های ذهنی، تشویق به کنجکاوی و اکتشاف، توسعه صنعت هوش مصنوعی، ارتقا صادرات و درآمدهای ارزی، رشد فریلنسری و خدمات هوش مصنوعی، توسعه اپلیکیشن ها و ادوات هوش مصنوعی، خدمات هوش مصنوعی در مدیریت مسائل و مشکلات واقعی جامعه می باشد [۴]. بنابراین، آموزش هوش مصنوعی و برنامه نویسی به کودکان نه تنها به توسعه توانایی های فردی آنان کمک می کند بلکه تأثیرات مثبت زیادی بر بازار کار، اقتصاد ملی و توسعه فناوری دارد. این مبحث باید در اولویت های آموزشی و تربیتی جوامع مدنظر قرار گیرد. بدین منظور جهت آموزش و بکارگیری هوش مصنوعی از پایه نیازمند فزاینده آموزش هوش مصنوعی به کودکان در فازهای زیر می باشیم.

فاز اول - آشنایی اولیه با مفاهیم اصلی هوش مصنوعی، فاز دوم - ارتباط با زندگی روزمره، فاز سوم - پروژه های کاربردی، فاز چهارم - توسعه مهارت های پیچیده تر

در این فازها ابتدا باید مفاهیم پایه ای هوش مصنوعی، مانند الگوریتم و تشخیص الگو به طریقی ساده و بازی محور آموزش داده شده سپس چگونگی کارکرد هوش مصنوعی در زندگی روزمره به صورت مثال محور به دانش آموزان آموخته شود و در ادامه از این مفاهیم جهت آموزش مفاهیم پیشرفته هوش مصنوعی از جمله شبکه های عصبی و یادگیری عمیق و سپس ساخت بازی های هوشمند آموزشی استفاده شود. پر واضح است که با توجه به اهمیت هوش مصنوعی در آینده و نیاز جامعه به توانمندی های مرتبط با آن، ارتقا آموزش هوش مصنوعی به دانش آموزان می تواند به تحولی بزرگ در آموزش و پرورش منجر شود و مهارت های تفکر انتقادی، تحلیل مسئله، خلاقیت و همکاری را تقویت کنند [۵]. این مهارت ها در همه جوانب زندگی دانش آموزان در آینده مفید خواهند بود. از آنجا که توسعه این توانایی های فردی تأثیرات مثبت زیادی بر بازار کار، اقتصاد ملی و توسعه فناوری دارد، این مبحث باید در اولویت های آموزشی و تربیتی دانش آموزان مدنظر قرار گیرد.

۳. آموزش هدفمند هوش مصنوعی

هوش مصنوعی یا (AI) Artificial Intelligence، شاخه ای از علوم رایانه است که بر روی تولید ماشین های هوشمند تمرکز دارد. هدف اصلی هوش مصنوعی، ایجاد سیستم ها و برنامه های کامپیوتری است که توانایی انجام وظایفی را داشته باشند که به هوش انسانی نیازمند است. در واقع، هدف از هوش مصنوعی این است که ماشین ها بتوانند عملکردی مشابه عملکرد

مغز انسان را داشته باشند و قادر به حل مسائل و یادگیری باشند [۵]. برنامه نویسی نیز به فرآیند نوشتن دستورات و الگوریتم‌ها برای سیستم‌های کامپیوتری اشاره دارد. برنامه نویسان با استفاده از زبان‌های گوناگون، دستورات و الگوریتم‌هایی را طراحی و پیاده‌سازی می‌کنند که سیستم‌ها را برای انجام وظایف خاصی آماده می‌کنند. هوش مصنوعی بر سه پایه یادگیری، استدلال و ادراک استوار است. آموزش و ایجاد توانمندی کار با این مفاهیم در دانش آموزان ارتباط مستقیمی با توانمندی‌های حاصل از آموزش ریاضیات در دانش آموزان دارد.

#### ۴. چالش‌های اساسی در آموزش هوش مصنوعی به دانش آموزان

آموزش هوش مصنوعی به کودکان با چالش‌هایی مواجه است که می‌تواند مانع پیشرفت آن‌ها شود. برخی از این چالش‌ها عبارت از سطح دشواری مفاهیم فنی، کمبود منابع آموزشی مناسب، نیاز به راهکارهای آموزشی تعاملی، نیاز به تجهیزات و منابع آموزشی مناسب، نیاز به آموزش معلمان و والدین می‌باشند. آموزش هوش مصنوعی به دانش آموزان می‌تواند دشوار و پر چالش باشد. چالش‌های بیان شده فوق نیازمند برنامه ریزی آموزشی ملی و تامین زیرساخت‌های لازم می‌باشد. برخی دیگر از جمله دشواری مفاهیم فنی و تامین راهکارهای تعاملی نیازمند آموزش مفاهیم مرتبط و تقویت پایه‌های آموزشی لازم از جمله آموزش ریاضیات می‌باشد و با استفاده از روش‌های ساده و جذاب، تهیه منابع مناسب و ایجاد فضاهای بازی‌گونه، می‌توان این چالش‌ها را به فرصتی برای رشد دانش آموزان تبدیل کرد. آموزش ریاضیات به دانش آموزان می‌تواند به آن‌ها در تفکر محاسباتی، خلاقیت و حل مسئله کمک کند و آن‌ها را برای آینده‌ی فناوری و فراهم نمودن زمینه‌های لازم جهت آموزش هوش مصنوعی آماده کند [۱].

#### ۵. فراگیری ریاضیات به‌عنوان پیش‌نیازی برای یادگیری هوش مصنوعی

آموزش ریاضیات به‌عنوان پایه و پیش‌نیازی اساسی در مسیر یادگیری هوش مصنوعی با چالش‌هایی گوناگون روبه‌رو است و با بررسی آمارهای درصد ریاضیات در کنکور سراسری و سایر آزمون‌ها، می‌توان ضعف دانشجویان در این درس را کشف نمود. در این بخش، به معرفی این چالش‌ها و نقش مهم هوش مصنوعی در حل آنها می‌پردازیم:

- تفهیم مفاهیم ریاضیاتی
- فراگیری متناسب با نیازهای هر دانش‌آموز
- جلب توجه دانش‌آموزان
- توسعه معلمان ماهر تدریس ریاضیات

با استفاده از هوش مصنوعی و ترکیب آن با آموزش ریاضیات، می‌توان به تعامل مؤثرتر دانش‌آموزان با ریاضیات و آمادگی بهتر آنها برای یادگیری هوش مصنوعی پیش‌رو دست یافت [۲]. این ترکیب به تعامل مؤثر بین دانش‌آموزان و مواد درسی کمک کرده و مسیری مؤثر به سوی یادگیری هوش مصنوعی فراهم می‌آورد.

## ۶. اثربخشی متقابل هوش مصنوعی و ریاضیات

با توجه به چالش‌های ذکر شده در خصوص آموزش ریاضی و آموزش هوش مصنوعی، اثر بخشی متقابل هوش مصنوعی و ریاضیات کاملاً مشهود است. از طرفی ریاضیات به عنوان پایه ای جهت ایجاد توانمندی‌های مورد نیاز در درک مفاهیم هوش مصنوعی موثر است و از طرف دیگر هوش مصنوعی می‌تواند با ایجاد ابزارهای هوشمند یادگیری ریاضیات را برای دانش‌آموزان به امری جذاب و ساده به صورت مرحله‌ای تبدیل نماید. در این راستا طراحی بازی‌های هوشمند آموزنده مفاهیم ریاضیات و هوش مصنوعی به صورت توامان و بر اساس سطح مقدماتی، متوسط و پیشرفته و همچنین طراحی پلتفرم‌های خلاقانه و جدید برای آموزش به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌شود. این بازی‌ها و پلتفرم‌ها باید به‌گونه‌ای طراحی شوند که بتوانند علاوه بر ارائه آموزش‌های کاربردی و مفید، امکان انجام تمرین‌ها و پروژه‌های عملی در سطوح مختلف دشواری را برای دانش‌آموزان فراهم کند. پلتفرمی خلاقانه و منحصر به فرد را برای آغاز سفر آموزشی دانش‌آموزان تصور کنید. این پلتفرم تنها به آموزش نمی‌پردازد، بلکه کودکان را با بازی‌های هیجان‌انگیز به تجربه هوش مصنوعی دعوت می‌کند و آن‌ها را به سوی ساخت پروژه‌ها و تمرین‌های عملی سوق می‌دهد. با استفاده از اصول یادگیری تعاملی، آموزش جذاب و متنوع و ابزارهای متناسب با سطح سنی دانش‌آموزان، این پلتفرم شگفتی‌هایی را برای آنها فراهم می‌کند. همچنین، با استفاده از گیمیفیکیشن و یادگیری تعاملی، کودکان در قالب بازی‌هایی هیجان‌انگیز و جذاب با مفاهیم ریاضیات و هوش مصنوعی آشنا می‌شوند و با اشتیاق و انگیزه بیشتری مهارت‌های جدید را یاد می‌گیرند [۳]. از طرفی، با ترکیب داستان‌سرایی تعاملی و انیمیشن، کودکان می‌توانند داستان‌های خلاقانه خود را بسازند و از اصول هوش مصنوعی و قوانین منطق در ریاضیات برای ایجاد شخصیت‌ها و رخدادهای جذاب در داستان‌ها استفاده کنند [۲]. با طراحی چنین پلتفرم خلاقانه و جذابی، کودکان در دنیایی پر از بازی، خلاقیت و هیجان به آموزش ریاضیات و هوش مصنوعی وارد می‌شوند و توانایی‌های خود را با سرعت بیشتری رشد می‌دهند [۶]. رویکرد STEM (علم، تکنولوژی، مهندسی و ریاضیات) به عنوان یک رویکرد یادگیری تکاملی، در آموزش هوش مصنوعی و برنامه‌نویسی به دانش‌آموزان نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. این رویکرد با ترکیب مفاهیم علمی، تکنولوژی، مهندسی و ریاضیات، دانش‌آموزان را به یادگیری تفکر نقادانه، حل مسائل و تفکر خلاقانه در زمینه‌های هوش مصنوعی و برنامه‌نویسی ترغیب می‌کند. یادگیری STEM در زمینه هوش مصنوعی به دانش‌آموزان این امکان را می‌دهد تا با مفاهیم پایه‌ای هوش مصنوعی آشنا شده و درک عمیق‌تری از کارکردها و کاربردهای آن پیدا کنند. با ارتباط دادن مفاهیم هوش مصنوعی به مفاهیم ریاضی، دانش‌آموزان می‌توانند الگوریتم‌ها و مدل‌های مختلف را درک کرده و حتی خودشان آن‌ها را طراحی و پیاده‌سازی کنند. از طریق تجربه‌های عملی و پروژه‌های کاربردی، دانش‌آموزان می‌توانند به‌طور مستقل مفاهیم هوش مصنوعی را بررسی کرده و به توانایی‌های خود در این زمینه اعتماد پیدا کنند.

## ۷. نتیجه‌گیری

آموزش هوش مصنوعی به دانش آموزان، یک فرصت بی نظیر برای توسعه تفکر محاسباتی، مهارت‌های خلاقیت، حل مسئله و پیشرفت فناوری در جامعه است. با آموزش این مهارت‌ها به دانش آموزان، آن‌ها قادر خواهند بود تا نسلی هوشمند و مسلط به فناوری را بسازند. در این مقاله به بررسی چالش‌ها، راهکارها و ایده‌هایی نوین برای آموزش هوش مصنوعی و ریاضیات و بررسی نقش متقابل این دو زمینه بر یکدیگر پرداخته شد. یکی از چالش‌های اساسی در آموزش هوش مصنوعی به دانش آموزان، پیچیدگی مفاهیم فنی است این مفاهیم باید به صورت ساده و جذاب برای کودکان و نوجوانان تدریس و در نحوه استدلال و تفکر آنان نهادینه شود تا بتوانند با دنیای فناوری آشنا شوند و مهارت‌های لازم را درک کنند. آموزش ریاضیات به صورت صحیح و کامل یکی از راههای مدیریت این چالش می باشد. برگزاری کارگاه‌ها و استفاده از روش‌های تعاملی و بازی‌های آموزشی می‌تواند به دانش آموزان در یادگیری توأمان هوش مصنوعی و ریاضیات کمک کند.

## مراجع

1. B. Alsaadi, B. Alsaadi, A. Alghamdi, M. Alfheid, N. Almuallim and M. Mec-cawy, *Learning While Playing: Introducing Programming Concepts to Children in Minecraft*, International journal of online and biomedical engineering 18 (2022), no. 13, 4-24.
2. S. Sastre-Merino, J.L. Martín-Núñez and A. Verdu-Vazquez, *Creation of a Digital Learning Ecosystem Using Research-Based Learning for Future Programming Teachers*, Journal of Information Technology Research 15 (2022), no. 1, 1-14.
3. G. Tisza, P. Markopoulos and H. King, *Socioeconomic background influences children's attitudes and learning in creative programming workshop*, Educ Inf Technol (Dordr) 28 (2023), no. 6, 43-69.
4. D. Umutlu, *An exploratory study of pre-service teachers' computational thinking and programming skills*, Journal of Research on Technology in Education 54 (2022), no. 5, 191-227.
5. A. Wallo, H. Kock, C. Reineholm and P.E. Ellström, *How do managers promote workplace learning? Learning-oriented leadership in daily work*, Journal of Workplace Learning 34 (2022), no. 1, 58-73.
6. M.S. Zubair, D.J. Brown, T. Hughes-Roberts and M. Bates, *Designing accessible visual programming tools for children with autism spectrum condition*, Univers Access Inf Soc 22 (2023), no. 2, 277-296.

# تحقیق در عملیات

## ارائه مدل ریاضی چندهدفه در زنجیره تامین معکوس برای بهبود عملکرد رضایتمندی مشتری در خصوص عملیات سرویس دهی از بُعد جغرافیایی

پرستو کعبی نژاد<sup>۱\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران  
[parastookabinejad@iust.ac.ir](mailto:parastookabinejad@iust.ac.ir)

چکیده. در این تحقیق، یک زنجیره تامین روبه جلو و معکوس تایر طراحی شده است و یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط چندهدفه، چنددوره‌ای، چندمحصولی با در نظر گرفتن عدم قطعیت توسعه داده شده است. علاوه بر این، ایده جدیدی از ادغام مفهوم مدیریت ارتباط با مشتری و مدیریت زنجیره تامین پیشنهاد گردیده و در ساختار مدل سازی ریاضی گنجانده شده است. سپس یک مدل چندهدفه مبتنی بر راهکار پیشنهادی را به دنبال بهینه سازی قوی و رویکردهای برنامه ریزی هدف چندگزینه‌ای بازنگری شده حل می‌کنیم.

### ۱. پیش‌گفتار

زنجیره تامین (در شکل کلاسیک، زنجیره تامین روبه جلو) ترکیبی از فرایندها جهت پاسخگویی به درخواست مشتری است که شامل همه نهادهای احتمالی مانند تامین‌کنندگان، تولیدکنندگان، حمل و نقل، انبار، خرده‌فروشان و فروشندگان تجاری است. مدیریت زنجیره تامین شامل هدایت تمام اعضای زنجیره تامین به صورت یکپارچه و هماهنگ با هدف بهبود عملکرد جهت ارتقا بهره‌وری و سود بیشتر است. در دهه گذشته، شبکه‌های لجستیک معکوس در بسیاری از زنجیره‌های تامین در صنایع مختلف رشد چشمگیری داشته‌اند. لجستیک معکوس عبارت است از فرایند موثر برنامه ریزی، اجرا و کنترل جریان مواد خام، موجودی نیمه‌ساخته، محصولات نهایی و اطلاعات مربوط به آنها به صورت موثر از لحاظ هزینه، از نقطه مصرف به نقطه مبدا، با هدف خلق مجدد ارزش یا دفع مناسب [۱]. هزینه‌های لجستیک معکوس و زنجیره تامین به عنوان مترادف در صنعت و علم مورد استفاده قرار می‌گیرند. در سال ۲۰۲۳، محققان بر روی مدل

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 91B76; Secondary 91B60.

واژگان کلیدی. زنجیره تامین، لجستیک معکوس، رضایتمندی مشتری، عملیات سرویس دهی.  
\* سخنران

لجستیک معکوس متمرکز شدند. از جمله می‌توان به مدل‌سازی‌های دینگ و همکارانش [۲] که بر مبنای لجستیک روبه‌جلو و معکوس برای اقتصاد دایره‌ای در ساخت و ساز است یا بوت و همکارانش [۳] که بر مبنای نقش لجستیک معکوس در اقتصاد دایره‌ای برای دستیابی به اهداف توسعه پایدار است اشاره نمود. این مقاله چندین بینش ارزشمند را برای متخصصان ارائه می‌کند تا از طریق لجستیک معکوس (کاهش ضایعات، مصرف مسئولانه و تدارکات پایدار) یک اقتصاد دایره‌ای ایجاد نمایند. این تحقیق به اهداف توسعه پایدار سازمان ملل متحد نیز کمک می‌کند.

## ۲. مدل‌سازی ریاضی

برای انجام مدل‌سازی ابتدا نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.

### شاخص‌ها.

$l$ : فهرست مکان‌های ثابت کارخانه‌های تولیدی؛  $i$ : فهرست مکان‌های ثابت مراکز توزیع؛  $j$ : فهرست مکان‌های بالقوه مراکز جمع‌آوری؛  $k$ : فهرست مکان‌های بالقوه برای مراکز ترکیبی؛  $m$ : فهرست مکان‌های ثابت مشتریان نوع ۱ و ۲؛  $n$ : فهرست مکان‌های بالقوه موجود برای کارخانه‌های بازیافت؛  $o$ : فهرست مکان‌های ثابت مشتریان نوع ۳.

### متغیرهای تصمیم‌گیری.

$Q_{p'lt}$ : مقدار محصول  $p$  تولید شده توسط کارخانه تولیدی  $l$  در دوره  $t$ ؛  $Q'_{p'nt}$ : مقدار محصول بازیافتی  $p'$  تولید شده توسط کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AB_{plit}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید  $l$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AC_{plkt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید  $l$  به مرکز هیبریدی  $k$  در دوره  $t$ ؛  $AD_{pimt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز توزیع  $i$  به مشتری  $m$  در دوره  $t$ ؛  $AE_{pkmt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز هیبریدی  $k$  به مشتری  $m$  در دوره  $t$ ؛  $AF_{pmkt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز هیبریدی  $k$  در دوره  $t$ ؛  $AG_{pmjt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز جمع‌آوری  $j$  در دوره  $t$ ؛  $AH_{pmit}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AI_{pjnt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز جمع‌آوری  $j$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AJ_{pint}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز توزیع  $i$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AK_{pknt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز هیبریدی  $k$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AL_{p'not}$ : مقدار محصول بازیافتی  $p'$  ارسال شده از کارخانه بازیافت  $n$  به مشتری  $o$  در دوره  $t$ ؛  $AN_{plts}$ : سطح موجودی محصول  $p$  در کارخانه  $l$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $BO_{mpts}$ : سطح سفارش پشتیبان مشتری  $m$  برای محصول  $p$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $X_i, Y_j, Z_k, W_n$  متغیرهای صفر و یک می‌باشند که به ترتیب یک هستند اگر مراکز توزیع  $i$ ، جمع‌آوری  $j$ ، هیبریدی  $k$  و کارخانه بازیافت  $n$  باز باشند و در غیر این صورت صفر می‌باشند؛  $OA, OB, OC, OD, OE$  و  $OF$  متغیرهای صفر و یک هستند که به ترتیب یک می‌باشند اگر گزینه‌های  $A, B, C, D, E$  و  $F$  فعال باشند و در غیر این صورت، صفر هستند؛  $FF_{pmt}$ : تعداد کل محصول رایگان  $p$  داده شده به مشتری در دوره  $t$ .

### پارامترها.

$PP_{pt}$ : قیمت واحد محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $PA_{p't}$ : قیمت واحد محصول بازیافتی  $p'$  بر حسب تن در دوره  $t$ ؛  $PC_{pt}$ : واحد تامین و هزینه تولید محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $RC_{p't}$ : هزینه واحد تامین و تولید محصول بازیافتی  $p'$  بر حسب تن در دوره  $t$ ؛  $D_{mpts}$ : تقاضای مشتری  $m$  برای محصول  $p$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $D'_{opt}$ : کاهش تقاضای مشتری  $o$  برای محصول بازیافتی  $p$  به تن

در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $TD_{pt}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید به مراکز توزیع/هیبریدی در دوره  $t$ ؛  $TR_{pt}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول  $p$  ارسال شده از مراکز جمع‌آوری/هیبرید به کارخانه‌های بازیافت در دوره  $t$ ؛  $TO_{p't}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول بازیافتی  $p'$  ارسال شده از کارخانه‌های بازیافت به مشتریان نوع ۳ در دوره  $t$ ؛  $IC_i$ : هزینه ثابت برای تبدیل مرکز توزیع  $i$  به هیبریدی؛  $FCC_j$ : هزینه ثابت برای افتتاح مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $FCH_k$ : هزینه ثابت برای باز کردن مرکز هیبریدی  $k$ ؛  $FC_n$ : هزینه ثابت برای افتتاح کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $\alpha_t$ : تعداد محصولات استفاده شده که می‌توان بدون درگیری مشتری با آنها در دوره زمانی  $t$  برخورد کرد؛  $\gamma$ : میانگین میزان مصرف محصولات در کشور در هر دوره؛  $\beta$ : تعداد محصولات استفاده شده‌ای که مشتریان برای داشتن یک محصول جدید رایگان باید برگردانند؛  $DA_{li}$ : فاصله بین کارخانه تولید  $l$  و مرکز توزیع  $i$ ؛  $DB_{lk}$ : فاصله بین کارخانه تولید  $l$  و مرکز هیبریدی  $k$ ؛  $DC_{kn}$ : فاصله بین مرکز هیبریدی  $k$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DD_{jn}$ : فاصله بین مرکز جمع‌آوری  $j$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DE_{in}$ : فاصله بین مرکز توزیع  $i$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DF_{no}$ : فاصله بین کارخانه بازیافت  $n$  و مشتری  $o$ ؛  $MXC_j$ : حداکثر ظرفیت مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $MNC_j$ : حداقل ظرفیت قابل قبول استفاده از مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $XCF_k$ : حداکثر ظرفیت مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات در جهت جلو؛  $NCF_k$ : حداقل ظرفیت قابل قبول مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات در جهت جلو؛  $XCR_k$ : حداکثر ظرفیت مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات مصرف شده در جهت عقب؛  $NCR_k$ : حداقل ظرفیت قابل قبول مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات مصرف شده در جهت عقب؛  $UF_i$ : حداکثر ظرفیت مرکز توزیع  $i$  در جهت جلو؛  $UR_i$ : حداکثر ظرفیت مرکز توزیع  $i$  که در جهت عقب به هیبریدی تبدیل شد؛  $CAP_{pls}$ : ظرفیت تولید محصول  $p$  در کارخانه تولیدی  $l$  تحت سناریو  $s$ ؛  $CN_{ns}$ : ظرفیت کارخانه بازیافت  $n$  تحت سناریو  $s$ ؛  $MM_{pp}$ : ماتریس تغییر تعداد واحد محصولات به وزن معادل اجزای محصول بر حسب تن؛  $P$ : شاخص برای محصولات در جهت رو به جلو؛  $P'$ : شاخص برای محصولات بازیافتی در جهت معکوس؛  $t$ : شاخص برای دوره‌ها؛  $a$ : فهرست گزینه‌های CRM؛  $s$ : شاخص برای سناریوها؛  $HH_{plt}$ : بهای تمام شده نگهداری موجودی واحد محصول  $p$  در کارخانه تولیدی  $l$  در دوره  $t$ ؛  $CBO_{pt}$ : هزینه سفارش پشتیبان واحد محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $M$ : یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ؛  $COB$ ،  $COC$ ،  $COD$ ،  $COE$  و  $COF$  به ترتیب هزینه گزینه  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  و  $F$ ؛  $\alpha = [\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D, \alpha_E, \alpha_F]$ : بردار تأثیر نشان‌دهنده سطح تأثیر گزینه‌های CRM تعریف شده بر رضایت مشتری است.

اهداف اصلی مدل ارائه شده به حداکثر رساندن سود کل، به حداکثر رساندن رضایت کلی مشتری و به حداقل رساندن فاصله کل بین مجموعه‌ای که قرار است افتتاح شود و مشتریانی که

پ. کعبی‌نژاد

محصولات استفاده شده خود را بیشتر باز می‌گردانند به شرح زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } F_{\setminus s} & \quad (1.2) \\
 & = \sum_p \sum_t \left( \sum_i \sum_m AD_{pimt} + \sum_k \sum_m AE_{pkmt} \right) PP_{pt} + \sum_i \sum_{p'} \sum_n \sum_o AL_{p'not} PA_{p't} \\
 & - \sum_t \sum_p \sum_l PC_{pt} Q_{plt} - \sum_t \sum_n \sum_{p'} RC_{p't} Q'_{p'nt} - \sum_t \sum_{p'} \sum_n \sum_o TO_{p't} AL_{p'not} DF_{no} \\
 & - \sum_p \sum_t TR_{pt} \left( \sum_k \sum_n AK_{pknt} DC_{kn} + \sum_j \sum_n AI_{pjnt} DD_{jn} + \sum_i \sum_n AJ_{pint} DE_{in} \right) \\
 & - \sum_p \sum_t TD_{pt} \left( \sum_l \sum_i AB_{plit} DA_{li} + \sum_l \sum_k AC_{plkt} DB_{lk} \right) - \sum_j FCC_j Y_j - \sum_k FCH_k Z_k \\
 & - \sum_n FC_n W_n - \sum_i IC_i X_i - \sum_t \sum_p \sum_l HH_{plt} IN_{pnts} - \sum_t \sum_p \sum_m CBO_{pt} BO_{mpts} \\
 & - \left( \sum_t \sum_p \sum_m FF_{pmt} PP_{pt} OA \right) - COB \times OB - (COC \times OC) - (COD \times OD),
 \end{aligned}$$

$$\text{Max } F_{\setminus \gamma} = \frac{1}{\gamma} V(U(\alpha)), \quad (2.2)$$

که در آن  $U(\alpha)$  تابعی برای محاسبه سطح رضایت مشتری در نظر گرفته می‌شود و  $V$  تابعی خطی فرض شده است که مقدار کل محصولات مصرف شده دریافت شده از مشتریان را با در نظر گرفتن رضایت مشتری حساب می‌کند.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } F_{\setminus \gamma} & \quad (3.2) \\
 & = \sum_t \sum_p \sum_m \sum_k AF_{pmkt} DG_{mk} + \sum_t \sum_p \sum_m \sum_j AG_{pmjt} DH_{mj} \\
 & + \sum_t \sum_p \sum_m \sum_i AH_{pmit} DI_{mi}
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که به مانند هر مدل رویکرد برنامه‌ریزی و بهینه‌سازی، این مدل نیز شامل محدودیت‌هایی می‌باشد که آنها را می‌توان به سه قسمت تقسیم نمود:

- محدودیت‌های تعادل (۱۱ محدودیت) که برای اطمینان از تعادل در جریان و موجودی محصولات در کل فرآیند است استفاده می‌شوند،
- محدودیت‌های ظرفیت (۱۰ محدودیت) که برای تعریف و اعمال ظرفیت‌های سیستم ارائه می‌گردند،
- محدودیت‌های حمل و نقل (۱۲ محدودیت) که به منظور حفظ ثبات و یکپارچگی مدل در رابطه با پیوندهای شبکه حمل و نقل ارائه می‌گردند و تضمین کننده عدم حمل و نقل بین مکان‌های غیرمرتبط است.

توجه داشته باشید که ذکر تمام محدودیت‌ها در اینجا امکان‌پذیر نمی‌باشد اما کارایی مساله فوق با در نظر گرفتن محدودیت‌ها برای چند مثال عینی و تصادفی توسط الگوریتم NSGAI توسط نویسندگان انجام شده است و نتایج جالبی از آن به دست آمده است.

### ۳. نتیجه‌گیری

از چالش‌های اصلی در این تحقیق، گنجاندن مفهوم CRM در تصمیمات استراتژیک و تاکتیکی SCM است. به‌خصوص، طراحی شبکه به عنوان تصمیمی استراتژیک به دلایل زیر مورد توجه است. اول، طراحی یک شبکه خوب شرکت را قادر می‌سازد تا روابط موثر و کارآمدی با مشتریان خود داشته باشد. دوم، با در نظر گرفتن CRM، برنامه‌های اقدام جدیدی را می‌توان با هدف به حداکثر رساندن رضایت مشتری تعریف کرد که می‌تواند به انگیزه مشتریان برای همکاری با SC در جمع‌آوری محصولات نهایی در جریان معکوس کمک کند. سوم، در نظر گرفتن نیاز مشتری که به معنای افزایش ارزش مشتری است می‌تواند SC را در بازار رقابتی جهانی متمایز کند. از اینرو، برای حل مدل مبتنی بر سناریو پیشنهادی، آن را به یک هم‌تای قوی معادل تبدیل کرده و یک روش برنامه‌ریزی چندگزینه‌ای تجدیدنظر شده برای به دست آوردن یک راه‌حل کارآمد با سه تابع هدف مدل به کار گرفته شد. برای بررسی کارایی، مطالعه‌ای از صنعت تایر شامل کارخانه تولید، دو مرکز توزیع و هشت مشتری اصلی در شبکه SC تایر پیشرو انجام شده است (به جهت محدودیت صفحات کنفرانس، امکان ارائه شکل‌ها و جداول مقایسه‌ای نمونه بررسی شده نیست).

### مراجع

1. Z. Lu and N. Bostel, *A facility location model for logistics systems including reverse flows: The case of remanufacturing activities*, Comput. Oper. Res. 34 (2007), 299–323.
2. L. Ding, T. Wang and P.W. Chan, *Forward and reverse logistics for circular economy in construction: A systematic literature review*, J. Cleaner Production. 388 (2023), no. 135981.
3. A.S. Butt, I. Ali and K. Govindan, *The role of reverse logistics in a circular economy for achieving sustainable development goals: a multiple case study of retail firms*, Product. Plan. Control. (2023) 1-13.

## تقریب نامساوی کر بهبودیافته برای مقایسه‌ی اعداد فازی LR با استفاده از روش سیمپسون

سحر راهدار<sup>۱\*</sup>، رضا قنبری<sup>۲</sup>، و خاطره قربانی مقدم<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد  
*s.rahdar@mail.um.ac.ir*

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد  
*rghanbari@um.ac.ir*

<sup>۳</sup> عضو هیئت علمی موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، تهران  
*k.ghorbani@khu.ac.ir*

چکیده. با وجود کاربردهای گسترده‌ی مقایسه‌ی اعداد فازی در الگوریتم‌های بهینه‌سازی فازی، تاکنون روش فراگیری برای مقایسه‌ی عددهای فازی ارائه نشده است. از جمله روش‌های شناخته شده برای مقایسه‌ی دو عدد فازی، روش کر بهبود یافته است. ما در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از روش تقریبی سیمپسون، انتگرال‌های موجود در روش کر بهبود یافته را تقریب بزنیم و فرمول مستقیمی برای مقایسه اعداد فازی LR ارائه دهیم. سپس فرمول بدست آمده را بر روی مثال‌هایی از انواع مختلف اعداد فازی LR پیاده سازی کنیم. در انتها، از کاربردهای مهم فرمول پیشنهادی می‌توان به کاربرد آن در الگوریتم‌های بهینه‌سازی اشاره نمود.

### ۱. مقدمه

در دنیای پیچیده و متغیر کنونی اطلاعات اغلب با عدم قطعیت و ابهام همراه هستند. به منظور مدیریت این عدم قطعیت، منطق فازی به عنوان یک ابزار قدرتمند به کار گرفته می‌شود. یکی از چالش‌های مهم در این زمینه، مقایسه اعداد فازی است که در بسیاری از کاربردهای علمی نقش حیاتی ایفا می‌کند [۳]. کر<sup>۱</sup> در [۲]، با استفاده از اصل گسترش و محاسبه ماکزیمم فازی، یک روش برای مقایسه دو عدد فازی ارائه کرده است. سپس قنبری و همکاران در [۱]، به بهبود روش کر پرداختند، به طوری که بدون نیاز به محاسبه ماکزیمم فازی، می‌توان دو عدد فازی LR را با هم مقایسه کرد (جزئیات را در [۱] ببینید). از آن‌جا که فرمول کر بهبودیافته برای مقایسه‌ی اعداد فازی LR [۱] شامل تعدادی انتگرال است و محاسبه‌ی مستقیم

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. اعداد فازی LR، روش کر بهبود یافته، تقریب سیمپسون.  
 \* سخنران  
 Kerre<sup>۱</sup>

انتگرال‌ها به دلیل پیچیدگی ذاتی ریاضی و نیاز به دقت بالا، اغلب با چالش‌های زیادی همراه است، در صدد آن برآمدیم تا با استفاده از روش‌های تقریب انتگرال، یک فرمول بسته برای مقایسه‌ی اعداد فازی LR ارائه کنیم. روش سیمپسون با ترکیب دقت بالا و کارایی محاسباتی نسبت به بسیاری از روش‌های دیگر تقریب انتگرال، نتایج دقیق‌تر و پایدارتری ارائه می‌دهد، لذا ما برای تقریب انتگرال از این روش استفاده می‌کنیم. در ادامه فرمول بدست آمده را بر روی انواع مختلفی از اعداد فازی LR پیاده سازی خواهیم کرد.

## ۲. تعریف‌های مقدماتی

تعریف ۱.۲. [۳] یک مجموعه فازی  $\tilde{A}$  با تابع عضویت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{b-x}{\alpha}), & x \leq b, \\ R(\frac{x-b}{\beta}), & x \geq b, \end{cases} \quad (1.2)$$

یک عدد فازی LR می‌نامند که در آن،  $L$  (به طور مشابه  $R$ ) یک تابع نافزایشی از  $\mathbb{R}^+$  به  $[0, 1]$  است که  $L(0) = 1$  و  $L(1) = 0$  و برای  $0 < L(x) < 1$ ،  $x \neq 0, 1$ . این عدد را با نماد  $\tilde{A} = (b/\alpha/\beta)_{LR}$  نشان می‌دهند. در نمایش عدد فازی  $LR$ ، مقدار میانی،  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست  $\tilde{A}$  هستند و توابع  $L$  و  $R$  توابع تولید نامیده می‌شوند.

توجه ۲.۲. بر اساس تعریف ۱.۲، نمایش دیگر عدد فازی  $LR$   $\tilde{A}$  به صورت  $\tilde{A} = (A_L, A_R)$  است که  $A_L$  و  $A_R$  به ترتیب توابع سمت چپ و راست عدد فازی  $\tilde{A}$  هستند.

توجه ۳.۲. در ادامه، عدد فازی  $LR$  به صورت  $\tilde{A} = (a/b/c)_{LR}$  نمایش داده می‌شود که  $\alpha = b - a$  و  $\beta = c - b$ .

تعریف ۴.۲. [۱] فرض کنید  $\tilde{M} = (a/b/c)_{LR}$  و  $\tilde{N} = (a'/b'/c')_{LR}$  دو عدد فازی دلخواه  $LR$  هستند، اگر  $b \leq b'$  داریم:

$$r(\tilde{M}, \tilde{N}) = \int_{\min(a, a')}^b (\tilde{M}(z) - \tilde{N}(z)) dz + \int_b^{b'} |\tilde{M}(z) - \tilde{N}(z)| dz + \int_{b'}^{\max(c, c')} (\tilde{N}(z) - \tilde{M}(z)) dz. \quad (2.2)$$

تعریف ۵.۲. [۱] فرض کنید  $\tilde{M} = (a/b/c)_{LR}$  و  $\tilde{N} = (a'/b'/c')_{LR}$  دو عدد فازی دلخواه  $LR$  هستند، اگر  $r(\tilde{M}, \tilde{N}) \geq 0$  آن‌گاه  $\tilde{M} \leq \tilde{N}$  در غیر این‌صورت،  $\tilde{M} \geq \tilde{N}$ .

## ۳. استفاده از تقریب سیمپسون در روش کر بهبود یافته

در این بخش می‌خواهیم از روش تقریبی سیمپسون برای تقریب انتگرال‌های فرمول (۲.۲) استفاده نماییم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید  $\tilde{M} = (a/b/c)_{LR}$  و  $\tilde{N} = (a'/b'/c')_{LR}$  دو عدد فازی دلخواه  $LR$  هستند، در این صورت با استفاده از تقریب سیمپسون حالت‌های زیر را خواهیم داشت:  
حالت اول: اگر  $c \leq a'$  آن‌گاه:

تقریب نامساوی کر بهبودیافته برای مقایسه‌ی اعداد فازی LR با استفاده از روش سیمپسون

$$r(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = \frac{2}{3}[(b-a)M_L(\frac{a+b}{2}) + (c-b)M_R(\frac{b+c}{2}) \\ + (b'-a')N_L(\frac{a'+b'}{2}) + (c'-b')N_R(\frac{b'+c'}{2})] \\ + \frac{1}{6}[c-a+c'-a'].$$

حالت دوم: اگر  $b = b'$  آن‌گاه:

$$r(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = \frac{\bar{a}-a}{6}[M_L(a) - N_L(a) + \Psi(M_L(\frac{\bar{a}+a}{2}) - N_L(\frac{\bar{a}+a}{2})) \\ + M_L(\bar{a}) - N_L(\bar{a})] + \frac{b-\bar{a}}{6}[M_L(\bar{a}) - N_L(\bar{a}) + \Psi(M_L(\frac{\bar{a}+b}{2}) \\ - N_L(\frac{\bar{a}+b}{2}))] + \frac{c-b}{6}[\Psi(N_R(\frac{b+c}{2}) - M_R(\frac{b+c}{2})) + N_R(c) \\ - M_R(c)] + \frac{\bar{c}-c}{6}[N_R(c) - M_R(c) + \Psi(N_R(\frac{\bar{c}+c}{2}) - M_R(\frac{\bar{c}+c}{2})) \\ + N_R(\bar{c}) - M_R(\bar{c})].$$

که  $\underline{c} = \min(c, c')$  و  $\bar{c} = \max(c, c')$ ،  $\underline{a} = \min(a, a')$ ،  $\bar{a} = \max(a, a')$    
 حالت سوم: اگر  $b < b' < c$  و  $a' \leq b$  آن‌گاه:

$$r(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = \frac{\bar{a}-a}{6}[M_L(a) - N_L(a) + \Psi(M_L(\frac{\bar{a}+a}{2}) - N_L(\frac{\bar{a}+a}{2}))] + M_L(\bar{a}) \\ - N_L(\bar{a}) + \frac{b-\bar{a}}{6}[M_L(\bar{a}) - N_L(\bar{a}) + \Psi(M_L(\frac{\bar{a}+b}{2}) - N_L(\frac{\bar{a}+b}{2}))] \\ + 1 - N_L(b) + \frac{\bar{x}-b}{6}[1 - N_L(b) + \Psi(M_R(\frac{b+\bar{x}}{2}) - N_L(\frac{b+\bar{x}}{2}))] \\ + M_R(\bar{x}) - N_L(\bar{x}) + \frac{b'-\bar{x}}{6}[N_L(\bar{x}) - M_R(\bar{x}) + \Psi(N_L(\frac{\bar{x}+b'}{2}) \\ - M_R(\frac{\bar{x}+b'}{2}))] + 1 - M_R(b') + \frac{c-b'}{6}[1 - M_R(b') + \Psi(N_R(\frac{b'+c}{2}) \\ - M_R(\frac{b'+c}{2}))] + N_R(c) - M_R(c) + \frac{\bar{c}-c}{6}[N_R(c) - M_R(c) \\ + \Psi(N_R(\frac{\bar{c}+c}{2}) - M_R(\frac{\bar{c}+c}{2}))] + N_R(\bar{c}) - M_R(\bar{c})]$$

$$\bar{x} = \frac{b'c-ba'}{(b'-a')+(c-b)}$$

برای سه حالت دیگر ( $b \leq a'$  و  $b' \leq c$ ،  $b < b'$ )، ( $c \leq b'$  و  $a' \leq b$ ،  $b < b'$ )، ( $c \leq b'$  و  $b \leq a'$ ) مشابه حالت قبل، فرمول بسته‌ای به صورت جداگانه به دست می‌آید.

#### ۴. نتایج عددی

برای ارزیابی عملکرد فرمول‌های پیشنهادی، ما آن‌ها را بر روی  $500$  عدد فازی LR در یک بازه مشخص اجرا کردیم. اعداد فازی مورد استفاده در این مطالعه به صورت تصادفی از بازه  $[-500, 500]$  انتخاب شدند. تمامی محاسبات و پیاده‌سازی‌ها بر روی یک لپ‌تاپ با مشخصات پردازنده 5 Ryzen و رم 16 گیگابایت و در محیط نرم افزار پایتون ورژن 3/11 پیاده سازی شده است. قسمتی از نتایج در جدول (1) نشان داده شده است.

جدول 1: مقایسه دو عدد فازی

عدد فازی $\tilde{M}$	عدد فازی $\tilde{N}$	مقدار rk	مقدار rs
$(-241/-204/147)_{LR}$	$(81/113/398)_{LR}$	398,7389	398,7389
$(-424/-396/-77)_{LR}$	$(-193/-172/403)_{LR}$	503,8085	503,8085
$(-349/-320/151)_{LR}$	$(-137/-109/450)_{LR}$	431,5909	431,5909
$(-183/-135/-53)_{LR}$	$(212/248/439)_{LR}$	208,25	208,25
$(-90/-51/335)_{LR}$	$(200/222/350)_{LR}$	283,3393	283,3393

در این جدول، ستون سوم و چهارم به ترتیب مقدار  $r(\tilde{M}, \tilde{N})$  محاسبه شده با استفاده از فرمول (2.2) و فرمول بسته پیشنهادی با استفاده از سیمپسون است.

#### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از روش سیمپسون، تقریبی برای انتگرال‌های موجود در فرمول کر بهبود یافته، برای مقایسه اعداد فازی LR بدست آوردیم. این تقریب دارای پیچیدگی  $O(1)$  است که از کاربردهای آن می‌توان به حل مسائل بهینه‌سازی اشاره کرد.

#### مراجع

- [1] R. Ghanbari, Kh. Ghorbani-Moghadam and N. Mahdavi-Amiri, *A variables neighborhood search algorithm for solving fuzzy quadratic programming problems using modified Kerre's method*, Soft Comput. (2019), no. 23, 12305–12315.
- [2] X. Wang, E.E. Kerre, *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II)*, Fuzzy Sets Syst. (2001), no. 118, 387–405.
- [3] H.J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

جبر

## ارائه مدل ریاضی چندهدفه در زنجیره تامین معکوس برای بهبود عملکرد رضایتمندی مشتری در خصوص عملیات سرویس دهی از بُعد جغرافیایی

پرستو کعبی نژاد<sup>۱\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران  
*parastookabinejad@iust.ac.ir*

چکیده. در این تحقیق، یک زنجیره تامین روبه جلو و معکوس تایر طراحی شده است و یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط چندهدفه، چنددوره‌ای، چندمحصولی با در نظر گرفتن عدم قطعیت توسعه داده شده است. علاوه بر این، ایده جدیدی از ادغام مفهوم مدیریت ارتباط با مشتری و مدیریت زنجیره تامین پیشنهاد گردیده و در ساختار مدل سازی ریاضی گنجانده شده است. سپس یک مدل چندهدفه مبتنی بر راهکار پیشنهادی را به دنبال بهینه سازی قوی و رویکردهای برنامه ریزی هدف چندگزینه‌ای بازنگری شده حل می‌کنیم.

### ۱. پیش‌گفتار

زنجیره تامین (در شکل کلاسیک، زنجیره تامین روبه جلو) ترکیبی از فرایندها جهت پاسخگویی به درخواست مشتری است که شامل همه نهادهای احتمالی مانند تامین‌کنندگان، تولیدکنندگان، حمل و نقل، انبار، خرده‌فروشان و فروشندگان تجاری است. مدیریت زنجیره تامین شامل هدایت تمام اعضای زنجیره تامین به صورت یکپارچه و هماهنگ با هدف بهبود عملکرد جهت ارتقا بهره‌وری و سود بیشتر است. در دهه گذشته، شبکه‌های لجستیک معکوس در بسیاری از زنجیره‌های تامین در صنایع مختلف رشد چشمگیری داشته‌اند. لجستیک معکوس عبارت است از فرایند موثر برنامه ریزی، اجرا و کنترل جریان مواد خام، موجودی نیمه‌ساخته، محصولات نهایی و اطلاعات مربوط به آنها به صورت موثر از لحاظ هزینه، از نقطه مصرف به نقطه مبدا، با هدف خلق مجدد ارزش یا دفع مناسب [۱]. هزینه‌های لجستیک معکوس و زنجیره تامین به عنوان مترادف در صنعت و علم مورد استفاده قرار می‌گیرند. در سال ۲۰۲۳، محققان بر روی مدل

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 91B76; Secondary 91B60.

واژگان کلیدی. زنجیره تامین، لجستیک معکوس، رضایتمندی مشتری، عملیات سرویس دهی.  
\* سخنران

لجستیک معکوس متمرکز شدند. از جمله می‌توان به مدل‌سازی‌های دینگ و همکارانش [۲] که بر مبنای لجستیک روبه‌جلو و معکوس برای اقتصاد دایره‌ای در ساخت و ساز است یا بوت و همکارانش [۳] که بر مبنای نقش لجستیک معکوس در اقتصاد دایره‌ای برای دستیابی به اهداف توسعه پایدار است اشاره نمود. این مقاله چندین بینش ارزشمند را برای متخصصان ارائه می‌کند تا از طریق لجستیک معکوس (کاهش ضایعات، مصرف مسئولانه و تدارکات پایدار) یک اقتصاد دایره‌ای ایجاد نمایند. این تحقیق به اهداف توسعه پایدار سازمان ملل متحد نیز کمک می‌کند.

## ۲. مدل‌سازی ریاضی

برای انجام مدل‌سازی ابتدا نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.

### شاخص‌ها.

$l$ : فهرست مکان‌های ثابت کارخانه‌های تولیدی؛  $i$ : فهرست مکان‌های ثابت مراکز توزیع؛  $j$ : فهرست مکان‌های بالقوه مراکز جمع‌آوری؛  $k$ : فهرست مکان‌های بالقوه برای مراکز ترکیبی؛  $m$ : فهرست مکان‌های ثابت مشتریان نوع ۱ و ۲؛  $n$ : فهرست مکان‌های بالقوه موجود برای کارخانه‌های بازیافت؛  $o$ : فهرست مکان‌های ثابت مشتریان نوع ۳.

### متغیرهای تصمیم‌گیری.

$Q_{pl}t$ : مقدار محصول  $p$  تولید شده توسط کارخانه تولیدی  $l$  در دوره  $t$ ؛  $Q'_{p'nt}$ : مقدار محصول بازیافتی  $p'$  تولید شده توسط کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AB_{plit}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید  $l$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AC_{plkt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید  $l$  به مرکز هیبریدی  $k$  در دوره  $t$ ؛  $AD_{pimt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز توزیع  $i$  به مشتری  $m$  در دوره  $t$ ؛  $AE_{pkmt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز هیبریدی  $k$  به مشتری  $m$  در دوره  $t$ ؛  $AF_{pmkt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز هیبریدی  $k$  در دوره  $t$ ؛  $AG_{pmjt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز جمع‌آوری  $j$  در دوره  $t$ ؛  $AH_{pmit}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AI_{pjnt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز جمع‌آوری  $j$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AJ_{pint}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز توزیع  $i$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AK_{pknt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز هیبریدی  $k$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AL_{p'not}$ : مقدار محصول بازیافتی  $p'$  ارسال شده از کارخانه بازیافت  $n$  به مشتری  $o$  در دوره  $t$ ؛  $AN_{plts}$ : سطح موجودی محصول  $p$  در کارخانه  $l$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $BO_{mpts}$ : سطح سفارش پشتیبان مشتری  $m$  برای محصول  $p$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $X_i, Y_j, Z_k, W_n$  متغیرهای صفر و یک می‌باشند که به ترتیب یک هستند اگر مراکز توزیع  $i$ ، جمع‌آوری  $j$ ، هیبریدی  $k$  و کارخانه بازیافت  $n$  باز باشند و در غیر این صورت صفر می‌باشند؛  $OA, OB, OC, OD, OE$  و  $OF$  متغیرهای صفر و یک هستند که به ترتیب یک می‌باشند اگر گزینه‌های  $A, B, C, D, E$  و  $F$  فعال باشند و در غیر این صورت، صفر هستند؛  $FF_{pmt}$ : تعداد کل محصول رایگان  $p$  داده شده به مشتری در دوره  $t$ .

### پارامترها.

$PP_{pt}$ : قیمت واحد محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $PA_{p't}$ : قیمت واحد محصول بازیافتی  $p'$  بر حسب تن در دوره  $t$ ؛  $PC_{pt}$ : واحد تامین و هزینه تولید محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $RC_{p't}$ : هزینه واحد تامین و تولید محصول بازیافتی  $p'$  بر حسب تن در دوره  $t$ ؛  $D_{mpts}$ : تقاضای مشتری  $m$  برای محصول  $p$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $D'_{opt}$ : کاهش تقاضای مشتری  $o$  برای محصول بازیافتی  $p$  به تن

در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $TD_{pt}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید به مراکز توزیع/هیبریدی در دوره  $t$ ؛  $TR_{pt}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول  $p$  ارسال شده از مراکز جمع‌آوری/هیبرید به کارخانه‌های بازیافت در دوره  $t$ ؛  $TO_{p't}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول بازیافتی  $p'$  ارسال شده از کارخانه‌های بازیافت به مشتریان نوع ۳ در دوره  $t$ ؛  $IC_i$ : هزینه ثابت برای تبدیل مرکز توزیع  $i$  به هیبریدی؛  $FCC_j$ : هزینه ثابت برای افتتاح مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $FCH_k$ : هزینه ثابت برای باز کردن مرکز هیبریدی  $k$ ؛  $FC_n$ : هزینه ثابت برای افتتاح کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $\alpha_t$ : تعداد محصولات استفاده شده که می‌توان بدون درگیری مشتری با آنها در دوره زمانی  $t$  برخورد کرد؛  $\gamma$ : میانگین میزان مصرف محصولات در کشور در هر دوره؛  $\beta$ : تعداد محصولات استفاده شده‌ای که مشتریان برای داشتن یک محصول جدید رایگان باید برگردانند؛  $DA_{li}$ : فاصله بین کارخانه تولید  $l$  و مرکز توزیع  $i$ ؛  $DB_{lk}$ : فاصله بین کارخانه تولید  $l$  و مرکز هیبریدی  $k$ ؛  $DC_{kn}$ : فاصله بین مرکز هیبریدی  $k$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DD_{jn}$ : فاصله بین مرکز جمع‌آوری  $j$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DE_{in}$ : فاصله بین مرکز توزیع  $i$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DF_{no}$ : فاصله بین کارخانه بازیافت  $n$  و مشتری  $o$ ؛  $MXC_j$ : حداکثر ظرفیت مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $MNC_j$ : حداقل ظرفیت قابل قبول استفاده از مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $XCF_k$ : حداکثر ظرفیت مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات در جهت جلو؛  $NCF_k$ : حداقل ظرفیت قابل قبول مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات در جهت جلو؛  $XCR_k$ : حداکثر ظرفیت مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات مصرف شده در جهت عقب؛  $NCR_k$ : حداقل ظرفیت قابل قبول مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات مصرف شده در جهت عقب؛  $UF_i$ : حداکثر ظرفیت مرکز توزیع  $i$  در جهت جلو؛  $UR_i$ : حداکثر ظرفیت مرکز توزیع  $i$  که در جهت عقب به هیبریدی تبدیل شد؛  $CAP_{pls}$ : ظرفیت تولید محصول  $p$  در کارخانه تولیدی  $l$  تحت سناریو  $s$ ؛  $CN_{ns}$ : ظرفیت کارخانه بازیافت  $n$  تحت سناریو  $s$ ؛  $MM_{pp}$ : ماتریس تغییر تعداد واحد محصولات به وزن معادل اجزای محصول بر حسب تن؛  $P$ : شاخص برای محصولات در جهت رو به جلو؛  $P'$ : شاخص برای محصولات بازیافتی در جهت معکوس؛  $t$ : شاخص برای دوره‌ها؛  $a$ : فهرست گزینه‌های CRM؛  $s$ : شاخص برای سناریوها؛  $HH_{plt}$ : بهای تمام شده نگهداری موجودی واحد محصول  $p$  در کارخانه تولیدی  $l$  در دوره  $t$ ؛  $CBO_{pt}$ : هزینه سفارش پشتیبان واحد محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $M$ : یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ؛  $COB$ ،  $COC$ ،  $COD$ ،  $COE$  و  $COF$  به ترتیب هزینه گزینه  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  و  $F$ ؛  $\alpha = [\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D, \alpha_E, \alpha_F]$ : بردار تأثیر نشان‌دهنده سطح تأثیر گزینه‌های CRM تعریف شده بر رضایت مشتری است.

اهداف اصلی مدل ارائه شده به حداکثر رساندن سود کل، به حداکثر رساندن رضایت کلی مشتری و به حداقل رساندن فاصله کل بین مجموعه‌ای که قرار است افتتاح شود و مشتریانی که

پ. کعبی‌نژاد

محصولات استفاده شده خود را بیشتر باز می‌گردانند به شرح زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } F_{\setminus s} & \quad (1.2) \\
 & = \sum_p \sum_t \left( \sum_i \sum_m AD_{pimt} + \sum_k \sum_m AE_{pkmt} \right) PP_{pt} + \sum_i \sum_{p'} \sum_n \sum_o AL_{p'not} PA_{p't} \\
 & - \sum_t \sum_p \sum_l PC_{pt} Q_{plt} - \sum_t \sum_n \sum_{p'} RC_{p't} Q'_{p'nt} - \sum_t \sum_{p'} \sum_n \sum_o TO_{p't} AL_{p'not} DF_{no} \\
 & - \sum_p \sum_t TR_{pt} \left( \sum_k \sum_n AK_{pknt} DC_{kn} + \sum_j \sum_n AI_{pjnt} DD_{jn} + \sum_i \sum_n AJ_{pint} DE_{in} \right) \\
 & - \sum_p \sum_t TD_{pt} \left( \sum_l \sum_i AB_{plit} DA_{li} + \sum_l \sum_k AC_{plkt} DB_{lk} \right) - \sum_j FCC_j Y_j - \sum_k FCH_k Z_k \\
 & - \sum_n FC_n W_n - \sum_i IC_i X_i - \sum_t \sum_p \sum_l HH_{plt} IN_{pnts} - \sum_t \sum_p \sum_m CBO_{pt} BO_{mpts} \\
 & - \left( \sum_t \sum_p \sum_m FF_{pmt} PP_{pt} OA \right) - COB \times OB - (COC \times OC) - (COD \times OD),
 \end{aligned}$$

$$\text{Max } F_{\setminus \gamma} = \frac{1}{\gamma} V(U(\alpha)), \quad (2.2)$$

که در آن  $U(\alpha)$  تابعی برای محاسبه سطح رضایت مشتری در نظر گرفته می‌شود و  $V$  تابعی خطی فرض شده است که مقدار کل محصولات مصرف شده دریافت شده از مشتریان را با در نظر گرفتن رضایت مشتری حساب می‌کند.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } F_{\setminus \gamma} & \quad (3.2) \\
 & = \sum_t \sum_p \sum_m \sum_k AF_{pmkt} DG_{mk} + \sum_t \sum_p \sum_m \sum_j AG_{pmjt} DH_{mj} \\
 & + \sum_t \sum_p \sum_m \sum_i AH_{pmit} DI_{mi}
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که به مانند هر مدل رویکرد برنامه‌ریزی و بهینه‌سازی، این مدل نیز شامل محدودیت‌هایی می‌باشد که آنها را می‌توان به سه قسمت تقسیم نمود:

- محدودیت‌های تعادل (۱۱ محدودیت) که برای اطمینان از تعادل در جریان و موجودی محصولات در کل فرآیند است استفاده می‌شوند،
- محدودیت‌های ظرفیت (۱۰ محدودیت) که برای تعریف و اعمال ظرفیت‌های سیستم ارائه می‌گردند،
- محدودیت‌های حمل و نقل (۱۲ محدودیت) که به منظور حفظ ثبات و یکپارچگی مدل در رابطه با پیوندهای شبکه حمل و نقل ارائه می‌گردند و تضمین کننده عدم حمل و نقل بین مکان‌های غیرمرتبط است.

توجه داشته باشید که ذکر تمام محدودیت‌ها در اینجا امکان‌پذیر نمی‌باشد اما کارایی مساله فوق با در نظر گرفتن محدودیت‌ها برای چند مثال عینی و تصادفی توسط الگوریتم NSGAI توسط نویسندگان انجام شده است و نتایج جالبی از آن به دست آمده است.

### ۳. نتیجه‌گیری

از چالش‌های اصلی در این تحقیق، گنجانیدن مفهوم CRM در تصمیمات استراتژیک و تاکتیکی SCM است. به‌خصوص، طراحی شبکه به عنوان تصمیمی استراتژیک به دلایل زیر مورد توجه است. اول، طراحی یک شبکه خوب شرکت را قادر می‌سازد تا روابط موثر و کارآمدی با مشتریان خود داشته باشد. دوم، با در نظر گرفتن CRM، برنامه‌های اقدام جدیدی را می‌توان با هدف به حداکثر رساندن رضایت مشتری تعریف کرد که می‌تواند به انگیزه مشتریان برای همکاری با SC در جمع‌آوری محصولات نهایی در جریان معکوس کمک کند. سوم، در نظر گرفتن نیاز مشتری که به معنای افزایش ارزش مشتری است می‌تواند SC را در بازار رقابتی جهانی متمایز کند. از اینرو، برای حل مدل مبتنی بر سناریو پیشنهادی، آن را به یک هم‌تای قوی معادل تبدیل کرده و یک روش برنامه‌ریزی چندگزینه‌ای تجدیدنظر شده برای به دست آوردن یک راه‌حل کارآمد با سه تابع هدف مدل به کار گرفته شد. برای بررسی کارایی، مطالعه‌ای از صنعت تایر شامل کارخانه تولید، دو مرکز توزیع و هشت مشتری اصلی در شبکه SC تایر پیشرو انجام شده است (به جهت محدودیت صفحات کنفرانس، امکان ارائه شکل‌ها و جداول مقایسه‌ای نمونه بررسی شده نیست).

### مراجع

1. Z. Lu and N. Bostel, *A facility location model for logistics systems including reverse flows: The case of remanufacturing activities*, Comput. Oper. Res. 34 (2007), 299–323.
2. L. Ding, T. Wang and P.W. Chan, *Forward and reverse logistics for circular economy in construction: A systematic literature review*, J. Cleaner Production. 388 (2023), no. 135981.
3. A.S. Butt, I. Ali and K. Govindan, *The role of reverse logistics in a circular economy for achieving sustainable development goals: a multiple case study of retail firms*, Product. Plan. Control. (2023) 1-13.

# جبر خطی عددی

## یک روش تکراری جدید برای حل دستگاه معادلات خطی مختلط متقارن نامعین

داود خجسته سالکویه \*

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان  
 khojasteh@guilan.ac.ir

چکیده. یک روش تکراری برای حل رده‌ای از دستگاه معادلات خطی مختلط متقارن نامعین ارائه می‌کنیم که بدون هیچ شرطی همگراست. از پیش‌حالت‌ساز تولیدشده این روش برای تسریع همگرایی روش تکراری GMRES استفاده می‌کنیم. نتایج عددی نشان می‌دهند که پیش‌حالت‌ساز به‌دست آمده از چند پیش‌حالت‌سازی که اخیراً ارائه شده‌اند، کارا تر است.

### ۱. مقدمه

#### دستگاه معادلات خطی

$$Ax \equiv (W + iT)x = b, \quad (1.1)$$

را در نظر بگیرید که در آن ماتریس‌های  $W_1, W_2, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  معین مثبت متقارن (SPD) هستند، اما ماتریس  $W = W_1 - W_2$  نامعین است. این‌گونه دستگاه‌ها در حل بسیاری از مسائل کاربردی مثل حل معادله هلمهولتز ظاهر می‌شوند [۲]. زمانی که ماتریس  $W$  نیز SPD است روش‌های بسیار زیادی برای حل دستگاه (۱.۱) وجود دارد (مرجع [۱] و منابع ارجاع شده در آن را ببینید). اما برای حالتی که ماتریس  $W$  نامعین است روش‌های تکراری زیادی برای حل این دستگاه وجود ندارد. لی و وو در [۴] روش تکراری MPNS را معرفی کردند. اکسلسون و همکارانش در [۲] سه روش تکراری برای حل دستگاه (۱.۱) ارائه کردند که بدون هیچ شرطی همگرا هستند و از پیش‌حالت‌سازهای مربوطه برای بهبود همگرایی روش تکراری GMRES برای حل دستگاه استفاده کردند. اخیراً دو روش تکراری VPMHSS و MCRI به ترتیب در [۵] و [۳] ارائه شده‌اند. هیچکدام از روش‌های ارائه شده برای حل دستگاه (۱.۱) به اندازه کافی قوی

---

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 65F10, 65F50.

واژگان کلیدی. نامعین، معین مثبت متقارن، روش تکراری، همگرایی، پیش‌حالت‌ساز.  
 \* سخنران

نیستند، اما پیش‌حالت‌های به‌دست آمده کارا هستند. در این مقاله یک روش تکراری جدید ارائه می‌شود که بدون هیچ شرطی همگراست و پیش‌حالت‌ساز مربوطه اغلب از پیش‌حالت‌سازهای ارائه‌شده در [۲، ۳، ۵] کاراتر است.

در این مقاله، از نماد  $i$  برای نمایش واحد موهومی استفاده می‌کنیم ( $i = \sqrt{-1}$ ). برای ماتریس مربعی دلخواه  $A$  از نمادهای  $\rho(A)$  و  $\sigma(A)$  به ترتیب برای شعاع طیفی و طیف ماتریس  $A$  استفاده می‌کنیم. همچنین ترانهادهٔ هرمیتی ماتریس  $A$  با  $A^*$  نمایش داده می‌شود. قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط  $z$  به ترتیب با  $\Re(z)$  و  $\Im(z)$  نشان داده می‌شوند.

۲. یک روش تکراری جدید برای حل (۱.۱)

فرض کنید  $\alpha > 0$ . دستگاه (۱.۱) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(W_1 + (\alpha + i)T)x = (W_2 + \alpha T)x + b. \quad (1.2)$$

از طرفی، دستگاه (۱.۱) معادل با دستگاه  $(-W_1 + W_2 - iT)x = -b$  است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$(W_2 + (\alpha - i)T)x = (W_1 + \alpha T)x - b. \quad (2.2)$$

اکنون، با استفاده از رابطه‌های (۱.۲) و (۲.۲) روش تکراری زیر را برای حل دستگاه (۱.۱) ارائه می‌کنیم

$$\begin{cases} (W_1 + (\alpha + i)T)x^{(k+\frac{1}{2})} = (W_2 + \alpha T)x^{(k)} + b, \\ (W_2 + (\alpha - i)T)x^{(k+1)} = (W_1 + \alpha T)x^{(k+\frac{1}{2})} - b, \end{cases} \quad (3.2)$$

که در آن  $x^{(0)}$  یک حدس اولیه برای جواب دستگاه است. این روش را DSPI<sup>۱</sup> می‌نامیم. با حذف  $x^{(k+\frac{1}{2})}$ ، از معادلهٔ (۳.۲) خواهیم داشت

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c,$$

که در آن  $G = (W_2 + (\alpha - i)T)^{-1}(W_1 + \alpha T)(W_1 + (\alpha + i)T)^{-1}(W_2 + \alpha T)$  ماتریس تکرار روش است و  $c = -i(W_2 + (\alpha - i)T)^{-1}T(W_1 + (\alpha + i)T)^{-1}b$ .

**قضیه ۱.۲.** اگر ماتریس‌های  $W_1, W_2, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  SPD باشند، آنگاه به‌ازای هر  $\alpha > 0$  روش DSPI بدون هیچ شرطی به جواب دستگاه (۱.۱) همگراست.

برهان. ماتریس تکرار روش DSPI با ماتریس

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= (W_2 + (\alpha - i)T)G(W_2 + (\alpha - i)T)^{-1} \\ &= (W_1 + \alpha T)(W_1 + (\alpha + i)T)^{-1}(W_2 + \alpha T)(W_2 + (\alpha - i)T)^{-1} \\ &= T^{\frac{1}{2}}(\hat{W}_1 + \alpha I)(\hat{W}_1 + (\alpha + i)I)^{-1}(\hat{W}_2 + \alpha I)(\hat{W}_2 + (\alpha - i)I)^{-1}T^{-\frac{1}{2}} \\ &= T^{\frac{1}{2}}\hat{G}T^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Double-Splitting Iteration

یک روش تکراری جدید برای حل دستگاه معادلات خطی مختلط متقارن نامعین

متشابه است که در آن  $\hat{W}_j = T^{-\frac{1}{2}} W_j T^{-\frac{1}{2}}$ ،  $j = 1, 2$ ، و  $\hat{G} = \hat{G}_1 \hat{G}_2$  به طوری که  
 $\hat{G}_1 = (\hat{W}_1 + \alpha I)(\hat{W}_1 + (\alpha + i)I)^{-1}$ ،  $\hat{G}_2 = (\hat{W}_2 + \alpha I)(\hat{W}_2 + (\alpha - i)I)^{-1}$ .

بنابراین، داریم

$$\rho(G) = \rho(\hat{G}) = \rho(\hat{G}) \leq \|\hat{G}_1\|_2 \|\hat{G}_2\|_2. \quad (4.2)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \|\hat{G}_1\|_2^2 &= \rho(\hat{G}_1^* \hat{G}_1) \\ &= \rho((\hat{W}_1 + (\alpha - i)I)^{-1} (\hat{W}_1 + \alpha I)^{\dagger} (\hat{W}_1 + (\alpha + i)I)^{-1}) \\ &= \max_{\mu \in \sigma(\hat{W}_1)} \left| \frac{(\alpha + \mu)^2}{(\mu + (\alpha - i))(\mu + (\alpha + i))} \right| = \max_{\mu \in \sigma(\hat{W}_1)} \frac{(\alpha + \mu)^2}{(\alpha + \mu)^2 + 1}. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که  $\mu > 0$ . لذا، نتیجه می‌گیریم که

$$\|\hat{G}_1\|_2 \leq \max_{\mu \in \sigma(\hat{W}_1)} \frac{(\alpha + \mu)}{\sqrt{(\alpha + \mu)^2 + 1}} =: \delta_1(\alpha) < 1. \quad (5.2)$$

به طور مشابه، داریم

$$\|\hat{G}_2\|_2 \leq \max_{\eta \in \sigma(\hat{W}_2)} \frac{(\alpha + \eta)}{\sqrt{(\alpha + \eta)^2 + 1}} =: \delta_2(\alpha) < 1. \quad (6.2)$$

از این رو، از رابطه‌های (4.2)، (5.2) و (6.2) خواهیم داشت

$$\rho(G) \leq \|\hat{G}_1\|_2 \|\hat{G}_2\|_2 = \delta_1(\alpha) \delta_2(\alpha) < 1,$$

□ اثبات قضیه را کامل می‌کند.

می‌توان دید که روش DSPI توسط شکافت  $A = M_\alpha - N_\alpha$  تولید می‌شود که در آن

$$M_\alpha = -\frac{1}{i} (W_1 + (\alpha + i)T) T^{-1} (W_2 + (\alpha - i)T),$$

$$N_\alpha = -\frac{1}{i} (W_1 + \alpha T) T^{-1} (W_2 + \alpha T).$$

بنابراین، داریم  $G = M_\alpha^{-1} N_\alpha$ . از این رو، مقادیر ویژه  $M_\alpha^{-1} N_\alpha$  در دایره‌ای به مرکز  $(1, 0)$  و به شعاع 1 قرار دارند. در نتیجه، می‌توان ماتریس  $M_\alpha$  را به عنوان یک پیش‌حالت‌ساز برای دستگاه (1.1) به کار برد. چون ضریب  $-1/i$  تأثیری روی دستگاه پیش‌حالت‌سازی شده ندارد، می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. بنابراین، ماتریس پیش‌حالت‌ساز تولیدشده توسط DSPI را می‌توان به صورت

$$P_\alpha = (W_1 + (\alpha + i)T) T^{-1} (W_2 + (\alpha - i)T),$$

نوشت. در به کارگیری  $P_\alpha$  در هر تکرار از یک روش تکراری مبتنی بر زیرفضای کرایلف، باید یک دستگاه به صورت  $P_\alpha r = s$  حل شود، که می‌تواند به صورت زیر انجام شود.

- الگوریتم ۱. حل دستگاه  $P_\alpha r = s$ .  
 1. Solve  $(W_1 + (\alpha + i)T)p = s$  for  $p$   
 2. Compute  $q = Tp$   
 3. Solve  $(W_2 + (\alpha - i)T)r = q$  for  $r$

زیردستگاه گام ۱ از این الگوریتم را می‌توان به شکل حقیقی و معادل زیر نوشت

$$\mathcal{B}_1 \mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} W_1 + \alpha T & -T \\ T & W_1 + \alpha T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(p) \\ \Im(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(s) \\ \Im(s) \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

با توجه به اینکه ماتریس‌های  $T$  و  $W_1 + \alpha T$  SPD هستند، می‌توان پیش‌حالت‌ساز

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} W_1 + \alpha T & -T \\ T & W_1 + (\alpha + 1)T \end{pmatrix},$$

را، که به پیش‌حالت‌ساز PRESB معروف است، برای دستگاه (۷.۲) به کار برد [۲، ۱]. مقادیر ویژه ماتریس  $\mathcal{P}_1^{-1} \mathcal{B}_1$  در بازه  $[0.5, 1]$  قرار دارند. بنابراین، دستگاه (۷.۲) را می‌توان با پیش‌حالت‌ساز  $\mathcal{P}_1$  و با استفاده از روش تکراری GMRES حل کرد. در هر تکرار از این روش باید یک دستگاه به صورت  $\mathcal{P}_1[v; w] = [e; f]$  حل شود که می‌تواند به شکل زیر انجام شود.

الگوریتم ۲. حل دستگاه  $\mathcal{P}_1[v; w] = [e; f]$

1. Solve  $(W_1 + (1 + \alpha)T)u = e + f$  for  $u$
2. Solve  $(W_1 + (1 + \alpha)T)w = f - Tu$  for  $q$
3. compute  $v = u - w$ .

ماتریس  $W_1 + (1 + \alpha)T$  SPD است. بنابراین، زیردستگاه‌های گام‌های ۱ و ۲ در الگوریتم ۲ را می‌توان به صورت دقیق با استفاده از تجزیه چولسکی یا به صورت نادقیق با استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج حل کرد. به همین ترتیب، دستگاه گام ۳ از الگوریتم ۱ را نیز می‌توان به طور مشابه حل کرد. نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهند که پیش‌حالت‌ساز روش DSPI از پیش‌حالت‌سازهای VPMHSS و MCRI کارا تر است.

## مراجع

- [1] O. Axelsson, D.K. Salkuyeh, *A new version of a preconditioning method for certain two-by-two block matrices with square blocks*, BIT Numer. Math. 59 (2018), 321–342
- [2] O. Axelsson, M. Pourbagher and D. Khojasteh Salkuyeh, *Efficient iteration methods for complex systems with an indefinite matrix term*, Calcolo. 59 (2022), 15.
- [3] Z.-Z. Liang and Y. Dou, *Modified CRI iteration methods for complex symmetric indefinite linear systems*, Linear Multilinear Algebra, 2024, 1–20.
- [4] S.-L. Wu, C.-X. Li, *A splitting method for complex symmetric indefinite linear system*, J. Comput. Appl. Math. 313 (2017), 343–354.
- [5] Z. Zheng, M.-L. Zeng and G.-F. Zhang, *A variant of PMHSS iteration method for a class of complex symmetric indefinite linear systems*, Numer. Algorithms 91 (2022), 283–300.

## هم‌مربع ماتریس‌های نرمال و خواص آن

علی محمد نظری<sup>۱</sup> \* و عطیه نظامی<sup>۲</sup>

۱،۲ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک  
a-nazari@araraku.ac.ir  
atiyeh.nezami@gmail.com

چکیده. در این مقاله سعی بر آن داریم که برای یک ماتریس نرمال نامنفرد تعدادی از خواص هم‌مربع آن را بیابیم. هم‌مربع یک ماتریس برابر است با حاصل ضرب وارون ترانهاده مزدوج یک ماتریس در خود آن. چون برای یک ماتریس نرمال خاصیت جابجایی ضربی بین ترانهاده مزدوج آن و خود ماتریس وجود دارد به همین خاطر خواص جالبی در باره هم‌مربع دو ماتریس نرمال جابجایی‌پذیر بوجود می‌آید که در این مقاله به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

### ۱. پیش‌گفتار

ماتریس  $A$  نرمال است هرگاه داشته باشیم  $A^*A = AA^*$ . واضح است که هر ماتریس هرمیتی (متقارن در حالت حقیقی) یک ماتریس نرمال است و به سادگی می‌توان نشان داد که عکس آن برقرار نمی‌باشد. از خواص جالب ماتریس نرمال، می‌توان به خاصیت قطری‌پذیری آن اشاره کرد. یعنی تجزیه شور این ماتریس یک ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه ماتریس نرمال هستند. شاید یکی از کاربردی‌ترین موضوعات همین ماتریس‌های نرمال باشند و فقط و فقط در کتاب [۲] قضیه‌ای وجود دارد که به تعداد ۳۷ مورد اگر و فقط اگر برای این‌که یک ماتریس نرمال باشد، اشاره نموده است. تعداد زیادی از این خواص کار ریاضی‌دان شهیر تاجیک‌تبار روس حکیم دادانجانویچ ای‌کراموف<sup>۱</sup> است. این قضیه و تعداد زیاد

2020 Mathematics Subject Classification. 15A29; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. هم‌مربع، ماتریس‌های نرمال، جابجایی‌پذیری،  
\* سخنران

<sup>1</sup>Kh. D. Ikramov

مقالات نوشته شده در مورد ماتریس‌های نرمال حکایت از آن دارد که ماتریس‌های نرمال در طول قرن بیستم و قرن بیست و یکم چقدر مورد توجه ریاضی‌دانان قرار داشته است. در تعیین همنهشتی ماتریسی هم‌مربع بسیار مورد استفاده است [۳، ۴، ۵]. یکی از خاصیت‌هایی که اگر برقرار باشد خواص دیگری را بدنبال خواهد داشت خاصیت جابجایی‌پذیری ضربی یا به اختصار خاصیت جابجایی‌پذیری است که نکات جالبی را در مورد ماتریس‌های نرمال و هم‌مربع‌های آن ایجاد خواهد کرد که در این مقاله سعی به بررسی تعدادی از آن‌ها خواهیم داشت.

## ۲. هم‌مربع و جابجایی‌پذیری ماتریسی

فرض کنیم  $A$  ماتریسی مربعی و نامنفرد از مرتبه  $n$  باشد. هم‌مربع<sup>۲</sup> ماتریس نامنفرد  $A$  با  $C_A$  نمایش داده شده و در بخش ۲.۴ از [۱] به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_A = A^{-*}A. \quad (1.2)$$

در مورد ماتریس‌های خاص مطالب زیر را در مورد هم‌مربع داریم: اگر  $A$  یک ماتریس هرمیتی و نامنفرد باشد، آن‌گاه هم‌مربع آن ماتریس همانی است، و اگر  $A$  یک ماتریس پادهرمیتی و نامنفرد باشد، آن‌گاه هم‌مربع آن یک ماتریس منهای ماتریس همانی است.

**قضیه ۱.۲.** اگر  $A$  یک ماتریس یکانی باشد، آن‌گاه  $C_A = A^2$ .

**نتیجه ۲.۲.** مقادیر ویژه هم‌مربع ماتریس یکانی برابر با یک است.

**قضیه ۳.۲.** اگر  $A$  یک ماتریس نرمال و نامنفرد باشد در این صورت ماتریس هم‌مربع آن ماتریس یک ماتریس یکانی خواهد بود.

**قضیه ۴.۲.** فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو ماتریس نرمال، نامنفرد و جابجایی‌پذیر باشند ( $AB = BA$ )، آن‌گاه برای هر چند جمله‌ای  $P(x)$  که برای آن دو ماتریس  $P(A)$  و  $P(B)$  وارون‌پذیر باشند، داریم

$$\begin{aligned} (i) \quad & A(P(B))^{-1} = (P(B))^{-1}A, \\ (ii) \quad & A(P(B))^* = (P(B))^*A \\ (iii) \quad & AC_{P(B)} = C_{P(B)}A \\ (iv) \quad & AC_{P(A)} = C_{P(A)}A \\ (v) \quad & C_A C_{P(B)} = C_{P(B)} C_A \\ (vi) \quad & C_{AB} = C_A C_B \\ (vii) \quad & C_{A^n} = (C_A)^n \end{aligned}$$

برهان. (i) نشان می‌دهیم که وارون هر دو طرف ماتریس  $P(B)A^{-1}$  است. واضح است که

$$(AP(B)^{-1})(P(B)A^{-1}) = I_n, \quad (P(B)A^{-1})(AP(B)^{-1}) = I_n, \quad (2.2)$$

<sup>2</sup>Cosquare

هم‌مربع ماتریس‌های نرمال و خواص آن

از طرف دیگر با توجه به خاصیت جابجایی‌پذیری دو ماتریس

$$\begin{aligned} (P(B)^{-1}A)(P(B)A^{-1}) &= P(B)^{-1}(AP(B))A^{-1} \\ &= P(B)^{-1}(P(B)A)A^{-1} = (P(B)^{-1}P(B))(AA^{-1}) = I_n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

(ii) قسمت ۳۵ قضیه ۱.۹ از [۲].  
(iii)

$$\begin{aligned} AC_P(B) &= A(P(B)^*P(B)) \\ &= (AP(B)^*)P(B) \\ &= (P(B)^*A^{-1})^{-1}P(B), \end{aligned} \quad (4.2)$$

حال نشان می‌دهیم که  $P(B)^*A^{-1} = A^{-1}P(B)^*$ . برای این کار نشان می‌دهیم وارون هر دو طرف برابر است با  $AP(B)^*$ . واضح است که  $P(B)^*A^{-1}AP(B)^{-*} = I_n$  و از طرف دیگر با توجه به (ii) داریم

$$A^{-1}P(B)^*AP(B)^{-*} = A^{-1}AP(B)^*P(B)^{-*} = I_n,$$

حال با جایگزینی در رابطه (۴.۲) خواهیم داشت

$$AC_P(B) = (A^{-1}P(B)^*)^{-1}P(B) = A^{-1}(P(B)^*)^{-1}P(B) = A^{-1}C_P(B).$$

(iv) با توجه به قسمت بالا بدیهی است.

(v) چون دو ماتریس  $A$  و  $B$  جابجایی‌پذیر هستند با توجه به قسمت‌های بالا نتیجه می‌شود که ماتریس  $A$  و  $B^*$  نیز جابجایی‌پذیر هستند، به سادگی می‌توان نشان داد که دو ماتریس  $C_A$  و  $C_B$  نیز جابجایی‌پذیر هستند.

(vi)

$$\begin{aligned} C_{AB} &= (AB)^{-*}(AB) = (BA)^{-*}(AB) = B^{-*}A^{-*}(BA) \\ &= B^{-*}(B^*A^{-1})^*A^* = B^{-*}(A^{-1}B^*)^*A^* \\ &= (B^{-*}B)(A^{-*}A) = C_B C_A = C_A C_B. \end{aligned}$$

(vii) با یک استقرای ساده اثبات حاصل می‌شود.

□

**قضیه ۵.۲.** همه مقادیر تکین هم‌مربع هر ماتریس نامنفرد و نرمال برابر با یک است.

برهان. با توجه به قضیه ۳.۲ چون هم‌مربع یک ماتریس نامنفرد و نرمال یک ماتریس یکانی است، از این رو اثبات بدیهی است، زیرا قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس‌های یکانی ۱ است. □

**مثال ۶.۲.** ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1+2i \\ 1+2i & 1 & 1-i \\ 1-i & 1+2i & 1 \end{bmatrix}.$$

چون

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix},$$

پس این ماتریس نرمال است.

همچنین داریم

$$C_A = \begin{bmatrix} \frac{31}{35} + 1/5i & -\frac{9}{35} + 1/5i & \frac{6}{35} + 1/5i \\ \frac{6}{35} + 1/5i & \frac{31}{35} + 1/5i & -\frac{9}{35} + 1/5i \\ -\frac{9}{35} + 1/5i & \frac{6}{35} + 1/5i & \frac{31}{35} + 1/5i \end{bmatrix}.$$

اگر قرار دهیم

$$B = A + A^T = \begin{bmatrix} 8 + 2i & i & 3 + 4i \\ 3 + 4i & 8 + 2i & i \\ i & 3 + 4i & 8 + 2i \end{bmatrix},$$

در این صورت بنا به قضیه‌ای در [۱] ماتریس نرمال  $A$  با هر چند جمله‌ای از خودش خاصیت جابجایی دارد، از این رو دو ماتریس  $A$  و  $B$  خاصیت جابجایی‌پذیری دارند. تمام قسمت‌های قضیه ۴.۲ را می‌توان حاصل نمود.

### مراجع

1. R.A. Roger and Ch.R. Johnson, *Matrix Analysis*, cambridge university press, Second edition first published, 2013.
2. F. Zhang, *Matrix Theory Basic Results and Techniques*, Second Edition, Springer New York, 2013.
3. Kh.D. Ikramov and A.M. Nazari, *A Rational Algorithm for Checking the Congruence of Unitoid Matrices*, Numerical Analysis and Applications 14 (2021), no. 2, 145–154.
4. Kh.D. Ikramov, *On the Congruent Selection of Jordan Blocks from a Singular Square Matrix*, Sib. Zh. Vych. Mat. 21 (2018), no. 3, 255–258.
5. Kh.D. Ikramov and A.M. Nazari, *A Heuristic Rational Algorithm for Checking the Congruence of Normal Matrices*, Computational Mathematics and Mathematical Physics 60 (2020), no. 10, 1601–1608.

# حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال

## بهینه‌سازی جواب معادله دیفرانسیل تابعی غیرخطی زیست-محیطی حفاری نفت با استفاده از روش هم‌محلی

فاطمه گروه‌ای<sup>۱</sup> \* و شادان صدیق بهزادی<sup>۲</sup>

<sup>۱،۲</sup> گروه ریاضی و آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، ایران  
*ghervehi@qiau.ac.ir*  
*shadan\_behzadi@yahoo.com*

چکیده. در این مقاله با توجه به اهمیت و ضرورت رعایت عوامل زیست-محیطی در حین حفاری و استخراج نفت از چاه، به بررسی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی فوم، و ارائه روش عددی مناسب با سرعت همگرایی بالا و حداقل خطای محاسباتی برای تعیین جواب بهینه می‌پردازیم. با پیاده سازی روش هم محلی با چند جمله‌ای‌های متعامد و نرمال ژاکوبی و بوباکر، بهینه بودن، دقت جواب تقریبی بدست آمده را مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم.

### ۱. پیش‌گفتار

فوم مایع، نمونه‌ای از ماده نرم یا مایع پیچیده با یک ساختار بسیار مشخص است که اولین بار توسط فلات جوزف در قرن نوزدهم بیان شد [۶]. استفاده از فوم‌ها در مواد غذایی و محصولات مراقبت شخصی مانند کرم و لوسیون رایج است، حتی در مواد تمیز کننده (برای لباس، ظروف، از بین بردن خراش) کاربرد دارد [۴، ۵]. از فوم‌ها در صنایع غذایی و شیمیایی، آشنشانی، در پوشش آکوستیک سبک وزن، پردازش مواد معدنی و علم ساختار مواد نیز استفاده می‌شود [۱، ۲]. در حال حاضر کاربرد زیادی از فوم‌های پلیمری بیان شده‌است و اخیراً استفاده از فوم‌های

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. روش عددی هم‌محلی، چند جمله‌ای‌های متعامد بوباکرو ژاکوبی، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی فوم حفاری .  
\* سخنران

فلزی که فوم ساخته شده از فلزاتی مانند آلومینیوم است مطرح شده است [۳]. آلوده شدن خاک به نفت خام و یا مشتقات آن می‌تواند سبب آسیب به محیط زیست شود. از جمله مزایای این روش تولید نفت و گاز از سازند در حین حفاری، سرعت بالای حفاری، طولانی‌تر شدن عمر مته و انتقال بهتر کننده‌ها است [۳].

۲. معرفی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی فوم حفاری

معادله

$$u_t(x, t) + \nu u_x^2(x, t) - u_{xx}(x, t)u(x, t) = 0, \quad (1.2)$$

با شرط اولیه  $u(x, 0) = g(x) = -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}x)$  تعریف شده است.

۱.۲. حل عددی معادله فوم با استفاده از روش هم محلی با پایه متعامد ژاکوبی. روش هم‌محلی، یک روش نابجایی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزئی و معادلات انتگرال است. در این روش با انتخاب یک فضای مشخص و تعدادی از نقاط در دامنه تعریف، جواب معادله را با تعیین ضرایب با پایه‌های متعامد ژاکوبی و بوباکر، تقریب می‌زنیم.

چند جمله‌ای متعامد ژاکوبی به صورت زیر می‌باشد:

$$u_n(x, t) = w(x)w(t) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t), \quad \alpha, \beta > -1, \quad (2.2)$$

$$w(x) = \frac{(1-x)^\alpha}{(1+x)^\beta},$$

$$\left( p_i^{\alpha, \beta} \right)^{(m)}(t) = \frac{1}{m!} (i + \alpha + \beta + m) p_{i-m}^{(\alpha+m, \beta+m)}(t), \quad i \geq m.$$

$$u_x = w(t) \left[ w'(x) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) + w(x) \sum_{i=0}^n a_i \left( p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)' p_i^{\alpha, \beta}(t) \right],$$

$$u_{xx} = w(t) \left[ w''(x) \sum_{i=0}^n a_i p_i^{\alpha, \beta}(x) p_i^{\alpha, \beta}(t) + 2w'(x) \sum_{i=0}^n a_i \left( p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)' p_i^{\alpha, \beta}(t) + w(x) \sum_{i=0}^n a_i \left( p_i^{\alpha, \beta}(x) \right)'' p_i^{\alpha, \beta}(t) \right],$$

از طرفین معادله (۲.۲) نسبت به متغیر  $t$  انتگرال گرفته و با جایگذاری روابط فوق خواهیم داشت:

$$u(x, t) = \int_a^t -2\nu u_x^2(x, t) u_x dt + \int_a^t u_x^2(x, t) dt + \frac{1}{\nu} \int_a^t u_{xx}(x, t) u(x, t) dt. \quad (3.2)$$

بهنه‌سازی جواب معادله دیفرانسیل تابعی غیرخطی زیست-محیطی...

و دستگاه غیرخطی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & -\gamma [EHZ_{ij} + E^\gamma Y_{ij}] E_{ij} + \frac{1}{\gamma} [(G)Z_{ij} + \gamma HY_{ij} + EZ_{ij}] M_{ij} \\
 & + \gamma HY_{ij} D_{ij} + (H^\gamma Z_{ij} + E^\gamma (a_i B_{ij})^\gamma) K_{ij} - E a_i A_{ij} F_{ij} = 0. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

۲.۲. حل عددی معادله فوم با استفاده از روش هم‌محلی با پایه متعامد بوباکر. چندجمله‌ای بوباکر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\xi} (n) \left[ \frac{(n - \gamma p)}{(n - p)} C_{n-p}^p \right] (-1)^p x^{n-\gamma p}, \quad (5.2)$$

که در آن  $\xi(n) = \lfloor \frac{n}{\gamma} \rfloor$  و  $C_n^p$  ضریب دو جمله‌ای است.

$$\begin{aligned}
 u_x(x, t) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \beta_{nm} \Psi_m^{n'}(x, t), \quad u_{xx}(x, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \beta_{nm} \Psi_m^{n''}(x, t), \\
 u(x, t) &= \int_a^t -\gamma u^\gamma(x, t) u_x(x, t) dt + \int_a^t u_x^\gamma(x, t) dt + \int_a^t \frac{1}{\gamma} u_{xx}(x, t) u(x, t) dt.
 \end{aligned}$$

و دستگاه غیرخطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_a^t -\gamma (V_{ij})^\gamma \cdot W_{ij} dt + \int_a^t (W_{ij})^\gamma dt + \int_a^t \frac{1}{\gamma} L_{ij} \cdot V_{ij} dt, \\
 u(x, t) &= V(x, t) + W(x, t) + L(x, t).
 \end{aligned}$$

۳. بررسی وجود و یکتایی جواب

مسئله (۱.۲) دارای جواب منحصر به فرد و یکتا است هرگاه  $0 < \alpha < 1$

$$\alpha = T(L_1 + L_2 + L_3)$$

فرض کنیم:

$$\begin{aligned}
 -\gamma u^\gamma(x, t) u_x(x, t) &= F_1(u(x, t)), \\
 u_x^\gamma(x, t) &= F_2(u(x, t)), \\
 \frac{1}{\gamma} u_{xx}(x, t) u(x, t) &= F_3(u(x, t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \forall x \in J = [0, T].
 \end{aligned}$$

توابع  $F_1, F_2, F_3$  در شرط لیب‌شیتز صدق می‌کنند.

ف. گروه‌ای و ش. صدیق بهزادی

۴. بررسی همگرایی روش های عددی

قضیه ۱.۴. جواب تقریبی بدست آمده به صورت سری زیر

$$V(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{nm} \Psi_m^n(x, t)$$

به روش هم محلی با پایه متعامد بوباکر به جواب دقیق معادله (۱.۲) همگراست.

قضیه ۲.۴. کران بالای خطای مطلق معادله (۱.۲) به صورت زیر تعیین می شود:

$$\|E_n(x, t), 0\| \leq c_1 \frac{n^{-z+1}}{1-z} + c_2 n^{-z+1}.$$

۵. مثال عددی

در این بخش، یک مثال عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که توسط روش‌های عددی مذکور با برنامه‌های کد نویسی Mathematica 12.1 و متلب، به صورت زیر ارائه شده است. با معیار توقف:

$$u_t(x, t) + \gamma u^2(x, t) u_x(x, t) - u_x^2(x, t) dt - \frac{1}{\gamma} u_{xx}(x, t) u(x, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}x), \quad \varepsilon = 10^{-13}, \quad \alpha_1 = 0.4598852,$$

$$\alpha = 0.7, \quad \beta = 0.3, \quad c = 0.02.$$

$(x, t)$	Errors & CPU Time		
	Cpu: ۱۴.۴۳۲۰۸۹ sec Boubaker polynomial ( $n = 14$ )	Cpu: ۱۸.۸۲۴۷۴۵ sec Jacobi polynomial ( $n = 23$ )	Cpu: ۲۷.۹۶۸۵۱۴ sec Matlab ( $n = 32$ )
(۰.۱۳, ۰.۱۴)	۴.۱۲۰۹۸۷۷E-۰۱۲	۶.۱۲۳۴۸۸E-۰۱۲	۷.۱۳۵۶۲۲۵E-۰۱۲
(۰.۲۳, ۰.۱۷)	۴.۲۵۵۴۲۳۸E-۰۱۲	۶.۲۳۵۵۸۷E-۰۱۲	۷.۳۴۳۱۲۷۸E-۰۱۲
(۰.۵۲, ۰.۴۵)	۵.۱۳۴۷۸۹۲E-۰۱۲	۶.۸۹۰۱۳۵E-۰۱۲	۸.۰۴۳۹۵۱۱E-۰۱۲
(۰.۹۳, ۰.۶۱)	۵.۶۷۴۶۰۹۵E-۰۱۲	۷.۴۶۱۸۹۳E-۰۱۲	۸.۷۴۸۷۶۱۳E-۰۱۲

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله مشاهده کردیم که جواب تقریبی عددی بدست آمده توسط روش هم‌محلی با پایه بوباکر با تعداد گام و Cpu time کمتر، دقیقتر است و با سرعت همگرایی بالاتری به جواب می‌رسد. نتایج نشان می‌دهد که این روش دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری است و هرچه مقدار  $x, t$  کوچکتر می‌شوند نتایج بهتری حاصل می‌گردد. تاکنون روی این دسته از معادلات که یکی از پرکاربردترین و پیچیده‌ترین معادلات دیفرانسیل در محیط زیست و حفاری نفت است، کار عددی چندانی صورت نگرفته است.

### مراجع

1. A. Hennessy, *Meixner-type results for riordan arrays and associated integer sequences*, J. Integer Seq. (JIS) 13, (2010), 1–34.
2. M. Karman, M. McNamara and J.G. Coder, *Airfoil optimization via the class-shape transformation and orthogonal deformation modes*, In AIAA Aviation 2019 Forum, p. 3173. 2019.
3. Sh. Sadigh Behzadi, *The use of homotopy methods for solving nonlinear foam drainage equation*, Communications on Advanced Computational Science with Applications, 2014 (2014), 1–18.
4. G. Simonsen and J. Kjolaas, *Literature review on surface-active components in emulsions and foams: Theory and modelling efforts*, Geoenergy Science and Engineering, 230 (2023) 212156.
5. A. Sneh, P. Thakur, K. Yadav, R. Goyal, and M. Gupta, *An experimental analysis of EMI shielding effectiveness using multilayered metal meshed reinforced sustainable foam*, Int. J. Eng. Res. Tech. 9(2020), no. 2, 662-5.
6. T. Zhao, Y. Li and H. Wu, *Boubaker polynomials and their applications to numerical solution of differential equations*, In 2016 Joint International Information Technology, Mechanical and Electronic Engineering Conference, pp. 285–288. Atlantis Press, 2016.

## حل عددی معادله انتشار زمان-کسری با بکارگیری چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس و روش سری توانی باقیمانده

مجتبی سجادمش

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه بناب

چکیده. بایراک و همکارانش در سال ۲۰۲۰، یک روش عددی برای حل معادله انتشار زمان-کسری با شرایط مرزی-اولیه را با استفاده از روش هم‌محلی چیشف و روش سری توانی باقیمانده ارائه دادند. در این مقاله، همان مساله اخیر ولی با انجام محاسبات کمتر و دقت بیشتر با استفاده از چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس انتقال یافته و ریشه‌های آن به‌عنوان نقاط هم‌محلی برای گسسته سازی مساله بررسی می‌شود. در ادامه، از روش سری توانی باقیمانده برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری معمولی حاصل از گسسته سازی مساله و نیز دستگاه معادلات جبری حاصل از شرایط مرزی-اولیه استفاده می‌شود. در نهایت، کارایی، سادگی در اجرای روش و نیز دقت بالای آن با ارائه برخی مثال‌های عددی نشان داده می‌شود.

### ۱. مقدمه

هدف اصلی این مقاله، حل عددی مساله انتشار زمان-کسری

$$D_t^\alpha u(x, t) = K(x)u_{xx}(x, t) + F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(L, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

بوده که در آن  $\alpha \in (0, 1]$  و توابع  $F(x, t)$  و  $K(x)$  معلوم می‌باشند.

مساله انتشار زمان-کسری توسط بسیاری از ریاضیدانان مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به روش تکرار وردشی (VITM) با بکارگیری تبدیل شیهو و معکوس آن در [۱]، گسسته‌سازی برحسب زمان و فضا به‌ترتیب با روش تفاضلات متناهی و روش طیفی لژاندر

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 35R11; Secondary 65M70, 65N12.

واژگان کلیدی. معادله انتشار زمان-کسری، چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس، روش سری توانی باقیمانده.

در [۲]، روش مرکب از دو روش پترو-گالرکین ناپیوسته و عنصر متناهی پیوسته ( $DPG-EF$ ) در [۳] و یک روش تفاضلی جدید در [۴] اشاره نمود.

اخیراً بایراک و همکارانش در [۵] یک روش عددی با استفاده از چندجمله‌ای‌های چیشف انتقال یافته و روش سری توانی باقیمانده پیشنهاد دادند که در مقایسه با برخی روش‌های عددی مانند روش اختلال آنالیز هموتوپی اصلاح شده ( $MHPM$ ) در [۶]، کارایی و دقت بالایی دارد. در این مقاله همان مساله ولی با استفاده از چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس انتقال یافته با دقت به مراتب بیشتر و محاسبات کمتر نسبت به روش اخیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

**تعریف ۱.۲.** چندجمله‌ای ویتا-لوکاس از درجه  $n$ ،  $VL_n(x)$ ، برای  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  و  $x \in [-2, 2]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VL_n(x) = 2 \cos(n\theta), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \theta \in [0, \pi]$$

**نکته ۲.۲.** فرم تحلیلی سری توانی چندجمله‌ای‌های  $VL_n(x)$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$VL_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-2k)} x^{n-2k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

**تعریف ۳.۲.** چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس انتقال یافته  $VL_n^*(x)$  در بازه  $[0, L]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$VL_n^*(x) = VL_n\left(\frac{x}{L} - 2\right).$$

**نکته ۴.۲.** فرم تحلیلی سری توانی چندجمله‌ای‌های  $VL_n^*(x)$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$VL_n^*(x) = 2n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^{n-k}\Gamma(2n-k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-2k+1)} x^{n-k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

**تعریف ۵.۲.** بسط سری توانی حول  $t = t_0$  به صورت

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m-1} f_{kl}(x) (t - t_0)^{k\alpha+l}; \quad 0 \leq m-1 < \alpha \leq m, \quad t \geq t_0.$$

یک سری توانی کسری چندگانه نامیده می‌شود که در آن  $f_{kl}(x)$ ها، ضرایب سری می‌باشند.

فرض کنید بسط سری توانی کسری جواب مساله

$$D_t^\alpha u(x, t) + L[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T]$$

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x),$$

$\alpha \in (0, 1]$  و  $N[x], L[x]$  به ترتیب، عملگرهای خطی و غیرخطی برحسب  $x$  می‌باشند)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

به صورت  
باشد. هرگاه قرار دهیم:

حل عددی معادله انتشار زمان-کسری با بکارگیری چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس و روش سری توانی باقیمانده

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

$$Res_k(x, t) = D_t^\alpha u_k(x, t) + L[x]u_k(x, t) + N[x]u_k(x, t) - g(x, t),$$

در این صورت، ضرایب  $f_n(x)$  ها را می‌توان با استفاده از روش سری توانی باقیمانده (RPSM) به صورت زیر مشخص نمود.

$$D_t^{(n-1)\alpha} Res_n(x, 0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, k$$

۳. پیاده سازی روش پیشنهادی و مثال‌های عددی

ابتدا جواب تقریبی مساله انتشار زمان-کسری (۳.۱)-(۱.۱) را با استفاده از چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس انتقال یافته به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_m(x, t) = \sum_{i=0}^m c_i(t) VL_i^*(x), \quad (1.3)$$

به منظور یافتن ضرایب مجهول در (۱.۳) و محاسبه جواب تقریبی، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم: مرحله ۱)

با جایگذاری (۱.۳) در معادله (۱.۱) و با در نظر گرفتن نقاط هم‌محل ریشه‌های چندجمله‌ای‌های ویتا-لوکاس انتقال یافته  $VL_m^*(x)$  به صورت  $x_p$  ( $p = 1, 2, \dots, m-1$ ) دستگاه معادلات کسری معمولی زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=0}^m D_t^\alpha c_i(t) VL_i^*(x_p) = K(x_p) \sum_{i=2}^m \sum_{j=0}^{i-2} c_i(t) \frac{(-1)^j \Psi^{i-j}(\Psi i) \Gamma(\Psi i - j) \Gamma(i - j + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\Psi i - \Psi j + 1) \Gamma(i - j - 1) L^{i-j}} x_p^{i-j-2} + F(x_p, t), \quad (2.3)$$

مرحله ۲)

با در نظر گرفتن نقاط هم‌محل ریشه‌های چندجمله‌ای  $VL_i^*(x)$  در شرایط مرزی و اولیه مساله، یک دستگاه معادلات جبری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} u_m(x_p, 0) = \sum_{i=0}^m c_i(0) VL_i^*(x_p) = \phi(x_p), \\ u_m(0, t) = \sum_{i=0}^m c_i(t) VL_i^*(0) = \Psi \sum_{i=0}^m c_i(t) (-1)^i = \psi_1(t), \\ u_m(L, t) = \sum_{i=0}^m c_i(t) VL_i^*(L) = \Psi \sum_{i=0}^m c_i(t) = \psi_2(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

مرحله ۳)

با حل دستگاه معادلات کسری معمولی (۲.۳) و دستگاه معادلات جبری (۳.۳) به روش سری توانی باقیمانده، ضرایب مجهول  $c_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ) در بسط (۱.۳) و در نهایت، جواب تقریبی  $u_m(x, t)$  مساله (۳.۱)-(۱.۱) حاصل می‌شود.

مثال ۱.۳. مساله انتشار زمان-کسری با شرایط مرزی-اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$D_t^\alpha u(x, t) = -\frac{1}{4}x^2 u_{xx}(x, t) + (x^2 - 3x^3) \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad 0 < x, t < 1, \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.3)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6.3)$$

مورد ۱. به ازای  $m = 2$  در (۱.۳) و با جایگذاری ریشه معادله  $VL_2^*(x) = 0$ ،  $x_p = 0.5$ ، در روابط (۲.۳)-(۳.۳)، معادله دیفرانسیل کسری معمولی

$$D_t^\alpha c_0(t) - c_0(t) - 0.3125t + 0.3125 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = 0 \quad (7.3)$$

با شرط اولیه  $c_0(0) = 0$  حاصل می شود که با بکارگیری روش سری توانی باقیمانده (RPSM) و نیز با توجه به شرایط مرزی-اولیه، جواب تقریبی مساله (۶.۳)-(۵.۳) به صورت

$$u_2(x, t) = 0.5x(1-x) \frac{t^\alpha + 1}{\Gamma(\alpha+2)} \quad (8.3)$$

حاصل می شود.

مورد ۲. به ازای  $m = 3$  در (۱.۳) و با جایگذاری ریشه های معادله  $VL_3^*(x) = 0$ ، در روابط (۲.۳)-(۳.۳)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری معمولی با شرایط اولیه، حاصل می شود که با بکارگیری روش سری توانی باقیمانده (RPSM)، و نیز با توجه به شرایط مرزی-اولیه، جواب تقریبی مساله به صورت

$$u_3(x, t) = x^2(1-x) \frac{t^\alpha + 1}{\Gamma(\alpha+2)} \quad (9.3)$$

به دست می آید که برابر با جواب دقیق مساله (۶.۳)-(۴.۳) می باشد.

### مراجع

1. N. Ali Shah, S. Saleem, A. Akgül, K. Nonlaopon and J.D. Chung, *Numerical analysis of time-fractional diffusion equations via a novel approach*, J. Funct. Spaces (2021), 1-12.
2. Y. Lin and Ch. Xu, *Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation*, J. Comput. Phys. 225 (2007), 1533-1552.
3. K. Mustapha, B. Abdallad and K.M. Furati, *A discontinuous Petrov-Galerkin method for time-fractional differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. 52 (2014), 1-18.
4. A. A. Alikhanov, *A new difference scheme for the time fractional diffusion equation*, J. Comput. Phys. 280 (2015), 424-438.
5. M.A. Bayrak, A. Demir and E. Ozbilge, *Numerical solution of fractional diffusion equation by Chebyshev collocation method and residual power series method*, Alexandria Eng. J. 59 (2020), 4709-4717.
6. A.A. Hemeda, *Modified homotopy perturbation method for solving fractional differential equations*, J. Appl. Math. (2014), 1-9.

## بررسی عددی جریان مگنتوهیدرودینامیک و انتقال حرارت روی یک ورق کششی ناپایدار به کمک روش عددی هم محلی مبتنی بر توابع لژاندر گویا

سید محمود ضابطزاده<sup>۱</sup> \*

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
zabetzadeh@pnu.ac.ir

چکیده. در این تحقیق به بررسی و تحلیل عددی یک جریان سیال مگنتوهیدرودینامیک آرام ناپایدار روی یک ورق کششی ناپایدار با تابش و شار حرارتی متغیر می‌پردازیم. معادلات لایه مرزی وابسته به زمان، به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی شامل پارامتر تابش، پارامتر شاخص فضا، پارامتر شاخص زمان، عدد پراندتل، پارامتر مغناطیسی و پارامتر ناپایداری تبدیل می‌شود. این دستگاه توسط روش هم محلی مبتنی بر پایه‌های تولید شده توسط توابع لژاندر گویا به دستگاه جبری غیرخطی تبدیل شده و جواب تقریبی دستگاه حاصل با روش تکراری نیوتن محاسبه می‌شود. در پایان با ارائه مثال، روش پیشنهادی آزموده خواهد شد.

### ۱. پیش‌گفتار و معرفی مدل

یک جریان لایه مرزی آرام دوبعدی ناپایدار را روی یک ورقه کششی غوطه ور در یک سیال رسانای الکتریکی تراکم ناپذیر را در نظر می‌گیریم. معادلات لایه مرزی وابسته به زمان حاکم برای جرم، تکانه و بقای انرژی، با تعریف پارامترهای مناسب و ساده سازی ریاضی، به دستگاه

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 34B05; Secondary 65L60, 65L10.

واژگان کلیدی. جریان سیال مگنتوهیدرودینامیک آرام و انتقال حرارت، روش هم محلی، توابع لژاندر گویا.  
\* سخنران

معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی زیر تغییر شکل می‌دهد [۱]:

$$\begin{aligned} f''' + f f'' - f'^2 - S\left(\frac{\eta}{\nu} f'' + f'\right) - M f' &= 0, \\ \frac{1}{Pr}(\nu + R)\theta'' + f\theta' - r f'\theta - S\left(\frac{\eta}{\nu} \theta' + m\theta\right) &= 0, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \theta'(0) = -1, \\ f' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.1)$$

که در آن،  $f(\eta)$  تابع جریان بدون بعد و  $\theta(\eta)$  درجه حرارت بدون بعد می‌باشند. به علاوه،  $S = \frac{\alpha}{c}$  پارامتر ناپایداری،  $M$  پارامتر مغناطیس،  $R$  پارامتر تابش،  $r$  پارامتر شاخص فضا،  $m$  پارامتر شاخص زمان و  $Pr$  عدد پرانتل می‌باشند. در کاربردهای مهندسی و عملی، علاقه‌مندی به بررسی کمیت‌های فیزیکی مهم از قبیل رفتار جریان و ویژگی‌های انتقال حرارت با تجزیه و تحلیل ضریب اصطکاک سطحی موضعی ( $C_f$ ) و عدد ناسلت موضعی ( $Nu_x$ ) می‌باشد. این دو پارامتر بدون بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_f = -2Re_x^{-\frac{1}{2}} f''(0), \quad Nu_x = \frac{Re_x^{\frac{1}{2}}}{\theta(0)},$$

که در آن  $Re_x = \frac{U_x}{\nu}$  عدد رینولدز موضعی می‌باشد. در ادامه سعی می‌کنیم با استفاده از روش هم محلی مبتنی بر توابع لژاندر گویا جواب تقریبی برای مدل بالا ارائه کنیم.

## ۲. فرآیند اجرای محاسبات

در ابتدا توابع لژاندر گویا به صورت مختصر معرفی شده و سپس روش هم محلی برای حل دستگاه معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۲. توابع لژاندر گویا. مجموعه توابع لژاندر گویای  $\{R_n(\eta)\}_{n=0}^{\infty}$  یک مجموعه کامل متعامد برای  $L^2_{\omega}([0, \infty)) = \{v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} | v \text{ is measurable, } \|v\|_{\omega} < \infty\}$  نسبت به تابع وزن  $\omega(\eta) = \frac{\nu \mathcal{L}}{(\eta + \mathcal{L})^2}$  می‌باشد. این توابع توسط رابطه بازگشتی زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned} R_0(\eta) = 1, \quad R_1(\eta) &= \frac{\eta - \mathcal{L}}{\eta + \mathcal{L}}, \\ R_{n+1}(\eta) &= \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(\frac{\eta - \mathcal{L}}{\eta + \mathcal{L}}\right) R_n(\eta) - \left(\frac{n}{n+1}\right) R_{n-1}(\eta), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

هر تابع  $f(\eta) \in L^2_{\omega}([0, \infty))$  را می‌توان به صورت ترکیب خطی از  $\{R_n(\eta)\}_{n=0}^{\infty}$  زیر نوشت:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n(\eta), \quad \alpha_n = \frac{\langle f, R_n(\eta) \rangle_{\omega}}{\|R_n(\eta)\|_{\omega}}. \quad (2.2)$$

به علاوه، به ازای عدد مثبت  $N$ ، می‌توان فضای تقریب  $\mathfrak{R}_N = \text{span}\{R_0, R_1, \dots, R_N\}$  را در نظر گرفت. لذا اپراتور تقریب زیر (اپراتور تصویر متعامد روی  $\mathfrak{R}_N$  نسبت به ضرب داخلی

بررسی عددی جریان مگنتوهیدروپدینامیک و انتقال حرارت به کمک روش عددی هم محلی

وزن دار  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  موجود می‌باشد:

$$P_N[f(\eta)] = \sum_{n=0}^N \alpha_n R_n(\eta), \quad \forall f \in L_\omega^1([0, \infty)). \quad (3.2)$$

در [۲] ثابت شده است که (۳.۲)، تقریب مناسبی از  $f(\eta) \in H_{\omega, A}^r([0, \infty))$  می‌باشد.

۲.۲. اجرای روش هم محلی لژاندر گویا برای حل مدل. اکنون توابع مجهول  $f(\eta)$  و  $\theta(\eta)$  در (۱.۱) را برحسب ترکیب خطی توابع لژاندر گویای زیر می‌نویسیم:

$$f(\eta) \simeq \tilde{f}_{N_1} = \sum_{n=0}^{N_1} f_n R_n(\eta), \quad \theta(\eta) \simeq \tilde{\theta}_{N_2} = \sum_{n=0}^{N_2} \theta_n R_n(\eta) \quad (4.2)$$

که در آن،  $\{f_n\}_{n=0}^{N_1}$  و  $\{\theta_n\}_{n=0}^{N_2}$  ضرائب مجهول بوده و باید محاسبه شوند. با قرار دادن تقریب‌های (۴.۲) در (۱.۱)، توابع مانده زیر نتیجه می‌شود:

$$Res_1(\eta) = \tilde{f}''' + \tilde{f} \tilde{f}'' - \tilde{f}'^2 - S\left(\frac{\eta}{\gamma} \tilde{f}'' + \tilde{f}'\right) - M \tilde{f}',$$

$$Res_2(\eta) = \frac{1}{Pr} (\lambda + R) \tilde{\theta}'' + \tilde{f} \tilde{\theta}' - r \tilde{f}' \tilde{\theta} - S\left(\frac{\eta}{\gamma} \tilde{\theta}' + m \tilde{\theta}\right). \quad (5.2)$$

برای محاسبه ضرائب مجهول، دو دسته نقطه  $\{\eta_{1,j}\}_{j=0}^{N_1}$  و  $\{\eta_{2,j}\}_{j=0}^{N_2}$  به‌عنوان نقاط هم محلی در نظر می‌گیریم. در اینجا، مجموعه نقاط گاوس رادو لژاندر گویا (ریشه‌های توابع گویا  $(R_{N_k+1}(\tau) + R_{N_k}(\tau))$ ،  $k = 1, 2$  انتخاب می‌شوند. با مساوی صفر قرار دادن توابع مانده  $Res_1(\eta)$  و  $Res_2(\eta)$  در  $N_1 - 1$  و  $N_2 - 1$  نقطه درونی  $\{\eta_{1,j}\}_{j=0}^{N_1}$  و  $\{\eta_{2,j}\}_{j=0}^{N_2}$  یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی با  $N_1 + N_2 - 2$  معادله و  $N_1 + N_2 - 2$  مجهول حاصل می‌شود. به‌علاوه، شرایط مرزی موجود در (۱.۱) به‌صورت مستقیم اعمال می‌شود. بنابراین دستگاه معادلات غیرخطی زیر نتیجه خواهد شد:

$$Res_1(\eta_{1,j}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_1 - 1,$$

$$Res_2(\eta_{2,j}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

$$\tilde{f}_{N_1}(0) = 0,$$

$$\tilde{f}'_{N_1}(0) - 1 - \lambda \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \tilde{f}''_{N_1}(0) = 0,$$

$$\tilde{\theta}'_{N_2}(0) + 1 = 0,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_{N_2} = 0. \quad (6.2)$$

از سوی دیگر، برای توابع لژاندر گویا داریم  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{dR_n(\eta)}{d\eta} = 0$ ،  $n = 0, 1, 2, \dots, N_1$  بنابراین  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d\tilde{f}_{N_1}}{d\eta} = 0$  و برقراری شرط مرزی مسئله تضمین می‌شود. در این تحقیق، برای حل دستگاه جبری غیرخطی (۶.۲) از روش تکراری نیوتن استفاده شده است.

### ۳. نتایج عددی و همگرایی

در این بخش روش پیشنهادی بخش قبل جهت به دست آوردن جواب‌های عددی (۱.۱) به کار گرفته می‌شود. لذا با تغییر برخی از پارامترهای مسئله، جواب‌های محاسبه شده و پارامترهای  $-f''(\theta)$  و  $\frac{1}{\theta}$  در جدول ۱ و شکل ۱ گزارش شده است. این نتایج با نتایج گزارش شده در [۳، ۱] قابل مقایسه می‌باشد. در این محاسبات،  $\mathcal{L} = 15$  و  $N_1 = N_2 = N = 25$  در نظر گرفته شده است. همگرایی عددی روش پیشنهادی در جدول ۲ با ثابت نگه داشتن همه پارامترها ( $S = 0.8, Pr = 1, M = 0, m = 1, R = 0.5, r = 1$ ) و تغییر  $N$  نشان داده شده است. جداول و اشکال موفقیت آمیز بودن این روش را در مواجهه با مدل ذکر شده تأیید می‌کند.

جدول ۱: مقادیر محاسبه شده  $-f''(\theta)$  و  $\frac{1}{\theta}$  به ازای مقادیر مختلف  $S, Pr, M, R, r$ .

$S$	$M$	$Pr$	$R$	$r$	$m$	$-f''(\theta)$	$\frac{1}{\theta}$
0.8	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.610705	0.964647
1.2	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.702514	1.074502
1.0	0.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.320522	1.054311
1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.657130	1.021453
1.0	0.5	0.7	0.5	1.0	1.0	1.498394	0.847400
1.0	0.5	3.0	0.5	1.0	1.0	1.498394	1.064443
1.0	0.5	1.0	0.0	1.0	1.0	1.498394	1.300126
1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.498394	0.881099
1.0	0.5	1.0	0.5	2.0	1.0	1.498394	1.229267
1.0	0.5	1.0	0.5	3.0	1.0	1.498394	1.407130
1.0	0.5	1.0	0.5	1.0	2.0	1.498394	1.344809
1.0	0.5	1.0	0.5	1.0	3.0	1.498394	1.585631

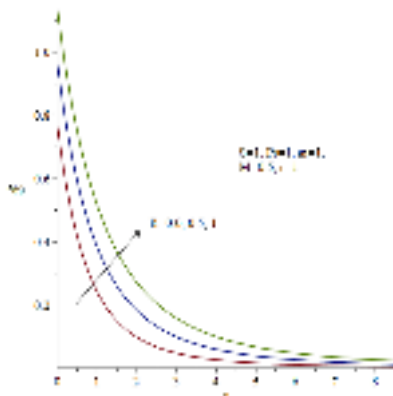
جدول ۲: مقادیر محاسبه شده  $|Res_1(\eta)|$  و  $|Res_2(\eta)|$  به ازای مقادیر مختلف  $N$ .

	$ max Res_1(\eta) $	$ max Res_2(\eta) $
$N = 5$	$7.810989 \times 10^{-3}$	$3.781308 \times 10^{-3}$
$N = 10$	$1.363271 \times 10^{-4}$	$2.220839 \times 10^{-3}$
$N = 15$	$5.130933 \times 10^{-5}$	$2.755509 \times 10^{-5}$
$N = 20$	$1.353666 \times 10^{-6}$	$1.493643 \times 10^{-6}$
$N = 25$	$6.751688 \times 10^{-9}$	$5.437753 \times 10^{-8}$

### مراجع

1. A.M. Megahed and M. Megahed, Ahmed, *Variable heat flux effect on magnetohydrodynamic flow and heat transfer over an unsteady stretching sheet in the*

بررسی عددی جریان مگنتوهیدرودینامیک و انتقال حرارت به کمک روش عددی هم محلی



شکل ۱: توزیع دما به ازای مقادیر مختلف  $R$  (راست) و توزیع سرعت به ازای مقادیر مختلف  $M$  (چپ).

- presence of thermal radiation*, Canadian Journal of Physics 92 (2014), no. 1, 86-91.
2. B. Guo, J. Shen and Z. Wang, *A rational approximation and its applications to differential equations on the half line*, Journal of scientific computing 15 (2000), 117-147.
  3. K.V. Prasad, P. Dulal and P.S. Datti, *MHD power-law fluid flow and heat transfer over a non-isothermal stretching sheet*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14 (2009), no. 5, 2178-2189.

# رياضيات مالی

## برآورد شاخص کل بورس تهران با مدل تلاطم تصادفی اتورگرسیو با ناهمسانی واریانس شرطی تلاطم

نویده مدرسی<sup>۱</sup> \* و پارسا یحیوی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار گروه ریاضیات مالی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی  
*n.modarresi@atu.ac.ir*

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری ریاضیات مالی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی  
*p\_yahyavi@atu.ac.ir*

چکیده. سرمایه‌گذاران در بازار سهام همواره تلاش می‌کنند تا برای روند تغییرات بازده یا تلاطم قیمت سهم مورد نظر خود پیش‌بینی‌های کوتاه مدت و بلند مدت داشته باشند. در این راستا مدل‌های GARCH معرفی شده‌اند که در آنها تلاطم تلاطم ثابت فرض می‌شود که با داده‌های واقعی بازار مغایرت دارد. عدم توجه به ناهمسانی واریانس شرطی موجود در تلاطم، خطای حاصل از پیش‌بینی‌های این مدل را افزایش می‌دهد. در مدل‌های تلاطم تصادفی تلاطم تلاطم تصادفی فرض می‌شود اما در پیش‌بینی بازده دارایی از مشاهده لحظه حال استفاده نمی‌کنند که عدم استفاده از مشاهده لحظه حال موجب افزایش خطای این مدل‌ها می‌شود. در جهت رفع این مشکلات در این مقاله، مدل تلاطم تصادفی اتورگرسیو با ناهمسانی شرطی SHARV و نوع نامتقارن آن که ویژگی اهرمی را به خوبی پوشش می‌دهد معرفی می‌کنیم. مدل را برای داده‌های شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران برازش داده و به این منظور، پارامترهای مدل را به روش شبه ماکزیمم درست نمایی برآورد می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که مدل معرفی شده در حالت نامتقارن برازش بهتری را در مقایسه با حالت متقارن آن با معیار میانگین خطا می‌دهد.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 91B84; Secondary 62M10, 60G15, 62P05.

واژگان کلیدی. اثر مشاهدات لحظه حال، مدل تلاطم تصادفی، ناهمسانی واریانس شرطی در تلاطم.

\* سخنران

۱. پیش‌گفتار

مهم‌ترین اصل در سرمایه‌گذاری در بازارهای مالی توانایی در پیش‌بینی کوتاه مدت و بلند مدت بازده دارایی‌های مورد معامله است. از جمله دارایی‌هایی که در بسیاری از سبدهای سرمایه‌گذاری بکار می‌رود سهام است و از این رو پیش‌بینی بازده آن تاثیر بسزایی در نتایج سرمایه‌گذاری دارد. مدل کردن بازده سهام ابزار گوناگونی دارد که از جمله مهم‌ترین آنها سری‌های زمانی هستند. استفاده از سری‌های زمانی به علت راحتی پیاده‌سازی و انعطاف‌پذیری که دارند می‌توانند طیف وسیعی از ویژگی‌های قیمت سهام از جمله ناهمسانی<sup>۱</sup> یا خاصیت خوشه‌بندی<sup>۲</sup> و اثر اهرمی<sup>۳</sup> را پوشش دهند. انتخاب دقیق مدل مناسب برای برازش داده‌های مورد نظر از اهمیت بالایی برخوردار است. به همین جهت از سری‌های زمانی با تلاطم زمان متغیر برای مدل کردن بازده سهام استفاده می‌شود. انگل در سال ۱۹۸۲ مدل اتورگرسیو با ناهمسانی واریانس شرطی تعمیم یافته (GARCH)<sup>۴</sup> با تلاطم متغیر را معرفی کرد [۲]. خانواده این مدل به علت راحتی پیاده‌سازی از محبوبیت فراوان برخوردار هستند اما از آنجایی که تلاطم تلاطم آنها ثابت فرض می‌شود از دقت بالایی برخوردار نیستند. برای رفع این مشکل لانگ‌استف و شوارتز [۳] به بررسی مدل‌های تلاطم تصادفی (SV)<sup>۵</sup> که تلاطم تلاطم را تصادفی فرض می‌کنند پرداختند. خطای دومی که در تمام مدل‌های خانواده GARCH و SV وجود دارد، عدم استفاده از اطلاعات و مشاهدات لحظه حال است. در تمام مدل‌های معرفی شده، پیش‌بینی بازده و تلاطم بر مبنای داده‌های تاریخی و تغییرات تا یک گام قبل از زمان حال محاسبه می‌شود. عدم استفاده از اطلاعات لحظه  $t$ ام برای پیش‌بینی بازده لحظه  $t + 1$ ام خطای پیش‌بینی را افزایش و دقت مدل را کاهش می‌دهد [۱]. در راستای برطرف کردن این مشکل اسمتنا در سال ۲۰۱۷ سری زمانی RT-GARCH<sup>۶</sup> را معرفی کرد که در آن از اطلاعات لحظه حال نیز برای پیش‌بینی استفاده می‌شود ولی همچنان واریانس شرطی تلاطم را ثابت فرض می‌کند [۴]. در این پژوهش برای مدل کردن بازده سهام از مدل تلاطم تصادفی اتورگرسیو با ناهمسانی واریانس (SHARV)<sup>۷</sup> و نوع نامتقارن آن ASHARV استفاده می‌کنیم. ساختار این مدل می‌تواند ویژگی‌های ذاتی بازده سهام مانند ناهمسانی واریانس شرطی تلاطم تلاطم و اثر اهرمی را به خوبی پوشش دهد [۵]. در بخش بعد به معرفی مدل‌های SHARV و نوع نامتقارن آن یعنی ASHARV می‌پردازیم و با استفاده از داده‌های تاریخی شاخص کل بورس تهران، تخمینی از پارامترهای مدل به روش برآورد شبه ماکزیمم درست‌نمایی (QMLE)<sup>۸</sup> بدست می‌آوریم. مقایسه خطای روش‌های ارائه شده نشان می‌دهد میانگین خطای مدل ASHARV در مدل کردن داده‌های بازده سهام کمتر از مدل SHARV بوده و شبیه‌سازی بازده تحت آن، نتایجی دقیق‌تر و نزدیک‌تر به مشاهدات بازار مالی را ارائه می‌دهد.

<sup>۱</sup>Heteroskedasticity

<sup>۲</sup>Clustering property

<sup>۳</sup>Leverage effect

<sup>۴</sup>Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity

<sup>۵</sup>Stochastic volatility

<sup>۶</sup>Real-time GARCH

<sup>۷</sup>Stochastic heteroskedastic autoregressive volatility

<sup>۸</sup>Quasi-maximum likelihood estimation

## ۲. معرفی مدل

بر مبنای ایده مدل RT-GARCH با در نظر گرفتن ناهمسانی واریانس شرطی در تلاطم، مدل‌های SHARV(1,1,1) و ASHARV(1,1,1) به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \psi \sigma_{t-1}^2) \epsilon_t^2 \end{aligned}$$

که در آن  $\epsilon_t$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد با گشتاور مرتبه چهارم متناهی باشد و  $\phi, \psi \geq 0$ ،  $\beta > 0$  و  $\sigma^2 > 0$ . نوآوری مدل، عبارت  $\psi \sigma_{t-1}^2 \epsilon_t^2$  است که ناهمسانی واریانس شرطی در تلاطم را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه  $\mathbb{E}[\epsilon_t^2] = 1$  و  $\sigma_t \epsilon_t$  تابعی فرد است،  $r_t$  دنباله تفاضلی مارتینگل<sup>۹</sup> است و داریم  $\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ . در واقع مدل SHARV در مشخص کردن کشیدگی موجود در توزیع بازده سهام که بر مبنای داده‌های تاریخی مشاهده می‌شود ناتوان است. به همین دلیل نسخه تعمیم یافته نامتقارن آن ASHARV که کشیدگی توزیع بازده را پوشش می‌دهد به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} r_t &= \mu \sigma_{t-1} + \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \beta \sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \psi \sigma_{t-1}^2) \epsilon_t^2 + (\omega + \phi \sigma_{t-1}^2) (\min\{\epsilon_t, 0\})^2 \end{aligned}$$

## ۳. برازش مدل به داده‌ها

داده‌های تاریخی شاخص کل بورس تهران را از مهر ۱۴۰۰ تا مهر ۱۴۰۲ در نظر می‌گیریم و پارامترهای مدل‌های معرفی شده را برآورد می‌کنیم. مقدار برآورد شده هر پارامتر را به روش برآورد شبه ماکزیمم درست‌نمایی بدست آورده و میانگین و انحراف از معیار استاندارد هر کدام را در جدول زیر ارائه می‌کنیم.

جدول ۱: مقادیر برآورد شده پارامترها

مدل	آماره	$\mu$	$\beta$	$\alpha$	$\psi$	$\omega$	$\phi$
SHARV	مقدار تخمینی	-	۰/۰۱	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	-	-
	میانگین	-	۰/۰۳۴	$\frac{95}{10^5}$	$\frac{95}{10^4}$	-	-
	انحراف از معیار	-	۰/۱۴	$\frac{219}{10^5}$	$\frac{218}{10^4}$	-	-
(A)SHARV	مقدار تخمینی	۰/۹۲	$\frac{473}{10^0}$	$\frac{55}{10^6}$	$\frac{15}{10^6}$	$\frac{732}{10^5}$	$\frac{127}{10^4}$
	میانگین	۰/۸۴	۰/۰۸	$\frac{116}{10^0}$	$\frac{68}{10^0}$	$\frac{454}{10^4}$	$\frac{212}{10^4}$
	انحراف از معیار	۰/۲	۰/۲۳	$\frac{135}{10^8}$	$\frac{117}{10^8}$	$\frac{48}{10^4}$	$\frac{17}{10^3}$

در شکل‌های ۱ و ۲ به مقایسه‌ی دقت مدل‌های معرفی شده می‌پردازیم. میانگین خطای شبیه‌سازی‌های مدل پس از جایگذاری پارامترهای بدست آمده و تولید ۱۰۰ مسیر متفاوت برای بازده شاخص با استفاده از مدل ASHARV برابر ۰/۰۱۲ و کمتر از میانگین خطای مدل SHARV یعنی ۰/۰۱۸ است. با توجه به این مقایسه مدل ASHARV برازش دقیق‌تری

<sup>۹</sup> Martingale difference sequence

شکل ۱: خطای مدل SHARV

شکل ۲: خطای مدل ASHARV

بدست می‌دهد و گزینه بهتری برای پیش‌بینی خواهد بود. لازم به ذکر است که مدل‌های معرفی شده در ارتباط با داده‌های پرتلاطم برازش بهتر و دقت بالاتری دارند.

#### مراجع

1. J. Breitung and C.M. Hafner, *A simple model for now-casting volatility series*, Int. J. Forecast. 32 (2016), no. 4, 1247-1255.
2. R. Engle, *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, Econometrica 50 (1982), no. 4, 987-1007.
3. A. Longstaff, E. Schwartz, *Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model*, The Journal of Finance 47 (1992), no. 4, 1259-1282.
4. E. Smetanina, *Real-time GARCH*, J. Financ. Econom. 15 (2017), no. 4, 561-601.
5. D. Yashuang (Dexter), *A simple joint model for returns, volatility and volatility of volatility*, Journal of Econometrics 232 (2023), no. 2, 521-543.

علوم کامپیوتر

## مروری بر بهبود عملکرد شبکه‌های عصبی همبافت سادگی از طریق تغییرات فیلتر در لایه یادگیری

نیره الیاسی \*

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، خوارزمی  
elyasi82@khu.ac.ir

چکیده. شبکه‌های همبافت سادگی رویکرد تعمیم‌یافته شبکه‌های عصبی گرافی هستند که در موارد تحلیل داده‌های غیراقلیدسی بسیار بهتر از شبکه‌های عصبی پیچشی عمل می‌کنند. در این مقاله به مروری بر پیدایش شبکه‌های عصبی همبافت سادگی از سال ۲۰۲۰ و توسعه آن‌ها در زمینه تحلیل داده می‌پردازیم. در این راستا به ابتدا به مرور تعریف لایه ادغام برای این شبکه‌ها که قبلاً به آن پرداختیم و سپس به تغییرات فیلتر لایه یادگیری جهت بهبود عملکرد این شبکه‌ها می‌پردازیم.

### ۱. پیش‌گفتار

در سال‌های اخیر شبکه‌های عصبی (Neural networks) در زمینه داده‌کاوی امر محاسبات را تسریع بخشیده است. به علاوه یادگیری عمیق در درک الگوهای پنهان داده‌های اقلیدسی اعم از تصاویر، متون و فیلم‌ها تاکنون مثمرتر بوده است. اگرچه در مورد مسائلی که داده‌ها به صورت گراف‌هایی با روابط پیچیده در حوزه‌های غیراقلیدسی تولید می‌شوند و وابستگی‌های متقابل بین اشیا نمایش داده می‌شوند، به کارآمدی داده‌های اقلیدسی نیستند. در این موارد شبکه‌های عصبی گرافی (GNN) در ابتدا و سپس شبکه‌های عصبی همبافت سادگی جهت پردازش داده‌های غیراقلیدسی شبکه‌ای به وجود آمده‌اند. گراف‌ها یا همبافت‌های سادگی برای نمایش داده‌ها از رئوس و برای نشان دادن وابستگی‌های بین داده‌ها از یال‌ها یا سادک‌ها (simplex) استفاده می‌کنند. در واقع از توپولوژی بهره می‌بریم و شبکه‌های عصبی گرافی را به شبکه‌های عصبی همبافت سادگی (simplicial complex neural networks)

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 68t05; Secondary 62R40.

واژگان کلیدی. همبافت سادگی، شبکه‌های عصبی پیچشی، لاپلاسن سادگی، فیلتر لایه یادگیری.  
\* سخنران

تعمیم می‌دهیم، تا بتوانیم بطور همزمان روابط بیشتری از افراد را لحاظ کنیم. در ۲۰۲۰ اولین شبکه عصبی همبافت سادگی یعنی SNN توسط ابلی و همکاران [۲] معرفی شد که بر روی شبکه همبافت سادگی همکاری نویسندگان به نسبت دادن داده گمشده در این شبکه می‌پرداخت. فیلتر یادگیری بر مبنای لاپلاسیین همبافت سادگی در مقاله آنان برای اولین بار معرفی شد. یکی از سوالات مطرح شده در این مقاله ارایه لایه ادغام (pooling layer) بود که ما به تعریف لایه ادغام در SNN پرداختیم و در پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی آن را ارایه دادیم [۱]. بعد از آن نویسندگان دیگری مانند یانگ از مفهوم هاج لاپلاسیین استفاده کرده و فیلتر خطی پاسخ تکانه محدود را برای پردازش سیگنال معرفی کردند که در مقاله [۳، ۴] به بهبود دقت شبکه و رفع نویز نسبت به روش ابلی پرداختند. در این مقاله ما به پیروی از این پژوهشها سعی در بهبود دقت شبکه ایجاد شده توسط یانگ می‌پردازیم. در این راستا با تغییر فیلتر خطی در لایه یادگیری مقاله یانگ به فیلتر غیرخطی و ترکیب فیلتر خطی و غیرخطی به دقت بهتری از این شبکه دست می‌یابیم. این بهبود عملکرد و دقت توسط جدول نشان داده می‌شود.

## ۲. پیش‌نیازها

**تعریف ۱.۰۲.** یک همبافت سادگی مجرد یک مجموعه  $K$  است به همراه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌هایش مانند  $S$  که دارای دو شرط زیر است:

- (۱) برای هر  $v \in K$  و  $\{v\} \in S$ ، به تمام مجموعه‌های  $\{v\}$  رئوس  $K$  گوئیم.  
 (۲) اگر  $\tau \subseteq \sigma \in S \implies \tau \in S$

**تعریف ۲.۰۲.** فرض کنیم  $C^p(K)$  مجموعه توابع از  $\mathbf{R} \rightarrow K_p$  باشد، تابع هم-مرز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_p : C^p(K) \longrightarrow C^{p+1}(K)$$

$$\partial_p(f)([v_0, \dots, v_{p+1}]) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}])$$

**تعریف ۳.۰۲.** برای هر عملگر مرز  $\partial_d : C_d \longrightarrow C_{d-1}$  از  $K$ ، قرار می‌دهیم  $B_d$  نمایش ماتریسی این عملگر باشد، که در آن  $C_d$  و  $C_{d-1}$  دارای پایه استاندارد هستند. واضح است که تعداد سطرهای  $B_d$  برابر است با تعداد  $1-d$  سادک‌های  $K$  و تعداد ستون‌های آن برابر است با تعداد  $d$  سادک‌های  $K$ .  
 متناسب با  $\partial_d$  عملگر الحاقی  $\partial_d$  را بصورت  $\partial_d^*$  نمایش می‌دهیم و بصورت زیر آن را تعریف می‌کنیم:

$$\partial_d^* : C_{d-1} \longrightarrow C_d$$

به وضوح نمایش ماتریسی متناسب با  $\partial_d^*$  برابر است با  $B_d^T$ .

**تعریف ۴.۰۲.** فرض کنید  $K$  یک همبافت سادگی جهت‌دار است و  $d \leq \circ$  یک عدد طبیعی باشد. لاپلاسیین ترکیبیاتی مرتبه  $d$  همبافت سادگی  $K$  یک عملگر خطی  $\Delta_d : C_d \longrightarrow C_d$  است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \partial_{d+1} \circ \partial_{d+1}^* + \partial_d^* \circ \partial_d.$$

عنوان کوتاه

و همچنین ماتریس لاپلاسین مرتبه  $d$  را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\ell_d = B_{d+1}B_{d+1}^T + B_d^T B_d$$

حال فرض کنیم  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{|K_p|}$  مقادیر ویژه ماتریس  $\ell_p$  هستند، با توجه به تجزیه‌ی مقدار ویژه ماتریس  $\ell_p$  داریم:

$$\ell_p = U \text{diag}(\Lambda) U^T$$

که در آن  $U$  ساخته شده از بردارهای ویژه متناسب با مقادیر ویژه  $\ell_p$  است و  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{|K_p|}]$  حال با توجه به [۲] عملگر تبدیل فوریه و معکوس آن به ترتیب با  $F_p^{-1}$  و  $F_p$  نشان داده می‌شود که نمایش ماتریسی آنها  $U$  و  $U^T$  است. و با توجه به عملگر فوریه، عملگر کانولوشن همبافت سادگی بصورت زیر تعریف می‌شود: [۲]

$$c \star_p c' = F_p^{-1}(F_p(c)F_p(c')), \quad c, c' \in C^p(K)$$

### ۳. پیشنهاد لایه ادغام جهت کاهش پیچیدگی داده در SNN

یکی از سوالات مطرح شده در مقاله ابلی [۲] چگونگی تعمیم لایه ادغام (pooling layer) در شبکه عصبی همبافت سادگی (SNN) بود. همانطور که لایه ادغام در شبکه‌های عصبی پیچشی (CNN) برای خلاصه‌سازی و کاهش پیچیدگی داده تلاش می‌کند، در SNN نیز با چنین هدفی به ارایه لایه ادغام در شبکه‌های عصبی همبافت دادگی بر اساس نظریه مورس گسسته پرداختیم. در حقیقت این لایه عصب سادگی مربوط به همبافت سادگی نظیر داده است که سعی در کم کردن بعد یا پیچیدگی داده گراف یا همبافت سادگی دارد. این نتیجه را در پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ارایه کردیم [۱]. جهت یادآوری شبکه‌کد نظیر ساخت لایه ادغام در شبکه‌کد ۱ آورده شده است.

شکل ۱: تعریف لایه ادغام شبکه عصبی همبافت سادگی

---

**Algorithm 1** Pooling of Simplicial Complex Neural Net

```

1: function SIMPLICIAL POOLING( $M, n$ ) ▷  $M$  is the adjacency matrix of  $K$ 
2:   while  $n \neq 0$  do
3:     for  $row_i$  in  $M$  do
4:       for  $row_j$  in  $M$  do
5:         if  $row_i = row_j$  then pass
6:         else
7:           if  $row_i < row_j$  then           ▷  $<$  means subsequence
8:             mark  $row_i$  as 'IsSubSet'
9:           end if
10:        end if
11:      end for
12:    end for
13:    Remove all rows marked as 'IsSubSet'
14:    Do steps 2-8 for columns
15:    Substitute  $M$  with reduced  $M$ 
16:     $n \leftarrow n - 1$ 
17:  end while
18:  Return reduced  $M$            ▷ reduced  $M$  is  $N^{2n}(K)$ 
19: end function

```

---

ن، الیاسی

#### ۴. دست‌آورد‌های پژوهش

یکی دیگر از اهدافی که در شبکه‌های عصبی همبافت سادگی دنبال می‌شود، بهبود دقت شبکه می‌باشد. در این زمینه در نویسندگانی مانند یانگ با تغییر فیلتر یادگیری شبکه SNN دقت شبکه را بهبود داده و بعلاوه نویز داده سیگنال را کاهش دادند. ما نیز فیلتر خطی لایه یادگیری شبکه عصبی یانگ را با ترکیب فیلترهای خطی و غیرخطی جایگزین کردیم و به دقت بهتری در ازای یادگیری در ایپاک‌های بیشتر رسیدیم. نتیجه را به صورت شبکه عصبی CSNN معرفی کردیم. نتیجه‌ای از این تغییرات فیلتر را در جدول ۱ زیر خواهیم دید.

جدول ۱: سیر بهبود دقت از شبکه SNN تا شبکه CSNN با تغییر فیلتر برای لاپلاسیان  $L_0$ .

دقت شبکه به درصد	مقدار $\alpha$	فیلتر	نوع فیلتر
۶۴/۲۶	$\alpha = 0.5$	$\alpha * L_0$	
۶۳/۶۴	$\alpha = 0.40542328632018276$		
۶۳/۶۸	$\alpha = 0.2855451224189919$		
۶۴/۳۴	$\alpha = 0.16374784441821788$		
۶۱/۲۲	$\alpha = 0.28492321790730135$		
۶۴/۷۳	$\alpha = 0.2782502454075191$		
۶۵/۰۹	$\alpha = 0.10396965588576479$	$\alpha * L_0 + I$	فیلتر خطی مقاله یانگ
۶۷/۶۴	-	ELU	
۶۸/۱۹	-	RELU	
۶۷/۵۵	-	$\alpha = 0.1$ LRELU	
۶۷/۳۰	-	SRELU	فیلتر غیرخطی
۶۷/۵۹	$\alpha = 0.18520804329416918$	ELU	
۶۸/۴۶	$\alpha = 0.18520804329416918$	RELU	
۶۷/۸۸	$\alpha = 0.18520804329416918$	$\alpha = 0.1$ LRELU	
۶۷/۷۲	$\alpha = 0.18520804329416918$	SRELU	ترکیب فیلترهای خطی و غیرخطی

#### مراجع

۱. ن. الیاسی، م. حسینی مقدم و میرمحسن پدram، پیشنهاد لایه ادغام در شبکه های عصبی همبافت سادگی، پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران، شهریور ۱۴۰۰.
2. S. Ebli, M. Defferrard and G. Spreemann, *Simplicial neural networks*, arXiv preprint, arXiv:2010.03633v2 (2020).
3. M. Yang, E. Isufi, M.T. Schaub and G. Leus, *Simplicial Convolutional Neural Networks*, arXiv preprint, arXiv:2110.02585 .
4. M. Yang, E. Isufi, M.T. Schaub and G. Leus, *Finite impulse response filters for simplicial complexes*, of Journal of Computational and Information Technologies (JJcit), doi: 10.23919/EUSIPCO54536.2021.9616185.

## یک الگوریتم نهان‌نگاری مبتنی بر موجک، تیغک و تجزیه مقدار تکین

فرزانه سالاری\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه رازی کرمانشاه  
f.salari@razi.ac.ir

چکیده. با گسترش ابزارهای آنلاین برای دستکاری تصاویر، نیاز به روش‌های قدرتمند برای محافظت از حق نشر آثار دیجیتال افزایش یافته است. نهان‌نگاری دیجیتال راه‌حلی برای این مشکل ارائه می‌دهد که با جاسازی اطلاعات مالکیت در تصاویر، از آن‌ها محافظت می‌کند. با این حال، دستیابی به تعادل بین شفافیت (نامحسوس بودن نهان‌نگاره) و مقاومت در برابر حملات، چالش اصلی این حوزه به شمار می‌رود. این مقاله، الگوریتمی برای نهان‌نگاری دیجیتال پیشنهاد می‌کند که از ترکیب تبدیل موجک گسسته، تبدیل تیغک محدود و تجزیه مقدار تکین استفاده می‌کند. ارزیابی‌های تجربی با استفاده از تصاویر استاندارد، کارایی الگوریتم پیشنهادی را در حفظ کیفیت بصری در عین مقاومت بالا در برابر حملات مختلف نشان می‌دهد.

### ۱. پیش‌گفتار

الگوریتم‌های نهان‌نگاری را می‌توان بر اساس حوزه قرارگیری نهان‌نگاره به دو حوزه تصویر و فرکانس طبقه‌بندی کرد. الگوریتم‌های مبتنی بر تصویر، نهان‌نگاره را مستقیماً در پیکسل‌های تصویر قرار می‌دهند، در نتیجه، سریع و آسان هستند اما در برابر تغییرات چندان مقاوم نیستند. از این رو، الگوریتم‌های مبتنی بر فرکانس پیشنهاد شدند که بخش‌هایی از فرکانس تصویر را تغییر می‌دهند که باعث می‌شود در برابر حملات قوی تر باشند و امکان نگهداری داده‌های بیشتری را فراهم می‌کنند.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 68U10; Secondary 94A08, 42C40, 42C15.

واژگان کلیدی. نهان‌نگاری تصویر، تبدیل موجک گسسته، تبدیل تیغک محدود، تجزیه مقدار تکین.  
\* سخنران

تبدیل های گسسته ابزارهای قدرتمندی را برای نمایش تصویر در حوزه فرکانس ارائه می دهند [۵]. این تبدیل ها، تصویر را به اجزای فرکانسی سازنده آن تجزیه می کنند و بدین ترتیب، جاسازی نهان نگاره به روشی که شفافیت را افزایش می دهد، تسهیل می کنند. یکی از مهم ترین تبدیل های گسسته در زمینه نهان نگاری، تبدیل موجک گسسته (DWT) است که به دلیل هم خوانی با سیستم بینایی انسان باعث می شود که جاسازی نهان نگاره در مناطق کمتر قابل درک بصری انجام شود [۳]. با این حال، تبدیل موجک گسسته محدودیت هایی در جهت دهی و نمایش تکینگی با ابعاد بالا دارد. برای رفع این محدودیت ها، موجک های چند جهته مختلفی از جمله تیغک ها (Ridglets) معرفی شدند و به طور خاص، تبدیل تیغک محدود (FRIT) که نسخه ی گسسته تیغک است برای نمایش تکینگی های خطی طراحی شده است [۲].

علاوه بر تبدیل های گسسته، روش های تجزیه ماتریسی نیز نقشی اساسی در الگوریتم های نهان نگاری ایفا می کنند. تجزیه مقدار تکین (SVD) به دلیل تکیه بر مقادیر تکین، یکی از پرکاربردترین روش های تجزیه در این زمینه است [۵].

این مقاله، یک الگوریتم نهان نگاری را معرفی می کند که از ترکیب FRIT، DWT و SVD به دست می آید. این روش با اعمال تبدیل DWT بر روی تصویر اصلی به منظور تولید زیرباندها شروع می شود. سپس، زیرباند انتخابی تحت تبدیل FRIT قرار می گیرد و در نتیجه ضرایب FRIT به دست می آیند. در نهایت، اطلاعات نهان نگاره که به صورت یک تصویر نشان داده می شود، مستقیماً در مقادیر تکین ضرایب FRIT جاسازی می شود. منظور ارزیابی کارایی الگوریتم پیشنهادی، این الگوریتم روی مجموعه ای از تصاویر استاندارد مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲. مفاهیم بنیادی

۱.۱. تبدیل موجک گسسته (DWT). امواج کوچک با فرکانس متغیر و طول مدت محدود، موجک نامیده می شوند. تبدیل موجک به دلیل خواص عالی فشرده سازی انرژی فضا و فرکانس، به ابزاری مهم در نهان نگاری و پردازش تصویر تبدیل شده است. در هر سطح، تبدیل موجک گسسته، یک تصویر را به چهار زیرباند تجزیه می کند: یک مؤلفه حاوی توصیفی تقریبی از تصویر با رزولوشن پایین (LL) و سه مؤلفه مربوط به جزئیات افقی (HL)، عمودی (LH) و قطری (HH). الگوریتم های نهان نگاری مبتنی بر DWT امکان مکان یابی فضایی خوب و ویژگی های چندریزی را فراهم می کند که شبیه به سیستم بینایی انسان است.

۲.۲. تبدیل تیغک محدود (FRIT). تبدیل FRIT به عنوان ابزاری قدرتمند برای نمایش تصاویر دیجیتال ظهور کرده است. تبدیل تیغک محدود با تجزیه تصویر به اجزایی که با ویژگی های خطی همسو هستند، به این هدف دست می یابد و از تکنیکی به نام تبدیل رادون محدود (FRAT) استفاده می کند. تبدیل رادون محدود FRAT با محاسبه مجموع شدت پیکسل ها در امتداد خطوط خاصی درون تصویر عمل می کند. این خطوط شبیه خطوطی هستند که در تبدیل رادون پیوسته استفاده می شوند، اما برای ساختار شبکه محدود تصاویر دیجیتال تطبیق داده شده اند. این رویکرد به FRIT اجازه می دهد تا ساختارهای با لبه های مستقیم را به طور موثر ضبط و نمایش دهد که آن را برای کارهای مختلف پردازش تصویر بسیار ارزشمند می کند.

تبدیل تیغک محدود از یک فرایند دو مرحله ای استفاده می کند: ابتدا تبدیل رادون محدود روی تصویر اعمال می شود و سپس از تبدیل موجک گسسته تک بعدی برای تجزیه ی بیشتر اطلاعات

نهان‌نگاری در حوزه موجک، تیغک و تجزیه مقدار تکین

تصویر استفاده می‌شود. در ادامه، فرض می‌کنیم میدان متناهی  $Z_p = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  را داریم که  $p$  یک عدد اول است. تبدیل رادون محدود تابع حقیقی  $f$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r_k[l] = FRAT_f(k, l) = \frac{1}{\sqrt{(p)}} \sum_{(i,j) \in L_{k,l}} f[i, j] \quad (1.2)$$

به طوری که  $L_{(k,l)}$  مجموعه‌ای از نقاطی است که خطی را روی شبکه‌ی  $Z_p^2$  به صورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$\begin{aligned} L_{k,l} &= \{(i, j) : j = ki + l \pmod{p}, i \in Z_p, 0 \leq k < p\}, \\ L_{p,l} &= \{(l, j) : j \in Z_p\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

به دلیل خاصیت وارون‌پذیری تبدیل رادون محدود، امکان ساخت تبدیل تیغک محدود به صورت وارون‌پذیر وجود دارد. این امر با تجزیه‌ی هر دنباله‌ی پرتوی جهت‌دار  $r_k[0], r_k[1], \dots, r_k[p-1]$  به وسیله‌ی تبدیل موجک تک‌بعدی حاصل می‌شود.

**۳.۲. تجزیه مقدار تکین (SVD).** مقادیر تکین ویژگی‌های کلیدی دارند که آن‌ها را برای جاسازی نهان‌نگاره مناسب می‌نماید. یک ویژگی این است که با تغییرات جزئی تصویر، مقادیر تکین بدون تغییر باقی می‌مانند. ویژگی دیگر، ثبت خصوصیات جبری تصویر در مقادیر تکین است. از این رو، تجزیه SVD به طور مستقل یا در ترکیب با تبدیل‌های گسسته، تکنیکی مناسب برای اهداف نهان‌نگاری به شمار می‌رود. با اعمال SVD بر روی یک ماتریس  $A$  با ابعاد  $m \times n$ ، سه ماتریس متمایز  $A = U \times S \times V^T$  به دست می‌آید.  $S$  یک ماتریس قطری حاوی مقادیر تکین  $(\sigma_i)$  به ترتیب غیر صعودی  $(i = 1, \dots, m)$  است.

### ۳. روش پیشنهادی

#### ۱.۳. الگوریتم جاسازی نهان‌نگاره.

- (۱) تصویر اصلی ( $I$ ) تحت تبدیل موجک گسسته قرار می‌گیرد و به چهار زیرباند تجزیه می‌شود که زیرباند  $LL$  برای پردازش بیشتر انتخاب می‌شود.
- (۲) ماتریس  $LL$  تحت تبدیل تیغک محدود قرار می‌گیرد تا ضرایب تیغک ( $R$ ) را استخراج کند.
- (۳) ماتریس ضرایب تیغک با استفاده از تجزیه مقدار تکین تجزیه می‌شود:  $[U, S, V] = SVD(R)$
- (۴) تصویر نهان‌نگاره ( $W$ ) با استفاده از یک ضریب مقیاس  $(\alpha)$  در مقادیر تکین ( $S$ ) از تصویر اصلی ادغام می‌شود:  $W' = S + \alpha.W$
- (۵) نهان‌نگاره تغییر یافته ( $W'$ ) با یک عملیات SVD تجزیه می‌شود:  $[U_w, S_w, V_w] = SVD(W')$
- (۶) معکوس SVD برای به دست آوردن ماتریس ضرایب تیغک اصلاح شده  $R'$   $U \times S_w \times V^T$  اعمال می‌شود.

۷) در نهایت، معکوس FRIT و سپس معکوس تبدیل موجک گسسته (DWT) به طور متوالی روی  $R'$  اعمال می‌شوند. این فرآیند تصویر نهان‌نگاری شده ( $I^*$ ) را بازسازی می‌کند که حاوی نهان‌نگاره پنهان است.

### ۲.۳. الگوریتم استخراج نهان‌نگاره.

۱) تصویر نهان‌نگاری شده ( $I^*$ ) تحت تبدیل موجک گسسته قرار می‌گیرد و چهار زیر باندها را استخراج می‌کند. مانند الگوریتم جاسازی زیرباند با فرکانس پایین ( $LL^*$ ) انتخاب می‌شود.

۲) ماتریس  $LL^*$  تحت تبدیل تیغک محدود (FRIT) قرار می‌گیرد. این مرحله ضرایب تیغک محدود ( $R^*$ ) را استخراج می‌کند.

۳) ماتریس ضرایب تیغک محدود با استفاده از SVD تجزیه می‌شود  $[U^*, S^*, V^*] = SVD(R^*)$  و مقادیر تکین اصلاح شده ( $S^*$ ) را آشکار می‌کند.

۴) با استفاده از ماتریس‌های تجزیه مقدار تکین ( $U_w$  و  $V_w$ ) که از الگوریتم جاسازی به دست آمده و مقادیر تکین اصلاح شده ( $S^*$ )، یک معکوس SVD روی  $S^*$  انجام می‌شود:  $W' = U_w \times S^* \times V_w^T$

۵) در نهایت، نهان‌نگاره جاسازی شده ( $W^*$ ) با استفاده از فرمول  $W^* = \frac{W' - S}{\alpha}$  از فرمول  $W^*$  با استفاده از فرمول  $W^* = \frac{W' - S}{\alpha}$  بازسازی می‌شود.

### ۴. ارزیابی کارایی

الگوریتم پیشنهادی در متلب 2021b پیاده سازی شد و بر روی سه تصویر اصلی و یک تصویر نهان‌نگاره (با اندازه  $257 \times 257$  پیکسل) که از پایگاه داده تصاویر USC-SIPI به دست آمده است (شکل ۱)، آزمایش گردید. ضریب مقیاس تجربی ( $\alpha = 0.07$ ) در هر دو فرآیند جاسازی و استخراج اعمال شد. برای ارزیابی اثربخشی الگوریتم‌های نهان‌نگاری، از دو معیار شفافیت و مقاومت استفاده می‌شود. شفافیت درجه شباهت بصری بین تصویر اصلی و تصویر نهان‌نگاری شده را تعیین می‌کند که با استفاده از معیار PSNR به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{MAX(p)^2}{\frac{1}{xy} \sum_{p=0}^{x-1} \sum_{q=0}^{y-1} [O(p, q) - W(p, q)]^2} \right) \quad (1.4)$$



شکل ۱: تصویر سمت راست، تصویر نهان‌نگاره و سه تصویر دیگر تصاویر اصلی می‌باشند.

مقاومت با استفاده از معیار همبستگی متقابل نرمال شده (NC) ارزیابی می‌شود. NC درجه شباهت بین نهان‌نگاره اصلی ( $W$ ) و نهان‌نگاره استخراج شده ( $W'$ ) پس از حمله را کمی

می‌کند:

$$NC(W, W') = \frac{\sum_{p=0}^{x-1} \sum_{q=0}^{y-1} (W(p, q) - M_w)(W'(p, q) - M_{w'})}{\sqrt{\sum_{p=0}^{x-1} \sum_{q=0}^{y-1} (W(p, q) - M_w)^2} \sqrt{\sum_{p=0}^{x-1} \sum_{q=0}^{y-1} (W'(p, q) - M_{w'})^2}} \quad (2.4)$$

الگوریتم پیشنهادی روی سه تصویر اجرا گردید و مقدار PSNR و همچنین مقادیر NC با اعمال حمله‌های مختلف اندازه‌گیری شد (جدول ۱). به منظور ارزیابی دقیق‌تر، نتایج به دست آمده با الگوریتم‌هایی بر اساس تبدیل‌های رادون [۴]، قیچک (shearlet) و مرزک (contourlet) [۱] مقایسه شد. الگوریتم پیشنهادی در برابر اغلب حملات، مقدار NC بیشتری دارد که نشان دهنده مقاومت بالاتر است، در حالی که، شفافیت آن برابر با الگوریتم بر اساس رادون و کمتر از الگوریتم‌های بر اساس تبدیل‌های قیچک و مرزک است.

جدول ۱: مقایسه شفافیت و مقاومت روی تصاویر مختلف

مرزک	قیچک	رادون	الگوریتم پیشنهادی			حمله
			Lena	Peppers	Baboon	
Peppers	Peppers	Lena	Lena	Peppers	Baboon	نویز فلفل و نمک (۰/۱)
۹۲.۰	۹۶.۰	۸۲۵۸.۰	۹۸۵۴.۰	۹۸۴۲.۰	۹۸۶۲.۰	نویز گاوسی (۰/۱)
۹۱.۰	۹۵.۰	۸۲.۰	۹۷۵۱.۰	۹۶.۰	۹۶۸.۰	نویز اسپکل (۰/۱)
۹۲.۰	۹۹.۰	۹۶۶۷.۰	۹۸۵۵.۰	۹۸۵۶.۰	۹۸۷.۰	فیلتر گاوسی پایین‌گذر (۳ × ۳)
۹۲.۰	۹۹.۰	۹۸۴۳.۰	۹۹۴۳.۰	۹۹۱۲.۰	۹۹۰۲.۰	فیلتر میانه (۳ × ۳)
۸۸.۰	۹۸.۰	۹۷۰۶.۰	۹۹۳۳.۰	۹۹۰۶.۰	۹۸۲۵.۰	تغییر مقیاس (۰/۵)
۹۴.۰	۹۷.۰	۹۵۳.۰	۹۹۳۶.۰	۹۸۹۳.۰	۹۸۶۳.۰	تصحیح گاما (۰/۹)
۸۶.۰	۹۹.۰	۹۲۱۷.۰	۸۹۸۲.۰	۸۱۶۲.۰	۹۰۰۱.۰	یکسان‌سازی هستیوگرام
۹۰.۰	۹۸.۰	۹۶۲۸.۰	۹۸۶۹.۰	۹۸۷۱.۰	۹۶۹۷.۰	PSNR
۲۶.۶۶	۹۵.۶۶	۹۳.۴۵	۹۱.۴۵	۸۷.۴۵	۸۶.۴۴	

## مراجع

۱. م. مردانیپور، م. ع. زارع چاهوکی و ح. جوانشیری، مقایسه تحلیلی اثربخشی انواع تبدیل‌های توسعه یافته موجک بر شفافیت و مقاومت نشانه گذاری تصویر مبتنی بر تجزیه ماتریسی، مجله ماشین بینایی و پردازش تصویر (۱۳۹۶)، ۴(۱)، ۷۱-۸۷.
۲. M.N. Do and M. Vetterli, *Orthonormal finite ridgelet transform for image compression*, IEEE Image Processing 2 (2000), 367-370.
۳. A. Mishra, C. Agarwal, A. Sharma and P. Bedi, *Optimized gray-scale image watermarking using DWT-SVD and firefly algorithm*, Expert Syst Appl 41 (2014), 7858-7867.
۴. S. Rastegar, F. Namazi, K. Yaghmaie and A. Aliabadian, *Hybrid watermarking algorithm based on singular value decomposition and radon transform*, AEU-international journal of electronics and Communications 65 (2011), no. 7, 658-663.

ف. سالاری

5. S. Sharma, J.J. Zou, G. Fang, P. Shukla and W. Cai, *A review of image watermarking for identity protection and verification*, Multimedia Tools and Applications 83 (2024), no. 11, 31829-31891.

# کدگذاری و رمزنگاری

## سیستم رمزنگاری پساکوانتومی برای رای دهی الکترونیکی ایمن

م. هادیان دهکردی<sup>۱</sup> و ف.جعفری<sup>۲</sup>

<sup>۱،۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران

*mhadian@iust.ac.ir*

*jafari\_fatemeh79@mathdep.iust.ac.ir*

چکیده. با توجه به الکترونیکی شدن رای گیری ها و اهمیت بیش از پیش امنیت در مراحل رای گیری، استفاده از کریستوگرافی (شاخه ای ترکیبی از رمزنگاری و پنهان سازی) ضرورت بیشتری پیدا کرده است. این شاخه با افزایش امنیت اطلاعات حساس ما (اعم از رای گیری) در حین ارسال به مقصد طی یک کانال عمومی ناامن که حضور شنودگر در آن قطعی است، ما را در یک رای گیری عادلانه و معتبر یاری می کند. امنیت اکثر سیستم های رمزنگاری (و به تبعیت کریستوگرافی) همانند *RSA* مبتنی بر مسائل سخت ریاضی همچون مسئله تجزیه اعداد صحیح می باشد. امنیت این سیستم ها با بهبود زمان الگوریتم های این مسائل و همچنین ظهور و پیشرفت کامپیوترهای کوانتومی و به تبع الگوریتم های کوانتومی، دچار مشکل خواهد شد و در آینده ای نچندان دور، دیگر رای گیری ایمن نخواهد بود! همانند الگوریتم ارائه شده توسط پیتر شور در سال ۱۹۹۴ که باعث شد مسئله تجزیه اعداد اول در زمان چند جمله ای حل شود. در این مقاله، سیستمی را بررسی خواهیم کرد که ترکیبی از رمزنگاری پساکوانتومی و نهان نگاری است تا بتواند علاوه بر استفاده ایمن و بهینه (از نظر زمانی) در دنیای امروز، امنیت آن را برای آینده پس از ظهور (وسیع) ماشین های کوانتومی تضمین کند.

### ۱. پیش گفتار

رای گیری الکترونیکی، استفاده از ابزارها و فناوری های الکترونیکی است که به فرآیند رای گیری کمک می کند تا سریع تر، ایمن تر و کم هزینه تر (هم از منابع مالی و هم از منابع انسانی) برگزار گردد. رای گیری الکترونیکی دارای مزایای دیگری همچون پشتیبانی از چندین زبان، دقت و سرعت بیشتر در شمارش آرا، کاهش تعداد آرای باطله و حتی کاهش احتمال تقلب می باشد.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. رمزنگاری، نهان نگاری، رمزنگاری پساکوانتومی، رای دهی الکترونیکی.

رای‌گیری الکترونیکی (همانند رای‌گیری کاغذی) دارای چهار مرحله ثبت‌نام، رای‌گیری، شمارش آرای مآخوذه و ذخیره‌سازی آرا به روشی قابل اعتماد است. با توجه به احتیاجات یک رای‌گیری، در یک سیستم رای‌دهی الکترونیکی، چهار الزام امنیتی (محرمانگی، یکپارچگی، احراز هویت و عدم انکار) نیز باید ارائه شود. این الزامات با تکیه بر سیستم‌های رمزنگاری، قابل اجرا می‌باشند. با توجه به مقالات [۲] و [۳] استفاده از رمزنگاری‌های رایج مانند  $AES^1$  و  $DES^2$  علاوه بر آنکه نمی‌تواند پاسخ‌گوی حجم زیادی از داده‌ها باشد، می‌تواند سوء ظن مهاجمان و یا استراق سمع‌کنندگان را برانگیزد. این نیاز مهم را می‌توان با ترکیب نهان‌نگاری پاسخ داد. (با مراجعه به مقاله [۱] می‌توان تفاوت بین سیستم‌های تنها رمزنگاری، تنها نهان‌نگاری و ترکیب آنها را مشاهده کرد.)

علاوه بر استفاده از نهان‌نگاری می‌توان، برای ایمن‌سازی سیستم نسبت به حملات کوانتومی، از رمزنگاری کوانتومی استفاده کرد. در آینده‌ای نه چندان دور، با ظهور گسترده کامپیوترهای کوانتومی، و سرعت بالای آنها در انجام محاسبات و در نتیجه شکستن سیستم‌های رمزنگاری مبتنی بر سختی حل مسائل ریاضی هستند، عامل اصلی و مهم محرمانگی داده‌ها در اینگونه سیستم‌ها شکست خواهد خورد. پس یا باید به سمت رمزنگاری کوانتومی گام برداشت یا رمزنگاری پسا کوانتومی.

**تعریف ۱.۱.** مسئله حل همزمان معادلات (چند جمله‌ای) چند متغیره<sup>۳</sup> فرض کنید بردار چندجمله‌ای  $P$  یک سیستمی از  $m$  چند جمله‌ای با  $n$  متغیر که هر کدام دارای بیشترین درجه  $d \in \mathcal{N}$  باشد. یعنی تعریف می‌کنیم که:

$$P := \bigcup_{i=1}^m p_i \quad (1.1)$$

که در آن هر  $p_i$  برای  $1 \leq i \leq m$  به فرم

$$p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{v \in \mathcal{V}_n^d} \gamma_{i,v} \prod_{j=1}^d x_{vj} \quad (2.1)$$

است. ضرایب  $\gamma_{i,v}$  متعلق به میدان متناهی  $F$  است و بردار  $v$  متعلق به فضای برداری  $\mathcal{V}_n^d$  است. مسئله ما یافتن بردار  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_n$  در سیستم معادلات همزمان در بردار چند جمله‌ای  $P$  به فرم ۱.۱ با دادن بردار  $(y_1, y_2, \dots, y_m) \in F$  است، وقتی که  $p_i$  ها به فرم ۲.۱ تعریف شوند. یعنی حل دستگاه زیر:

<sup>1</sup>Advanced Encryption Standard

<sup>2</sup>Data Encryption Standard

<sup>3</sup>Simultaneous Multivariate Equations problem

$$\begin{cases} y_1 = p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = p_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

این مسئله یک مسئله  $NP - complete$  است و با افزایش درجه  $d$  سختی مسئله رو به افزایش خواهد بود.

### طرح توصیفی کریستوگرافی چندجمله‌ای چند متغیره

طرح توصیفی کریستوگرافی<sup>۴</sup> چندجمله‌ای چندمتغیره (MPC<sup>۵</sup>) شامل یک شخص فرستنده (باب) که نماینده شرکت‌کنندگانی که واقع در مراکز رای‌گیری هستند، می‌باشد. شرکت‌کنندگان تمایل دارند تا رای خود را به صورت یک پیام مخفی  $M$  (که شامل رای آنها و جزئیات ثبت نام همانند اطلاعات هویتی می‌باشد) به گیرنده (آلیس) که نماینده مرکز کنترل و جمع‌آوری است، ارسال کنند. این ارسال طی یک کانال عمومی ارسال می‌شود که توسط شنودگر (وندی) کنترل و نظارت می‌شود. اگر این شنودگر به پیام ارسالی شک کند، دیگر آلیس نمی‌تواند آن را دریافت کند.

باب ابتدا پیام  $M$  را به یک بردار  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  روی فضای  $F^n$  تبدیل می‌کند. سپس با استفاده از تبدیل آفین ( $R$ ) آن را به بردار  $X'$  تبدیل می‌کند. حال  $X'$  را توسط معادلات (چند جمله‌ای) چند متغیره<sup>۱۰۱</sup> به  $Y'$  تبدیل کرده و پس از اعمال تبدیل آفین دوم ( $T$ ) به  $Y$  می‌رسد که خروجی نهایی الگوریتم رمزنگاری است. با استفاده از الگوریتم نهان‌کاوی (همانند کم ارزش‌ترین بیت  $LSB$ <sup>۶</sup>)، متن رمزی  $Y$  را درون بیت‌های کاهشی<sup>۷</sup> تصویر پوششی  $C$  پنهان می‌کند. منظور از بیت‌های کاهشی، بیت‌هایی است که پس از تغییر آنها تصویر تغییر فاحشی نکرده و توجه وندی را به خود جلب نمی‌کند. پس از اعمال نهان‌نگاری تصویر  $S$  را به دست خواهد آورد. این تصویر برای آلیس از طریق کانال عمومی ارسال می‌شود.

حال آلیس با استفاده از اعمال الگوریتم نهان‌کاوی روی تصویر  $S$  به متن رمزی  $Y$  می‌رسد. با استفاده از تبدیل معکوس  $T$  به  $Y'$  رسیده و پس از یافتن  $X'$  با استفاده از مسئله حل همزمان معادلات (چند جمله‌ای) چند متغیره، روی آن تبدیل معکوس  $R$  را اعمال کرده و به بردار  $X$  روی فضای  $F^n$  می‌رسد.

کلید خصوصی بخش رمزنگاری این سیستم سه تایی  $(R, P, T)$  است.  $P$  چند جمله‌ای خصوصی تعریف شده<sup>۱۰۱</sup> است و  $R, T$  تبدیل‌های آفین<sup>۸</sup> هستند که متن پیام  $M$  را به ورودی مسئله<sup>۱۰۱</sup> و سپس خروجی مسئله را به متن رمزی تبدیل می‌کنند. کلید عمومی ما چند جمله‌ای روی  $F$  است که فقط به  $n$  متغیر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  بستگی دارد و تنها گیرنده

<sup>4</sup>Cryptography

<sup>5</sup>Multivariate Polynomial Cryptography

<sup>6</sup>Least Significant Bit

<sup>7</sup>Redundant Bits

<sup>8</sup>Affine Transition

جدول ۱: مقایسه زمان محاسبات، اندازه خروجی و توان عملیاتی طرح با رمزنگاری *MPC* و طرح با رمزنگاری *RSA*

توان عملیاتی		اندازه خروجی		زمان محاسباتی		اندازه ورودی
<i>MPC</i>	<i>RSA</i>	<i>MPC</i>	<i>RSA</i>	<i>MPC</i>	<i>RSA</i>	<i>RSA</i>
۰۴۵.۰	۰۱۱۶.۰	۴۸	۴۴	۲۰۳	۷۶۵	۱۰
۰۹۲۲.۰	۰۳۰۴.۰	۸۰	۴۴	۷۸	۷۵۰	۲۰
۱۳۲۲.۰	۰۳۴۷.۰	۱۲۸	۴۴	۱۵۶	۵۷۸	۳۰
۱۷۳۲.۰	۰۴۵۸.۰	۱۶۰	۴۴	۱۴۱	۵۳۲	۴۰
۲۱۴۶.۰	۰۵۳۴.۰	۲۰۸	۴۴	۱۲۵	۵۴۶	۵۰
۲۲۳۹.۰	۰۶۱۴.۰	۲۴۰	۴۴	۱۵۶	۶۱۰	۶۰

یعنی آلیس به نحوه ساخت آنها آگاه است.

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

نتایج نشان داده شده در جدول زیر توسط یک سیستم کامپیوتری با ویندوز ۸ و دو هسته چهار گیگاهرتز و ۴ گیگ رم اجرا شده است. این جدول زمان محاسبات، اندازه خروجی و توان عملیاتی طرح ارائه شده با رمزنگاری *MPC* و طرح با رمزنگاری *RSA* را مقایسه می‌کند. مطابق با جدول طرح *MPC* زمان محاسباتی (بر حسب میلی ثانیه) کمتری نسبت به ورودی مشابه در *RSA* دارد. در اینجا زمان محاسباتی به زمانی که طرح برای رمزگذاری و نهن‌سازی داده رای‌گیری رمز شده در تصویر پوششی انتخاب شده و یازمانی که برای بازیابی متن ساده از تصویر راز مصرف می‌کند را گویند. اندازه خروجی طرح *MPC* نسبت به طرح *RSA* است. هر چه اندازه خروجی بیشتر باشد فاکتورهای کاری بیشتری برای بازیابی متن رمزی نیاز است. این یعنی طرح در برابر حملاتی همچون حمله آماری ایمن تر خواهد بود. توان عملیاتی (بر حسب بیت بر ثانیه) در اینجا برابر است با کل متن ساده رمزگذاری شده (بر حسب بیت) تقسیم بر کل زمان مصرف شده (بر حسب ثانیه) برای رمزگذاری به علاوه پنهان سازی. هر چه توان عملیاتی یک سیستم بیشتر باشد، اجرای آن بهتر است که با توجه به شکل توان عملیاتی *MPC* بیشتر از *RSA* است.

## سپاس‌گزاری

ضمن تشکر و قدردانی از تمامی خوانندگان این مقاله، امید است تا این مقاله کمکی برای ارتقا امنیت رای‌دهی الکترونیکی باشد.

## مراجع

1. O.M. Olaniyi, O.T. Arulogun, E.O. Omidiora and O.O. Okediran, *A Survey of Cryptographic and Stegano-Cryptographic Models for Secure Electronic Voting System*, Covenant Journal of Informatics and Communication Technology (CJICT) 2 (2013), no. 1, 54-73.
2. B.K. Alese, E.D. Philemon and S.O. Falaki, *Comparative Analysis of Public Key Encryption Schemes*, International Journal of Engineering and Technology 9 (2012), no. 2.
3. A.J. Gabriel, B.K. Alese, A.O. Adetunmbi and O.S. Adewale, *Post-Quantum Cryptography: A Combination of Post-Quantum Cryptography and Steganography*, The 8th International Conference for Internet Technology and Secured Transactions (ICITST-2013), Technically Co-sponsored by IEEE UK/RI Computer Chapter, 9th-12th December 2013, 454-457.
4. A. Gabriel, B. Alese, A. Adetunmbi, O. Adewale and O. Sarumi, *Post-Quantum Cryptography System for Secure Electronic Voting*, Open Computer Science (2019).

## کاربردی از تسهیم راز تک سهم مشبکه مبنا در حل برخی چالش‌های واقعی

نغمه توسلی بنایی<sup>۱\*</sup>، فرهاد رحمتی<sup>۲</sup>، و الهه رئیسی<sup>۳</sup>

<sup>۱،۲</sup> گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

*n.tavassoli@aut.ac.ir*

*frahmati@aut.ac.ir*

<sup>۳</sup> گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

*e.raeisi@aut.ac.ir*

چکیده. در این مقاله، ابتدا چالش موجود در مدیریت یک کارخانه را بیان نموده و سپس طرح تسهیم راز مشبکه مبنایی را ارائه خواهیم داد تا اهداف مورد نظر و مورد نیاز در فرایند تصمیم‌گیری را تامین نموده و از امنیت لازم برخوردار باشد.

### ۱. پیش‌گفتار

شرکت‌های  $A_1, A_2, \dots, A_k$  از جمله سهام‌داران کارخانه  $A$  هستند. برای  $i = \{1, \dots, k\}$  هر یک از شرکت‌های  $A_i$  دارای  $y_i$  نماینده در هیئت مدیره کارخانه  $A$  که دارای  $u$  عضو است، هستند. (هیچ عضوی در هیئت مدیره کارخانه  $A$  نمایندگی دو شرکت را ندارد.) مدیرعامل کارخانه عهده دار امکان سنجی و خرید دستگاهی مورد نیاز به قیمت  $b$  برای کارخانه است و برای تامین بودجه خرید دستگاه، مبلغ فوق را به شرکت‌های زیرمجموعه اعلام می‌نماید تا برحسب توان هر شرکت، میزان سرمایه‌گذاری هر شرکت توسط خودشان اعلام گردد. شرکت‌ها تا تصمیم‌گیری نهایی، مایل نیستند کسی از میزان سرمایه‌گذاری پیشنهادی آن‌ها مطلع گردد. در نتیجه خود شرکت (نمایندگان شرکت در هیئت مدیره) و مدیرعامل تنها کسانی هستند که از میزان سرمایه‌گذاری پیشنهادی آن شرکت با خبر خواهند بود و پس از تصمیم‌گیری صرفاً میزان سهام هر شرکت در مالکیت دستگاه مورد نظر اعلام خواهد شد. از طرفی طبق مصوبات هیئت مدیره

2020 Mathematics Subject Classification. 94A60; 68P25.

واژگان کلیدی. تسهیم راز، مشبکه مبنا، تک سهم، کوانتومی.

\* سخنران

هرگونه تصمیم‌گیری در خصوص خرید دستگاه بدون حضور حداقل یکی از نمایندگان شرکت‌ها بی اعتبار خواهد بود. مدیرعامل پس از جمع‌آوری نظرات شرکت‌ها با رعایت شرایط امنیتی، پس از محاسبه مجموع سرمایه‌گذاری پیشنهادی شرکت‌ها و مقایسه آن با قیمت دستگاه مورد نظر نسبت به خرید دستگاه بررسی لازم را به عمل آورده و سهام هر شرکت را تعیین و مازاد رقم سرمایه‌گذاری پیشنهادی را به هر شرکت عودت داده و سهم آن‌ها را به هیئت مدیره اعلام می‌نماید.

طرح تسهیم راز برای اولین بار در سال ۱۹۷۹ توسط شامیر [۲] و بلکلی [۳] به صورت مستقل ارائه شد و پس از آن تحقیقات در این حوزه و ارائه طرح‌های جدید ادامه پیدا کرد. در این مقاله طرح تسهیم راز شبکه مبنایی با بهره‌گیری از طرح مقاله [۱] ارائه خواهد شد که نسبت به حملات کوانتومی مقاوم و اهداف امنیتی مورد انتظار را نیز تامین می‌نماید. به علاوه از آنجا که طرح مورد استفاده، تک سهم است (یعنی به ازای تغییر راز، نیازی به تغییر هویت و ارسال مجدد آن نیست و می‌توان در فضای ذخیره‌سازی سیستم صرفه جویی کرد.)، می‌توان آن را در تمامی موقعیت‌های مشابه استفاده نمود.

## ۲. طرح تسهیم راز تک سهم

الگوریتم تسهیم راز مورد نظر برای حل مسئله به شرح زیر است  
مرحله راه اندازی

(۱) قرار می‌دهیم  $X = \{x_1, \dots, x_u\}$  مجموعه اعضای هیئت مدیره کارخانه و  $P_i \subseteq X$  مجموعه اعضای شرکت  $A_i$  در هیئت مدیره کارخانه یعنی  $P_i = \{x \in X \mid x \in A_i\}$  هم چنین قرار می‌دهیم  $s_i$  مبلغ پیشنهادی شرکت  $A_i$  برای سرمایه‌گذاری خرید دستگاه مورد نظر باشد که از طریق کانال امن به مدیرعامل اعلام می‌نماید و مدیرعامل  $S' = \sum_{i=1}^k s_i$  را محاسبه می‌کند و هرکدام از شرکت‌ها برای اطمینان از حضور یکی از اعضای خود در تصمیم‌گیری، مقدار  $c_i$  را به عنوان هویت خود تعیین و به مدیرعامل اعلام می‌کند تا مدیرعامل برحسب آن به روش بیان شده در طرح، سهم شرکت  $A_i$  را از راز  $S'$  تعیین نموده و هیئت مدیره با حضور حداقل یک نفر از هر شرکت و در غیاب مدیرعامل، مقدار  $S'$  را کشف و با قیمت دستگاه مقایسه نموده و اجازه خرید را به مدیرعامل اعلام نماید (به عبارت دیگر نقش مدیرعامل در این طرح، واسطه راستگو می‌باشد). هم چنین فرض کنیم  $q = O(n^c)$  برای برخی ثابت  $c$ ،  $w$  عددی صحیح مثبت و  $S' \in \mathbb{Z}_q^w$  راز باشد.

(۲) واسطه،  $v \in_R \mathbb{Z}_q^k$  را چنان انتخاب می‌کند که اولین مولفه  $v$  یعنی  $a$  غیر صفر باشد و  $v$  را منتشر می‌کند.

(۳) واسطه، ماتریس خصوصی  $B \in \mathbb{Z}_q^{w \times k}$  را چنان انتخاب می‌کند که

$$S' = Bv. \quad (1.2)$$

کاربردی از تسهیم راز تک سهم شبکه مبنا

در معادله (۱.۲)،  $w$  معادله و  $w \times k$  مجهول داریم. واسطه، ماتریس  $B$  را به صورت زیر می‌شکند

$$\begin{bmatrix} B_1^{w \times 1} & B_2^{w \times (k-1)} \end{bmatrix}$$

سپس  $B_2 \in_R \mathbb{Z}_q^{w \times (k-1)}$  را انتخاب کرده و  $B_1$  را به صورت زیر محاسبه می‌کند

$$S' = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ v' \end{bmatrix} \Rightarrow S' = B_1 a + B_2 v' \Rightarrow B_1 = (S' - B_2 v') a^{-1}$$

که  $v'$ ،  $1$ ،  $k-1$  مولفه باقی مانده از  $v$  است.

### مرحله انتخاب سهم‌ها

هریک از  $P_i$  ها،  $i = 1, \dots, k$  سهم خود،  $c_i \in \{0, 1\}^m$  را که  $m \geq \max\{w \log q, k\}$  انتخاب کرده و آن را به صورت امن برای واسطه می‌فرستند.

### مرحله تولید اتصال

(۱) واسطه بردارهای عمومی  $\eta_i \in \mathbb{Z}_q^k$ ،  $i = 1, \dots, k$  را چنان انتخاب می‌کند که مستقل خطی باشند.

(۲) واسطه معادله زیر را برای محاسبه  $M \in \mathbb{Z}_q^{w \times m}$  حل می‌کند

$$M c_i = B \eta_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.2)$$

معادله (۲.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M C = B \eta \quad (3.2)$$

که در آن،  $C^{m \times k} = [c_1 \dots c_k]$  و  $\eta^{k \times k} = [\eta_1 \dots \eta_k]$ . در معادله (۳.۲) تعداد مجهولات،  $w \times m$ ، بیشتر از تعداد معادله‌ها یعنی  $w \times k$  است. واسطه  $w \times (m-k)$  ورودی  $M$  را به صورت رندم تصادفی از  $\mathbb{Z}_q$  انتخاب کرده و ورودی‌های باقی مانده را محاسبه می‌کند. حال با احتمال بالایی می‌تواند ماتریس  $C$  را به صورت زیر بشکند

$$\begin{bmatrix} C_1^{r \times k} \\ C_2^{k \times k} \\ C_3^{(m-r-k) \times k} \end{bmatrix}$$

که در آن  $C_2$  وارن پذیر بوده و  $0 \leq r \leq m-k$  می‌باشد.

حال، واسطه ماتریس  $M$  را به صورت  $[M_1^{w \times r} \ M_2^{w \times k} \ M_3^{w \times (m-r-k)}]$  می‌شکند که در آن  $0 \leq r \leq m-k$ . بنابراین معادله (۳.۲) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = B \eta$$

واسطه، ماتریس‌های  $M_1$  و  $M_3$  را با ورودی‌های تصادفی یکنواخت از  $\mathbb{Z}_q$  انتخاب کرده و ماتریس  $M_2$  را از معادله به صورت زیر محاسبه می‌کند

$$M_1 C_1 + M_2 C_2 + M_3 C_3 = B \eta \Rightarrow M_2 = (B \eta - M_1 C_1 - M_3 C_3) C_2^{-1}$$

واسطه  $M$  را منتشر می‌نماید. سپس تابع هش عمومی  $H$  را انتخاب کرده و  $h_{s'} = H(S')$  و  $h_i = H(Mc_i)$  را به صورت عمومی منتشر می‌کند.

### مرحله واریسی و بازیابی راز

با تشکیل جلسه هیئت مدیره برای تصمیم‌گیری، مبلغ  $S'$  صرفاً با حضور حداقل یک نفر از هر شرکت یعنی  $P_1, \dots, P_k$  طی فرآیند زیر بازیابی می‌گردد

(۱) با استفاده از ماتریس عمومی  $M$ ، هر  $P_i$ ،  $i = 1, \dots, k$  شبه سهم  $Mc_i$  را محاسبه

کرده و آن را برای ماشین ترکیب‌کننده می‌فرستد.

(۲) ماشین پس از دریافت  $k$  شبه سهم، احراز هویت  $P_i$  را توسط مقایسه  $H(Mc_i)$  با

مقدار متناظر بر روی تابلوی اعلانات انجام می‌دهد.

(۳) در این مرحله ماشین، ماتریس خصوصی  $B$  را به صورت زیر محاسبه می‌کند

$$B = M[c_1 \ c_2 \ \dots \ c_k][\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_k]^{-1}$$

(۴) ماشین با استفاده از اطلاع عمومی  $v$  و ماتریس خصوصی  $B$ ، راز  $S'$  را از طریق

معادله (۱.۲) محاسبه می‌کند.

(۵) ماشین، صحت مقدار محاسبه شده راز  $S'$  را از طریق مقایسه  $H(S')$  به دست آمده

با مقدار متناظر روی تابلوی اعلانات چک می‌کند.

پس از بازیابی، مبلغ  $S'$  با  $b$  مقایسه شده و در صورتی که  $S' \geq b$  هیئت مدیره مجوز خرید را

به مدیرعامل اعلام می‌نماید تا مدیرعامل دستگاه را خریداری نموده، سهم مالکیت هر شرکت را

متناسب با سرمایه‌گذاری پیشنهادی ( $s_i$ ) تعیین و مازاد آن را به هر شرکت عودت دهد.

طرح بیان شده دارای ماهیت قابل واریسی، چندمرحله‌ای، چند بار مصرف و تک سهم بودن است.

### مراجع

1. R. Kumar and S. Padhye, *A Lattice-Based Single-Share Secret Sharing Scheme*, SN Computer Science 4 (2023), no. 811, 1-10.
2. A. Shamir, *How to share a secret*, Commun ACM 22 (1979), no. 11, 612-3.
3. G.R. Blakley, *Safeguarding cryptographic keys*, Proceedings of the 1979 AFIPS National Computer Conference 48 (1979), 313-7.

## تحلیل امنیت یک طرح امضای مستقیم فاقد گواهی‌نامه

مهناز نوروزی<sup>۱</sup> \* و عاطفه عیسی‌لوی اصل<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا (س)  
*m.noroozi@alzahra.ac.ir*

<sup>۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا (س)  
*atefeh.isalou@gmail.com*

چکیده. یکی از انواع خاص امضای دیجیتال با واریسی‌کننده مشخص، امضای مستقیم نامیده می‌شود. در چنین امضاهایی، واریسی‌کننده مشخص قادر است امضاهای متعلق به خودش را به طور مستقیم واریسی کند اما سایر اشخاص برای بررسی اعتبار امضا نیاز به کمک امضا کننده یا واریسی‌کننده مشخص دارند. در این مقاله ابتدا به بازبینی طرح امضای مستقیم فاقد گواهی‌نامه پیشنهاد شده توسط یانگ پرداخته و سپس نشان می‌دهیم که این طرح، ویژگی امنیتی مهم مورد نیاز طرح‌های امضای مستقیم یعنی «نامرئی بودن» را برآورده نمی‌کند.

### ۱. پیش‌گفتار

امضای دیجیتال یکی از مهم‌ترین مفاهیم علم رمزنگاری است که ویژگی‌های مهمی همچون جامعیت، احراز هویت و انکارناپذیری را فراهم می‌کند. امضای دیجیتال با واریسی‌کننده مشخص یکی از انواع امضاهای دیجیتال است که در آن تنها واریسی‌کننده مشخص شده قادر به واریسی اعتبار امضا بر روی یک پیام است. یکی از انواع خاص امضای دیجیتال با واریسی‌کننده مشخص، امضای مستقیم نامیده می‌شود. در چنین امضاهایی، واریسی‌کننده مشخص قادر است امضاهای متعلق به خودش را به طور مستقیم واریسی کند اما سایر اشخاص برای بررسی اعتبار امضا نیاز به کمک امضا کننده یا واریسی‌کننده مشخص دارند.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 94A60; Secondary 94A62.  
واژگان کلیدی. رمزنگاری فاقد گواهی‌نامه، امضای دیجیتال، واریسی‌کننده مشخص، امضای مستقیم، تحلیل

امنیت .

\* سخنران

پس از طرح امضای مستقیم برای اولین بار توسط لیم و لی در سال ۱۹۹۲ [۱]، طرح‌های امضای مستقیم مختلفی توسط پژوهشگران در سیستم کلید عمومی سنتی ارائه شد. از آنجایی که این طرح‌ها نیازمند هزینه زیاد برای مدیریت گواهی‌نامه‌های کلید عمومی بودند، طرح‌های امضای مستقیم مبتنی بر شناسه در ادبیات موضوع ارائه شد [۲]. در ادامه نیز برای حل مشکل امان‌سپاری کلید که در سیستم‌های مبتنی بر شناسه وجود دارد، اولین طرح امضای مستقیم فاقد گواهی‌نامه توسط وان ارائه شد [۳]. اما این طرح با توجه به استفاده از زوج‌سازی دوخطی، از نظر محاسباتی ناکارآمد است. برای حل این مشکل، در سال ۲۰۲۱ گایاتری و همکاران [۴] یک طرح امضای مستقیم فاقد گواهی‌نامه بدون استفاده از زوج‌سازی دوخطی ارائه و ادعا کردند که طرح ارائه شده از امنیت لازم برخوردار است. سپس در سال ۲۰۲۲، یانگ ضمن نشان دادن اینکه طرح ارائه شده توسط گایاتری و همکاران جعل‌پذیر است، یک طرح بهبود یافته برای حل مشکل مذکور پیشنهاد کرد [۵]. در این مقاله نشان می‌دهیم که این طرح نیز ناامن بوده و یک ویژگی مهم به نام “نامرئی بودن” که مورد نیاز طرح‌های مستقیم فاقد گواهی‌نامه است را ندارد.

## ۲. مرور طرح یانگ

طرح یانگ [۵] از الگوریتم‌های زیر تشکیل شده است:

- راه‌اندازی: KGC با ورودی پارامتر امنیتی  $\lambda$ ،
  - (۱) یک گروه خم بیضوی  $G$  از مرتبه  $q$  با مولد  $P$  و مقدار تصادفی  $s \in \mathbb{Z}_q^*$  را انتخاب، مقدار  $P_{pub} = sP$  را محاسبه کرده و قرار می‌دهد  $msk = s$ .
  - (۲) توابع چکیده‌ساز  $\mathbb{Z}_q^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ :  $H_1, H_2, H_3, H_4$  را انتخاب می‌کند.
  - (۳) پارامترهای عمومی سیستم  $params = \{G, q, P, H_1, H_2, H_3, P_{pub}\}$  را منتشر کرده و  $msk$  را محرمانه نزد خود نگه می‌دارد.
- تولید کلید خصوصی جزئی: KGC با ورودی  $msk, params$  و شناسه  $ID_i$ ،
  - (۱) مقدار تصادفی  $r_i \in \mathbb{Z}_q^*$  را انتخاب کرده و  $R_i = r_i P$  را محاسبه می‌کند.
  - (۲)  $h_i = H_1(ID_i, R_i, P_{pub})$  و  $d_i = r_i + h_i s \pmod q$  را محاسبه می‌کند.
  - (۳) کلید خصوصی جزئی  $D_i = (R_i, d_i)$  را به‌طور محرمانه به کاربر ارسال می‌کند.
- تولید کلید کاربر: کاربر با ورودی  $params$ ، شناسه کاربر  $ID_i$  و  $D_i$ ،
  - (۱) مقدار تصادفی  $x_i \in \mathbb{Z}_q^*$  را انتخاب و مقدار  $X_i = x_i P$  را محاسبه می‌کند.
  - (۲)  $SK_i$  را برابر با  $(x_i, d_i)$  و  $PK_i$  را برابر با  $(X_i, R_i)$  قرار می‌دهد.
- امضا: امضاکننده با ورودی  $params, ID_s, PK_s, SK_s$  مربوط به امضاکننده و  $ID_v$  و  $PK_v$  مربوط به واریسی‌کننده مشخص و پیام  $m$ ،
  - (۱) مقادیر تصادفی  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_q^*$  را انتخاب و مقادیر زیر را محاسبه می‌کند:
 
$$U_s = t_1 P, V_s = t_2 P, W_s = U_s + t_2 X_v$$

$$h_2 = H_2(m, ID_s, ID_v, U_s, V_s, P_{pub}),$$

$$h_3 = H_3(m, ID_s, ID_v, U_s, V_s, h_2),$$

$$h_4 = H_4(m, ID_s, ID_v, U_s, V_s, PK_s, h_2),$$

$$K_s = h_2 d_s + h_3 t_2 + h_4 x_s \pmod q.$$
  - (۲)  $\sigma_s = (K_s, W_s, V_s)$  را به عنوان امضا خروجی می‌دهد.

- واریسی مستقیم: واریسی‌کننده مشخص با ورودی  $params$ ، شناسه امضاکننده  $ID_s$ ، کلید عمومی او  $PK_s$ ، شناسه واریسی‌کننده مشخص  $ID_v$ ، کلید عمومی او  $PK_v$  و کلید خصوصی او  $SK_v$ ، پیام  $m$  و امضای  $\sigma$ ،  
(۱) مقادیر زیر را محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned} y_v &= W_s - x_v V_s = U_s, \quad h_2 = H_2(m, ID_s, ID_v, y_v, V_s, P_{pub}), \\ h_3 &= H_3(m, ID_s, ID_v, y_v, V_s, h_2), \\ h_4 &= H_4(m, ID_s, ID_v, y_v, V_s, PK_s, h_2). \end{aligned}$$

- (۲) اگر رابطه زیر برقرار باشد،  $\sigma$  را می‌پذیرد و در غیر این صورت آن را رد می‌کند:

$$K_s P - (h_2(R_s + h_{1s} P_{pub}) + h_4 X_s) h_3^{-1} = V_s,$$

- واریسی عمومی: با ورودی  $params$ ، شناسه امضاکننده  $ID_s$ ، کلید عمومی او  $PK_s$ ، شناسه واریسی‌کننده مشخص  $ID_v$  و کلید عمومی او  $PK_v$ ، پیام  $m$  و امضای  $\sigma$ ،  
(۱)  $Aid = U_s = y_v$  توسط امضاکننده یا واریسی‌کننده مشخص محاسبه می‌شود.  
(۲) مقادیر زیر را محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned} h_2 &= H_2(m, ID_s, ID_v, Aid, V_s, P_{pub}), \quad h_3 = H_3(m, ID_s, ID_v, Aid, V_s, h_2), \\ h_4 &= H_4(m, ID_s, ID_v, Aid, V_s, PK_s, h_2). \end{aligned}$$

- (۳) اگر رابطه زیر برقرار باشد،  $\sigma$  را می‌پذیرد و در غیر این صورت آن را رد می‌کند:

$$K_s P - (h_2(R_s + h_{1s} P_{pub}) + h_4 X_s) h_3^{-1} = V_s$$

### ۳. تحلیل امنیتی طرح یانگ

امنیت طرح‌های رمزنگاشتی در سیستم‌های رمزنگاری فاقد گواهی‌نامه، در مقابل ۲ نوع متخاصم بررسی می‌شود:  $(I)$  متخاصم نوع اول  $(A_1)$  که به کلید خصوصی اصلی سیستم دسترسی نداشته، اما قادر است کلید عمومی هر کاربری در سیستم را به مقدار دلخواه خود تغییر دهد.  $(II)$  متخاصم نوع دوم  $(A_2)$  که کلید خصوصی اصلی سیستم را در اختیار داشته، اما قادر به تغییر کلیدهای عمومی کاربران نیست. یک طرح امضای مستقیم فاقد گواهی‌نامه را امن گوییم هرگاه ویژگی‌های جعل‌ناپذیری و نامرئی بودن را در برابر متخاصمین نوع اول و دوم تامین کند. نامرئی بودن به این معنا است که کسی بدون کمک امضاکننده یا واریسی‌کننده مشخص، قادر به واریسی امضای مربوطه نباشد. به عبارتی چنین افرادی نباید بتوانند بین یک امضای تصادفی و امضایی که توسط یک امضاکننده  $s$  برای واریسی‌کننده مشخص  $v$  صادر شده است، تمایز قائل شوند. در ادامه نشان می‌دهیم طرح امضای مستقیم فاقد گواهی‌نامه ارائه شده توسط یانگ [۵]، ویژگی مهم امنیتی موردنیاز طرح‌های امضای مستقیم یعنی «نامرئی بودن» را برآورده نمی‌کند. به طور غیررسمی، عدم تامین ویژگی نامرئی بودن در طرح یانگ به این دلیل است در این طرح، مهاجم نوع اول، که امکان دسترسی به مقدار مخفی کاربران را دارد، می‌تواند از این دسترسی استفاده کرده و مقدار  $Aid$  را محاسبه کند. با در اختیار داشتن  $Aid$ ، این مهاجم بدون نیاز به همکاری امضاکننده یا دریافت‌کننده مشخص قادر به واریسی یک امضای مستقیم ایجاد شده در طرح یانگ است. این مساله به طور رسمی در قضیه ۱۰۳ اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۳. با توجه به مدل امنیتی ارائه شده در [۴]، طرح ارائه شده توسط یانگ [۵] ویژگی نامرئی بودن را تامین نمی‌کند.

برهان. در اینجا نشان می‌دهیم که چطور  $\mathcal{A}_1$  قادر است ویژگی نامرئی بودن امضای مستقیم ایجاد شده در طرح یانگ [۵] را نقض کند. فرض کنید  $s$  یک امضاکننده با شناسه  $ID_s$  و کلید عمومی  $PK_s$ ، و  $v$  واریسی‌کننده مشخص با شناسه  $ID_v$  و کلید عمومی  $PK_v$  باشد.  $\mathcal{A}_1$  در بازی نامرئی بودن [۴] با چالشگر به صورت زیر عمل می‌کند:

•  $\mathcal{A}_1$  در فاز ۱،

(۱) شناسه‌های  $ID_s$  و  $ID_v$  را از طریق درخواست کلید عمومی به چالشگر ارسال و در پاسخ، کلیدهای عمومی  $PK_s = (X_s, R_s)$  و  $PK_v = (X_v, R_v)$  را دریافت می‌کند.

(۲) شناسه  $ID_s$  را از طریق درخواست کلید خصوصی به چالشگر ارسال و در پاسخ، مقدار مخفی  $x_s$  را دریافت می‌کند. (توجه کنید که دستیابی به مقدار مخفی متناظر با هر یک از  $s$  و  $v$  برای انجام حمله توسط  $\mathcal{A}_1$  کافی است.)

•  $\mathcal{A}_1$  در مرحله چالش، چندتایی  $(ID_s, ID_v, m)$  را از طریق درخواست امضا به چالشگر ارسال و در پاسخ،  $\sigma^* = (K_s^*, W_s^*, V_s^*)$  را دریافت می‌کند.

•  $\mathcal{A}_1$  در فاز ۲،

(۱) با استفاده از  $x_s$ ، مقدار  $Aid = W_s^* - x_s V_s^*$  را محاسبه می‌کند.

(۲) مقادیر زیر را محاسب می‌کند:

$$h_2 = H_2(m, ID_s, ID_v, Aid, V_s^*, P_{pub}),$$

$$h_3 = H_3(m, ID_s, ID_v, Aid, V_s^*, h_2),$$

$$h_4 = H_4(m, ID_s, ID_v, Aid, V_s^*, PK_s, h_2).$$

(۳) اگر رابطه زیر برقرار باشد، امضای  $\sigma^*$  یک امضای معتبر از طرف امضاکننده  $s$  برای واریسی‌کننده مشخص  $v$  و بر روی پیام  $m$  است؛ در غیر این صورت یک امضای تصادفی است:

$$K_s^* P - (h_2(R_s + h_{1s} P_{pub}) + h_4 X_s) h_3^{-1} = V_s^*.$$

□

## مراجع

1. C.H. Lim, P.J. Lee, *Modified maurer-yacobi's scheme and its applications*, Proc. Advances in Cryptology - AUSCRYPT 718 (1992), 308-323.
2. X. Sun, J. Li, G. Chen and S. Yang, *Identity-Based Directed Signature Scheme from Bilinear Pairings*, IACR Cryptol, ePrint Arch, (2008), 305.
3. Z. Wan, *Certificateless Directed Signature Scheme*, Proc 7th Int. Conf. on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing (2011), 1-4.
4. N.B. Gayathri, T. Gowri, R.R.V. Krishna Rao and P. Vasudeva Reddy, *Efficient and secure pairing-free certificateless directed signature scheme*, J. King Saud Univ. - Comput. Inform. Sci. 33 (2021), no. 2, 225-234.
5. K. Yang, *An enhanced pairing-free certificateless directed signature scheme*, PLoS One 17 (2022), no. 2, 1-16.

## تسهیم راز تصویری همراه با نهان‌نگاری

سمانه مشهدی<sup>۱</sup> \* و زهرا سعیدی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران  
smashhadi@iust.ac.ir  
zahra.saeedi74@gmail.com

چکیده. در تسهیم راز تصویری، یک تصویر مابین سهامداران مورد نظر بنحوی توزیع می‌شود که تنها تعداد مشخصی از آنها بتوانند تصویر راز را بازسازی کنند. بعلاوه میتوانیم برای عدم جلب توجه دشمنان، سهم‌های نویزگونه سهامداران را با روشهای متنوعی در تصاویر پوششی جاسازی کنیم. در این مقاله روشهایی برای تسهیم راز و نهان‌نگاری ارائه شده است.

### ۱. پیش‌گفتار

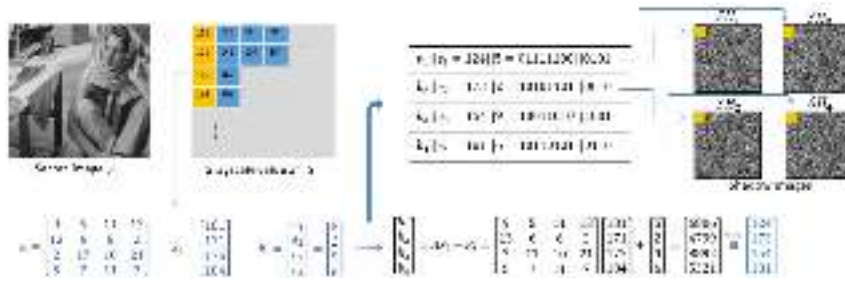
امنیت اطلاعات مهم زمانی که از طریق یک کانال ناامن مخابره می‌شود، موضوع مهمی است که نگرانی کاربران اینترنتی از حمله مهاجمان را افزایش داده است. در یک طرح تسهیم راز تصویری آستانه ای  $(t, n)$  یک تصویر راز به  $n$  سهم نویزگونه تبدیل می‌شود، بصورتیکه هر  $t$  عضو شرکت‌کننده می‌توانند راز را بازسازی کنند و هیچ  $t - 1$  یا کمتر از آنها نمیتوانند راز را بازسازی کنند. این تکنیک در مقایسه با سایر روشهای رمزنگاری مزایایی دارد، به عنوان مثال اطلاعات محرمانه فقط در اختیار یک نفر نخواهد بود، بنابراین تهدید سرقت، دستکاری یا از بین بردن اطلاعات حذف می‌شود. همچنین، می‌توان از آن برای مدیریت ذخیره سازی با فراهم کردن امکان حفظ یک راز در پایگاه داده توزیع شده استفاده کرد. تصاویر سایه نویز مانند تولید شده در این طرح‌ها احتمالاً توجه کاربران مخرب را به خود جلب می‌کند و به آن‌ها اطلاع می‌دهد که داده‌های محرمانه در حال انتقال است. علاوه بر این، مشکل تصاویر سایه نویز مانند، دستکاری تصویر

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

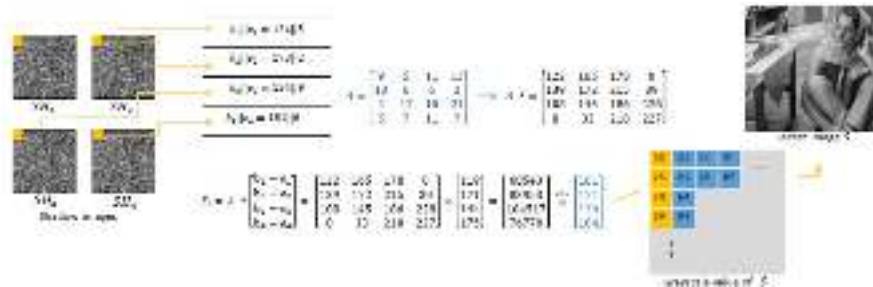
واژگان کلیدی. رمزنگاری، تسهیم راز تصویری، نهان‌نگاری، یادگیری همراه با خطا.  
\* سخنران

را برای متقلبان آسان می‌کند، احتمالاً با جایگزین کردن نویزهای اصلی با نویزهای خود برای پوشاندن دستکاری خود. روش‌های نهان نگاری و احراز هویت برای رسیدگی به این مشکلات استفاده می‌شوند [۱].

۱.۱. تسهیم راز تصویری همراه با نهان نگاری. در این مقاله یک طرح تسهیم راز تصویری بر اساس مسئله یادگیری همراه با خطا (LWE) پیشنهاد می‌شود. در این روش یک بردار خطای کوچک به دستگاه معادلات افزوده می‌شود. جزئیات مراحل تسهیم و بازسازی راز با یک مثال در شکل‌های ۱ و ۳ شرح داده شده است.



شکل ۱: مرحله تسهیم راز



شکل ۲: مرحله بازسازی راز

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \pmod q \quad (1.1)$$

همچنین ما در مقالات خود با استفاده از مفاهیمی ترکیبیاتی مانند چندجمله ای رخ، چندجمله ای ژوزف و سایر روشهای ریاضی، نهان نگاری های جدیدی برای جاسازی سهم های نوزگونه در تصاویر پوششی پیشنهاد دادیم، که خوانندگان علاقمند میتوانند به مراجع [۲، ۳، ۴] مراجعه

نمایند. برخی از آنها در حوزه مکانی و برخی دیگر با استفاده از تبدیلات حوزه بسامد و تبدیل موجک صحیح (IWT) هستند. در برخی از روشها علاوه بر اینکه تصویر راز با کیفیت بالایی بازسازی می‌شود، تصویر پوششی هم با همان کیفیت اولیه بدست می‌آیند و می‌توان از این نهان‌نگاری‌های برگشت پذیر برای کاربردهای امنیتی و پزشکی استفاده کرد. یکی از روشهای نهان‌نگاری با استفاده از چندجمله‌ای رخ برای مثال گذشته در شکل ۳ شرح داده شده است.

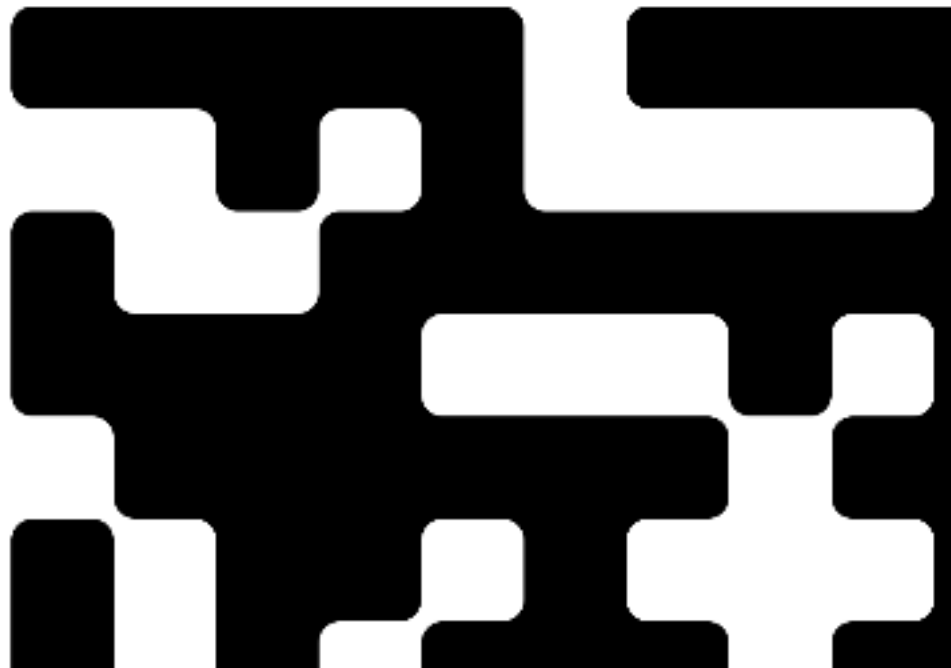
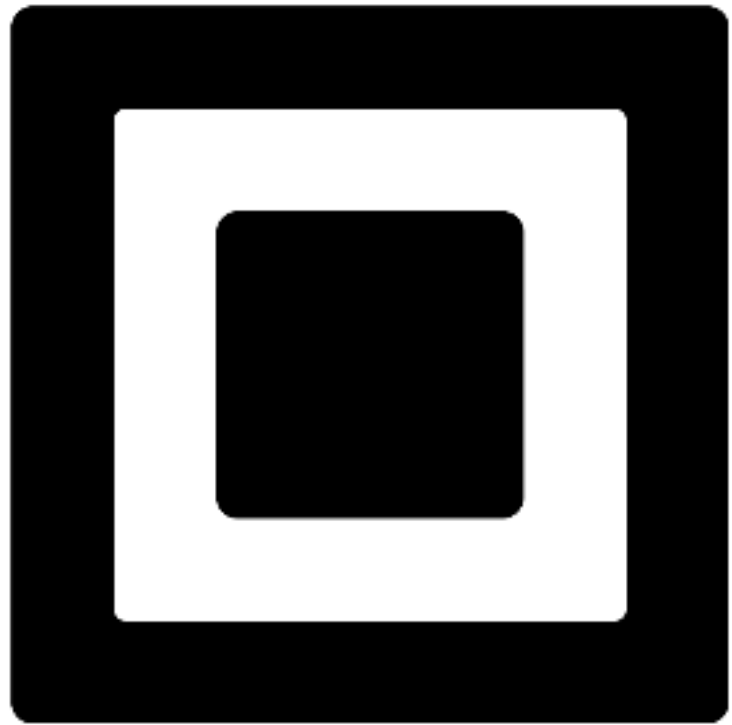
## ۲. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک طرح تسهیم راز تصویری بر اساس LWE همراه با نهان‌نگاری پیشنهاد کردیم. براساس نتایج پیاده‌سازی، کیفیت تصویر پوششی بعد از جاسازی سهم نوزگونه بدون تغییر است. همچنین این روش ظرفیت جاسازی بالایی دارد.

## مراجع

1. Ch.Ch. Chen and Y.H. Tsai, *An Expandable Essential Secret Image Sharing Structure*, J. Inf. Hiding Multim, Signal Process 7 (2016), no. 1, 135-144.
2. Z. Saeidi, A. Yazdi, S. Mashhadi, M. Hadian and A. Gutub, *High performance image steganography integrating IWT and Hamming code within secret sharing*, IET Image Processing 18 (2024), no. 1, 129-139.
3. Z. Saeidi and S. Mashhadi, *Two meaningful secret image sharing schemes based on integer wavelet transform and LWE*, Computational and Applied Mathematics 43 (2024), no. 3, 149.
4. S. Mashhadi and Z Saeedi, *A  $(t, n)$ -Secret image sharing with steganography based on Rook polynomial and LWE problem*, Multimedia Tools and Applications 82 (2023), no. 25, 39077-39097.

سمانه مشهدی و زهراسعدی



# کنترل و بیهنه سازی

## بررسی توافق پیشرو- دنباله‌رو مکان و سرعت سیستم‌های چندعامله با دینامیک‌های مرتبه دوم

آرش جدائی<sup>۱</sup>\* و محمدرضا نیکنام<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
*jodaei56@pnu.ac.ir*

<sup>۲</sup> گروه علوم پایه، واحد خلخال، دانشگاه آزاد اسلامی، خلخال، ایران  
*Rezanik82@yahoo.com*

چکیده. در این مقاله، طراحی کنترل‌کننده برای مسئله توافق پیشرو- دنباله‌رو یک سیستم چندعامله مرتبه دوم با دینامیک‌های یکسان، گراف ارتباطی جهت دار و ثابت مطالعه می‌شود. برای طراحی کنترل‌کننده از قضیه پایداری لیاپانوف، نظریه گراف و نامساوی خطی ماتریسی استفاده شده و دو کنترل‌کننده برای کنترل مکان و سرعت عامل‌های دنباله‌رو پیشنهاد می‌شود.

### ۱. پیش‌گفتار

یک سیستم چندعامله با  $N$  عامل دنباله‌رو و یک عامل پیشرو با دینامیک‌های زیر مفروض هستند. عامل‌های دنباله‌رو با اندیس‌های  $1, 2, \dots, N$  و عامل پیشرو را با اندیس  $0$  در نظر می‌گیریم. دینامیک‌های عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) + B u_{ix}(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_{iv}(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = v_0(t), \\ \dot{v}_0(t) = a_0(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

که در آن  $a_0 \in \mathbb{R}^m$  و  $v_0 \in \mathbb{R}^m$ ،  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ ،  $u_{iv} \in \mathbb{R}^m$ ،  $u_{ix} \in \mathbb{R}^m$ ،  $v_i \in \mathbb{R}^m$ ،  $x_i \in \mathbb{R}^m$  بردارهای مکان، سرعت، کنترل مکان، کنترل سرعت عامل دنباله‌رو  $i$ ام، بردار مکان، بردار

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 93C40; Secondary 93C10.

واژگان کلیدی. سیستم‌های چندعامله، توافق، پیشرو، دنباله‌رو.

\* سخنران

سرعت و بردار شتاب عامل پیشرو هستند. در این سیستم چندعامله، عامل‌های دنباله‌رو را طوری کنترل می‌کنیم که از نظر مکان و سرعت عامل پیشرو را ردیابی کنند. به این مسئله، توافق پیشرو- دنباله گویند. به عبارت دیگر برای هر عامل دنباله‌رو و هر شرط اولیه متناظر آن عامل باید روابط زیر برقرار باشند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_o(t)\| = 0 \quad \forall x_i(t_o) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_o(t)\| = 0 \quad \forall v_i(t_o) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.1)$$

### تعاریف :

ماتریس  $A$  را پایدار مثبت گویند هرگاه تمام مقادیر ویژه آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشند. در یک گراف جهت دار اگر از هر عامل دنباله رو حداقل یک مسیر به عامل پیشرو موجود باشد آنگاه عامل پیشرو را بطور کلی دستیافتنی گویند.

برای ماتریس حقیقی و متقارن  $A$ ،  $A > 0$  یعنی ماتریس  $A$  معین مثبت می‌باشد. مجموعه  $\{v_j \in V, (v_j, v_i) \in E, i \neq j\}$  را مجموعه راس‌های مجاور راس  $i$  گویند. علامت  $\otimes$  نماد ضرب کرونیکر می‌باشد و 1 نشانگر بردار شامل مولفه‌های یک با بعد مناسب است.

ماتریس  $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$  را ماتریس مجاورت گراف گویند هرگاه  $a_{ii} = 0$  و  $a_{ij} \geq 0$ .  $a_{ij} > 0$  اگر حداقل یک یال از راس  $j$  به راس  $i$  موجود باشد.

ماتریس  $L = (L_{ij}) \in R^{N \times N}$  را ماتریس لاپلاسیان گراف گویند هرگاه  $L_{ij} = -a_{ij}$ ،  $i \neq j$  و  $L_{ii} = \sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}$ .

ماتریس  $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$  را ماتریس مجاورت عامل پیشرو گویند.  $b_i > 0$  هرگاه عامل پیشرو یک عامل مجاور عامل  $i$  باشد، در غیر این صورت  $b_i = 0$ .

لم ۱.۱. برای ماتریس بلوکی  $\Phi$  با زیرماتریس‌های متقارن  $R$  و  $Q$  و زیرماتریس  $S$  با بعد مناسب، عبارات زیر معادل هستند [۱]:

$$\Phi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \quad .1$$

$$R > 0 \quad \text{و} \quad Q - SR^{-1}S^T > 0 \quad .2$$

لم ۲.۱. در یک گراف جهت دار، عامل پیشرو بطور کلی دستیافتنی است اگر و فقط اگر ماتریس  $L+B$  پایدار مثبت باشد. لذا اگر عامل پیشرو بطور کلی دستیافتنی باشد آنگاه ماتریس معین مثبت  $P \in R^{N \times N}$  وجود دارد بطوریکه رابطه  $P(L+B) + (L+B)^T P = I_N$  برقرار است [۲].

دو کنترل‌کننده برای کنترل مکان و سرعت عامل‌های دنباله رو جهت رسیدن به توافق پیشرو- دنباله رو بصورت زیر طراحی می‌شوند:

$$u_{ix}(t) = -\alpha \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) + b_i (x_i(t) - x_o(t)) \right], \quad (5.1)$$

$$u_{iv}(t) = a_o(t) - \beta \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_i(t) - v_j(t)) + b_i (v_i(t) - v_o(t)) \right], \quad (6.1)$$

توافق پیشرو- دنباله‌رو مکان و سرعت

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$\alpha$  و  $\beta$  پارامترهای اتصالی می‌باشند که اعدادی مثبت هستند. این پارامترها چنان طراحی می‌شوند تا عامل‌های دنباله‌رو عامل پیشرو را از نظر مکان و سرعت ردیابی کنند. با جایگذاری کنترل‌کننده‌های (۵.۱) و (۶.۱) در رابطه (۱.۱) معادلات حالت و سرعت عامل‌های دنباله‌رو بصورت زیر می‌باشند:

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t) - \alpha \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) + b_i (x_i(t) - x_o(t)) \right], \quad (7.1)$$

$$\dot{v}_i(t) = a_o(t) - \beta \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_i(t) - v_j(t)) + b_i (v_i(t) - v_o(t)) \right], \quad (8.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

با فرض  $v(t) = [v^T_1(t), \dots, v^T_N(t)]^T$  و  $x(t) = [x^T_1(t), \dots, x^T_N(t)]^T$  روابط (۷.۱) و (۸.۱) بصورت‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$\dot{x}(t) = v(t) - \alpha (L + B) \otimes I_m x(t) + \alpha B1 \otimes x_o(t), \quad (9.1)$$

$$\dot{v}(t) = 1 \otimes a_o(t) - \beta (L + B) \otimes I_m v(t) + \beta B1 \otimes v_o(t). \quad (10.1)$$

با فرض  $\bar{x}(t) = x(t) - 1 \otimes x_o(t)$  و  $\bar{v}(t) = v(t) - 1 \otimes v_o(t)$  روابط (۹.۱) و (۱۰.۱) بصورت‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$\dot{\bar{x}}(t) = -\alpha (L + B) \otimes I_m \bar{x}(t) + \bar{v}(t), \quad (11.1)$$

$$\dot{\bar{v}}(t) = -\beta (L + B) \otimes I_m \bar{v}(t). \quad (12.1)$$

با فرض  $e(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{v}(t) \end{pmatrix}$  و  $F = \begin{pmatrix} -\alpha(L+B) & I_N \\ \circ & -\beta(L+B) \end{pmatrix} \otimes I_m$  از روابط (۱۱.۱) و (۱۲.۱) رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\dot{e}(t) = Fe(t). \quad (13.1)$$

بنابراین حل مسئله توافق پیشرو- دنباله‌رو معادل اثبات پایداری مجانبی سیستم خطای (۱۳.۱) در مبدا است.

**قضیه ۳.۱.** اگر سیستم چند عامله با گراف ارتباطی ثابت و جهت دار شامل  $N$  عامل دنباله‌رو و یک عامل پیشرو به ترتیب با دینامیک‌های (۱.۱) و (۲.۱) باشد و عامل پیشرو بطور کلی دست‌یافتنی بوده و شرط  $\alpha\beta I_N - P^2 > \circ$  نیز برقرار باشد آنگاه، عامل‌ها در سیستم چند عامله تحت کنترل‌کننده‌های (۵.۱) و (۶.۱) می‌توانند به توافق پیشرو- دنباله‌رو برسند.

برهان. ثابت می‌کنیم سیستم (۱۳.۱) در مبدا پایدار مجانبی است. تابع لیاپانوف  $\Delta e(t)$  را به صورت

را با فرض ماتریس معین مثبت  $\Delta = \begin{pmatrix} P & \circ \\ \circ & P \end{pmatrix} \otimes I_m$  برای سیستم خطای (۱۳.۱) در

آ. جدائی و م.ر. نیکنام

نظر می‌گیریم (ماتریس  $P$  در لم ۲.۱ تعریف شده است). با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف نسبت به زمان نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T(t) (\Delta F + F^T \Delta) e(t) \\ &= e^T(t) \begin{pmatrix} -\alpha [P(L+B) + (L+B)^T P] & P \\ P & -\beta [P(L+B) + (L+B)^T P] \end{pmatrix} \\ &\quad \otimes I_m e(t) = -e^T(t) \left[ \begin{pmatrix} \alpha I_N & -P \\ -P & \beta I_N \end{pmatrix} \otimes I_m \right] e(t) \end{aligned} \quad (14.1)$$

از فرض  $\alpha \beta I_N - P^2 > 0$  روابط  $\alpha I_N - P(\beta I_N)^{-1} P^T > 0$  و  $\beta I_N - P(\alpha I_N)^{-1} P^T > 0$  حاصل می‌شوند. با استفاده از لم ۱.۱ نتیجه می‌شود که ماتریس  $(\Delta F + F^T \Delta)$  معین مثبت بوده و لذا ماتریس  $(\Delta F + F^T \Delta)$  معین نامنفی است. از رابطه (۱۴.۱) نتیجه می‌شود که  $\dot{V}(t) < 0$  پس سیستم (۱۳.۱) در مبدا پایدار مجانبی بوده و  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ ، در نتیجه عامل‌ها در سیستم چندعامله به توافق پیشرو-دنباله‌رو می‌رسند.  $\square$

## ۲. دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله مسئله توافق پیشرو-دنباله‌رو برای یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های یکسان، مرتبه دوم و گراف ارتباطی ثابت بررسی شده است. دو کنترل‌کننده هرکدام شامل یک پارامتر برای کنترل مکان و کنترل سرعت عامل‌های دنباله‌رو جهت رسیدن به توافق پیشرو-دنباله‌رو ارائه شدند. با بکارگیری پارامترهای مناسب ثابت شد که این دو کنترل‌کننده باعث ایجاد توافق پیشرو-دنباله‌رو در سیستم عامله گردیدند.

## مراجع

1. W. Hou, M.Y. Fu and H. Zhang, *Consensusability of linear multi-agent systems with time delay*, International Journal of Robust and Nonlinear Control. 26 (2016), no. 12, 2529–2541.
2. J. Hu and Y. Hong, *Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays*, Physica A. (2007), 853–863.

# گراف و ترکیبیات

## پیش‌بینی ترافیک با شبکه‌های پیچشی گراف مبتنی بر یادگیری

محمود امین‌طوسی<sup>۱,۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
<sup>۲</sup> دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری  
*m.amintoosi@{um.ac.ir,hsu.ac.ir}*

چکیده. پیش‌بینی ترافیک نقش مهمی در سیستم‌های هوشمند کنترل ترافیک شهری دارد. در تحقیقات اخیر، کارائی شبکه‌های عصبی گرافی در این حوزه نشان داده شده است. عموماً در این حوزه از یک شبکه‌ی پیچشی گراف برای مشخص کردن وابستگی مکانی معابر شهری و از یک شبکه‌ی عصبی بازگشتی برای مدلسازی زمانی ترافیک شهری استفاده می‌شود. تاکنون گراف مشخص‌کننده‌ی وابستگی مکانی معابر شهری بر اساس اطلاعات شهری و مجاورت فیزیکی معابر تعیین می‌شده است. در این مقاله از یکی از روشهای یادگیری ساختارگرافهای جهت‌دار بدون دور برای تخمین ماتریس مجاورتی معابر شهری بر اساس داده‌های ترافیکی استفاده شده است. آزمایشات انجام شده کاهش حدود چهار درصدی خطا بر اساس شیوهی پیشنهادی، نسبت به استفاده از گراف مجاورت مبتنی بر فواصل واقعی را نشان داده است.

### ۱. پیش‌گفتار

در سالیان اخیر مسأله‌ی پیش‌بینی ترافیک در سامانه‌های هوشمند حمل و نقل شهری، توجه زیادی را به خود جلب کرده است. در حوزه مدیریت ترافیک و حمل و نقل هوشمند و ابزارهایی نظیر نشان، بلد، ویز و اسنپ، پیش‌بینی دقیق ترافیک در کاهش ترافیک و افزایش کارایی شبکه حمل و نقل مؤثر است. پیش‌بینی ترافیک شامل تحلیل شرایط ترافیک از جمله جریان، سرعت، استخراج الگوهای ترافیکی و پیش‌بینی روندهای ترافیک در معابر شهری است. به دلیل وابستگی‌های پیچیده فضایی و زمانی در مسأله پیش‌بینی ترافیک، حل این مسأله، دشوار محسوب می‌شود و همچنان موضوع بسیاری از تحقیقات روز هست. وابستگی مکانی در این

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 05C75; Secondary 68R10

واژگان کلیدی. شبکه پیچشی گراف، پیش‌بینی ترافیک، یادگیری ساختارگراف، یادگیری عمیق.  
\* سخنران

مسأله ناشی از آن است که تغییر در حجم ترافیک تحت تأثیر ساختار توپولوژیک شبکه معابر شهری است؛ وضعیت ترافیک در معابر پایین دست، تحت تأثیر حجم ترافیک نقاط بالادستی در شبکه‌ی معابر شهری قرار دارد و وضعیت ترافیک در معابر بالادست نیز تحت تأثیر بازخورد از نقاط پایین دستی قرار می‌گیرد. همچنین حجم ترافیک به صورت پویا با گذشت زمان تغییر کرده و تحت تأثیر شرایط ترافیکی دوره‌های زمانی کوتاه مدت و بلندمدت قرار می‌گیرد که نشان دهنده‌ی وابستگی زمانی داده‌های ترافیکی است. روش‌های متعدد پیش‌بینی ترافیک همانند شبکه‌های عصبی، راهکارهای آماری و بیزی وجود دارند که عموم آنها تغییر پویای وضعیت ترافیک در گذر زمان را در نظر می‌گیرند، اما وابستگی مکانی را نادیده می‌گیرند [۴]. لذا با این روشها نمی‌توان وضعیت داده‌های ترافیکی را به دقت پیش‌بینی کرد. برای توصیف ویژگی‌های مکانی، برخی مطالعات مانند [۵، ۶] از گراف استفاده کرده‌اند. در [۷] شبکه‌ی پیچشی گراف زمانی (T-GCN) برای پیش‌بینی ترافیک معرفی شده است. این شیوه، ترکیبی از شبکه‌ی پیچشی گرافی و واحد بازگشتی دروازه‌ای است. شبکه‌ی پیچشی گرافی برای یادگیری روابط مکانی (فضایی) و واحد بازگشتی دروازه‌ای برای یادگیری وابستگی‌های زمانی استفاده می‌شود. مدل ترکیبی این دو که در [۷] ارائه شده، هم داده‌های مکانی و هم داده‌های زمانی را می‌تواند لحاظ نموده و در پیش‌بینی ترافیک معابر شهری نتایج بهتری نسبت به بسیاری از روشهای مطرح در این حوزه به دست داده است. در روشهایی که از گراف برای نمایش وابستگی مکانی معابر شهری استفاده شده است، گراف شبکه، بر اساس فاصله‌ی معبرها ساخته می‌شود. در بخش شبکه‌ی پیچشی گراف مقاله فوق‌الذکر، ماتریس مجاورتی گراف معابر بر اساس مجاور بودن یا نبودن معابر شهری ساخته شده است. ایده‌ی نوشتار حاضر آن است که گراف مسأله بر اساس داده‌های ترافیکی ساخته شود. یعنی اگر مطابق داده‌ها، ترافیک معبر الف بر ترافیک آینده‌ی معبر ب، تأثیرگذار بوده است، حتی اگر این دو معبر به لحاظ مکانی در شبکه‌ی شهری مجاور هم نیستند، در گراف مسأله، مجاور قلمداد شوند و اگر دو معبر در گراف شبکه‌ی شهری مجاور هستند اما در داده‌های ترافیکی تأثیر چندانی بر هم نداشته‌اند، در گراف مورد استفاده، مجاور محسوب نشوند. ایده‌ی استفاده از داده‌ها برای کشف وابستگی‌های بین داده‌ها جدید نیست و در واقع کارایی شبکه‌های عصبی پیچشی در حوزه‌ی پردازش تصاویر و بینایی ماشین بر اساس همین ایده است. در حوزه‌ی گراف‌ها هم این ایده مدتی است که با نام «یادگیری ساختار گراف» وارد زمینه‌های تحقیقاتی گراف شده است [۲]. در ادامه به صورت مختصر به یکی از روشهای یادگیری ساختار گراف اشاره خواهد شد و سپس نتایج استفاده از گراف یادگرفته شده به جای گراف پیش فرض در روش T-GCN [۷] ذکر خواهد شد.

## ۲. یادگیری ساختار گراف

روش‌های متعددی برای یادگیری ساختار گراف پیشنهاد شده است. در [۸] به این مسأله در حوزه‌ی گراف‌های جهت‌دار بدون دور پرداخته شده و تابع هدفی مشتق‌پذیر تعریف کرده‌اند که فاقد دور بودن گراف نتیجه را تضمین می‌کند. در مسأله‌ی پیش‌بینی ترافیک و من جمله در روش [۷]، گراف جهت‌داری داریم که در بعد زمان، بدون دور است.

<sup>1</sup>Temporal Graph Convolutional Network (T-GCN)

در بخش شبکه پیچشی گراف روش T-GCN، یک شبکه پیچشی گرافی دو لایه به صورت  $f(X, A) = \sigma(\hat{A}\sigma(\hat{A}XW_0)W_1)$  بیان می‌شود، که در آن  $X$  نمایش دهنده ویژگی‌های ترافیکی معابر،  $A$  ماتریس مجاورتی گراف معابر شهری،  $\hat{A} = \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}\tilde{A}\tilde{D}^{-\frac{1}{2}}$  مشخص کننده پردازش موردنیاز در مدل شبکه‌های عصبی گراف پایه،  $\tilde{A} = A + I_N$ ، ماتریس مجاورتی است که طوقه‌ها به آن افزوده شده است،  $\tilde{D}$  ماتریس درجه‌ی رئوس،  $\tilde{D} = \sum_j \tilde{A}_{ij}$  و  $W_0$  و  $W_1$  بیانگر ماتریس وزنهای بین دو لایه‌ی اول و دوم و  $\sigma(\cdot)$  تابع فعالیت شبکه عصبی است. عموماً ماتریس  $A$  بر اساس موقعیت مکانی معابر شهری حاصل می‌شود. در [۸] برای تخمین ماتریس مجاورتی گراف بدون دور با استفاده از داده‌های ترافیکی یک روش بدیع پیشنهاد شده است. این مسأله که به آن یادگیری ساختار گراف گفته می‌شود، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی ترکیبیاتی است که در مرجع فوق‌الذکر، تابع هدفی مشتق‌پذیر برای مسأله بیان شده است که با استفاده از روش‌های معمول بهینه‌سازی همچون روش‌های شبه نیوتن قابل حل هست. در این شیوه، مسأله بهینه‌سازی ترکیبیاتی گسسته (سمت چپ) به مسأله سمت راست - در فضای پیوسته - تبدیل شده است:

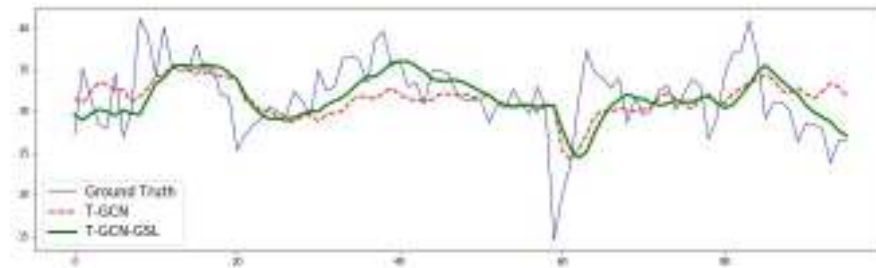
$$\begin{aligned} \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} F(W) & \iff \min_{W \in \mathbb{R}^{d \times d}} F(W) \\ \text{subject to } G(W) \in \text{DAGs} & \text{subject to } h(W) = 0, \end{aligned}$$

که در آن  $G(W)$  یک گراف با  $d$  رأس است که بر اساس ماتریس مجاورت وزندار  $W$  ایجاد می‌شود،  $F: \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$  تابع هزینه، و  $h: \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع هموار بر روی ماتریس‌های حقیقی مقدار است که برای گراف‌های بدون دور، صفر است. قضیه‌ی زیر این موضوع را نشان می‌دهد.

**قضیه ۱.۲.** [۸] ماتریس  $W \in \mathbb{R}^{d \times d}$  نمایش دهنده‌ی یک گراف بدون جهت فاقد دور است اگر و فقط اگر  $h(W) = \text{tr}(e^{W \circ W}) - d = 0$  که در آن  $\circ$  ضرب درایه‌ای (هادامار) است و مشتق  $h(W)$  به صورت  $\nabla h(W) = (e^{W \circ W})^T \circ 2W$  بوده و شروط لازم برای آنکه  $W$  ماتریس مجاورت یک گراف بدون جهت فاقد دور باشد را دارا می‌باشد.

### ۳. دستاوردهای پژوهش

همان‌گونه که ذکر شد، ایده‌ی اصلی این نوشتار، استحصال ماتریس مجاورت گراف شبکه‌ی معابر شهری بر اساس داده‌های ترافیکی شبکه است. بر این اساس و با یک روش یادگیری ساختار گراف، ماتریس مجاورتی از روی داده‌های ترافیکی برآورد شده و در بخش شبکه‌ی پیچشی گراف مدل پیش‌بینی بکار گرفته شد. برای داده‌های ترافیکی، از مجموعه دادگان تاکسی‌های شهر شنزن چین استفاده شده است. این مجموعه داده از ۱۵۶ معبر شهر تشکیل شده است که داده‌های ترافیکی در ماه ژانویه سال ۲۰۱۵ میلادی و هر ۱۵ دقیقه برداشت شده است. همچنین ماتریس مجاورت گراف شبکه معابر شهری در قالب یک ماتریس با مقادیر صفر و یک در مجموعه دادگان وجود دارد. در این مقاله از داده‌های ۲۰ روز آخر ماه استفاده شده که ۱۶ روز آن برای آموزش ساختار گراف و مدل پیش‌بینی مورد استفاده قرار گرفته و ۴ روز آن برای آزمون (تست) در نظر گرفته شده است. روش ارائه شده در این مقاله با روش پایه‌ی T-GCN - استفاده از ماتریس مجاورتی همراه با مجموعه دادگان - مورد مقایسه قرار گرفته است. روش پیشنهادی T-GCN - GSL نامیده شده است. خطای تخمین روش پایه بر روی داده‌های آزمون ۷۳٪ بوده است که با



شکل ۱: مقایسه‌ی روش پایه و روش پیشنهادی در پیش‌بینی ترافیک. داده‌های اصلی با رنگ آبی نمایش داده شده است. روش پیشنهادی با رنگ سبز، تقریب بهتری به دست داده است.

روش پیشنهادی به ۰/۰۷ رسیده است که نشان دهنده‌ی حدود ۴ درصد کاهش خطا هست. برنامه در پایتون و با استفاده از کتابخانه یادگیری عمیق تنسورفلو اجرا شده و زمان اجرای آن در یک دستگاه با پردازنده مرکزی Core i7, 7700 و کارت گرافیک GeForce 1050 حدود نیم ساعت بوده است. شکل ۱ نتیجه پیش‌بینی ترافیک برای اولین معبر در اولین روز از داده‌های آزمون را نشان می‌دهد. تخمین بهتر شیوه‌ی پیشنهادی در نمودار مشخص هست. شیوه‌ی پیشنهادی در این مقاله می‌تواند در سایر شبکه‌ها مانند سیستم اشتراک دوچرخه، و شبکه‌های آب، برق و گاز مورد استفاده قرار گیرد.

### مراجع

1. M. Akhtar, and S. Moridpour, *A review of traffic congestion prediction using artificial intelligence*, J. Adv. Transp. 2021 (2021) no.1, 8878011.
2. K. Bello, B. Aragam, and P. Ravikumar, *DAGMA: learning DAGs via M-matrices and a log-determinant acyclicity characterization*, Adv. Neural Inf. Process. Syst. 35 (2022) 8226–8239.
3. S. Fan, S. Zhang, X. Wang, and C. Shi, *Directed acyclic graph structure learning from dynamic graphs*, In Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, 37 (2023) no. 6, 7512–7521.
4. M. Shaygan, C. Meese, W. Li, X.G. Zhao, and M. Nejad, *Traffic prediction using artificial intelligence: Review of recent advances and emerging opportunities*, Transp. Res. Part C Emerg. 145 (2022) 103921.
5. P. Xie, T. Li, J. Liu, S. Du, X. Yang, and J. Zhang, *Urban flow prediction from spatiotemporal data using machine learning: A survey*, Inform. Fusion 59 (2020) 1–12.
6. J. Ye, J. Zhao, K. Ye, and C. Xu, *How to build a graph-based deep learning architecture in traffic domain: A survey*, IEEE Trans. Intell. Transp. Syst. 2020.
7. L. Zhao, Y. Song, C. Zhang, Y. Liu, P. Wang, T. Lin, M. Deng, and H. Li, *T-GCN: A temporal graph convolutional network for traffic prediction*, IEEE Trans. Intel. Transp. Syst. 21 (2019) no.9, 3848–3858.
8. X. Zheng, B. Aragam, P.K. Ravikumar, and E.P. Xing, *Dags with no tears: Continuous optimization for structure learning*, Adv. Neural Inf. Process. Syst. 31 (2018).

## پارامتر همبستگی مینیمم گراف $G$

بهزاد صالحیان متی کلایی<sup>۱</sup>\*

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان  
 bsalehian@du.ac.ir

چکیده. آسیب پذیری یک شبکه ارتباطی ترکیبی از بررسی گره ها و پیوند های ارتباطی است که برای طراحی شبکه بسیار مهم است. وقتی شبکه ای شروع به از دست دادن پیوند ها یا گره هایی می کند، مؤثر بودن خود را از دست می دهد. طبیعتاً گره ها یا پیوندهای جدیدی باید اضافه شوند تا شبکه تعمیر شود. این کوششی است برای این که شبکه، مؤثر بودن خود را به دست آورد. لذا شبکه های ارتباطی باید، نه تنها نسبت به از هم پاشیدگی اولیه بلکه نسبت به احتمال تعمیر مجدد شبکه، تا حد امکان پایدار ساخته شوند. پارامتر همبستگی یکی از ابزارهای مهمی است که برای بررسی میزان آسیب دیدگی و پایداری شبکه در برابر خرابکاری به کار می رود.

### ۱. پیشگفتار

تجزیه و تحلیل آسیب پذیری در گرافها به سؤالاتی در باره چگونگی همبندی گرافها منجر می شود. اگر گراف را به صورت یک شبکه در نظر بگیریم زمانی که ایستگاههایی از کار می افتند، آسیب پذیری مقاومت یک شبکه را در برابر از هم پاشیدگی آن اندازه می گیرد. پارامترهای نظری بسیاری مورد استفاده قرار گرفته اند تا آسیب پذیری را در شبکه های ارتباطی نشان دهند. بعضی از این ها با دو سؤال اصلی درباره گرافی که در نهایت به دست می آید مواجهند:

الف) چند ایستگاه هنوز با یکدیگر ارتباط دارند؟

ب) مشکلات وصل مجدد شبکه آسیب دیده تا چه اندازه است؟

برای پاسخ به پرسشهای فوق پارامتر همبستگی، که خود تلفیقی از دو پارامتر دیگر برای اندازه گیری

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 05C78; Secondary 05A19; 05C30, 05C20.

واژگان کلیدی. آسیب پذیری، مجموعه برشی، همبستگی، عدد استقلال، همبندی.  
 \* سخنران

ب. صالحیان

آسیب پذیری شبکه ها، یعنی پارامتر بی نقصی و پارامتر محکمی ساخته شده است. همبستگی اولین بار در مقالات [۱، ۲] معرفی و سپس توسط دیگران تعمیم داده شد. همبستگی گراف به صورت زیر تعریف می شود.

$$T(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S| + m(G-S)}{\omega(G-S)} : \omega(G-S) > 1 \right\}$$

که در آن  $m(G-S)$  اندازه تعداد راسهای بزرگترین مولفه باقی مانده و  $\omega(G-S)$  تعداد مولفه ها در زیرگراف القایی  $G-S$  است. مینیمم هم روی تمام زیر مجموعه های برشی  $S$  از گراف  $G$  محاسبه می شود. زیر مجموعه  $S \subseteq V(G)$  را یک  $T$ -مجموعه می گوئیم هرگاه

$$.T(G) = \frac{|S| + m(G-S)}{\omega(G-S)}$$

در اینجا برخی از روابط مهم بین پارامتر همبستگی و سایر پارامترهای اندازه گیری را برای گراف  $G$  ذکر می کنیم.

۲. پارامتر همبستگی و برخی از ویژگیهای آن

لم ۱.۲. [۱] برای هر گراف  $G$ ، داریم  $T(G) \geq \frac{\kappa(G) + 1}{\alpha(G)}$  که در آن  $\alpha(G)$  عدد استقلال  $G$  است.

در لم بعدی، علاوه بر نشان دادن رابطه بین پارامتر همبستگی و عدد استقلال، کران بالایی مناسبی را هم برای عدد همبستگی گراف  $G$  ارائه می شود.

لم ۲.۲. [۱] اگر  $G$  یک گراف کامل نباشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$T(G) \leq \frac{n - \alpha(G) + 1}{\alpha(G)}$$

لم ۳.۲. اگر  $m \leq n$ ، آنگاه  $T(K_{m,n}) = \frac{m+1}{n}$

قضیه ۴.۲. اگر  $G$  همبند و غیرکامل بوده، اما شامل زیرگراف  $K_{1,3}$  نباشد، آنگاه  $T(G) > \frac{\kappa(G)}{2}$ .

با توجه به این که پارامتر همبستگی را می توان برای بررسی پارامترهای توپولوژیکی گرافها به کاربرد، قضیه بعدی می تواند در این مورد به ما کمک کند.

قضیه ۵.۲. فرض کنید  $G$  گرافی همبند غیرکامل از مرتبه  $n$  باشد. در این صورت

$$.T(G) \geq \frac{1 + \delta(G)}{n - \delta(G)}$$

که در آن  $\delta(G)$  درجه مینیمم است.

چون در هر گراف  $\kappa(G) \leq \delta(G)$ ، فوراً نتیجه زیر حاصل می شود.

### همبستگی گراف

**نتیجه ۶.۲.** فرض کنید،  $G$  گرافی همبند و غیرکامل از مرتبه  $n$  باشد. در این صورت:  $T(G) \geq \frac{1+\kappa(G)}{n-\kappa(G)}$

در این جا، می خواهیم مقادیر مرزی کمترین و بیشترین مقداری که پارامتر همبستگی یک گراف از مرتبه و اندازه مفروض می تواند داشته باشد را مشخص کنیم. بدیهی است که تعیین مقدار دقیق این پارامترها برای همه گرافها یک مساله سخت است.

۳. کمترین مقدار پارامتر همبستگی در گرافها

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید  $n$  و  $m$  با فرض  $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2} - 1$  مفروض باشند. در این صورت بین، تمامی گرافهای همبند از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$ ، کمترین مقدار پارامتر همبستگی عدد  $\frac{k+1}{n-k}$  است، که در آن  $k$  عددی است که در نامساوی زیر صدق می کند.

$$\binom{k}{2} + (n-k)(k-1) < m \leq \binom{k}{2} + (n-k)k$$

برهان. فرض کنید،  $G$  گرافی همبند از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$  باشد که کمترین مقدار همبستگی را دارد. فرض کنید،  $X$  برش راسی از  $G$  باشد که  $T(G) = \frac{|X|+m(G-X)}{\omega(G)}$  است. فرض کنید، مجموعه  $X$  چنان انتخاب شده است که  $|X|$  بزرگترین مقدار ممکنه را دارد. فرض کنیم مولفه هایی  $G-X$  که حداقل دو راس دارند برابر با  $G_1, G_2, \dots, G_p$  باشند. فرض کنید که  $p \geq 2$ . راس  $u_i$  را در  $G_i$  طوری انتخاب می کنیم که  $u_i$  همجوار با حداقل یک راس در  $X$  باشد که در آن  $1 \leq i \leq p$  است. به ازای هر  $i$  که در آن  $1 \leq i \leq p-1$  این جابجایی را انجام می دهیم، که به جای هر یال  $u_i v$  در  $G_i$  یال جدید  $u_p v$  را جایگزین می کنیم. در این صورت، گراف جدید را  $G^1$  می نامیم. در این صورت گراف  $G^1$  هم یگ گراف همبند از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$  است. به طوری که زیر مجموعه  $X^1 = X \cup \{u_p\}$  یک برش راسی گراف  $G^1$  است و برای آن داریم:

$$\omega(G^1 - X^1) \geq \omega(G - X) + p - 1 \geq \omega(G - X) + 1$$

به همین ترتیب،  $m(G^1 - X^1) \leq m(G - X) - 1$  از اینجا بر می آید که،

$$T(G^1) \leq \frac{|X^1| + m(G^1 - X^1)}{\omega(G^1 - X^1)} \leq \frac{|X| + 1 + m(G - X) - 1}{\omega(G - X) + 1} < \frac{|X| + m(G - X)}{\omega(G - X)} = T(G)$$

که یک تناقض است. لذا فرض می کنیم که  $p = 1$ . در این وضعیت، دو حالت قابل تشخیص است.

**حالت اول:**  $V(G_1)$  یک خوشه است. فرض کنیم،  $u_1$  یک راس در  $G_1$  باشد. قرار می دهیم  $X^* = X \cup (V(G_1) \setminus \{u_1\})$ . روشن است که  $m(G - X^*) = 1$  و  $\omega(G - X^*) = \omega(G - X)$ . بنابراین  $X^*$  یک برش راسی برای گراف  $G$  و  $|X^*| = |X| + m(G - X) - 1$  دز نتیجه

$$\frac{|X^*| + m(G - X^*)}{\omega(G - X^*)} = \frac{|X| + m(G - X)}{\omega(G - X)} = T(G)$$

که متناقض با انتخاب  $|X|$ .  
**حالت دوم:**  $V(G_1)$  یک خوشه نباشد. در این حالت،  $X_1$  یک برش راسی  $G_1$  است. در این صورت با تعریف  $X^* = X \cup X_1$ ،  $X^*$  یک برش راسی برای  $G$  خواهد شد، که در این صورت،

$$|X^*| = |X_1| + |X|, m(G - X^*) \leq m(G - X) - |X_1| - 1$$

و  $\omega(G - X^*) \geq \omega(G - X) + 1$  از اینجا بر می آید که:

$$\frac{|x^*| + m(G - X^*)}{\omega(G - X^*)} \leq \frac{|X| + |X_1| + m(G - X) - |X_1| - 1}{\omega(G - X) + 1}$$

$$< \frac{|X| + m(G - X)}{\omega(G - X)} = T(G)$$

که متناقض با تعریف همبستگی گراف  $G$  است. با بحث های بالا، در می یابیم که بایستی داشته باشیم  $p = 0$ . یعنی  $m(G - X) = 1$ . حال اگر فرض کنیم  $|X| = x$ . در این صورت  $T(G) = \frac{|X| + m(G - X)}{\omega(G - X)} = \frac{x + 1}{n - x}$  ادعا می کنیم که،  $x \geq k$  در غیر این صورت،

$$m = |E(G) \leq \binom{x}{2} + x(n - x) \leq \binom{k - 1}{2} + (n - k + 1)(k - 1)$$

$$= \binom{k}{2} + (n - k)(k - 1)$$

که یک تناقض است. پس بنابراین خواهیم داشت:  
 چون  $T(G) = \frac{x + 1}{n - x} \geq \frac{k + 1}{n - k}$  از طرفی دیگر،

$$\binom{k}{2} + (n - k)(k - 1) < m \leq \binom{k}{2} + (n - k)k$$

به سادگی می توانیم گرافی از مرتبه  $n$  و اندازه  $m$  با پارامتر همبستگی  $\frac{k + 1}{n - k}$  بسازیم. که این موضوع اثبات را کامل می کند.  $\square$

### مراجع

1. M.B. Cozzens, D. Moazzami and S. Stueckle, *The Tenacity of a graph*, Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms ( Yousef Alavi and Allen Schwenk eds.) Wiley, New York (1995), 1111-1122.
2. M.B. Cozzens, D. Moazzami and S. Stueckle, *The Tenacity of the Harary graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 16 ( 1994), 33-56.
3. S.A. Choudum and N. Priya, *Tenacity of complete graph products and grids*, Networks 34 (1999), no. 3, 192-196.
4. D. Moazzami and B. Salehian, *Some results related to the tenacity and existance of  $K$ -trees*, Discrete Applied Mathematics 157 (2009), 1794-1798.

## عدد اشتعال در گراف وقوع و گراف توانی

مژگان امامی<sup>۱</sup>، ابوالفضل بهمنی<sup>۲\*</sup>، و عدرا ناصریان<sup>۳</sup>

<sup>۱،۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران  
*emami@znu.ac.ir*

*abolbahmani@yahoo.com*

<sup>۳</sup> گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران  
*o.naserian@gmail.com*

چکیده. عدد اشتعال یک گراف سرعت گسترش فرایند سوزاندن را در یک گراف نشان می‌دهد و مدلی برای توصیف گسترش سرایت اجتماعی است. در این مقاله عدد اشتعال گراف وقوع و گراف مربعی مسیر مورد بررسی قرار خواهد گرفت و کرانهایی برای آن‌ها محاسبه خواهد شد.

### ۱. پیش‌گفتار

سوزاندن گراف یک فرآیند جدید در نظریه گراف است که به عنوان مدلی برای گسترش سرایت اجتماعی از آن استفاده می‌شود. در سال ۲۰۱۴، مفهوم عدد اشتعال توسط بناتوا<sup>۱</sup> و همکارانش معرفی شد. سوختن یک گراف دارای مراحل می‌باشد. در هر گراف، هر رأس سوخته یا نسوخته است. اگر رأسی سوخته شده باشد، تا پایان روند، سوخته باقی می‌ماند. در هر مرحله، رأس دیگری که سوخته نشده را برای سوزاندن (اگر چنین رأسی موجود باشد) انتخاب می‌کنیم. هنگامی که یک رأس در مرحله  $t$  سوزانده شد، در مرحله  $t + 1$ ، هر یک از همسایه‌های نسوخته آن سوخته می‌شوند. این روند تا وقتی که همه رأس‌ها سوزانده شوند، ادامه می‌یابد. عدد اشتعال گراف  $G$ ،  $b(G)$  با نمایش داده می‌شود، حداقل تعداد مراحل مورد نیاز برای پایان دادن به این روند

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 05C69; Secondary 05C35, 05C57.

واژگان کلیدی. عدد اشتعال، گراف وقوع، گراف توانی.

\* سخنران

<sup>1</sup>Bonato

است. فرض کنید در روند سوزاندن گراف  $G$ ، در نهایت کل گراف  $G$  را در  $k$  مرحله بسوزانیم و برای هر  $1 \leq i \leq k$ ، رأسی را که در مرحله  $i$ -ام می‌سوزانیم با  $x_i$  نشان دهیم. چنین رأس‌هایی منبع آتش و دنباله  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  یک دنباله اشتعال برای  $G$  نامیده می‌شود. بنابراین عدد اشتعال  $G$ ، طول کوتاه‌ترین دنباله اشتعال برای  $G$  است [۱].  
در ادامه به برخی از لم‌ها و قضایای مربوط به عدد اشتعال که در این پژوهش مورد استفاده قرار می‌گیرند، اشاره خواهد شد.

**قضیه ۱.۱.** [۱] در گراف  $G$  با شعاع  $r(G)$  و قطر  $d(G)$  داریم:

$$\lceil \sqrt{d(G) + 1} \rceil \leq b(G) \leq r(G) + 1.$$

**قضیه ۲.۱.** [۱] اگر  $G$  یک مسیر از مرتبه  $n$  باشد، آنگاه:

$$b(G) = \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

**لم ۳.۱.** [۲]  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  یک دنباله اشتعال برای  $G$  می‌باشد اگر و فقط اگر

$$\sum_{i=1}^k N_{k-i}[x_i] = V(G) \quad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} N_{k-i}[x_i] \neq V(G) \quad (۲)$$

## ۲. عدد اشتعال در گراف وقوع

در این بخش به بررسی عدد اشتعال گراف وقوع مسیر می‌پردازیم. ابتدا گراف وقوع را معرفی می‌کنیم.  
اگر  $G = (V, E)$  یک گراف ساده باشد، مجموعه رئوس گراف وقوع  $G$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$i(G) = \{(v, e) \mid e \in E, e = vw, v, w \in V\}$$

در این مجموعه مجاورت برای دو رأس  $(v, e)$  و  $(w, f)$  به شرط دارا بودن یکی از شرایط زیر تعریف می‌شود

$$v = w \quad (۱)$$

$$e = f \quad (۲)$$

$$vw = f \text{ یا } vw = e \quad (۳)$$

گراف حاصل از مجموعه رأس‌های  $i(G)$  و یال‌های دارای شرایط فوق، گراف وقوع  $G$  نامیده می‌شود که آن را با  $I(G)$  نمایش می‌دهیم [۳].

**لم ۱.۲.** اگر  $G$  یک گراف همبند باشد، آنگاه

$$b(G) \leq b(G_S) + 1,$$

که  $G_S$  زیرگراف القایی روی مجموعه احاطه‌گر همبند  $S$  است.

**لم ۲.۲.** فرض کنید  $G$  گراف وقوع یک مسیر از مرتبه  $n$  با قطر  $d(G)$  باشد، آنگاه

$$d(G) = n - 1.$$

عدد اشتعال در گراف وقوع و گراف توانی

برهان. فرض کنید رأس‌های مسیر  $v_1, v_2, \dots, v_n$  و یال‌های این گراف برای  $1 \leq i \leq n-1$  به صورت  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  باشند. رأس‌های گراف وقوع مسیر  $P_n$  به صورت

$$(v_1, e_1), (v_2, e_1), (v_2, e_2), (v_3, e_2), \dots, (v_{n-1}, e_{n-2}), (v_n, e_{n-1})$$

خواهد بود. واضح است که بیشترین فاصله، فاصله بین دو رأس  $(v_1, e_1)$  و  $(v_n, e_{n-1})$  است و بنابراین

$$d(G) = d((v_1, e_1), (v_n, e_{n-1})) = n - 1.$$

□

قضیه ۳.۲. فرض کنید  $G = I(P_n)$  باشد، آنگاه

$$\lceil \sqrt{n} \rceil \leq b(G) \leq \lceil \sqrt{n-3} \rceil + 1.$$

قضیه ۴.۲. فرض کنید  $G = I(P_n)$ ،  $n = m^2$  و  $m \geq 2$  باشد، آنگاه

$$b(G) = m + 1.$$

قضیه ۵.۲. اگر  $G = I(P_{(m+1)^2+a+1})$ ،  $m \geq 2$  و  $0 \leq a \leq 3$  باشد، آنگاه

$$b(G) = m + 2.$$

۳. عدد اشتعال در گراف توانی

مربع گراف  $G$ ، که با نماد  $G^2$  نمایش داده می‌شود، یک گراف با مجموعه رئوس  $V(G)$  می‌باشد که در آن دو رأس  $u$  و  $v$  با هم مجاورند اگر و فقط اگر فاصله بین دو رأس  $u$  و  $v$  کوچکتر یا مساوی ۲ باشد. به همین ترتیب توان  $k$ ام گراف  $G$ ، یک گراف با مجموعه رئوس  $V(G)$  است و دو رأس  $u$  و  $v$  با هم مجاورند اگر و فقط اگر فاصله بین دو رأس  $u$  و  $v$  کوچکتر یا مساوی  $k$  باشد که با نماد  $G^k$  نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید  $G = P_n^2$ ، آنگاه

$$b(G) \leq \lceil \sqrt{2n-2} \rceil.$$

قضیه ۲.۳. فرض کنید  $n = 2k + 1$  و  $m \geq 2$  باشد

(۱) با فرض  $k = m^2 + a$ ، اگر  $0 \leq a \leq 2$  آنگاه  $b(P_n^2) = m + 1$  و همچنین اگر

$$b(P_n^2) = m + 2 \text{ آنگاه } 3 \leq \frac{2m+1}{4} \leq a < 2m$$

(۲) با فرض  $k = (m+1)^2 + a + 1$ ، اگر  $0 \leq a \leq 2$  آنگاه  $b(P_n^2) = m + 2$  و اگر

$$b(P_n^2) = m + 3 \text{ آنگاه } \frac{2m+1}{4} \leq a < 2m$$

م.امامی، ا.بهنی، و.ع. ناصریان

### مراجع

1. A. Bonato, J. Janssen and E. Roshanbin, *How to burn a graph*, Internet Mathematics 1-2 (2016) 85-100.
2. A. Bonato, J. Janssen and E. Roshanbin, *Burning a Graph as a Model of Social Contagion*, Lecture Notes in Computer Science 8882 (2014) 13-22.
3. Z. Zhong-fu, Y. Bing, L. Jing-wen, L. Lin-zhong, W. Jian-fang and X. Bao-gen, *On incidence graph*. ARS combin., 87:213-223, 2008.

## کران جدید برای عدد رنگی لیستی فرد ضرب دکارتی گراف‌ها

فهیمة شیخ برادران<sup>۱\*</sup> و علی طاهرخانی<sup>۲</sup>

<sup>۱،۲</sup> دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان  
 fahimabaradaran@iasbs.ac.ir  
 ali.taherkhani@iasbs.ac.ir

چکیده. یک  $k$ -رنگ آمیزی فرد برای گراف  $G$ ،  $k$ -رنگ آمیزی رأسی مجاز برای  $G$  است که در همسایگی هر رأس، رنگی وجود دارد که به تعداد فرد بار ظاهر شده است. به کوچکترین عدد  $k$  که گراف  $G$  دارای یک  $k$ -رنگ آمیزی فرد است، عدد رنگی فرد  $G$  گویند. عدد رنگی لیستی فرد گراف  $G$  کوچکترین عدد طبیعی  $k$  است که برای هر تخصیص لیست‌های  $k$  تایی به رأس‌های  $G$  بتوان رأس‌های گراف  $G$  را طوری رنگ کرد که این رنگ آمیزی مجاز باشد، رنگ هر رأس از لیستش بیاید و همچنین در همسایگی هر رأس حداقل یک رنگ، فرد بار ظاهر شده باشد. عدد رنگی لیستی فرد  $G$  را با نماد  $ch_o(G)$  نمایش می‌دهیم. در این مقاله با توجه به قضیه‌هایی از کارو، پتروشفسکی و سکروکوفسکی در سال ۲۰۲۲ و همچنین باروئیسکی، چندرول، کرال و میشکوف در سال ۲۰۰۶، کران بالایی برای عدد رنگی لیستی فرد ضرب دکارتی دو گراف  $G$  و  $H$  بر حسب عدد رنگی لیستی فرد و عدد رنگ آمیزی آنها ارائه می‌شود.

### ۱. مقدمه

برای گراف  $G$ ، مجموعه رأس‌ها و یال‌ها را با نماد  $V(G)$  و  $E(G)$  نشان می‌دهیم. ضرب دکارتی  $G$  و  $H$  که با نماد  $G \square H$  نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأس‌های  $V(G) \times V(H)$  و دو رأس  $(u, x)$  و  $(v, y)$  به هم متصل هستند هرگاه  $(1) u = v$  و  $xy \in E(H)$  یا  $(2) x = y$  و  $uv \in E(G)$ .

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 05C15.

واژگان کلیدی. رنگ آمیزی لیستی فرد، عدد رنگ آمیزی، عدد رنگی فرد، عدد رنگی لیستی.  
\* سخنران

یک  $k$ -رنگ آمیزی مجاز از رأس های گراف  $G$  به تخصیص  $k$  رنگ (معمولاً اعداد صحیح مثبت  $1, 2, \dots, k$ ) به رأس های گراف گفته می شود به طوری که هیچ دو رأس مجاوری دارای رنگ یکسان نباشند.

به کوچکترین عدد صحیح  $k$  که گراف  $G$  یک  $k$ -رنگ آمیزی مجاز داشته باشد عدد رنگی  $G$  گویند و آن را با نماد  $\chi(G)$  نمایش می دهند.

گراف  $G$  را  $k$ -رنگ پذیر لیستی گویند هرگاه با هر تخصیصی از لیست های  $k$  تایی به رأس ها بتوان رأس های گراف  $G$  را طوری رنگ کرد که این رنگ آمیزی مجاز باشد و رنگ هر رأس از لیستش بیاید. عدد رنگی لیستی که با نماد  $ch(G)$  نشان می دهند کوچکترین  $k$  ای است که  $G$  گرافی  $k$ -رنگ پذیر لیستی باشد.

عدد رنگ آمیزی گراف  $G$  کوچکترین عدد صحیح مثبت  $k$  است هرگاه بتوان رأس های  $G$  را به صورت  $v_1, v_2, \dots, v_n$  مرتب کرد به طوری که برای هر  $i$  رأس  $v_i$  دارای حداکثر  $k - 1$  همسایه در بین رأس های  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  باشد. عدد رنگ آمیزی گراف  $G$  را با نماد  $col(G)$  نشان می دهند.

رنگ آمیزی فرد، اولین بار در سال ۲۰۲۲ توسط پتروشفسکی و سکروکوفشی در [۳] مطرح شد که تعریف آن چنین است:

یک  $k$ -رنگ آمیزی رأسی مجاز، مانند  $\varphi$  از گراف  $G$  را فرد گویند اگر برای هر رأس غیر تنها، رنگی مانند  $c$  وجود داشته باشد که  $\varphi^{-1}(c) \cap N(v)$  از اندازه فرد باشد. کمترین مقدار  $k$  ای که گراف  $G$  دارای یک  $k$ -رنگ آمیزی فرد باشد را عدد رنگی فرد نامیده و با نماد  $\chi_o(G)$  نشان می دهند.

عدد رنگی لیستی فرد گراف  $G$  کوچکترین عدد طبیعی  $k$  است که برای هر تخصیص لیست های  $k$  تایی به رأس های  $G$  بتوان رأس های گراف  $G$  را طوری رنگ کرد که این رنگ آمیزی مجاز باشد، رنگ هر رأس از لیستش بیاید و همچنین در همسایگی هر رأس غیر تنها حداقل یک رنگ، فرد بار ظاهر شده باشد. عدد رنگی لیستی فرد  $G$  را با نماد  $ch_o(G)$  نمایش می دهند. این پارامتر در [۲] تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفته است.

در [۲]، کارو و همکاران کران هایی برای عدد رنگی فرد بعضی از گراف ها مانند مسیره ها، دورها، درختها، گراف های مسطح همبند، گراف های مسطح خارجی و ابر مکعب ها معرفی کرده اند. همچنین به مطالعه عدد رنگی فرد ضرب دکارتی گراف ها پرداختند که کران

$$\chi_o(G \square H) \leq \min\{\chi(G)\chi_o(H), \chi(H)\chi_o(G)\} \leq \chi_o(G)\chi_o(H), \quad (1.1)$$

به دست آمده است.

از طرفی باروئیسکی و همکاران در [۱] کرانی را برای عدد رنگی لیستی ضرب گراف ها ارائه کرده اند که بر اساس عدد رنگ آمیزی و عدد رنگی لیستی گراف ها است. در بخش بعد، کرانی جدید برای عدد رنگی فرد ضرب دکارتی گراف ها ارائه می شود.

## ۲. کران بالایی برای عدد رنگی لیستی فرد ضرب دکارتی گراف ها

همانطور که در مقدمه آمده است، باروئیسکی و همکاران در [۱] با استفاده از عدد رنگ آمیزی کرانی برای عدد رنگی لیستی ضرب دکارتی گراف ها دارند که در قضیه ۱.۲ آمده است. از طرفی

کارو و همکاران در [۲] کرانی برای عدد رنگی فرد گرافها معرفی کرده‌اند که در نتیجه ۳.۲ می‌آید. در ادامه، ابتدا این قضیه و نتیجه که در اثبات نتیجه اصلی مورد استفاده قرار گرفته است را می‌آوریم.

**قضیه ۱.۲.** [۱] اگر  $G$  و  $H$  دو گراف باشند، آنگاه

$$\text{ch}(G \square H) \leq \min\{\text{ch}(G) + \text{col}(H), \text{ch}(H) + \text{col}(G)\} - 1.$$

**قضیه ۲.۲.** [۲] اگر  $G$  گرافی همبند با ماکزیمم درجه  $\Delta \geq 1$  باشد، آنگاه  $\text{ch}_o(G) \leq 2\Delta$  برقرار است، مگر  $G = C_5$ .

**نتیجه ۳.۲.** [۲] برای هر گراف همبند  $G \neq C_5$  با ماکزیمم درجه  $\Delta$  داریم

$$\chi_o \leq 2\Delta.$$

اکنون می‌توانیم نتیجه اصلی این مقاله را بیان کنیم.

**قضیه ۴.۲.** اگر  $G$  و  $H$  دو گراف باشند، آنگاه

$$\text{ch}_o(G \square H) \leq \min\{\text{ch}_o(G) + 2\text{col}(H), \text{ch}_o(H) + 2\text{col}(G)\} - 2.$$

برهان. اثبات، شبیه اثبات قضیه ۱.۲ در [۱] است. کافی است نشان دهیم:

$$\text{ch}_o(G \square H) \leq \text{ch}_o(G) + 2\text{col}(H) - 2.$$

رأس‌های  $v_1, \dots, v_n$  از  $H$  را طوری مرتب کنید که برای هر  $i > 1$  رأس  $v_i$  دارای حداکثر  $\text{col}(H) - 1$  همسایه در بین رأس‌های  $v_1, \dots, v_{i-1}$  باشد. مجموعه  $V_i$  را رأس‌هایی از  $G \square H$  قرار دهید که در کپی متناظر با رأس  $v_i$  باشد. برای هر رأس  $v \in V(G \square H)$  لیستی دلخواه به اندازه  $|L(v)| = \text{ch}_o(G) + 2\text{col}(H) - 2$  تخصیص دهید. اکنون رنگ‌آمیزی لیستی فرد را برای  $G \square H$  می‌سازیم. ابتدا زیرگراف  $G \square H$  که توسط  $V_1$  القا می‌شود را رنگ می‌کنیم. چون این زیرگراف با  $G$  یکرخت است و هر رأس دارای لیستی به اندازه حداقل  $\text{ch}_o(G)$  است، چنین رنگ‌آمیزی وجود دارد. فرض کنیم زیرگراف  $G \square H$  که توسط  $V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}$  القا می‌شود دارای رنگ‌آمیزی مجاز فرد باشد. این رنگ‌آمیزی را به رأس‌های  $V_i$  توسعه می‌دهیم. ابتدا برای هر  $v \in V_i$  رنگ همسایه‌هایش و همچنین رنگ‌هایی که به تعداد فرد در همسایگی هر یک از همسایه‌های  $v$  که در رأس‌های  $V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}$  هستند را از لیست  $L(v)$  حذف کنید. چون هر رأس دارای حداکثر  $\text{col}(H) - 1$  همسایه است، به تعداد حداکثر  $2\text{col}(H) - 2$  رنگ از لیست  $v$  حذف می‌شود. در این مرحله می‌توان رنگ‌آمیزی نسخه‌ای از  $G$  که روی  $V_i$  القا می‌کند را با  $\text{ch}_o(G)$  رنگ انجام داد و اثبات به پایان می‌رسد.  $\square$

**نتیجه ۵.۲.** با فرض های قضیه ۴.۲ داریم:

$$\chi_o(G \square H) \leq \min\{\text{ch}_o(G) + 2\text{col}(H), \text{ch}_o(H) + 2\text{col}(G)\} - 2.$$

**توجه ۶.۲.** کران به دست آمده در ۵.۲ برای  $K_2 = H = G$ ، دست یافتنی است.

ف. ش. برادران و ع. طاهرخانی

توجه ۷.۲. کران به دست آمده در قضیه ۴.۲ برای برخی خانواده از گرافها کران بهتری از (۱.۱) ارائه می‌کند. اگر  $G = H = K_n$  طبق (۱.۱) داریم  $\chi_o(G \square H) \leq n^2$  در حالی که با توجه به قضیه ۴.۲ کران  $\chi_o(G \square H) \leq 3n - 2$  به دست می‌آید.

نتیجه ۸.۲. اگر  $G_1, \dots, G_k$  گرافهایی با عدد رنگی لیستی فرد  $\text{ch}_o(G_1), \dots, \text{ch}_o(G_k)$  و عدد رنگ آمیزی  $\text{col}(G_1), \dots, \text{col}(G_k)$  باشند، آنگاه

$$\chi_o(G_1 \square \dots \square G_k) \leq \text{ch}_o(G_1) + 2\text{col}(G_2) + \dots + 2\text{col}(G_k) - 2(k-1).$$

### مراجع

1. M. Borowiecki, S. Jendrol, D. Král and J. Miškuf, *List coloring of Cartesian products of graphs*, Discrete Mathematics 306 (2006), 1955-1958.
2. Y. Caro, M. Petruševski and R. Škrekovski, *Remarks on odd colorings of graphs*, Discrete Applied Mathematics 321 (2022), 392-401.
3. M. Petruševski and R. Škrekovski, *Colorings with neighborhood parity condition*, Discrete Applied Mathematics 321 (2022), 385-391.

## گراف جابجایی زیرمجموعه های $m$ عضوی گروه متقارن $\Gamma(m, S_n)$

قربانعلی نصیری<sup>۱\*</sup>، احمد عرفانیان<sup>۱</sup>، و مجید میرزاویری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> آدرس

چکیده. گراف جابجایی گروه  $G$  که با نماد  $\Gamma(G)$  یا  $\Gamma_G$ ، نمایش داده می‌شود، گراف ساده بدون جهتی است که رئوس آن عضوهای غیر مرکزی گروه  $G$  هستند و دو راس در این گراف مجاور هستند اگر و فقط اگر با هم جابجا شود. در این مقاله ما این مفهوم را تعمیم داده و گراف جابجایی زیرمجموعه‌های  $m$  عضوی یک گروه  $G$  را تعریف کرده‌ایم [۱] که به صورت  $\Gamma(m, G)$  نشان داده می‌شود. در این گراف رئوس زیرمجموعه‌های  $m$  عضوی گروه  $G$  می‌باشند و دو راس  $X, Y$  مجاورند اگر و فقط اگر  $[X, Y] = 1$ ، یعنی برای  $\forall x \in X, \forall y \in Y; xy = yx$ . با توجه به اهمیت گروه  $S_n$  گروه متقارن از مرتبه  $n$ ، خواص گروه  $\Gamma S_n$  در مقالات مختلفی مطالعه شده است (برای مثال [۲]، [۳]، [۴] را ببینید). در این مقاله ما گراف  $\Gamma(m, S_n) (m \geq 1)$  را بررسی می‌کنیم و برخی خواص آن را به دست می‌آوریم.

### ۱. مقدمه

**تعریف ۱.۱.** گراف  $\Gamma(m, G)$  گرافی است که در آن رئوس زیرمجموعه‌های  $m$  عضوی گروه  $G$  می‌باشند و دو راس  $X, Y$  مجاورند اگر و فقط اگر  $[X, Y] = 1$ ، یعنی برای  $\forall x \in X, \forall y \in Y; xy = yx$ .

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی.

\* سخنران

**تعریف ۲.۱.** نوع دوری یا به طور ساده‌تر نوع یک جایگشت  $\pi$  از گروه  $S_n$  یک بیان جایگشت به شکل  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  است که در آن  $\alpha_k$  برای  $k = 1, 2, \dots, n$  تعداد دورهای به طول  $k$  در  $\pi$  می‌باشد.

به عنوان مثال جایگشت  $(5)(4)(123) \in S_8$  دارای نوع دوری  $(2, 0, 1, 0, 0)$  می‌باشد. بدیهی است که همواره داریم  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = n$ .

اگر  $G$  یک گروه دلخواه باشد و  $g \in G$ ، مرکزساز  $g$  به صورت  $C(g) = C_G(g) = \{h \in G : hg = gh\}$  تعریف می‌شود، یعنی  $C(g)$  برابر است با مجموعه همه عضوهای  $G$  که با  $g$  جابجا می‌شوند. قضیه زیر در [۵] ثابت شده است.

**قضیه ۳.۱ (قضیه کشی).** اگر  $\lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in S_n$  دارای نوع  $\lambda$  باشد، آنگاه:

$$|C_{S_n}(\pi)| = |C(\pi)| = \sum_{i=1}^n i^{\alpha_i} \alpha_i!$$

## ۲. چند خاصیت از گراف $\Gamma(m, S_n)$

در این بخش چند ویژگی گراف  $\Gamma(m, S_n)$  بیان می‌شود. بدیهی است در گراف  $\Gamma(1, S_n)$  داریم  $\Delta = n! - 1$ ، اکنون نشان می‌دهیم که  $\delta = n - 2$  و بدین منظور ما باید ثابت کنیم اگر نوع دوری  $\alpha$  به صورت  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  باشد و  $f_n(\alpha) = \prod_{i=1}^n i^{\alpha_i} (\alpha_i!)$  آنگاه  $f_n(\alpha) \geq n - 1$ .

**قضیه ۱.۲.** اگر نوع دوری  $\alpha$  به صورت  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  باشد آنگاه  $f_n(\alpha) \geq n - 1$ .

برهان. قضیه را در سه حالت ثابت می‌کنیم.

**حالت اول:**  $\alpha_1 = 0$ . در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &\geq 2^{\alpha_2} \times 3^{\alpha_3} \times \dots \times n^{\alpha_n} \\ &\geq \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{\alpha_2} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{\alpha_3} + \dots + \underbrace{n + n + \dots + n}_{\alpha_n} \\ &= 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = n \geq n - 1. \end{aligned}$$

**حالت دوم:**  $\alpha_1 = 1$ . اگر  $\alpha_1 = 1$  آنگاه  $\sum_{i=2}^n i\alpha_i = n - 1$ ، در نتیجه

$$f_n(\alpha) \geq 2^{\alpha_2} \times 3^{\alpha_3} \times \dots \times n^{\alpha_n} \geq \sum_{i=2}^n i\alpha_i = n - 1$$

**حالت سوم:**  $\alpha_1 \geq 2$ . اگر  $\alpha_1 \geq 2$  آنگاه  $\alpha_1 \geq 2$ ، زیرا برای  $n \geq 4$  داریم  $n! \geq 2^n$  بنابراین

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &\geq 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \times 3^{\alpha_3} \times \dots \times n^{\alpha_n} \\ &\geq 2(\alpha_1 + \alpha_2) + 3(\alpha_3) + \dots + n(\alpha_n) = n + \alpha_1 \geq n - 1. \end{aligned}$$

□ در نتیجه قضیه برای  $n \geq 4$  ثابت می‌شود، همچنین داریم  $\delta(1, S_3) = 1$

گراف جایجایی زیرمجموعه های  $m$

ضمنا اگر نوع دوری  $\alpha$  به صورت  $(1, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-2}, 1, 0)$  باشد تساوی برقرار می شود و داریم،  
 $f_n(\alpha) = n - 1$ .

**قضیه ۲.۲.** به ازای هر  $n$  گراف  $\Gamma(2, S_n)$  دارای رأس منفرد است.

برهان. فرض کنید  $\alpha = (1, 2, 3, \dots, n)$  و  $\beta = (1, 2, \dots, n-1)$  دو دور به ترتیب از طول  $n-1, n$  باشند، رأس  $\{\alpha, \beta\}$  در گراف  $\Gamma(2, S_n)$  یک رأس منفرد است، چون اگر رأس  $\lambda \neq e$  وجود داشته باشد که  $\alpha\lambda = \lambda\alpha$  و  $\beta\lambda = \lambda\beta$ ، آنگاه اعداد طبیعی  $m, k$  وجود دارند  $1 < m, k < n, \lambda = \alpha^m = \beta^k$  بنا بر این داریم  $\alpha^m(n) = \beta^k(n) = n$  اما از طرف دیگر داریم  $\alpha^m(n) = m$  و بنابراین  $m = n$  که تناقض است.  $\square$

**نتیجه ۳.۲.** گراف  $\Gamma(m, S_n)$  برای  $|Z(S_n)| = 1, m > 1$  ناهمبند است.

**نتیجه ۴.۲.** در گراف  $G = \Gamma(m, S_n)$  برای  $m > 1, \delta(G) = 0$ .

**قضیه ۵.۲.** در گراف  $G = \Gamma(2, S_n)$  داریم:

$$\Delta(G) = \begin{cases} 2 & n = 3 \\ 27 & n = 4 \\ \binom{2(n-2)}{2} - 1 & n \geq 5 \end{cases}$$

برهان. برای  $n = 3, 4$  اثبات با محاسبه مستقیم به دست می آید. حال فرض کنید  $n \geq 5$  و  $d_1 = \Delta(G) = d_1, d_2, \dots, d_n!$  دنباله درجات گراف  $G = \Gamma(1, S_n)$  باشد، بدیهی است که  $n! - 1$  همچنین چون ثابت شده است  $2(n-2)! - 2 = \Delta(\Gamma(S_n))$ . بنا بر این اگر  $\alpha$  رأس با درجه  $d_2$  در گراف  $\Gamma(1, S_n)$  باشد.  $deg(\alpha) = 2(n-2)! - 1$  بدیهی است بیشترین درجه را در گراف  $\Gamma(2, S_n)$  رأس  $\{\alpha, e\}$  دارد. اگر  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$  رئوس مجاور  $\alpha$  در  $\Gamma(1, S_n)$  باشند آنگاه هر زیر مجموعه دو عضوی از مجموعه  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \alpha\}$  در  $\Gamma(2, S_n)$  مجاور است، اما یکی از این زیرمجموعه ها  $\{\alpha, e\}$  است، بنا بر این  $\Delta(G) = \binom{d+1}{2} - 1 = \binom{2(n-2)+1}{2} - 1$ .  $\square$

یکی دیگر از ویژگی های مهم هر گراف عدد استقلال آن است. یک مجموعه مستقل از رئوس، یک مجموعه از رئوس است که هیچ دوتایی از آن ها مجاور نباشند. بزرگترین اندازه مجموعه های مستقل گروه  $G$  را عدد استقلال آن گروه می نامند و با  $\alpha(G)$  نمایش می دهند. یافتن عدد استقلال گراف  $\Gamma(1, S_n)$  در حالت کلی مسأله ای مشکل است و به محاسبه تعداد افزایش های نامرتب اعداد طبیعی نیاز دارد، ما در این جا یک کران پایین برای آن به دست می آوریم، البته ما حدس می زنیم که این کران پایین همان عدد استقلال گراف  $\Gamma(1, S_n)$  باشد.

**مثال ۶.۲.** برای  $n = 5$ ، تعداد دورهای به طول ۵ که هیچ دوتایی از آن ها با هم مجاور نیستند

برابر است با  $6 = \frac{24}{4} = \frac{4!}{\varphi(5)}$ . دلیل تقسیم بر عدد  $\varphi(5)$  آن است که اگر فرض کنیم  $\alpha$  یک

دور به طول ۵ باشد و  $(r, 5) = 1$  آنگاه  $\alpha^r$  یک دور به طول ۵ است که با  $\alpha$  جایجا می شود. بنا بر این از هر  $\varphi(5) = 4$  دور باید یکی از آن ها را حساب کنیم. همچنین تعداد دورهای به طول

۴ که هیچ دوتایی مجاور نیستند برابر است با  $15 = \frac{3!}{\varphi(4)} \times \binom{5}{4}$  و تعداد جایگشت‌هایی که حاصل ضرب یک دور به طول ۳ و یک دور به طول ۲ هستند و هیچ دوتایی با هم مجاور نیستند برابر است با  $10 = \frac{4! \times 1!}{\varphi(6)} \times \binom{5}{3} \binom{2}{2}$ .

به سادگی می‌توان دید که رئوسی که در بالا به آن‌ها اشاره شد یک مجموعه ماکزیمال از رئوس مستقل را تشکیل می‌دهند یعنی هر رأس دیگر  $\Gamma(1, S_n)$  حداقل با یکی از این رئوس مجاور است بنابراین داریم  $\alpha(\Gamma(1, S_5)) \geq 6 + 15 + 10 = 31$ .

مثال ۷.۲. تعداد افزای‌های نامرتب عدد ۶ که همه اجزای افزای با هم برابر نیستند و هر جزء افزای حداقل دو باشد عبارتند از  $2 + 4, 6$  و تعداد جایگشت‌های متناظر با این افزای‌ها که هیچ دوتایی از آن‌ها با هم جابجا نمی‌شوند به ترتیب برابرند با  $\frac{120}{2} = \frac{5!}{\varphi(6)} \binom{6}{6}$ .

$$45 = \frac{3! \times 1!}{\varphi(4)} \times \binom{6}{4} \binom{2}{2}, 60.$$

با انجام این محاسبات برای عدد ۵ به جای عدد ۶ افزای‌ها برابر  $2 + 3, 5$  و تعداد جایگشت‌های نظیر آن‌ها برابر

$$60 = \frac{2! \times 1!}{\varphi(6)} \times \binom{6}{3} \binom{3}{2}, 36 = \frac{4!}{\varphi(5)} \binom{6}{5}$$

است. همه این جایگشت‌ها یک مجموعه مستقل از رئوس را تشکیل می‌دهند و بنابراین  $\alpha(\Gamma(1, S_6)) \geq 105 + 96 = 201$ .

تعریف ۸.۲. فرض کنید  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  یک افزای عدد طبیعی  $n$  باشد، یعنی برای  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  و  $x_i \in N, i = 1, 2, \dots, k$  افزای  $X$  را یک افزای خوب گوئیم اگر برای  $x_i \geq 2, i = 1, 2, \dots, k$  و همه اجزای  $X$  با هم برابر نباشند (یعنی  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$  درست نباشد). مجموعه همه افزای‌های خوب  $n$  را با نمایش  $gp(n)$  می‌دهیم.

تعریف ۹.۲. اگر  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  یک افزای  $n$  باشد، آنگاه جایگشت  $\varphi$  را یک جایگشت متناظر با  $X$  گوئیم اگر حاصلضرب  $k$  دور متمایز با طول‌های  $x_1, x_2, \dots, x_k$  باشد.

تعریف ۱۰.۲. مجموعه همه رئوس متناظر با افزای خوب  $n$  را که هر دوتایی از آن‌ها با هم جابجا نمی‌شوند را با  $vgp(n)$  نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۲. اگر  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  یک افزای خوب  $n$  باشد آنگاه تعداد جایگشت‌های متناظر  $X$  که هیچ دوتایی با هم جابجا نمی‌شوند برابر است با

$$f(X) = \binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} \binom{n-x_1-x_2}{x_3} \dots \binom{x_k}{x_k} \times \frac{(x_1-1)!(x_2-1)! \dots (x_k-1)!}{\varphi([x_1, x_2, \dots, x_k])}$$

که در آن  $[x_1, x_2, \dots, x_k]$  کوچکترین مضرب مشترک اعداد  $x_1, x_2, \dots, x_k$  می‌باشد.

برهان. همه چیز روشن است، فقط کافی است توضیح دهیم که دلیل تقسیم بر  $\varphi([x_1, x_2, \dots, x_k])$  چیست. اگر  $(r, [x_1, x_2, \dots, x_k]) = 1$  آنگاه برای  $i = 1, 2, \dots, k$   $(r, x_i) = 1$ . در نتیجه اگر  $\sigma$  یکی از جایگشت های نظیر  $X$  باشد آنگاه  $\sigma^r$  نیز یک جایگشت نظیر آن است، لذا این  $\varphi([x_1, x_2, \dots, x_k])$  جایگشت نظیر  $X$  با یکدیگر جابجا می شوند و ما فقط یکی از آنها را باید در نظر بگیریم.  $\square$

**قضیه ۱۲.۲.** برای گراف  $\Gamma(1, S_n)$  داریم

$$\alpha(\Gamma(1, S_n)) \geq \sum_{X \in gp(n)} f(X) + \sum_{X \in gp(n-1)} f(X),$$

که در آن مطابق تعریف ۸.۲،  $gp(n)$  مجموعه همه افزاهای خوب می باشد.

برهان. اثبات را در دو گام انجام می دهیم:

گام اول) فرض کنیم  $\sigma_1, \sigma_2$  دو جایگشت دلخواه از  $vgp(n) \cup vgp(n-1)$  باشند، بنابراین  $\sigma_1, \sigma_2$  به صورت حاصل ضرب چند دور متمایز شامل عضوهایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  می باشند. فرض کنیم

$$\sigma_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{i_1})(y_1, y_2, \dots, y_{i_2}) \dots (z_1, z_2, \dots, z_{i_k}),$$

$$\sigma_2 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{j_1})(y'_1, y'_2, \dots, y'_{j_2}) \dots (z'_1, z'_2, \dots, z'_{j_m})$$

که در آن  $i_1 + i_2 + \dots + i_k$  و  $j_1 + j_2 + \dots + j_m$  برابرند با  $n$  یا  $n-1$ . لذا دوره های متمایز  $\alpha_1, \alpha_2$  از  $\sigma_1, \sigma_2$  وجود دارند که مجزا نیستند و چون هیچ کدام از  $\sigma_1, \sigma_2$  توانی از دیگری نیست داریم  $\sigma_1 \sigma_2 \neq \sigma_2 \sigma_1$  و بنابراین  $vgp(n) \cup vgp(n-1)$  یک مجموعه از رئوس مستقل گراف  $\Gamma(1, S_n)$  می باشد.

گام دوم) حال ثابت می کنیم که مجموعه  $vgp(n) \cup vgp(n-1)$  یک مجموعه ماکزیمال از رئوس مستقل گراف  $\Gamma(1, S_n)$  می باشد، یعنی ثابت می کنیم که هر رأس دیگر گراف با حداقل یکی از رئوس این مجموعه مجاور است. رئوس دیگر گراف یکی از دو نوع زیر هستند:

الف) رئوسی که به شکل  $\alpha = \overbrace{(x_1, x_2, \dots, x_r)(y_1, y_2, \dots, y_r) \dots (z_1, z_2, \dots, z_r)}^k$  هستند، که در آن  $rk = n$  یا  $rk = n-1$ . در این حالت اگر

$\beta = \overbrace{(x_1 y_1 \dots z_1)}^k \overbrace{(x_2 y_2 \dots z_2)}^k \dots \overbrace{(x_r y_r \dots z_r)}^k$  داریم  $\alpha = \beta^k$  و  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ، بنابراین  $\alpha$  با  $\beta$  مجاور است و  $\beta \in vgp(n) \cup vgp(n-1)$ .

ب) رئوسی مانند  $\alpha$  که برای  $i = 1, 2, \dots, n-2$   $\alpha \in vgp(i)$  بدیهی است که در این حالت همواره یک  $\beta \in vgp(n) \cup vgp(n-1)$  وجود دارد که  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ، زیرا کافی است قرار دهیم  $\beta = \alpha\gamma$  که در آن  $\gamma$  یک دور از طول  $n-i$  یا  $n-i-1$  است که با  $\alpha$  مجزا است.  $\square$

## مراجع

1. R. Barzgar, A. Erfanian and M. Farrorhi, *Probability of mutually commuting two finit subsets of a finite group*, Math. Proc. R. Ir (2012).

2. T.W. Hikaltd, *The commuting graph of the symmetric group  $S_n$* , International journal of contemporary. Mathematical sciences 10 (2015), no. 6, 287-309.
3. J.M. Burns Goldsmith, *Maximal order abelian subgroups of symmetric group*, Bull. London, Math. Soc. 21 (1989), 70-72.
4. A. Iranmanesh and A. Jafarzadeh, *On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups*, Journal of algebra and its applications 7 (2008), no. 1, 129-146.
5. W. Ledemann, *Introduction to group theory*, Addison. Wesley. Longman (1996).

## حاصل‌ضرب نگاشت‌های پوششی گراف و کاربرد آن در اندیس‌های زاگرب

مجید کویکی<sup>۱</sup> \* و حمید ترابی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد، ایران.

*majid.kowkabi@gonabad.ac.ir*

<sup>۲</sup> گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

*h.torabi@ferdowsi.um.ac.ir*

چکیده. در این مقاله با بررسی مفهوم پوشش گراف‌ها و شاخص‌های زاگرب، شاخص‌های زاگرب را برای گراف‌ها به دست می‌آوریم. به عنوان مثال، اگر  $f$  نگاشت پوششی از  $C$  به  $G$  و  $C$  یک  $h$ -بالابر باشد، آنگاه  $M_1(C) = hM_1(G)$  و  $M_2(C) = hM_2(G)$  و همچنین یکی از سوالات ارزشمندی که در مبحث نگاشت‌های پوششی وجود دارد این هست که حاصل ضرب دو نگاشت پوششی، نگاشتی پوششی است حال این سوال مطرح می‌شود که پاسخ سوال فوق برای نگاشت‌های پوششی دو گراف چیست؟ و یا این که اندیس زاگرب بالابره‌های یک گراف حاصل ضربی با این گراف چه رابطه‌ای دارند؟ و با استفاده از نگاشت پوششی بتوانیم برای حاصل ضرب دو پوشش ارتباط برقرار کنیم. که در این مقاله به این سوالات پاسخ می‌دهیم.

### ۱. پیش‌گفتار

مبحث گراف‌ها پیشینه بسیار قدیمی در مباحث ریاضیات دارد و مبحث نگاشت پوششی در قرن اخیر مورد توجه قرار گرفته است و به طور دقیق‌تر باید گفت نظریه‌ی پوشش‌ها، مانند بسیاری دیگر از شاخه‌های هندسه، توسط پوانکاره ظهور و پیدایش یافته است. ولی اولین باری که پوشش‌ها به طور منسجم معرفی و مطالعه گردید توسط زایفرت و ثرفال [۳] در سال ۱۹۳۵ بود. فضاها‌ی پوششی نه تنها در توپولوژی، بلکه در شاخه‌های دیگری از ریاضیات مانند هندسه دیفرانسیل، آنالیز مختلط و گروه‌های لی نیز بسیار پرکاربرد است. نظریه گراف شیمیایی شاخه

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. نگاشت پوششی گراف، شاخص‌های زاگرب، حاصل ضرب دکارتی. \* سخنران

توپولوژی شیمی ریاضی است که نظریه گراف را برای مدل سازی ریاضی پدیده های شیمیایی اعمال می کند. اولین شاخص زاگرب نیز توجه قابل توجهی از ریاضیدانان را به خود جلب کرد و مبحث اندیس های زاگرب در چند دهه اخیر بسیار به آن پرداخته شده است. در اینجا تعریف اندیس های زاگرب را از مقاله اشرفی و همکاران [۱] می آوریم.

فرض کنیم گراف  $G$  با مجموعه رئوس  $V(G)$  و مجموعه یال های  $E(G)$  باشد. برای هر  $u, v \in V(G)$  یالی که راس  $u$  را به راس  $v$  متصل می کند را با  $uv$  نشان می دهیم و  $d_G(u)$  نشان دهنده درجه  $u$  در  $G$  است. هنگامی که تشخیص اندیس گراف از متن واضح باشد، اندیس  $G$  را حذف می کنیم. شاخص های زاگرب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d(u)^2$$

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v).$$

در اینجا  $M_1(G)$  و  $M_2(G)$  به ترتیب اولین و دومین شاخص زاگرب را نشان می دهند.

## ۲. دست آوردهای پژوهش

فرض کنیم  $f: C \rightarrow G$  نگاشت پوششی باشد. در این جا قصد داریم به رابطه بین اندیس های زاگرب گراف  $C$  و  $G$  بپردازیم. یکی از سوالات ارزشمندی که در مبحث نگاشت های پوششی وجود دارد این هست که حاصل ضرب دو نگاشت پوششی، نگاشتی پوششی است حال این سوال مطرح می شود که پاسخ سوال فوق برای نگاشت های پوششی دو گراف چیست؟

**قضیه ۱.۲.** اگر  $C$  و  $G$  گراف باشند،  $f$  نگاشت پوششی از  $C$  به  $G$  و  $C$  یک  $h$ -بالابر باشد، آنگاه  $M_1(C) = h \times M_1(G)$  و  $M_2(C) = h \times M_2(G)$ .

برهان. همه گراف های در نظر گرفته شده در این جا ساده و همبند هستند، بنابراین  $C$  همبند است. فرض کنیم  $k, g \in G$  و برای  $1 \leq i \leq h$ ،  $c_i \in f^{-1}(g)$  و  $u_i \in f^{-1}(k)$ . چون  $C$  یک  $h$ -بالابر است، برای  $1 \leq i \leq h$  داریم  $d(c_i) = d(g)$  و  $d(u_i) = d(k)$  و نیز  $|V(C)| = h|V(G)|$  و  $|E(C)| = h|E(G)|$ . به عبارت دیگر گراف  $C$  یک  $h$ -کپی همبند از  $G$  است.

$$\begin{aligned} M_1(C) &= \sum_{c \in V(C)} d(c)^2 = \sum_{c_i \in \{1, 2, \dots, h\} \times V(G)} d(c_i)^2 = \\ &= \sum_{f(c_i) \in V(G)} \sum_{\forall g \in G, c_i \in f^{-1}(g) \text{ and } 1 \leq i \leq h} d(f(c_i))^2 = \\ &= h \times \sum_{g \in V(G)} d(g)^2 = h \times M_1(G). \end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} M_2(C) &= \sum_{uc \in E(C)} d_C(u)d_C(c) = \sum_{u_i c_i \in \{1, 2, \dots, h\} \times E(G)} d_C(u_i)d_C(c_i) = \\ &= h \times \sum_{gk \in E(G)} d_G(g)d_G(k) = h \times M_2(G). \end{aligned}$$

□

نتایج جالبی را برای نگاشت پوششی گراف‌ها به شرح زیر بدست می‌آوریم. در واقع در قضیه زیر نشان می‌دهیم حاصل ضرب دو نگاشت پوششی از گراف‌ها، نگاشت پوششی است. دقت شود در مبحث نگاشت‌های پوششی فضای توپولوژیک این مطلب وجود دارد اما از آن جا که تعریف نگاشت پوششی برای گراف‌ها دقیقاً منطبق با تعریف نگاشت پوششی فضاهای توپولوژیک نیست لذا باید این مطلب اثبات گردد و یا این‌که اندیس زاگرب بالابره‌های یک گراف حاصل ضربی با این گراف چه رابطه‌ای دارند؟ و با استفاده از نگاشت پوششی بتوانیم برای حاصل ضرب دو پوشش ارتباط برقرار کنیم.

**قضیه ۲.۲.** فرض کنیم  $G_i$  و  $C_i$  گراف با یال‌ها و مجموعه رئوس  $V_{G_i} = V_{C_i}$ ،  $E_{G_i} = E(C_i)$  و  $E_{C_i} = E(C_i)$  به طوری که  $1 \leq i \leq n$  باشند.  $f_i$  نگاشت‌های پوششی از  $C_i$  به  $G_i$  به طوری که  $1 \leq i \leq n$  باشند و گراف  $C_i$  یک  $h_i$ -بالبر می‌باشد. در این صورت  $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$  نگاشت پوششی از  $\otimes_{i=1}^n C_i$  به  $\otimes_{i=1}^n G_i$  است و  $\otimes_{i=1}^n C_i$  یک گراف  $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_n$ -بالبر می‌باشد و برای  $j = 1, 2, \dots, n$  خواهیم داشت

$$M_j(\otimes_{i=1}^n C_i) = \prod_{i=1}^n h_i \times M_j(\otimes_{i=1}^n G_i)$$

برهان. در ابتدا نشان می‌دهیم  $f_1 \times f_2 : C_1 \times C_2 \rightarrow G_1 \times G_2$  نگاشت پوششی است. برای این منظور باید نشان دهیم نگاشت  $f_1 \times f_2 : V_{C_1} \times V_{C_2} \rightarrow V_{G_1} \times V_{G_2}$  راس دلخواه  $(u, v)$  از  $V_{G_1} \times V_{G_2}$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که برای  $i = 1, 2$  نگاشت  $f_i : V_{C_i} \rightarrow V_{G_i}$  نگاشتی برو است رئوس  $a \in V_{C_1}$ ،  $x \in V_{C_2}$  موجودند به طوری که  $f_1(a) = u$  و  $f_2(x) = v$  بنابراین  $f_1 \times f_2((a, x)) = (u, v)$  و لذا نگاشت  $f_1 \times f_2 : V_{C_1} \times V_{C_2} \rightarrow V_{G_1} \times V_{G_2}$  نگاشتی برو است. اگر  $(a, x)$  راس دلخواهی از  $V_{C_1} \times V_{C_2}$  باشد، کافی است نشان دهیم که  $f_1 \times f_2$  یال‌های حول  $(a, x)$  را در تناظر یک به یک به یال‌های حول  $(f_1(a), f_2(x))$  نگاشت می‌کند. در نظر بگیرید  $(w, k)$  یال دلخواه  $(f_1(a), f_2(x))$  است. ما دو حالت داریم، اگر  $f_1(a) = w$ ، آنگاه  $f_2(x)k \in E_{G_2}$ . از آنجایی که  $f_2 : V_{C_2} \rightarrow V_{G_2}$  نگاشت پوششی است،  $y \in f_2^{-1}(k) \subseteq V_{C_2}$  وجود دارد به طوری که  $xy \in E_{C_2}$ . بنابراین  $(a, x)(a, y)$  یالی است که با  $f_1 \times f_2$  به  $(f_1(a), f_2(x))(w, k)$  نگاشت می‌شود. حالت دوم، اگر  $f_2(x) = k$ ، آنگاه  $f_1(a)w \in E_{G_1}$ . از آنجایی که  $f_1 : C_1 \rightarrow G_1$  نگاشت پوششی است،  $b \in V_{C_1}$  وجود دارد به طوری که  $f_1(b) = w$ . بنابراین  $ab \in E_{C_1}$  و  $(a, x)(b, x)$  یالی است که با  $f_1 \times f_2$  تا  $(f_1(a), f_2(x))(w, k)$  نگاشت می‌شود. اکنون نشان می‌دهیم که  $f_1 \times f_2$  یال‌های حول  $(a, x)$  را در تناظر یک به یک به یال‌های حول  $(f_1(a), f_2(x))$  نگاشت می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم که  $(a, x)(b, y)$  و  $(a, x)(\tilde{b}, \tilde{y})$  یال‌هایی هستند که با  $f_1 \times f_2$  به  $(f_1(a), f_2(x))(f_1(b), f_2(y))$  و  $(f_1(a), f_2(x))(f_1(\tilde{b}), f_2(\tilde{y}))$  نگاشت می‌شوند و  $(a, x)(b, y)$  و  $(a, x)(\tilde{b}, \tilde{y})$  یال‌های حول  $(a, x)$  هستند. از آنجایی که  $(a, x)(b, y)$  یالی از  $C_1 \times C_2$  است، دو حالت وجود دارد. اگر  $a = b$ ، آنگاه  $xy \in E_{C_2}$  از طرفی  $f_2 : C_2 \rightarrow G_2$  نگاشت پوششی است، لذا  $f_2$  یال  $xy$  را در تناظر یک به یک به یالی در  $E_{G_2}$  می‌برد، پس  $f_2(x)f_2(y) \in E_{G_2}$ . همچنین از آنجایی که  $f_2(x)f_2(\tilde{y}) = f_2(x)f_2(y)$  و  $f_2(x)f_2(\tilde{y}) = f_2(x)f_2(y)$  در  $E_{G_2}$  نگاشت است، لذا  $f_2$  یال  $x\tilde{y}$  را یک به یک و برو به  $f_2(x)f_2(\tilde{y}) = f_2(x)f_2(y)$  نگاشت می‌کند. بنابراین  $xy = x\tilde{y}$  پس  $y = \tilde{y}$ . طبق تعریف یال‌های  $C_1 \times C_2$  داریم  $a = b$  و لذا

$y = \tilde{y}$  و  $b = \tilde{b}$  بنابراین  $(a, x)(b, y) = (a, x)(\tilde{b}, \tilde{y})$ . در نتیجه  $f_1 \times f_2$  یال‌های حول  $(a, x)$  را در تناظر یک به یک به یال‌های حول  $(f_1(a), f_2(x))$  ترسیم می‌کند.

حالت دوم، اگر  $x = y$ ، آنگاه  $ab \in E_{C_1}$  چون  $f_1 : C_1 \rightarrow G_1$  نگاشت پوششی است،  $f_1$  یال  $ab$  را یک به یک و برو به یال  $f_1(a)f_1(b)$  در  $E_{G_1}$  نگاشت می‌کند. همچنین از آن جایی که  $f_1(a)f_1(\tilde{b}) = f_1(a)f_1(b)$  و  $f_1 : C_1 \rightarrow G_1$  نگاشت پوششی است،  $f_1$  یال  $a\tilde{b}$  را یک به یک و برو به  $f_1(a)f_1(\tilde{b}) = f_1(a)f_1(b)$  در  $E_{G_1}$  نگاشت می‌کند. بنابراین  $ab = a\tilde{b}$  و در نتیجه  $b = \tilde{b}$ . طبق تعریف یال‌های  $C_1 \times C_2$  داریم  $x = \tilde{y}$ . پس  $y = \tilde{y}$  و  $b = \tilde{b}$ ، لذا  $(a, x)(b, y) = (a, x)(\tilde{b}, \tilde{y})$ . بنابراین  $f_1 \times f_2$  یال‌های حول  $(a, x)$  را در تناظر یک به یک به یال‌های حول  $(f_1(a), f_2(x))$  ترسیم می‌کند و در نتیجه  $f_1 \times f_2 : C_1 \times C_2 \rightarrow G_1 \times G_2$  نگاشت پوششی است.

اگر  $f_i : C_i \rightarrow G_i$ ، نگاشت پوششی و  $h_i$ -بالابر  $G_i$  باشد، که در آن  $i = 1, 2$  است، پس با توجه به تعریف  $C_1 \times C_2$  می‌توان گفت هر رأس دلخواه  $(a, b)$  از  $G_1 \times G_2$  تا  $f^{-1}((a, b))$  آن دقیقاً دارای  $h_1 \times h_2$  عنصر است و بنابراین  $C_1 \times C_2$  یک  $h_1 \times h_2$ -بالابر  $G_1 \times G_2$  است. در نتیجه  $M_j(C_1 \times C_2) = h_1 \times h_2 \times M_j(G_1 \times G_2)$ ، که در آن  $j = 1, 2$  می‌باشد. (به قضیه ۱.۲ مراجعه کنید). با استقرا ریاضی، می‌توانیم ثابت کنیم  $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$  نگاشت پوششی از  $\otimes_{i=1}^n C_i$  به  $\otimes_{i=1}^n G_i$  است و  $\otimes_{i=1}^n C_i$  یک گراف  $h_i$ -بالابر می‌باشند و برای  $j = 1, 2$  خواهیم داشت  $M_j(\otimes_{i=1}^n C_i) = \prod_{i=1}^n h_i \times M_j(\otimes_{i=1}^n G_i)$ .  $\square$

گراف  $G$  را  $r$ -منظم می‌نامند، اگر برای هر  $a, b \in V(G)$  داشته باشیم  $d_G(a) = d_G(b) = r$ . در این طرح گراف  $r$ -منظم  $G$  با  $n$  راس را با  $G_r^n$  نشان می‌دهیم. همچنین گراف کامل با  $n$  راس را با  $K_n$  نشان می‌دهیم.

**مثال ۳.۲.** توجه داشته باشید برای هر  $1 \leq i \leq n$  نگاشت  $f_i : G_{n_i-1}^{h_i \times n_i} \rightarrow K_{n_i}$  نگاشت پوششی است و گراف  $G_{n_i-1}^{h_i \times n_i}$  یک  $h_i$ -بالابر از گراف  $K_{n_i}$  است. با قضیه ۲.۲  $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$  نگاشت پوششی از  $\otimes_{i=1}^n G_{n_i-1}^{h_i \times n_i}$  به  $\otimes_{i=1}^n K_{n_i}$  است و گراف  $\otimes_{i=1}^n G_{n_i-1}^{h_i \times n_i}$  یک  $M_j(\otimes_{i=1}^n G_{n_i-1}^{h_i \times n_i}) = \prod_{i=1}^n h_i$ -بالابر از گراف  $\otimes_{i=1}^n K_{n_i}$  است، بنابراین  $M_j(\otimes_{i=1}^n K_{n_i}) = \prod_{i=1}^n h_i \times M_j(\otimes_{i=1}^n G_{n_i-1}^{h_i \times n_i})$ ، که در آن  $j = 1, 2$ . خلیفه و همکاران در قضیه ۱ مرجع [۲] ثابت کردند که،  $M_1(\otimes_{i=1}^n K_{n_i}) = (\prod_{i=1}^n n_i)(\sum_{i=1}^n (n_i - 1))^2$  و در نتیجه

$$\begin{aligned} M_1(\otimes_{i=1}^n G_{n_i-1}^{h_i \times n_i}) &= (\prod_{i=1}^n h_i)(\prod_{i=1}^n n_i)(\sum_{i=1}^n (n_i - 1))^2 \\ &= (\prod_{i=1}^n h_i n_i)(\sum_{i=1}^n (n_i - 1))^2 \end{aligned}$$

### مراجع

1. A.R. Ashrafi, T. Došlić and A. Hamzeh, *Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem 65 (2011), 85-92.
2. M.H. Khalifeh, H. Yousefi-Azari and A.R. Ashrafi, *The first and the second Zagreb indices of graph operations*, Discrete Appl. Math 157 (2009), 804-811.
3. H. Seifert and W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.

# معادلات و سیستم های دینامیکی

## رویکرد جدید در مسئله توزیع و انتشار آلودگی هوا

قادر درخوشی<sup>۱</sup>\* و کریم ایواز<sup>۲</sup>

<sup>۱،۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، آمار و کامپیوتر دانشگاه تبریز  
*gaderdarkhooshi1352@gmail.com*  
<sup>۳</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، آمار و کامپیوتر دانشگاه تبریز  
*waz@tabriz.u.ac.ir*

چکیده. انتشار آلاینده هوا در شهرها و مناطق صنعتی یکی از اساسی‌ترین مشکلاتی است که انسان در قرن حاضر مواجه است. با پیشرفت علم و بوجود آمدن قطب‌های صنعتی جدید، بر میزان این آلودگی‌ها در جهان افزوده می‌شود. سالیانه ۷ میلیون نفر در اثر آلودگی هوا جان خود را از دست می‌دهند که ۹۰ درصد آنان در کشورهای توسعه یافته هستند. در بعضی کشورها تعداد افرادی که در اثر همین عامل جان خود را از دست می‌دهند بیشتر از قربانیان سوانح رانندگی است. در این مقاله ابتدا مدل‌های ریاضی مختلف حاکم بر پدیده‌های جوی ارائه می‌دهیم. نظر به ضرورت ارائه رویکرد جدید، مدل اصلاحی را بیان و در خصوص جواب تحلیلی و عددی آن مدل بحث می‌کنیم.

### ۱. پیش‌گفتار

محققان تا بحال برای آلودگی هوا مدل‌های زیادی ارائه نمودند. شبیه‌سازی پدیده‌ای مانند آلودگی هوا، به دلیل پیچیدگی‌های جوی، نیاز بررسی و مشخص نمودن عوامل بسیاری دارد. از آن جمله می‌توان به سرعت و جهت باد، وضعیت دره‌می هوا، رطوبت، فشار، دما و توان آن‌ها از طرف دیگر اشاره کرد. به همین دلیل توانایی مدل در ساده کردن مسئله، بدون آن که به ساختار کلی آن آسیبی برسد و جواب‌ها با خطای ناچیز همراه گردند، از اهمیت بالایی برخوردار است. مدل‌های مختلفی تاکنون برای این منظور پیشنهاد گردیده‌اند، که از این میان می‌توان به مدل‌های

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. معادله انتشار ۱، تفاضلات متناهی ۲، مرز آزاد ۳، شرط پایداری ۴، سخنران

ق. درخوشی وک. ایواز

جعبه‌ای [۱] لاگرانژی، گوس [۲] اشاره کرد با این گفتار ما به ارائه مدل جدید که دقیق‌تر و کارآمدتر از مدل‌های دیگر است می‌پردازیم. ابتدا با بیان قوانین انتشار فیگ به بررسی مسئله در یک بعدی می‌پردازیم و در آخر مسئله را از باب عددی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## ۲. بیان مسئله و معادلات حاکم

قوانین نفوذ فیک هنگامی که ذرات به طور یکنواخت در یک گاز پراکنده می‌شوند حرکت براونی موقعیت یک ذره منفرد را تغییر می‌دهد. اما توزیع تمامی ذرات تغییر نخواهد کرد وقتی ذرات بطور یکنواخت پراکنده هستند حرکت براونی سرانجام گرایش به حرکت از نواحی با غلظت زیاد به نواحی با غلظت کم دارد. این فرآیند به نفوذ ذره شناخته شده است. دو قانون عمومی برای نفوذ مولکولی به کار می‌رود که به قوانین نفوذ فیک معروف است. با این توضیحات، معادله انتشار آلودگی هوا در حالت سه بعدی زیر بدون شرایط مرزی و اولیه را معرفی می‌کنیم که در آن  $v_x, v_y, v_z$  به ترتیب معرف سرعت‌ها در جهت  $x, y, z$  و  $k_x, k_y, k_z$  به ترتیب معرف ضریب انتشار در جهت  $x, y, z$ ،  $S(x, z, t)$  منبع یا چشمه آلاینده‌هاست [۳].

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = k_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S(x, z, t) \quad (1.2)$$

اگر شرایط مرزی در محور  $y$  با محور  $x$  یکسان در نظر بگیریم مسئله به حالت دو بعدی زیر تقلیل پیدا می‌کند

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} &= k_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S(x, z, t), \\ &\circ < x < L, \circ < z < H, t > \circ \\ c(x, z, \circ) &= f(x, z), \\ c(\circ, z, t) = \circ \quad c(L, z, t) = \circ, \quad \circ \leq z \leq H, \\ \frac{\partial c}{\partial z}(x, \circ, t) = \circ, \quad \frac{\partial c}{\partial z}(x, H, t) = \circ, \quad \circ \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (2.2)$$

حالا ما مدل فوق را به مدل جدید ارتقاء می‌دهیم از آنجا یک مرز بین هوای آلوده و هوای پاک با زمان تغییر می‌کند اگر  $\Phi = x - \phi(z, t)$  معادله مرز بین این دو باشد در این صورت مسئله واقعی از نوع مسئله مرز آزاد است بنابراین مدل زیر را پیشنهاد می‌گردد.

آلودگی هوا

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = k_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S(x, z, t),$$

$$0 < x < L \quad 0 < z < H, \quad t > 0$$

$$c(x, z, 0) = f(x, z),$$

$$c(0, z, t) = g(z, t), \quad 0 \leq z \leq H,$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \phi(0, t) \quad \frac{\partial c}{\partial z}(x, H, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \phi(H, t),$$

$$c(x, z, t) \Big|_{x=\phi(z, t)} = 0,$$

$$\langle \nabla \Phi, \nabla c \rangle \Big|_{\Phi(x, z, t)} = k \frac{\partial \Phi}{\partial t}, t > 0, \quad \phi(z, 0) = R(z), \quad (3.2)$$

مسئله مرز آزاد یک بعدی زیر مفروض است که در آن نشانگر مرز آزاد است [۴].

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + S(x, t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < \phi(t),$$

$$c(0, \tau) = g(\tau),$$

$$c(x, 0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq b,$$

$$c(\phi(t), t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$c_x(\phi(t), t) = -\phi'(t), \quad 0 < t < T,$$

$$\phi(0) = b > 0, \quad (4.2)$$

قضیه ۱.۲. فرض کنید  $h(x), g(t), S(x, t)$  ( $0 \leq x \leq b, 0 < t < \sigma$ ) توابع پیوسته و مشتق پذیر باشند آنگاه  $c(x, t), \phi(t)$  جواب یگانه موضعی برای سیستم ۴.۲ به ازای تمامی  $t < \infty$  وجود دارد.

### ۳. حل عددی مسئله

در این روش تعداد فاصله بین  $x = 0$  و مرز متحرک برابر  $x = \phi(t)$  را به  $N$  زیرفاصله تقسیم می‌کنیم اگر مشتق  $c$  نسبت به  $t$  در موقعیت  $x = \phi(t)$  بدست آوریم خواهیم داشت [۵].

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_t + \frac{\partial c}{\partial t} \Big|_x$$

بنابراین مسئله بدون بعد بصورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{x_i}{\phi(t)} \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

ق. درخوشی وک. ایواز

. با بکار بردن تفاضلات متناهی مشتق پیشرو زمانی و مشتق مرکزی مکانی از مرتبه دوم خواهیم داشت. اگر معادله صریح بی بعد شده ۱.۳ را بنویسیم به صورت زیر در می‌آید.

$$c_i^{m+1} = c_i^m + \left( \frac{kx_i^m \phi'_m}{h\phi_m} - \frac{kv}{h} \right) (c_{i+1}^m - c_i^m) + \frac{k}{h^2} (c_{i+1}^m - 2c_i^m + c_{i-1}^m) \quad (2.3)$$

مثال ۱.۳. مسئله مرز آزاد زیردارای جواب دقیق می باشد روش عددی گفته شده را بکار ببرید

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad 0 < x < \phi(t)$$

$$c(0, t) = t, \quad t > 0$$

$$c(x, 0) = \frac{-x}{v} \quad v > 0$$

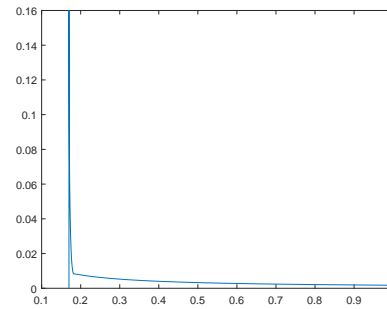
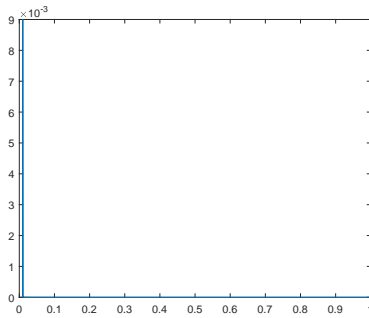
$$c(\phi(t), t) = 0,$$

$$-v^2 c_x(\phi(t), t) = \frac{d\phi}{dt} \quad t > 0, \quad 0 < x < \phi(t), \quad \phi(0) = 0 \quad (3.3)$$

در هر دو شکل به ازای مقادیر زیر رسم شده است

$$\Delta x = 10^{-2}, \quad \Delta t = 10^{-6}, \quad v = 1, \quad D = 1 \quad 0.17 \leq t \leq 1$$

$$\Delta x = 10^{-3}, \quad \Delta t = 10^{-7}, \quad v = 1, \quad D = 1 \quad 0.1 \leq t \leq 1$$



شکل ۱:  $0.1 \leq t \leq 1, error = 10^{-5} \times 10^{-7}, 0.17 \leq t \leq 1 error = 10^{-1}$

## مراجع

1. Jakeman, A. J., Bai Jun, and J. A. Taylor. *On the variability of the wind speed exponent in urban air pollution models* Atmospheric Environment (1967)
2. U. Arora, U. Arora, S. Gokkhar and R.S. Gupta, *Removal model suitable for air pollution emitted from an elevated source*, Applied Mathematical Modelling, vol. 15, no. 7 pp 386-389, 1991.

3. Kewalee Suebyat and Nopparat Pochai , *Numerical Simulation for a Three-Dimensional Air Pollution Measurement Model in a Heavy Traffic Area under the Bangkok Sky Train Platform*,2018 .
4. Friedman , *Partial Differential Equations of parabolic Type* , prentice-Hall,1983.
5. A. S. E. L. Ç. U. K., A. R. Bahadir, and A. Özdeş, , *The numerical solution of one-phase classical Stefan problem*. Journal of computational and applied mathematics 81.1 (1997): 135-144.

## سیستم‌های تابع تکرار توسعه یافته

مهدی آقایی<sup>۱</sup> \* و داود احمدی دستجردی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> پردیس حکیم فردوسی کرج، دانشگاه فرهنگیان  
 mahdi.aghaei66@gmail.com  
<sup>۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی؛ دانشگاه گیلان  
 dahmadi1387@gmail.com

چکیده. یک سیستم تابع تکرار روی فضای نوبت کامل پارامتری می‌شود. در اینجا، به جای فضای نوبت کامل، فضای نوبت دلخواه  $\Sigma$  را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه، بررسی می‌کنیم که چگونه ویژگی‌های دینامیکی فضای نوبت، قابل گسترش به سیستم تابع تکرار است که با مدارها یا واژه‌های  $\Sigma$  ساخته می‌شوند. برای نمونه، در یک سیستم تابع تکرار تراپا که فضای نوبت آن سافیک و تابع‌های آن همگی نیم‌باز است، نقطه‌ای تراپا مانند  $t \in \Sigma$  هست که  $(X, f_t)$  تراپا است.

### ۱. پیش‌گفتار

سیستم‌های تابع تکرار معمولی (IFS) شامل یک فضای متری فشرده مانند  $X$  و مجموعه‌ای شامل  $k$  تابع پیوسته مانند  $\{f_0, \dots, f_{k-1}\}$  روی  $X$  است که در آن‌ها رد نقطه‌ی  $x \in X$  با اثر ترکیب‌های دلخواه از این تابع‌ها بدست می‌آید؛ یا به طور معادل می‌توان گفت ترکیب تابع‌ها را وابسته به واژه‌های فضای نوبت کامل می‌کنیم؛ یعنی وقتی می‌نویسیم  $f_u(x)$  منظور  $f_{u_n} \circ \dots \circ f_{u_1}(x)$  است که  $u = u_1 \dots u_n$  یک واژه از فضای نوبت کامل روی  $k$  نماد است. بنابراین، هیچ محدودیتی در ترکیب تابع‌ها وجود ندارد حال آنکه در مثال‌های طبیعی معمولاً چنین نیست و نمی‌توان تابع‌ها را به دلخواه با یکدیگر ترکیب کرد. از این رو بر آن شدیم

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 37B10, 37B55, 37B05; Secondary 37A25.

واژگان کلیدی. سیستم‌های تابع تکرار (IFS)، سیستم‌های نامختار (NDS).  
 \* سخنران

سیستم‌های تابع تکراری را مطالعه کنیم که تابع‌های آن نمی‌توانند آزادانه با یکدیگر ترکیب شوند و باید محدودیت‌هایی را بپذیرند. برای این منظور با جایگزینی فضای نوبت کامل با زیرفضای دلخواه از آن، ترکیب تابع‌ها با توجه به قانونی که این زیرفضا القا می‌کند، انجام می‌شود. بنابراین، سیستم تابع تکرار توسعه یافته را تعریف کردیم. این سیستم سه‌تایی  $(X, \mathcal{F}, \Sigma)$  است که در آن  $\mathcal{F}$  مجموعه‌ای شامل  $k$  تابع پیوسته و  $\Sigma$  یک زیرفضای نوبت دلخواه از فضای نوبت کامل است. از جمله مباحث مورد علاقه‌ی ما، بررسی رابطه‌ی دینامیک فضای نوبت دلخواه با دینامیک  $\mathcal{I}$  خواهد بود. در واقع پرسش ما این است که با تغییر فضای نوبت، خواص دینامیکی IFS چه تغییری می‌کند؟

## ۲. مفاهیم اولیه

مجموعه شمارا و ناتهی  $\mathcal{A}$  را به عنوان مجموعه‌ای از نمادها در نظر می‌گیریم. همچنین، فرض کنید  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$   $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}})$  که  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \sigma_i \in \mathcal{A}\}$ ، مجموعه همه دنباله‌های از دو طرف (از یک طرف) نامتناهی باشد. یک واژه یا بلوک دنباله‌ای متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  است. طول واژه‌ی  $u$  تعداد نمادهایی است که  $u$  دارد و آن را با  $|u|$  نشان می‌دهیم. واژه‌ای که شامل هیچ نمادی نباشد را یک واژه‌ی تهی نامیده و با  $\varepsilon$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.** برای الفبای  $\mathcal{A}$ ، فضای نوبت کامل مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های از دو طرف نامتناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  است و بصورت

$$\Sigma_{|\mathcal{A}|} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \sigma_i \in \mathcal{A}\}$$

نمایش داده می‌شود. اگر برای  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ، آن‌گاه  $\Sigma_{|\mathcal{A}|}$  را  $n$ -فضای نوبت کامل نامیده و با  $\Sigma_n$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲.۲.** نگاشت  $\tau : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  را نگاشت نوبت می‌نامیم، هرگاه برای هر  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  داشته باشیم:

$$\tau((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (\sigma_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

اگر  $\sigma \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  باشد، واژه‌ای مانند  $u$  در  $\sigma$  ( $u \subset \sigma$ ) از مختص  $i$  تا مختص  $j$  را بصورت

$$\sigma_{[i, j]} = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_j$$

نشان می‌دهیم. برای  $n \in \mathbb{N}$ ، واژه‌ای است که از به هم چسباندن  $n$  تا  $u$  بدست آمده و قرار می‌دهیم  $u^\circ = \varepsilon$ . همچنین، نقطه‌ی  $uuuuuu \dots$  با  $u^\infty$  نمایش داده می‌شود.

IFS متشکل از مجموعه‌ای از تابع‌های پیوسته  $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$  روی  $X$  می‌باشد که در اینجا، مجموعه‌ی  $\mathcal{F}$  را متناهی در نظر می‌گیریم. مدار پیش‌ران یک نقطه مانند  $x \in X$  را با  $O^+(x)$  نمایش می‌دهیم که برابر با مجموعه همه مقادیر ممکن از ترکیب  $f_i$ ها در نقطه  $x$  است.

فرض کنید  $\Sigma_k$  فضای نوبت کامل روی  $k$  نماد و  $\mathcal{L}(\Sigma_k)$  زبان  $\Sigma_k$  شامل همه واژه‌های ممکن باشد. در واقع،  $\mathcal{L}(\Sigma_k)$  تحت عمل چسباندن واژه‌ها یک نیم‌گروه است. عمل این نیم‌گروه روی

سیستم‌های تابع تکرار توسعه یافته

$X$  به صورت پایین تعریف می‌شود.

$$f : \mathcal{L}(\Sigma_k) \times X \rightarrow X$$

$$f(u, x) = f_u(x)$$

که در آن

$$f_u(x) = f_{u_1 \dots u_n}(x) = f_{u_n} \circ \dots \circ f_{u_1}(x), \quad u = u_1 \dots u_n \in \mathcal{L}(\Sigma_k).$$

مدار پیش‌ران نقطه‌ی  $x$  در سیستم تابع تکرار عبارت است از

$$\mathcal{O}^+(x) = \{f_u(x) : u \in \mathcal{L}(\Sigma_k)\}.$$

در این صورت سه‌تایی  $\mathcal{J} = (X, \mathcal{F}, \Sigma_{|\mathcal{F}|})$  یک سیستم تابع تکرار توپولوژیکی خواهد بود. در اینجا، سیستم تابع تکرار توسعه یافته را به صورت  $\mathcal{J} = (X, \mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_{k-1}\}, \Sigma)$  تعریف می‌کنیم که در آن  $f_i$ ها پیوسته و  $\Sigma$  یک فضای نوبت دلخواه روی  $k$  نماد است که لزوماً فضای نوبت کامل نیست. در این تعریف  $\Sigma$  جایگزین  $\Sigma_{|\mathcal{F}|}$  شده است. بنابراین، مدار پیش‌ران  $x$  عبارت است از

$$\mathcal{O}^+(x) = \{f_u(x) : u \in \mathcal{L}(\Sigma)\}.$$

دقت کنید  $f_u(f_v(x)) = f_{vu}(x)$  که  $vu$  واژه‌ای مجاز است. یعنی،  $vu \in \mathcal{L}(\Sigma)$  است. فرض کنید  $u = u_1 \dots u_n \in \mathcal{L}(\Sigma)$  است و قرار دهید  $u^{-1} := u_n \dots u_1$ . آن‌گاه، برای هر  $A \subseteq X$  داریم:

$$\begin{aligned} (f_u)^{-1}(A) &= (f_{u_n} \circ \dots \circ f_{u_1})^{-1}(A) \\ &= f_{u_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{u_n}^{-1}(A) \\ &= f_{u^{-1}}^{-1}(A), \end{aligned}$$

بنابراین، اگر  $f_i$ ها همسان‌ریختی باشند، مسیر پسران، پیش‌ران و دوطرفه برای نقطه  $x$  به صورت پایین تعریف می‌شود.

$$\mathcal{O}_-(x) = \{f_{u^{-1}}^{-1}(x) : u \in \mathcal{L}(\Sigma)\},$$

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}_+^-(x) = \mathcal{O}^+(x) \cup \mathcal{O}_-(x).$$

فرض کنید  $(X, d)$  فضای متری و فشرده باشد و برای هر  $n \in \mathbb{N}$  نگاشتی پیوسته باشد. آن‌گاه، دنباله‌ی  $\{f_n\}_1^\infty$  که در منابع مختلف آن را با  $f_{1,\infty}$  نمایش می‌دهند، سیستم نامختار گسسته  $(X, f_{1,\infty})$  را تعریف می‌کند [۲]. اما، در یک سیستم تابع تکرار دینامیک در طول یک مدار از فضای نوبت مانند  $\sigma$  یک NDS تعریف می‌کند که ما در اینجا، آن را با  $(X, f_\sigma)$  یا  $\{f_{\sigma_i}\}_{i=1}^\infty := f_{\sigma_{1,\infty}}$  نشان می‌دهیم. در اینجا، تمرکز ما روی سیستم‌های نامختاری است که تابع‌های آن از مجموعه‌ی

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \rightarrow X : f_j \text{ پیوسته}, j \in \mathcal{A}\} \quad (1.2)$$

می‌آید. بنابراین، برای  $t = t_1 t_2 \dots$  که  $t_i \in \mathcal{A}$ ،  $f_{t_1, \infty} = \dots \circ f_{t_2} \circ f_{t_1}$  یک سیستم نامختار در طول  $t$  است. مدار یک نقطه مانند  $x$  در طول  $t$  در سیستم نامختار  $f_{t_1, \infty}$  عبارت است از

$$\mathcal{O}_t^+(x) = \{x, f_{t_1}(x), f_{t_1 t_2}(x), \dots\}.$$

دقت کنید که تغییر نوبت سیستم نامختار  $f_{t_1, \infty}$  به اندازه  $i$ ، خود یک سیستم نامختار به صورت

$$f_{t_i, \infty} = \dots \circ f_{t_{i+1}} \circ f_{t_i}$$

است. فرض کنید

$$\mathbf{F}_t^+ = \mathbf{F}_t^+(f_{t_1, \infty}) = \{f_{t_i, \infty} : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$$

خانواده تغییر نوبت‌های سیستم نامختار  $f_{t_1, \infty}$  باشد. حال می‌توان گزاره پایین را بیان کرد.

$$\overline{\mathbf{F}_t^+} = \{f_{\sigma_1, \infty} : \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \in \overline{\mathcal{O}^+(t)}\} \quad [1, \text{قضیه ۱.۲}] \quad \text{گزاره ۳.۲.}$$

### ۳. دست‌آوردهای پژوهشی

لم ۱.۳. فرض کنید  $\mathcal{I} = (X, \mathcal{F}, \Sigma)$  و  $\mathcal{I}' = (Y, \mathcal{G}, \Sigma')$  دو سیستم تابع تکرار باشند که  $\mathcal{I}'$  یک فاکتور از  $\mathcal{I}$  است. همچنین، نقطه‌ای متناوب برای  $\mathcal{I}$  در طول  $\sigma$  است. آن‌گاه،  $y \in Y$  و  $\sigma' \in \Sigma'$  هست که  $y$  در طول  $\sigma'$  متناوب باشد.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم  $\mathcal{I}$  و  $x \in X$  به مانند لم بالا و  $\Sigma$  یک فضای تحویل‌ناپذیر سافیک باشد. آن‌گاه، نتیجه این لم همچنان برقرار است.

قضیه ۳.۳. فرض کنید  $\mathcal{I} = (X, \mathcal{F}, \Sigma)$  یک  $IFS$  پوشا و دارای خاصیت تصریح (قوی) در طول یک مدار تراپا مانند  $t = t_1 t_2 t_3 \dots \in \Sigma$  باشد. آن‌گاه،  $\mathcal{I}$  دارای خاصیت تصریح (قوی) در طول همه مدارهای  $\Sigma$  است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید  $\mathcal{I} = (X, \mathcal{F}, \Sigma)$  یک  $IFS$  پوشا با خاصیت سایه‌زنی در طول مدار تراپای  $t \in \Sigma$  باشد. آن‌گاه،  $\mathcal{I}$  دارای خاصیت سایه‌زنی در طول همه مدارهای  $\Sigma$  است.

قضیه ۵.۳. فرض کنید  $\mathcal{I} = (X, \mathcal{F}, \Sigma)$  یک  $IFS$  پوشا و تراپای توپولوژیک باشد که همه نگاشت‌های  $\mathcal{F}$  نیم‌باز هستند. همچنین، فرض کنید  $\Sigma$  فضای نوبت سافیک تحویل‌ناپذیر باشد. آن‌گاه، یک نقطه‌ی تراپای پیش‌ران مانند  $t$  در  $\Sigma$  هست که سیستم نامختار  $(X, f_t)$  تراپای نقطه‌ای است.

### مراجع

1. D.A. Dastjerdi and M. Aghaee, *Shift limits of a non-autonomous system*, Topology and its Applications 326 (2023), 108394.
2. S. Kolyada and L. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems*, Random and computational dynamics 2 (1996), no. 4, 205.

**55th Annual Iranian Mathematics Conference**

**14-16 August, 2024**

**Ferdowsi University of Mashhad, Iran**

**55th**



**03240-74315**