

# مجموعه مقالات

یازدهمین  
همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور

۲۵ الی ۲۶ مهر ماه  
۱۴۰۳

دانشگاه پیام نور استان یزد

مجموعه مقالات فارسی



انجمن ریاضی ایران



دانشگاه پیام نور  
استان یزد



بر اساس: ۰۳۲۴-۰۷۲۳۲۸

پایگاه استنادی  
علوم جهان اسلام

ویراستاران :

سعید میروکیلی

عضو هیات علمی دانشگاه یزد، یزد، ایران

روح اله غفارنژاد بیدکی

دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

## به نام خداوند بخشنده مهربان

### پیام دبیر علمی:

سپاس و ستایش بی‌پایان به درگاه حضرت حق، که با الطاف بی‌کران الهی، یازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور، با افتخار میزبانی دانشگاه پیام نور استان یزد برگزار گردید. این نشست علمی، که به همت گرانمایه‌ترین همکاران دانشگاه پیام نور و با هدف ایجاد پویایی و تبادل اندیشه در میان دانشمندان و پژوهشگران علوم ریاضی برنامه‌ریزی شد، ظرفیتی ارزشمند برای گسترش مرزهای دانش و ارتقای سطح علمی کشور فراهم آورد.

ایده برگزاری این همایش ارزشمند در پاییز سال ۱۴۰۲ در شورای پژوهشی دانشگاه پیام نور استان یزد مطرح گردید و به سرعت در شورای تخصصی گروه ریاضی پیام نور کشور به تصویب رسید. پس از آن، با هماهنگی‌های لازم و انجام مکاتبات با سازمان مرکزی دانشگاه پیام نور، انجمن ریاضی ایران، و پایگاه استنادی علوم جهان اسلام، مجوزهای ضروری اخذ گردید. همچنین مجلات

- *Journal of Mahani Mathematical Research*
- *Control and Optimization in Applied Mathematics*
- *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*

درخواست ما را جهت چاپ مقالات برتر همایش پذیرفتند.

از همان ابتدا، همایش به صورت ترکیبی از حضور فیزیکی و مجازی طراحی شد که این خودگامی نوین در مسیر گسترش تعاملات علمی به شمار می‌رفت. کمیته علمی و داوران، با دقت و وسواس، از میان برجسته‌ترین اساتید معتبر دانشگاه‌های کشور انتخاب شدند، و دبیرخانه کنفرانس از فروردین‌ماه سال ۱۴۰۳ فعالیت خود را آغاز کرد. در نتیجه این تلاش‌ها، تعداد ۳۱۶ مقاله علمی در زمینه‌های گوناگون علوم ریاضی به دبیرخانه ارسال گردید که پس از ارزیابی‌های دقیق، ۱۴۲ مقاله برای ارائه شفاهی و ۹۴ مقاله برای ارائه به صورت پوستر پذیرفته شدند.

بحمدالله، این همایش با انسجام و کیفیتی درخور جامعه علمی کشور برگزار گردید. حضور سخنرانان مدعو، که از چهره‌های برجسته و صاحب‌نظر در حوزه ریاضیات بودند، به غنای علمی کنفرانس افزود و راهی برای بروز ایده‌های ناب پژوهشی گشود. همکاری دانشگاه پیام نور استان یزد با دانشگاه یزد به عنوان دانشگاه مادر استان، و برپایی سخنرانی و کارگاه با حضور چهره ماندگار ریاضی کشور، جناب آقای پروفیسور عبدالله محمودیان، در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد تجربه‌ای بی‌بدیل بود. امید می‌رود که اینگونه هم‌افزایی‌ها در آینده با دیگر دانشگاه‌های کشور به نحو گسترده‌تر ادامه یابد.

با توجه به اهمیت روزافزون هوش مصنوعی و همچنین جایگاه حیاتی ریاضیات در پیشبرد بسیاری از علوم، سه کارگاه تخصصی در حاشیه این همایش برگزار شد که فرصتی ناب برای یادگیری و تعامل علمی میان شرکت‌کنندگان فراهم آورد، و بار دیگر اهمیت و جایگاه والا و بی‌بدیل ریاضیات را در دنیای امروز به یاد همگان آورد.

در پایان، با امید به آنکه این همایش نقطه عطفی در مسیر پیشرفت علوم ریاضی و بستری برای پرورش ایده‌های ناب پژوهشی بوده باشد، از تمامی اساتید، پژوهشگران، شرکت‌کنندگان گرامی، اعضای کمیته علمی و اجرایی، همه کسانی که با همکاری و حضور خویش بر شکوه این رویداد افزودند، صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم. به امید دیداری دوباره در رویدادهای علمی آینده.

سعید میروکیلی  
دبیر علمی همایش

رئیس شورای راهبردی همایش: دکتر کاظم حمیدی زاده

دبیر همایش: دکتر سعید میروکیلی

دبیر علمی همایش: دکتر سعید میروکیلی

دبیر اجرایی همایش: دکتر ناصر محمدی

اعضای کمیته علمی:

- ۱ دکتر مرجان ادیب ( دانشگاه پیام نور )
- ۲ دکتر حلیمه اردکانی ( دانشگاه پیام نور )
- ۳ دکتر مجید اسحق گرجی ( دانشگاه سمنان )
- ۴ دکتر مصطفی امینی ( دانشگاه پیام نور )
- ۵ دکتر محمدعلی ایرانمنش ( دانشگاه یزد )
- ۶ دکتر اسماعیل بابلیان ( دانشگاه خوارزمی )
- ۷ دکتر آرشام برومند سعید ( دانشگاه کرمان )
- ۸ دکتر قاسم برید لقمانی ( دانشگاه یزد )
- ۹ دکتر بهروز بیدآباد ( دانشگاه صنعتی امیر کبیر )
- ۱۰ دکتر امیر جعفری ( دانشگاه صنعتی شریف )
- ۱۱ دکتر مهدی جعفری ( دانشگاه پیام نور )
- ۱۲ دکتر جهانگیر چشم آور ( دانشگاه پیام نور )
- ۱۳ دکتر محمد حمیدی ( دانشگاه پیام نور )
- ۱۴ دکتر عقيله حیدری ( دانشگاه پیام نور )
- ۱۵ دکتر کاظم خشایارمنش ( دانشگاه فردوسی مشهد )
- ۱۶ دکتر داود درویشی سلوکلائی ( دانشگاه پیام نور )
- ۱۷ دکتر بیژن دواز ( دانشگاه یزد )
- ۱۸ دکتر اکبر رضایی ( دانشگاه پیام نور )
- ۱۹ دکتر رحیم زارع نهندی ( دانشگاه تهران )
- ۲۰ دکتر امیرحسام زعیم ( دانشگاه پیام نور )
- ۲۱ دکتر فهیمه سلطانیان ( دانشگاه پیام نور )
- ۲۲ دکتر مریم شمس سولاری ( دانشگاه پیام نور )
- ۲۳ دکتر عید عباسبندی ( دانشگاه بین المللی امام خمینی قزوین )
- ۲۴ دکتر آرام عزیزی ( دانشگاه پیام نور )
- ۲۵ دکتر یوسف علیپور فخری ( دانشگاه پیام نور )
- ۲۶ دکتر سعید علیخانی ( دانشگاه یزد )
- ۲۷ دکتر پیمان غیاثوند ( دانشگاه پیام نور )
- ۲۸ دکتر محمد فرشی ( دانشگاه یزد )
- ۲۹ دکتر شهریار فرهنگ راد ( دانشگاه پیام نور )
- ۳۰ دکتر کمال فلاحی ( دانشگاه پیام نور )
- ۳۱ دکتر طاهر قاسمی هنری ( دانشگاه خوارزمی )
- ۳۲ دکتر رضا قنبری ( دانشگاه فردوسی مشهد )
- ۳۳ دکتر نادر کنزی ( دانشگاه پیام نور )
- ۳۴ دکتر سیدمحمد مشتاقیون ( دانشگاه یزد )
- ۳۵ دکتر رئوفه معنویت ( دانشگاه پیام نور )
- ۳۶ دکتر رویا منتظری ( دانشگاه پیام نور )
- ۳۷ دکتر مجید میرزاویری ( دانشگاه فردوسی مشهد )
- ۳۸ دکتر حبیبه نظیف ( دانشگاه پیام نور )
- ۳۹ دکتر اسماعیل نیکوفر ( دانشگاه پیام نور )
- ۴۰ دکتر سیدمنصور واعظ پور ( دانشگاه صنعتی امیر کبیر )

۴۱ دکتر علیرضا وحیدی سپیدان ( دانشگاه پیام نور )  
۴۲ دکتر حمیدرضا یوسف زاده ( دانشگاه پیام نور )

## سخنرانان مدعو:

دکتر عباداله محمودیان ، دانشگاه صنعتی شریف  
کاربرد ماتریس ها در توموگرافی (سخنرانی و کارگاه)

دکتر سید منصور واعظ پور، دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
تعمیم ریاضی در قاب رشد قورباغه

دکتر مجید میرزاویری، دانشگاه مشهد  
با بازی آموز!

دکتر سعید علیخانی، دانشگاه یزد  
نسبت طلایی در نظریه گراف

دکتر مصطفی شمسی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
مقدمه ای بر یادگیری ماشین از منظر ریاضی

## کارگاه ها:

دکتر عباداله محمودیان ، دانشگاه صنعتی شریف  
کاربرد ماتریس ها در توموگرافی (سخنرانی و کارگاه)

دکتر علی رضا پاک گوهر، دانشگاه پیام نور  
دستیار پژوهشی هوش مصنوعی در پژوهش های محاسباتی و آموزش ریاضی

دکتر پریسا همتیان دهکردی، دانشگاه پیام نور  
گرس هاپر و هوش مصنوعی: تحولی در آموزش و حل مسائل ریاضی

## اسامی شرکت کنندگان و نویسندگان :

| ردیف | نام و نام خانوادگی (دانشگاه)                                      |
|------|-------------------------------------------------------------------|
| ۱    | زینب ابدی ( دانشگاه یزد )                                         |
| ۲    | احمد ابویی مهریزی ( دانشگاه فردوسی مشهد )                         |
| ۳    | محمد احمدوند ( دانشگاه آزاد اسلامی )                              |
| ۴    | کمال احمدی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                                |
| ۵    | قاسم احمدی ( دانشگاه پیام نور )                                   |
| ۶    | مرجان ادیب ( دانشگاه ملی مهارت )                                  |
| ۷    | پروین اردشیری ( آموزش و پرورش دهدشت )                             |
| ۸    | مهین اردشیری ( آموزش و پرورش تهران )                              |
| ۹    | حلیمه اردکانی ( دانشگاه پیام نور )                                |
| ۱۰   | هوشیار اسدی ( دانشگاه پیام نور )                                  |
| ۱۱   | فلورنتین اسمارنداخ ( دانشگاه نیو مکزیکو آمریکا )                  |
| ۱۲   | بهنام افشار ( دانشگاه تهران )                                     |
| ۱۳   | فاطمه اکبری هنجین ( دانشگاه پیام نور )                            |
| ۱۴   | محمدحسین اکرمی ابرقویی ( دانشگاه یزد )                            |
| ۱۵   | عفت اکرمی مقدم ( دانشگاه پیام نور )                               |
| ۱۶   | خدیجه امجدی ( دانشگاه پیام نور )                                  |
| ۱۷   | مصطفی امینی ( دانشگاه پیام نور )                                  |
| ۱۸   | فاطمه ایزدی ( دانشگاه آزاد شهرکرد )                               |
| ۱۹   | جواد ایزدی ( دانشگاه پیام نور )                                   |
| ۲۰   | زینب ایزدی ( دانشگاه پیام نور )                                   |
| ۲۱   | دانیل آ. رومانو ( موسسه بین المللی مجازی ریاضی، بوسنی و هرزگوین ) |
| ۲۲   | غلامرضا آقابابایی بنی ( دانشگاه جامع علمی کاربردی )               |
| ۲۳   | عادل آل مهدی ( دانشگاه پیام نور )                                 |
| ۲۴   | محمدحسن آهنگرانی فراهانی ( دانشگاه کاشان )                        |
| ۲۵   | فاطمه آیت الله زاده شیرازی ( دانشگاه تهران )                      |
| ۲۶   | حمیدرضا بامداد ( دانشگاه پیام نور )                               |
| ۲۷   | حسن برسام ( دانشگاه جیرفت )                                       |
| ۲۸   | سمیه برهانی نژاد راینی ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۲۹   | سارا برین ( دانشگاه بیرجند )                                      |
| ۳۰   | سامره بسطامی ( دانشگاه پیام نور )                                 |
| ۳۱   | فضل الرحمان بشرمل ( دانشگاه یزد )                                 |
| ۳۲   | حکیم بکری زاده ( دانشگاه پیام نور )                               |
| ۳۳   | نسرین بلوچ رودباری ( دانشگاه پیام نور )                           |
| ۳۴   | فرهاد بن محمد خواجه ( دانشگاه پیام نور )                          |
| ۳۵   | محمد بهلول ( دانشگاه تبریز )                                      |
| ۳۶   | بی بی خدیجه موسوی ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد بافق )               |
| ۳۷   | معصومه بی باک ( دانشگاه ملی مهارت )                               |
| ۳۸   | نرگس بیدآبادی ( دانشگاه یزد )                                     |
| ۳۹   | رضا بیرانوند ( دانشگاه لرستان )                                   |
| ۴۰   | فیروز پاشایی ( دانشگاه مراغه )                                    |
| ۴۱   | علیرضا پاک گوهر ( دانشگاه پیام نور )                              |
| ۴۲   | علیرضا پاک گهر ( دانشگاه پیام نور )                               |
| ۴۳   | وحید پروانه ( دانشگاه آزاد اسلامی )                               |
| ۴۴   | سعید پناهیان فرد ( دانشگاه پیام نور )                             |
| ۴۵   | جعفر پورامینی ( دانشگاه پیام نور )                                |

### اسامی شرکت کنندگان و نویسندگان (ادامه) :

|    |                                                      |
|----|------------------------------------------------------|
| ۴۶ | عادل تدین:فر ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان )      |
| ۴۷ | حمید ترابی ( دانشگاه فردوسی مشهد )                   |
| ۴۸ | وصال ترنج ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۴۹ | امیرتقی کریمی ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۵۰ | مجید ثابت ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۵۱ | محبوبه ثمره باقری ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )        |
| ۵۲ | علیرضا جانفدا ( دانشگاه بیرجند )                     |
| ۵۳ | آرش جدائی ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۵۴ | محمد جریره ( مرکز آمار و فناوری وزارت جهاد کشاورزی ) |
| ۵۵ | هاجر سادات جزایری نوکابادی ( دانشگاه پیام نور )      |
| ۵۶ | مهدی جعفری ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۵۷ | محمد جعفری ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۵۸ | سیدحسین جعفری پترودی ( دانشگاه آزاد اسلامی )         |
| ۵۹ | حسن جعفریان دهکردی ( دانشگاه پیام نور )              |
| ۶۰ | زهره جعفریانی ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۶۱ | کیوان جودیلی ( دانشگاه پیام نور )                    |
| ۶۲ | سیروس جهان پناه ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۶۳ | رضا جهانی نژاد ( دانشگاه کاشان )                     |
| ۶۴ | جهانگیر چشم آور ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۶۵ | مریم چغامیرزا ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۶۶ | رسول حاتمیان ( دانشگاه پیام نور )                    |
| ۶۷ | امیر حاج سلمانی ( دانشگاه صنعتی امیرکبیر )           |
| ۶۸ | زهره حبیبی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۶۹ | ارسلان حجت انصاری ( دانشگاه پیام نور )               |
| ۷۰ | ساره حسینی سعیدی ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۷۱ | سارا حسین پور ( دانشگاه شهید مدنی آذربایجان )        |
| ۷۲ | صدیقه حسینی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                  |
| ۷۳ | علیرضا حسینی دهمیری ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )      |
| ۷۴ | فاطمه حسینی فر ( پژوهشکده آموزش و پرورش خوزستان )    |
| ۷۵ | قربانعلی حقیقت دوست ( دانشگاه شهید مدنی آذربایجان )  |
| ۷۶ | اعظم حکم آبادی ( دانشگاه پیام نور )                  |
| ۷۷ | محمد حمیدی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۷۸ | کاظم حمیدی زاده ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۷۹ | داریوش حیدری ( مرکز آموزش عالی محلات )               |
| ۸۰ | فاطمه حیدری ( دانشگاه کاشان )                        |
| ۸۱ | عقیله حیدری ( دانشگاه پیام نور )                     |
| ۸۲ | محمد حیدری ( دانشگاه یزد )                           |
| ۸۳ | حمیدرضا خادم زاده ( دانشگاه ملی مهارت )              |
| ۸۴ | فرهاد خاکسار حقانی ( دانشگاه آزاد شهرکرد )           |
| ۸۵ | زهره خانی کهنوتی ( دانشگاه یزد )                     |
| ۸۶ | فاطمه خداترس ( دانشگاه فردوسی مشهد )                 |
| ۸۷ | داوود خطیبی ( دانشگاه ملی مهارت )                    |
| ۸۸ | محدثه خلیلی ( دانشگاه میبد )                         |
| ۸۹ | شمس الملوک خوشدل ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۹۰ | روح الله دانش پایه ( دانشگاه پیام نور )              |

### اسامی شرکت کنندگان و نویسندگان (ادامه) :

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| کوروش دبیقی ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد دهدشت )           | ۹۱  |
| حمیدرضا دربیدی ( دانشگاه جیرفت )                         | ۹۲  |
| مریم درچه سیچانی ( دانشگاه صنعتی اصفهان )                | ۹۳  |
| داود درویشی سلوکلائی ( دانشگاه پیام نور )                | ۹۴  |
| علی دلاور خلفی ( دانشگاه یزد )                           | ۹۵  |
| مهدی دهقانی ( دانشگاه یزد )                              | ۹۶  |
| مهدی دهقانی درمیان ( دانشگاه ملی مهارت )                 | ۹۷  |
| محمدعلی دهقانی زاده ( دانشگاه ملی مهارت )                | ۹۸  |
| عاکفه رادفر ( دانشگاه پیام نور )                         | ۹۹  |
| فرزاد راه‌پیمایی ( دانشگاه ملی مهارت )                   | ۱۰۰ |
| سعید رجایی ( دانشگاه پیام نور )                          | ۱۰۱ |
| ستاره رجبی ( دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان )    | ۱۰۲ |
| سعید رجوزاده ( دانشگاه پیام نور )                        | ۱۰۳ |
| هرمز رحمتان ( دانشگاه پیام نور )                         | ۱۰۴ |
| قدرت اله رحمتی ( دانشگاه پیام نور )                      | ۱۰۵ |
| مرضیه رحمتی ( دانشگاه پیام نور )                         | ۱۰۶ |
| محمدرضا رستمی ( مرکز آموزش عالی محلات )                  | ۱۰۷ |
| اسماعیل رستمی ( دانشگاه شهید باهنر کرمان )               | ۱۰۸ |
| رسول رسولی ( دانشگاه پیام نور )                          | ۱۰۹ |
| سعید رسولی ( دانشگاه خلیج فارس )                         | ۱۱۰ |
| شریفه رضا قلی ( دانشگاه پیام نور )                       | ۱۱۱ |
| احمد رضایی ( دانشگاه پیام نور )                          | ۱۱۲ |
| اکبر رضایی ( دانشگاه پیام نور )                          | ۱۱۳ |
| شهرام رضایی ( دانشگاه پیام نور )                         | ۱۱۴ |
| فائقه رضوانی ( دانشگاه پیام نور )                        | ۱۱۵ |
| ابوالفضل رفیع پور ( دانشگاه شهید باهنر کرمان )           | ۱۱۶ |
| ایرج رضانی ( دانشگاه پیام نور )                          | ۱۱۷ |
| الهام رئیسی سربیزن ( دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان )      | ۱۱۸ |
| طاهره زارع ( دانشگاه آزاد اسلامی )                       | ۱۱۹ |
| محمدعلی زارعی ( دانشگاه ملی مهارت )                      | ۱۲۰ |
| محمد مهدی زاهدی ( دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان )         | ۱۲۱ |
| امیرحسام زعیم ( دانشگاه پیام نور )                       | ۱۲۲ |
| روشنک زمان ( دانشگاه پیام نور )                          | ۱۲۳ |
| ابراهیم زنگویی زاده ( دانشگاه پیام نور )                 | ۱۲۴ |
| زهرا سادات سادات حسینی ( دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی ) | ۱۲۵ |
| حسینعلی ساده ( دانشگاه پیام نور )                        | ۱۲۶ |
| علیرضا ستارزاده ( دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان )         | ۱۲۷ |
| حامد سروش ( مرکز آموزش عالی محلات )                      | ۱۲۸ |
| فاطمه سعادت جو ( دانشگاه علم و هنر )                     | ۱۲۹ |
| حسام الدین سعادت ( دانشگاه پیام نور )                    | ۱۳۰ |
| علیرضا سلاجقه ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )                | ۱۳۱ |
| سمیه سلطانپور ( دانشگاه صنعت نفت اهواز )                 | ۱۳۲ |
| ولی سلطانی مسیح ( دانشگاه پیام نور )                     | ۱۳۳ |
| فهیمة سلطانیان ( دانشگاه پیام نور )                      | ۱۳۴ |
| حسین سلمی ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )                    | ۱۳۵ |

### اسامی شرکت کنندگان و نویسندگان (ادامه) :

| ردیف | نام و نام خانوادگی (دانشگاه)                         |
|------|------------------------------------------------------|
| ۱۳۶  | رسول سلیمانی ( دانشگاه پیام نور )                    |
| ۱۳۷  | قاسم سلیمانی راد ( محقق آزاد )                       |
| ۱۳۸  | فاطمه سلیمیان ریزی ( دانشگاه اصفهان )                |
| ۱۳۹  | سیده سمیه جعفری ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۱۴۰  | یامین سیاری ( دانشگاه صنعتی سیرجان )                 |
| ۱۴۱  | میرصادق سید صادقی ( دانشگاه پیام نور )               |
| ۱۴۲  | میرصادق سیدصادقی ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۱۴۳  | موسی شاه محمدی ( دانشگاه پیام نور )                  |
| ۱۴۴  | مرتضی شریفی نجار ( دانشگاه صنعتی امیرکبیر )          |
| ۱۴۵  | محمد شفیعی دیزج ( دانشگاه ملی مهارت )                |
| ۱۴۶  | محمدرضا شقایان ( دانشگاه پیام نور )                  |
| ۱۴۷  | امیر شمالی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                   |
| ۱۴۸  | مریم شمس سولاری ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۱۴۹  | لیلا شهباز ( دانشگاه مراغه )                         |
| ۱۵۰  | خلیل شهبازپور ( دانشگاه ارومیه )                     |
| ۱۵۱  | محمد شیرازی پور ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۱۵۲  | بهرز صادقی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                   |
| ۱۵۳  | سیده نگین صالحی اروزکی ( دانشگاه پیام نور )          |
| ۱۵۴  | زهرا صبری رزم ( دانشگاه فردوسی مشهد )                |
| ۱۵۵  | ساحیه صفایی نژاد ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۱۵۶  | مجتبی صفدریان ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۱۵۷  | اکرم صفری هفشجانی ( دانشگاه پیام نور )               |
| ۱۵۸  | سید محمود ضابط زاده ( دانشگاه پیام نور )             |
| ۱۵۹  | محمد طاعتی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۱۶۰  | بهمن طاهرخانی ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۱۶۱  | اصغر طاهری ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۱۶۲  | حانیه ظهوری مهریزی ( دانشگاه یزد )                   |
| ۱۶۳  | محمدجواد عاقلی گوکی ( دانشگاه تحصیلات تکمیلی کرمان ) |
| ۱۶۴  | رضا عامری ( دانشگاه تهران )                          |
| ۱۶۵  | سرکوت عیدی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                   |
| ۱۶۶  | هادی عزیزی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                   |
| ۱۶۷  | آرام عزیزی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۱۶۸  | یوسف علیپور فخری ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۱۶۹  | سیدعلی غنی زاده ( دانشگاه یزد )                      |
| ۱۷۰  | پیمان غیاثوند ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۱۷۱  | مهدی فاتحی نیا ( دانشگاه یزد )                       |
| ۱۷۲  | غلامحسین فتح تبار فیروزجایی ( دانشگاه کاشان )        |
| ۱۷۳  | فاطمه فرجی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۱۷۴  | مینا فرجی ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۱۷۵  | فرخنده فرضعلی پور ( دانشگاه پیام نور )               |
| ۱۷۶  | داوود فروتن نیا ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )          |
| ۱۷۷  | مجید فروزان ( دانشگاه پیام نور )                     |
| ۱۷۸  | شهریار فرهنگ راد ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۱۷۹  | مریم فضل الهی ( دانشگاه ملی مهارت )                  |
| ۱۸۰  | مسعود فضل علیپور ( دانشگاه پیام نور )                |

### اسامی شرکت کنندگان و نویسندگان (ادامه) :

| ردیف | نام و نام خانوادگی (دانشگاه)                             |
|------|----------------------------------------------------------|
| ۱۸۱  | مهدی فضلی عقدایی ( دانشگاه پیام نور )                    |
| ۱۸۲  | کمال فلاحتی ( دانشگاه رازی کرمانشاه )                    |
| ۱۸۳  | هیبا فیومی ( دانشگاه تولدو آمریکا )                      |
| ۱۸۴  | رضا قاسمی نجف آبادی ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۱۸۵  | سیدحسین قاضوی ( دانشگاه شهید اشرفی اصفهانی )             |
| ۱۸۶  | مصطفی قدم پور ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۱۸۷  | کریم قدیمی ( دانشگاه پیام نور )                          |
| ۱۸۸  | خاطره قربانی مقدم ( دانشگاه خوارزمی )                    |
| ۱۸۹  | راضیه قلی پور ( آموزش و پرورش استان فارس )               |
| ۱۹۰  | رضا قنبری ( دانشگاه فردوسی مشهد )                        |
| ۱۹۱  | فهمیه السادات کاظمی ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۱۹۲  | سیدمحمدتقی کامل میر مصطفایی ( دانشگاه مازندران )         |
| ۱۹۳  | صافیه کر ( دانشگاه پیام نور )                            |
| ۱۹۴  | فاطمه کریمی ( دانشگاه پیام نور )                         |
| ۱۹۵  | پویا کریمی ( دانشگاه شهید باهنر کرمان )                  |
| ۱۹۶  | پرستو کعبی نژاد ( دانشگاه علم و صنعت )                   |
| ۱۹۷  | بهزاد کفاش ( دانشگاه اردکان )                            |
| ۱۹۸  | مهدی کلانتری ( دانشگاه پیام نور )                        |
| ۱۹۹  | راوی کومار بندرو ( پردیس دانشگاه گیتام حیدرآباد، هند )   |
| ۲۰۰  | طیبه گلچین ( دانشگاه پیام نور )                          |
| ۲۰۱  | شیائو لانگ شینی ( دانشگاه بین المللی شیان چین )          |
| ۲۰۲  | راضیه محجوب ( دانشگاه سمنان )                            |
| ۲۰۳  | الهه محمدزاده ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۲۰۴  | فهمیه محمدزاده ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۲۰۵  | حمیده محمدزاده کان ( دانشگاه پیام نور )                  |
| ۲۰۶  | هاجر محمدی دورکی ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز ) |
| ۲۰۷  | اکرم محمودی ( دانشگاه پیام نور )                         |
| ۲۰۸  | داود محمودی نیا ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )              |
| ۲۰۹  | اکبر مختاری دینانی ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان )    |
| ۲۱۰  | ایمان مخدوم ( دانشگاه پیام نور )                         |
| ۲۱۱  | اصغر مددی ( دانشگاه آزاد اسلامی )                        |
| ۲۱۲  | بیتا مرادی ( دانشگاه پیام نور )                          |
| ۲۱۳  | علی مروت پور ( دانشگاه ملی مهارت )                       |
| ۲۱۴  | مریم مسعودی ارانی ( دانشگاه ملی مهارت )                  |
| ۲۱۵  | شقایق مطلبی ( دانشگاه پیام نور )                         |
| ۲۱۶  | منصوره معانی شیرازی ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۲۱۷  | محمد مهدی معتمدی نژاد ( دانشگاه جامع علمی کاربردی )      |
| ۲۱۸  | علی معدنشکاف ( دانشگاه سمنان )                           |
| ۲۱۹  | رئوفه معنویت ( دانشگاه پیام نور )                        |
| ۲۲۰  | سعیده مقصودی ( دانشگاه پیام نور )                        |
| ۲۲۱  | غلامرضا مقیمی ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۲۲۲  | محمد ملایی ( دانشگاه پیام نور )                          |
| ۲۲۳  | سمیه ملکی نژاد ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۲۲۴  | سمیه منتظری نژاد ( دانشگاه پیام نور )                    |
| ۲۲۵  | سیمین منصوری بروجنی ( دانشگاه پیام نور )                 |

### اسامی شرکت کنندگان و نویسندگان (ادامه) :

| ردیف | نام و نام خانوادگی (دانشگاه)                           |
|------|--------------------------------------------------------|
| ۲۲۶  | منصوره موسی پور ( دانشگاه فرهنگیان )                   |
| ۲۲۷  | موسی مولوی ( دانشگاه آزاد شهرکرد )                     |
| ۲۲۸  | جواد مومنی ( دانشگاه بیرجند )                          |
| ۲۲۹  | فرشاد مهدی فر ( دانشگاه پیام نور )                     |
| ۲۳۰  | حسین مهران نیا ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد بهبهان )     |
| ۲۳۱  | سعید مهرشاد ( دانشگاه صنعتی امیرکبیر )                 |
| ۲۳۲  | راضیه میرزاهاشمی ( دانشگاه یزد )                       |
| ۲۳۳  | فاطمه میرزایی ( دانشگاه پیام نور )                     |
| ۲۳۴  | شهریار میرزائی ( دانشگاه پیام نور )                    |
| ۲۳۵  | سعید میروکیلی ( دانشگاه یزد )                          |
| ۲۳۶  | محمدرضا میری ( دانشگاه بیرجند )                        |
| ۲۳۷  | احمد نادری بنی ( دانشگاه ملی مهارت )                   |
| ۲۳۸  | مریم نادری پاریزی ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۲۳۹  | مهران نامجو ( دانشگاه ولی عصر رفسنجان )                |
| ۲۴۰  | علیرضا نجف زاده ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۲۴۱  | بهزاد نجفی سقزچی ( دانشگاه صنعتی امیرکبیر )            |
| ۲۴۲  | پروانه نجمدی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۲۴۳  | حسن نراقی ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد آشتیان )          |
| ۲۴۴  | حسین نراقی ( دانشگاه پیام نور )                        |
| ۲۴۵  | محمد مهدی نصرآبادی ( دانشگاه بیرجند )                  |
| ۲۴۶  | ابراهیم نصرآبادی ( دانشگاه بیرجند )                    |
| ۲۴۷  | پرویز نصیری ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۲۴۸  | علی اصغر نصیری یزدی ( دانشگاه علم و هنر )              |
| ۲۴۹  | علی نظیری کردکندی ( دانشگاه پیام نور )                 |
| ۲۵۰  | حسین نورمحمدی پور ( دانشگاه آزاد اسلامی )              |
| ۲۵۱  | فاطمه نوروزی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۲۵۲  | مصطفی نوری جویباری ( دانشگاه پیام نور )                |
| ۲۵۳  | فاطمه نیازی ( دانشگاه سمنان )                          |
| ۲۵۴  | مریم نیکبخت ( دانشگاه پیام نور )                       |
| ۲۵۵  | محمدرضا نیکنام ( دانشگاه آزاد اسلامی واحد خلخال )      |
| ۲۵۶  | ریحانه نیکنام اسکوئی ( دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی ) |
| ۲۵۷  | زهره نیکویی نژاد ( دانشگاه یزد )                       |
| ۲۵۸  | آندری والتدزیاک ( دانشگاه سیدولس لهستان )              |
| ۲۵۹  | علیرضا وحیدی ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۲۶۰  | رضا وهاب زاده ( دانشگاه بیرجند )                       |
| ۲۶۱  | معصومه هزارجریبی ( دانشگاه پیام نور )                  |
| ۲۶۲  | پرستو هیئتیان نائینی ( دانشگاه پیام نور )              |
| ۲۶۳  | آیت اله یاری ( دانشگاه پیام نور )                      |
| ۲۶۴  | روح الله یاسینی ( دانشگاه پیام نور )                   |
| ۲۶۵  | نرگس یافتیان ( دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی )         |
| ۲۶۶  | علی یوسفی پیربستی ( دانشگاه زنجان )                    |

# فهرست مطالب

|     |                                                                         |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|
| ۵   | ۱ آنالیز                                                                |
| ۱.۱ | ه. اسدی، م. نادری پاریزی                                                |
| ۶   | فضاهای $R$ -متریک و کاربردی از آن                                       |
| ۲.۱ | ح. محمدزاده کان، س. ملکی نژاد                                           |
| ۱۰  | الحاق برخی از نامساوی ها برای ماتریس های قطعه ای                        |
| ۱۴  | ۲ جبر                                                                   |
| ۱.۲ | غ. آقابابایی بنی                                                        |
| ۱۵  | برخی ویژگی های گراف های نامتباین گروه های متناهی                        |
| ۲.۲ | غ. آقابابایی بنی                                                        |
| ۲۰  | گرافهای نامتباین گروه های پوچ توان                                      |
| ۳.۲ | م. شفيعی دیزج، م. سیدصادقی                                              |
| ۲۴  | مدول های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته آرتینی روی حلقه های کوهن-مکالی     |
| ۴.۲ | ف. کریمی                                                                |
| ۲۸  | زیرگروهها، حلقه ها و ایده آل های مطلق گروه های مرلی                     |
| ۵.۲ | م. معانی شیرازی، ش. الملوک خوش دل                                       |
| ۳۲  | نتایجی از مدول های متمم شده $H$ -به طور هم متناهی تولید شده             |
| ۶.۲ | ع. معدنشکاف، م. معتمدی نژاد                                             |
| ۳۶  | انواع مشتق های ضربی روی جبرهای هوپ                                      |
| ۴۰  | ۳ ریاضیات کاربردی                                                       |
| ۱.۳ | آ. جدائی، م. نیکنام                                                     |
| ۴۱  | بررسی توافق پیشرو- دنباله رو مکان سیستم های چندعامله با دینامیک های خطی |
| ۲.۳ | ز. خانی کهنوتی، ن. بیدآبادی                                             |
| ۴۵  | یک روش $PSBTS$ -نیوتن برای حل دستگاه های غیرخطی مختلط                   |
| ۳.۳ | ک. دبیقی، م. اردشیری، پ. اردشیری، م. دبیقی                              |
| ۴۹  | فیلترهای بالاگذر عملگرهای دیفرانسیلی جزئی مرتبه دوم                     |
| ۴.۳ | ف. راهپیمایی                                                            |
| ۵۲  | روش های نقطه ثابت برای حل معادله قدرمطلق                                |
| ۵.۳ | ح. ظهوری مهریزی، ن. بیدآبادی                                            |
| ۵۶  | استفاده از الگوریتم کاکزمارز برای حل دستگاه های معادلات غیرخطی          |
| ۶.۳ | س. ع. غنی زاده، م. اکرمی ابرقویی                                        |
| ۶۱  | حل عددی معادلات سهموی کسری-زمانی غیرخطی در دامنه نامحدود                |
| ۷.۳ | خ. قربانی مقدم، ف. خداترس، ر. قنبری، ا. ابویی مهریزی                    |
| ۶۵  | جایگذاری بهینه سنسور جریان به کمک الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر         |

|      |                                                                                                                                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۸۰۳  | ف. کاظمی، ع. حیدری، ع. دلاور خلیفی                                                                                                     |
| ۶۹   | نقش بهینه سازی در مدلسازی ریاضی برای فعالیت الکتریکی قلب در ماکروسکوپی . . .                                                           |
| ۹۰۳  | پ. کعبی نژاد                                                                                                                           |
| ۷۳   | مدل ریاضی چندهدفه در زنجیره تامین معکوس و ارائه مثال عددی زمان حل مسئله با الگوریتم <i>NSGAI</i> . . . . .                             |
| ۷۷   | سایر شاخه های مرتبط با علوم ریاضی                                                                                                      |
| ۱۰۴  | م. ح. آهنگرانی فراهانی، غ. فتح تبار                                                                                                    |
| ۷۸   | چند جمله ای مشخصه لاپلاسی ادغام دو گراف . . . . .                                                                                      |
| ۲۰۴  | ن. بلوچ رودباری                                                                                                                        |
| ۸۱   | برآورد $E-MSE$ -بیزی و $E-MSE$ توزیع پاره تو دو پارامتری تحت تابع زیان های مختلف                                                       |
| ۳۰۴  | س. پناهیان فرد                                                                                                                         |
| ۸۸   | بررسی تاثیر باورهای معرفت شناسی مکاتب فلسفه ریاضی در طراحی روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی . . . . .                                 |
| ۴۰۴  | ه. جزایری نوکابادی، م. نادری پاریزی، ا. رضایی                                                                                          |
| ۹۲   | اثربخشی الگوی آموزش با تأکید بر راه حل های چندگانه بر نگرش دانش آموزان دوره متوسطه به درس ریاضی . . . . .                              |
| ۵۰۴  | ر. زمان                                                                                                                                |
| ۹۶   | برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش - مقاومت دو طرفه براساس توزیع لوماکس تحت داده های سانسور نوع دوم . . . . .                                |
| ۶۰۴  | ف. سعادت جو، ع. ا. نصیری یزدی                                                                                                          |
| ۱۰۰  | ارائه یک مدل پتری رنگی برای بازیابی محتوای قابل اعتماد دربستر بلاکچین با استفاده از قرارداد هوشمند اتریوم برای شبکه داده نام . . . . . |
| ۷۰۴  | ف. سلیمیان ریزی، ه. محمدی دورکی                                                                                                        |
| ۱۰۴  | مسئله باز-پاسخ ابزاری در خدمت محیط و مساحت . . . . .                                                                                   |
| ۸۰۴  | م. فاتحی نیا، ف. بشرمل                                                                                                                 |
| ۱۰۸  | مدلسازی دینامیکی گروه های اجتماعی و تحلیل پایداری آنها . . . . .                                                                       |
| ۹۰۴  | ا. مختاری دینانی، ع. تدین فر                                                                                                           |
| ۱۱۲  | بررسی حدس کلی-اولام در گراف مقسوم علیه صفر حلقه . . . . .                                                                              |
| ۱۰۰۴ | ا. مختاری دینانی، ع. تدین فر                                                                                                           |
| ۱۱۶  | مسیرها و دورها در بازسازی گراف از روی زیرگراف های تک رأس-حذفی . . . . .                                                                |
| ۱۱۰۴ | ع. مروت پور                                                                                                                            |
| ۱۲۰  | پارادوکس تحول علوم انسانی و آموزش ریاضی در ایران . . . . .                                                                             |
| ۱۲۰۴ | ش. میرزائی، ق. رحمتی، ا. مخدوم                                                                                                         |
| ۱۲۵  | تعیین روش کارا در برآورد پارامترهای مدل درآمد سینگ-مادالا . . . . .                                                                    |
| ۱۳۰۴ | م. نوری جویباری، د. درویشی سلوکلابی                                                                                                    |
| ۱۲۹  | برخی خواص گراف های نادقیق . . . . .                                                                                                    |
| ۱۳۳  | هندسه و توپولوژی                                                                                                                       |
| ۱۰۵  | ف. پاشایی، س. حسین پور، ق. حقیقت دوست، ل. شهباز                                                                                        |
| ۱۳۴  | ابرویه های زمان گون $H^2$ -سره در ۴-فضا فرم های لورنتزی . . . . .                                                                      |
| ۲۰۵  | م. شریفی نجار، ب. نجفی سقزچی                                                                                                           |
| ۱۳۸  | میدان های برداری کیلینگ با طول ثابت در منیفلدهای ریمانی . . . . .                                                                      |

|      |                                                                                                                             |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۴۴  | ۶ پوسترها                                                                                                                   |
| ۱۰۶  | م. بی باک، ا. نادری بنی                                                                                                     |
| ۱۴۵  | بررسی داده‌های مربوط به افت و خیز دما با استفاده از تحلیل حذف شیب چند فرکتالی .                                             |
| ۲۰۶  | ز. جعفریانی                                                                                                                 |
| ۱۴۹  | تقریب بالایی مخروط نرمال فرشه برای مسائل با قیود تعویضی هموار . . . . .                                                     |
| ۳۰۶  | س. حسنی سعدی                                                                                                                |
| ۱۵۳  | ارتباط هوش مصنوعی و آموزش الکترونیکی و تحول در سیستم آموزش ریاضی . . . .                                                    |
| ۴۰۶  | ف. حیدری                                                                                                                    |
| ۱۵۹  | ویژگی فضای موضعاً $QHC$ . . . . .                                                                                           |
| ۵۰۶  | م. درجه سیچانی                                                                                                              |
| ۱۶۳  | کاربرد الگوهای ریاضی در ساختار زمانی موسیقی . . . . .                                                                       |
| ۶۰۶  | د. درویشی سلوکلائی، ص. کر                                                                                                   |
| ۱۶۷  | تحلیل مقایسه‌ای روش‌های رتبه‌بندی اعداد خاکستری در فرآیندهای تصمیم‌گیری تحت عدم قطعیت . . . . .                             |
| ۷۰۶  | د. درویشی سلوکلائی، ص. کر                                                                                                   |
| ۱۷۱  | تدریس ریاضی با رویکرد طرز فکر رشد: کلیدهای موفقیت در کلاس درس . . . . .                                                     |
| ۸۰۶  | د. درویشی سلوکلائی، ف. اکبری هاشجین                                                                                         |
| ۱۷۴  | مقایسه برنامه ریزی خطی خاکستری و روش تصمیم‌گیری چندشاخصه بهتریت - بدترین معیار . . . . .                                    |
| ۹۰۶  | ف. راه‌پیمایی                                                                                                               |
| ۱۷۸  | روش تکراری هومیر با تابع وزن برای محاسبه معکوس ماتریس . . . . .                                                             |
| ۱۰۰۶ | ق. رحمتی، ش. میرزایی                                                                                                        |
| ۱۸۳  | روش برآورد اسپلین در رگرسیون ناپارامتری با استفاده از روش اسپلین بریده شده . . .                                            |
| ۱۱۰۶ | ا. رمضان، ق. احمدی                                                                                                          |
| ۱۸۷  | کاربرد سیستم آشوب در هواشناسی با تاکید بر مدل سازی در ابرهای همرفتی . . . . .                                               |
| ۱۲۰۶ | ز. سادات حسینی، ن. یافتیان                                                                                                  |
| ۱۹۱  | معرفی استعاره‌های ریاضی . . . . .                                                                                           |
| ۱۳۰۶ | ح. ساده، پ. نائینی                                                                                                          |
| ۱۹۵  | بررسی تأثیر روش حل مسئله در مباحث اعداد اول و شمارنده ها روی یادگیری معنادار دانش-آموزان پایه هفتم شهرستان چابهار . . . . . |
| ۱۴۰۶ | ح. سعادت                                                                                                                    |
| ۱۹۹  | کاربرد باریک‌های نور تولید شده توسط توابع خاص ریاضی . . . . .                                                               |
| ۱۵۰۶ | م. شاه محمدی                                                                                                                |
| ۲۰۴  | چشم انداز تعمیم یافته و معکوس نامساوی لونز-هینز . . . . .                                                                   |
| ۱۶۰۶ | س. م. ضابط زاده                                                                                                             |
| ۲۰۸  | تحلیل عددی معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری زمانی کلاین گوردون دوبعدی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی . . . . .                 |
| ۱۷۰۶ | م. فروزان، ع. پاک‌گوهر                                                                                                      |
| ۲۱۲  | محاسبه دیتمل فازی با تکنیک ضریب همبستگی دو بعدی و شواهد نفی شده در تحلیل مدیریت ریسک . . . . .                              |
| ۱۸۰۶ | م. فضل الهی                                                                                                                 |
| ۲۱۶  | تأثیرات آموزش به روش یادگیری معکوس بر تفکر خلاق و اضطراب ریاضی . . . . .                                                    |
| ۱۹۰۶ | م. فضل علیپور، س. منصوری بروجنی                                                                                             |
| ۲۲۰  | تصحیح $AIC$ اصلاح شده . . . . .                                                                                             |

|      |                                                                                                               |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۲۰.۶ | ر. قاسمی نجف ابادی                                                                                            |
| ۲۲۵  | افزایش پایداری روش حذف نویز تصاویر رنگی با بهره‌گیری از تحلیل بردارهای ویژه و میانگین وزنی                    |
| ۲۱.۶ | ر. قلی پور                                                                                                    |
| ۲۳۱  | طراحی سوالات دوگزینه ای و تاثیر آن بر ارتقای یادگیری ریاضی                                                    |
| ۲۲.۶ | پ. کریمی، ا. رفیع پور                                                                                         |
| ۲۳۴  | ریاضیات غیررسمی در خدمت جامعه و مدرسه                                                                         |
| ۲۳.۶ | م. کلانتری                                                                                                    |
| ۲۳۸  | یک معیار جدید استوار برای تفکیک‌پذیری سری‌های زمانی                                                           |
| ۲۴.۶ | ش. مطلبی، آ. یاری، م. سید صادقی                                                                               |
| ۲۴۲  | حل عددی مسائل کنترل بهینه تاخیری با کمک تقریب پد                                                              |
| ۲۵.۶ | ا. نادری بنی، م. بی‌باک                                                                                       |
| ۲۴۶  | تحلیل رفتار ناوردا مقیاسی در داده‌های مربوط به اختلاف زمان گام برداشتن انسان با استفاده از آنالیز چند فرکانسی |
| ۲۶.۶ | م. نیکبخت، ج. چشم‌آور، س. بسطامی                                                                              |
| ۲۵۰  | ارائه یک مدل ریاضی برای بررسی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر استئوکلاست                                        |
| ۲۷.۶ | م. نیکبخت، ج. چشم‌آور، س. بسطامی                                                                              |
| ۲۵۴  | مقایسه اثر دوزهای داروی زولدرونیک اسید بر استئوکلاست در مدل ریاضی                                             |
| ۲۸.۶ | ر. نیکنام اسکونی، ن. یافتیان                                                                                  |
| ۲۵۸  | تأثیر بازی‌وارسازی آموزش ریاضی در مشارکت فراگیران                                                             |
| ۲۹.۶ | ر. نیکنام اسکونی، ن. یافتیان                                                                                  |
| ۲۶۲  | قابلیت داستان‌سرایی هوش مصنوعی در طراحی مسائل ریاضی                                                           |
| ۳۰.۶ | آ. یاری، ب. مرادی                                                                                             |
| ۲۶۶  | کنترل سیستم مالی آشوبناک لورنز با استفاده کنترل مد لغزشی                                                      |

فصل ۱

آنالیز

## فضاهای R-متریک و کاربردی از آن

هوشیار اسدی<sup>۱</sup>، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضیات و کاربردها، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

h58.as45@gmail.com

مریم نادری پاریزی، استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

M.Naderi.Parizi@pnu.ac.ir

**چکیده:** نخست مفهوم فضاهای R-متریک و سپس به بعضی از خواص توپولوژیکی آنها اشاره می‌کنیم. این فضاها تعمیمی از فضاهای متریک می‌باشند. تعمیم قابل توجهی از قضیه نقطه ثابت باناخ (یا اصل انقباض باناخ) را ارائه خواهیم کرد. همچنین کاربردی از این فضا را خواهیم آورد.  
**کلمات کلیدی:** اصل انقباض باناخ، فضاهای R-متریک، معادله انتگرال کسری

### ۱ مقدمه

پوانکاره نخستین کسی بود که در سال ۱۸۸۶ نظریه نقطه ثابت را بیان کرد. سپس براوئر<sup>۱</sup> [۳] در سال ۱۹۱۲ قضیه نقطه ثابت را ثابت کرد. در سال ۱۹۲۲ باناخ<sup>۲</sup> در [۲] ثابت کرد که یک نگاشت انقباضی که دامنه‌ی آن کامل است دارای یک نقطه ثابت یکتاست. سپس قضیه نقطه ثابت و اصل انقباض باناخ در فضاهای مختلف توسعه و تعمیم یافت. اسحاقی و سایر محققان در مراجع [۱، ۴] قضیه نقطه ثابت باناخ و تعمیم‌های آن را در این فضاها بررسی کردند. در سال ۲۰۲۰ اسحاقی و همکارانش در [۵] کلاس جدیدی از تعمیم فضاهای متریک را معرفی کردند که به آنها فضاهای R-متریک می‌گوییم و در همان سال قضیه نقطه ثابت باناخ و تعمیم‌های آن را در این فضاها بررسی کردند.

### ۲ فضاهای R-متریک

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $R$  یک رابطه روی  $X$  باشد. در این صورت سه‌تایی  $(X, d, R)$  یا به طور خلاصه  $X$  را یک فضای R-متریک می‌نامیم.

**تعریف ۲.۲.** دنباله‌ی  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  در فضای R-متریک  $X$  را R-دنباله می‌نامیم هرگاه برای هر  $n, k \in \mathbb{N}$ ،  $x_n R x_{n+k}$ .

Author Corresponding\*

<sup>۱</sup>Brouwer

<sup>۲</sup>Banach

**تعریف ۳.۲.** فرض کنید  $E \subseteq X$  باشد. نقطه  $x \in X$  یک نقطه  $R$ -حدی  $E$  نامیده می شود هرگاه  $R$ -دنباله  $(x_n) \in E$  موجود باشد به طوری که برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $x_n \neq x$  و  $x_n \xrightarrow{R} x$ .

**تعریف ۴.۲.** مجموعه تمام نقاط  $R$ -حدی  $E$  را با نماد  $E'^R$  نشان می دهیم.

**تعریف ۵.۲.** فرض کنید  $E \subseteq X$  باشد.  $R, E$ -بسته نامیده می شود هرگاه  $E'^R \subseteq E$ .

**تعریف ۶.۲.** فرض کنید  $E \subseteq X$  باشد.  $R, E$ -باز نامیده می شود هرگاه  $R, E^c$ -بسته باشد.

**تعریف ۷.۲.** اگر  $A$  یک مجموعه و  $R$  یک رابطه روی  $A$  و  $f: A \rightarrow B$  یک تابع باشد، گوئیم  $f$  حافظ رابطه ی  $R$  است هرگاه برای هر  $x, y \in A$  که  $xRy$  آنگاه  $f(x)Rf(y)$

**تعریف ۸.۲.**  $R$ -دنباله  $(x_n)^\infty$  در  $X$  را دنباله  $R$ -کوشی گوئیم هرگاه برای هر  $\epsilon > 0$ ، عدد صحیح مثبت  $N$  موجود باشد به طوری که برای هر  $n$  و  $m$  طبیعی که  $n, m \leq N$ ،  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  واضح است که  $x_m R x_n$  یا  $x_n R x_m$ .

**تعریف ۹.۲.** نگاشت  $f: X \rightarrow X$  را یک  $R$ -انقباض می نامیم هرگاه  $0 < \lambda < 1$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x, y \in X$  اگر  $xRy$  آنگاه  $\lambda d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$ . عدد  $\lambda$  را ثابت لیپشیتس می نامیم.

**تعریف ۱۰.۲.** فرض کنید  $f: X \rightarrow X$  یک نگاشت باشد. گوئیم  $f$  در  $x \in X$ ،  $R$ -پیوسته است هرگاه برای هر  $R$ -دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  که  $x_n \xrightarrow{R} x$ ،  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**قضیه ۱۱.۲.** فرض کنید  $(X, \leq)$  یک مجموعه مرتب و  $d$  یک متر روی  $X$  باشد به طوری که  $(X, d)$  یک فضای متریک کامل و تابع  $f: X \rightarrow X$  یک نگاشت پیوسته و غیرنزولی باشد به طوری که به ازای یک  $k \in [0, 1)$  و هر  $x, y \in X$  که  $y \leq x$ ،  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ . اگر  $x_0 \in X$  موجود باشد به طوری که  $x_0 \leq f(x_0)$ ، آنگاه  $f$  دارای یک نقطه ثابت است.

**قضیه ۱۲.۲.** فرض کنید  $X$  یک فضای  $R$ -متریک کامل (و نه لزوماً فضای متریک کامل)  $f: X \rightarrow X$  و  $0 < \lambda < 1$ ،  $R$ -پیوسته و  $R$ -انقباض با ثابت لیپشیتس  $\lambda$  و حافظ رابطه  $R$  باشد. همچنین نقطه  $x_0 \in X$  موجود باشد به طوری که برای هر  $xRy, y \in f(X)$ ، در این صورت  $f$  دارای یک نقطه ثابت یکتا است. همچنین،  $f$  یک عملگر پیکارد است یعنی برای هر  $x \in X$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$ .

**قضیه ۱۳.۲.** فرض کنیم  $T$  یک عدد ثابت مثبت،  $0 < \alpha < 1$  و  $a, b, f: I = [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  توابعی پیوسته باشند. در این صورت معادله انتگرال کسری

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t b(u) (t-u)^{\alpha-1} x(u) du + f(t) & t \in I = [0, T] \\ f(t) \geq 1 & t \in I = [0, T] \end{cases}$$

دارای یک جواب یکتا است.

اثبات. مجموعه  $X$  را در نظر بگیرید:

$$X := \{x \in C(I, \mathbb{R}) \mid x(t) > 0, \forall t \in I\}$$

رابطه  $R$  را روی  $X$  به صورت زیر تعریف می کنیم

$$xRy \iff x(t)y(t) \geq (x(t) \vee y(t)) \quad (t \in I)$$

$$x(t) \vee y(t) = x(t) \text{ یا } y(t)$$

واضح است که  $X$  یک فضای برداری نرمدار است اگر متر حاصل از این نرم را با  $d$  نشان دهیم،  $(X, d)$  یک فضای  $R$ -متریک است. قرار می‌دهیم  $x_0(t) \equiv 1$  (یعنی برای هر  $t \in I$ ,  $x_0(t) = 1$ ). در این صورت برای هر  $x \in X$ ,  $x_0(t) \cdot x(t) = 1 \cdot x(t) \geq 1 \cdot x(t)$  و لذا  $x_0 R x$ . حال فرض کنید  $(x_n)_n^\infty \subseteq X$  یک دنباله  $R$ -کوشی در  $X$  باشد. برای هر  $t \in I = [0, T]$  را ثابت در نظر می‌گیریم.  $(x_n(t))_{n=1}^\infty$  یک دنباله کوشی از اعداد حقیقی است لذا عدد حقیقی  $x(t)$  موجود است به طوری که  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  یعنی دنباله  $(x_n)_n^\infty$  به طور نقطه به نقطه به تابع  $x$  همگراست. چون  $\sup\{|x_n(t) - x(t)| : t \in I\} \rightarrow 0$  لذا همگرایی  $(x_n)_n^\infty$  به  $x$  به طور یکنواخت است. چون  $(x_n)_n^\infty$  یک دنباله  $R$ -کوشی است، لذا برای هر  $k \in \mathbb{N}$

$$x_n(t) \cdot x_{n+k}(t) \geq x_n(t)$$

یا

$$x_n(t) x_{n+k}(t) \geq x_{n+k}(t)$$

چون برای  $t \in I$ ,  $x_n(t) < x_{n+k}(t)$ ، لذا در حالت اول برای هر  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+k} \geq 1$  این یعنی  $x_{n+1}(t) \geq 1$ ،  $x_{n+2}(t) \geq 1$  در حالت دوم، برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n(t) \geq 1$ . لذا در هر حالت  $(x_n)_n^\infty$  زیر دنباله‌ای مانند  $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$  دارد به طوری که  $x_{n_i}(t) \geq 1$  همچنین، چون  $(x_n)_n^\infty$  به  $x$  همگراست لذا  $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$  نیز چنین است و در نتیجه  $x \geq 1$  (یعنی برای هر  $t \in I$ ,  $x(t) \geq 1$ ). بنابراین ثابت کردیم که  $(X, d)$  یک فضای  $R$ -متریک کامل است. حال نگاشت  $F : X \rightarrow X$  را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x(t)) = \frac{a(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t b(u) (t-u)^{\alpha-1} x(u) du + f(t)$$

نشان می‌دهیم  $F$  در تمام مفروضات قضیه ۱۲.۲ صادق است و لذا دارای یک نقطه ثابت یکتا در  $X$  است. این نقطه ثابت همان جواب معادله انتگرالی کسری در صورت قضیه است. ادعای خود را در مورد  $F$  در سه مرحله ثابت می‌کنیم.

**مرحله اول:**  $F$  حافظ رابطه  $R$  است.

فرض کنیم  $x, y \in X$  و  $x R y$  داریم

$$F(x(t)) = \frac{a(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t b(u) (t-u)^{\alpha-1} x(u) du + f(t) \geq 1$$

چون تابع زیر علامت انتگرال نامنفی،  $a, b \geq 0$  و  $f(t) \geq 1$ ، لذا  $F(x(t)) \geq 1$ . به طور مشابه،  $F(y(t)) \geq 1$  در نتیجه

$$F(x(t)) F(y(t)) \geq F(y(t))$$

در نتیجه  $F(x) R F(y)$ .

**مرحله دوم:**  $F$  یک  $R$ -انقباض است.

فرض کنیم  $x R y$  و  $t \in I$  حال با تغییر متغیر  $\omega = r(t-u)$  خواهیم داشت

$$\int_0^t r^{\alpha-1} (t-u)^{\alpha-1} e^{r(u-t)} du = \frac{1}{r} \int_0^{rt} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega} d\omega$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|a\| \|b\| \|x - y\|_r \int_0^{rt} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega} d\omega \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|a\| \|b\| \|x - y\|_r \int_0^{\infty} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|a\| \|b\| \|x - y\|_r \Gamma(\alpha) = \left( \|a\| \cdot \|b\| \frac{1}{r^\alpha} \right) \|x - y\|_r. \quad (1)$$

چون  $\lambda = \|a\| \cdot \|b\| \frac{1}{r^\alpha}$  در نظر می‌گیریم. لذا  $r > (\|a\| \cdot \|b\|)^{1/\alpha}$  و  $0 < \lambda < 1$  و  $e^{-rt} |F(x(t)) - F(y(t))| \leq \lambda \|x - y\|_r$  در نتیجه

$$\|F(x) - F(y)\|_r = \max_{t \in I} e^{-rt} |F(x(t)) - F(y(t))| \leq \lambda \|x - y\|_r$$

پس  $F$ ، یک  $R$  - انقباض است.

مرحله سوم:  $R$ ،  $F$  - پیوسته است.

فرض کنید  $x \in X$  و  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  یک  $R$  - دنباله همگرا به  $x$  باشد. در ابتدای برهان قضیه دیدیم که برای هر  $t \in I$ ،  $x(t) \geq 1$ . در نتیجه برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $t \in I$ ،  $x_n(t) x(t) \geq x_n(t)$  لذا  $x_n R x$  بنا بر مرحله دوم

$$e^{-rt} |F(x_n(t)) - F(x(t))| \leq \lambda \|x_n - x\|_r$$

در نتیجه

$$\max_{t \in I} e^{-rt} |F(x_n(t)) - F(x(t))| = \|F(x_n) - F(x)\| \leq \lambda \|x_n - x\|_r \Rightarrow F(x_n) \xrightarrow{R} F(x)$$

و این یعنی  $F$  در  $x$   $R$  - پیوسته است.

بنابراین تمام شرایط قضیه ۱۲.۲ برای  $X$  و  $F$  برقرار است. لذا  $F$  دارای یک نقطه ثابت یکتا مانند  $\bar{x}$  است و این نقطه ثابت یکتا جواب معادله انتگرال کسری است.  $\square$

## مراجع

- [1] H. Baghani, M. E. Gordji, M. Ramezani, Orthogonal sets: The axiom of choice and proof of a fixed point theorem, J. Fixed Point Theory Appl., 18 (2016), 465-477.
- [2] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstrits et leur applications aux equations integrals, Fund. Math., 3 (1922), 133-181.
- [3] L. E. Brouwer, Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math Ann., 71 (1912), 97-115.
- [4] M. Eshaghi Gordji, H. Habibi, Fixed point theory in generalized orthogonal metric space, J. Linear Topol. Algeb., 6 (2017), 251-260.
- [5] S. Khalegholi, H. Rahimi, Madjid Eshaghi Gordji, Fixed point theorems in R-metric spaces with applications, AIMS Mathematics, 5 (2020), 3125-3137.



## الحاق برخی از نامساوی‌ها برای ماتریس‌های قطعه‌ای

حمیده محمدزاده‌کان<sup>۱</sup> \* و سمیه ملکی‌نژاد<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

Email: h\_mohamadzadeh@pnu.ac.ir

<sup>۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

Email: maleki60313@pnu.ac.ir

چکیده. فرض کنید  $\mathbb{M}_n$ ، مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های مختلط  $n \times n$  باشد. در این مقاله، ما الحاق برخی از نامساوی‌های مشهور را برای ماتریس‌های قطعه‌ای بیان و اثبات کرده‌ایم. همچنین، ما نتایج خوبی را برای ماتریس‌های افزایشنده-پراکنده‌گر، در حالت نرمی و درمینیانی به دست آورده‌ایم. به طور مثال اگر  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های غیر صفر و  $A$ ،  $B$  و  $C$  افزایشنده-پراکنده‌گر باشند، بطوریکه

$$\mathcal{R}((A\tau_1 B)\tau_2(A\tau_1 C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2 C)),$$

آنگاه

$$\mathcal{R}((A\tau_1^* B)\tau_2^*(A\tau_1^* C)) \leq \mathcal{R}(A\tau_1^*(B\tau_2^* C)).$$

واژه‌های کلیدی: تابع یکنوا، ماتریس افزایشنده-پراکنده‌گر، ماتریس قطعه‌ای، میانگین ماتریسی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 47A63, 47A64, 15B48.

## ۱. مقدمه

فرض کنیم  $\mathbb{M}_n$  مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های مختلط  $n \times n$  باشد. تجزیه دکارتی ماتریس دلخواه  $A$ ، به صورت زیر می‌باشد

$$A = \mathcal{R}A + i\mathcal{I}A,$$

که در آن  $\mathcal{R}A = \frac{A+A^*}{2}$  و  $\mathcal{I}A = \frac{A-A^*}{2i}$ . که به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی  $A$  می‌باشند. فرض کنیم  $A$  خودالحاق<sup>۱</sup> باشد به عبارت دیگر  $A = A^*$ ، می‌گوییم  $A$  نیمه معین مثبت<sup>۲</sup> است اگر برای هر  $x \in \mathbb{C}^n$ ،  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  و  $A$  معین مثبت<sup>۳</sup> است اگر  $A$  نیمه معین مثبت و معکوس پذیر باشد. برای ماتریس‌های خودالحاق  $A, B \in \mathbb{M}_n$ ، هرگاه  $A - B$  نیمه معین مثبت باشد، می‌نویسیم  $A \leq B$  یا  $B \geq A$ . در تجزیه دکارتی اگر  $\mathcal{R}A \geq 0$ ، آنگاه ماتریس  $A \in \mathbb{M}_n$  را گسترشی<sup>۴</sup> و اگر  $\mathcal{R}A, \mathcal{I}A \geq 0$ ، آنگاه ماتریس  $A \in \mathbb{M}_n$  را افزایشنده-پراکنده‌گر<sup>۵</sup> می‌نامیم.

\* سخنران.

<sup>1</sup>self-adjoint

<sup>2</sup> positive semidefinite

<sup>3</sup> positiv definite

<sup>4</sup>accretive

<sup>5</sup> accretive-dissipative

برد عددی<sup>۶</sup>  $A \in \mathbb{M}_n$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

یک ماتریس  $A \in \mathbb{M}_n$  را قطعه‌ای می‌نامیم اگر  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$  ثابتی وجود داشته باشد بطوریکه  $W(A) \subset S_\theta$  که در آن ناحیه قطعه‌ای<sup>۷</sup> در صفحه مختلط است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| \leq (\operatorname{Re} z) \tan \theta\}.$$

هرگاه  $W(A) \subset S_\theta$ ، می‌نویسیم  $A \in S_\theta$ . بعلاوه قابل ذکر است که نماد  $A \in S_\theta$  فقط زمانی قابل تعریف است که  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ . به وضوح  $A$  نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر  $W(A) \subset S_0$ . اگر  $W(A), W(B) \subset S_\theta$ ، به ازای یک  $\theta$  یکسان که  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه  $W(A+B) \subset S_\theta$ . از آنجاییکه  $0 \notin S_\theta$ ، همه اعضای  $S_\theta$  وارون‌پذیر هستند. بعلاوه اگر  $W(A) \subset S_\theta$ ، آنگاه به ازای هر ماتریس  $n \times m$  غیر صفر  $X$ ،  $W(X^*AX) \subset S_\theta$ . از این رو  $W(A^{-1}) \subset S_\theta$ .

تابع  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  را یک تابع یکنوای ماتریسی<sup>۸</sup> می‌نامیم اگر حافظ رابطه ترتیبی ماتریسی باشد به عبارت دیگر برای ماتریس‌های خودالحاق  $A$  و  $B$  که طیف آن‌ها در بازه  $J$  قرار دارد، اگر  $A \leq B$ ، آنگاه  $f(A) \leq f(B)$ . فرض کنیم  $\tau$  یک میانگین ماتریسی با تابع متناظر  $f$  باشد، در این صورت میانگین ماتریسی متناظر با  $f(t^{-1})^{-1}$  را الحاق  $\tau$  نامیده و با علامت  $\tau^*$  نشان می‌دهیم؛ با استفاده از تعریف داریم:

$$A\tau^*B = (A^{-1}\tau B^{-1})^{-1}.$$

## ۲. نتایج اصلی

ما در [۶]، نشان دادیم که اگر  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های غیر صفر باشند و  $A, B, C \in S_\theta$ ، به طوریکه

$$\mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2C)) \leq \cos^*(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1B)\tau_2(A\tau_1C)),$$

آنگاه

$$(1) \quad \mathcal{R}(A\tau_1^*(B\tau_2^*C)) \geq \cos^*(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1^*B)\tau_2^*(A\tau_1^*C)).$$

با استفاده از نامساوی (۱)، نامساوی زیر را داریم:

قضیه ۱.۲. فرض کنیم  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های غیر صفر و  $A, B, C$  افزایشنده-پراکنده‌گر باشند. در این صورت اگر

$$\mathcal{R}((A\tau_1B)\tau_2(A\tau_1C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2C)),$$

آنگاه

$$\mathcal{R}((A\tau_1^*B)\tau_2^*(A\tau_1^*C)) \leq \mathcal{R}(A\tau_1^*(B\tau_2^*C)).$$

ملاحظه ۲.۲. قابل ذکر است که با توجه به خواص ماتریس‌های افزایشنده-پراکنده‌گر، برای هر ماتریس افزایشنده-پراکنده‌گر دلخواه مانند  $A$ ،  $W(e^{-i\frac{\pi}{4}}A) \subset S_\theta$  و بدین ترتیب قضیه ۱.۲ از نامساوی (۱) به دست می‌آید.

برای  $A \in \mathbb{M}_n$  نرم عملگری  $\|A\|$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\| = \max\{\langle x^*, Ay \rangle : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1\}.$$

یادآوری می‌کنیم که نرم  $\|\cdot\|$  روی  $\mathbb{M}_n$  تحت یکانی پایاست اگر برای هر  $A \in \mathbb{M}_n$  و برای تمامی ماتریس‌های یکانی  $U, V \in \mathbb{M}_n$ ، داشته باشیم  $\|UAV\| = \|A\|$ . در لم بعدی به رابطه بین  $\|A\|$  و  $\|\mathcal{R}A\|$  اشاره شده است.

لم ۳.۲. ([۲]، [۷]) فرض کنیم  $A \in S_\theta$ . در این صورت برای هر نرم تحت یکانی پایای  $\|\cdot\|$  روی  $\mathbb{M}_n$ ،

$$\|\mathcal{R}A\| \leq \|A\| \leq \sec(\theta) \|\mathcal{R}A\|.$$

<sup>6</sup>numerical range

<sup>7</sup>sector region

<sup>8</sup>matrix monotone function

با به کار بردن لم ۳.۲ و نامساوی (۱) نامساوی نرمی زیر را داریم:

قضیه ۴.۲. فرض کنیم  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های غیر صفر و  $A, B, C \in \mathcal{S}_\theta$  باشند. در این صورت اگر

$$\cos^\Psi(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1 B)\tau_2(A\tau_1 C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2 C)),$$

آنگاه

$$\cos^\Delta(\theta) \|(A\tau_1^* B)\tau_2^*(A\tau_1^* C)\| \leq \|A\tau_1^*(B\tau_2^* C)\|.$$

لم ۵.۲. ([۴], [۵]) اگر  $A \in \mathcal{S}_\theta$ ، آنگاه

$$\det(\mathcal{R}A) \leq |\det(A)| \leq \sec^n(\theta) \det(\mathcal{R}A).$$

با استفاده از لم فوق و نامساوی (۱)، نامساوی زیر بدست می‌آید.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های غیر صفر و  $A, B, C \in \mathcal{S}_\theta$  باشند. در این صورت اگر

$$\cos^\Psi(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1 B)\tau_2(A\tau_1 C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2 C)),$$

آنگاه

$$\cos^{\Delta n}(\theta) |\det((A\tau_1^* B)\tau_2^*(A\tau_1^* C))| \leq |\det(A\tau_1^*(B\tau_2^* C))|.$$

با ترکیب لم زیر و نامساوی (۱)، قضیه زیر را خواهیم داشت.

لم ۷.۲. ([۲], [۳]) اگر  $A \in \mathcal{S}_\theta$ ، آنگاه

$$\lambda_j(\mathcal{R}A) \leq s_j(A) \leq \sec^\Psi(\theta) \lambda_j(\mathcal{R}A) \quad j = 1, \dots, n,$$

که در آن  $\lambda_j$  و  $s_j$  به ترتیب  $j$ -مین مقدار ویژه و  $j$ -مین مقدار تکین ماتریس  $A$  می‌باشند.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های غیر صفر و  $A, B, C \in \mathcal{S}_\theta$  باشند. در این صورت اگر

$$\cos^\Psi(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1 B)\tau_2(A\tau_1 C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2 C)),$$

آنگاه

$$\cos^\Phi(\theta) s_j((A\tau_1^* B)\tau_2^*(A\tau_1^* C)) \leq s_j(A\tau_1^*(B\tau_2^* C)).$$

در پایان با استفاده از لم‌های زیر، و نامساوی (۱)، قضایای بعدی که شامل نامساویهای مفیدی می‌باشند را نتیجه می‌گیریم:

لم ۹.۲. ([۱]) فرض کنیم  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  یک تابع یکنواخت ماتریسی باشد و  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$  و  $\theta$  وجود داشته باشد بطوریکه  $A, B \in \mathcal{S}_\theta$  و  $f(1) = 1$  در این صورت

$$f(\mathcal{R}A) \leq \mathcal{R}(f(A)) \leq \sec^\Psi(\theta) f(\mathcal{R}A).$$

لم ۱۰.۲. ([۱]) فرض کنیم  $A \in \mathcal{S}_\theta$ ، در این صورت

$$(2) \quad \omega(\mathcal{R}A) \leq \omega(A) \leq \sec(\theta) \omega(\mathcal{R}A).$$

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های دلخواه غیر صفر و  $A, B, C \in \mathcal{S}_\theta$  باشند. در این صورت اگر

$$\cos^\Psi(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1 B)\tau_2(A\tau_1 C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2 C)),$$

آنگاه

$$\cos^\Delta(\theta) \omega((A\tau_1^* B)\tau_2^*(A\tau_1^* C)) \leq \omega(A\tau_1^*(B\tau_2^* C)).$$

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  یک تابع یکنواخت ماتریسی باشد و  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$  و  $\theta$  وجود داشته باشد بطوریکه  $A, B \in \mathcal{S}_\theta$  و  $f(1) = 1$ ؛  $\tau_1$  و  $\tau_2$  میانگین‌های دلخواه غیر صفر و  $A, B, C \in \mathcal{S}_\theta$  باشند. در این صورت اگر

$$\cos^\Psi(\theta) \mathcal{R}((A\tau_1 B)\tau_2(A\tau_1 C)) \geq \mathcal{R}(A\tau_1(B\tau_2 C)),$$

آنگاه

$$\cos^\Phi(\theta) \mathcal{R}(f((A\tau_1^* B)\tau_2^*(A\tau_1^* C))) \leq f(\mathcal{R}(A\tau_1^*(B\tau_2^* C))).$$

توجه ۱۳۰۲. ما در [۶]، نشان دادیم که برای  $A, B > \circ$  اگر

$$A\tau_1(A\tau_2 B) \leq A\tau_2(A\tau_1 B),$$

آنگاه

$$A\tau_1^*(A\tau_2^* B) \geq A\tau_2^*(A\tau_1^* B).$$

در حالت خاص، با توجه به خواص میانگین هندسی، هارمونیک و حسابی برای  $1 < \lambda < \infty$  و  $A, B > \circ$  اگر

$$A\sharp_\lambda(A!_\lambda B) \leq A!_\lambda(A\sharp_\lambda B),$$

آنگاه

$$A\sharp_\lambda(A\nabla_\lambda B) \geq A\nabla_\lambda(A\sharp_\lambda B).$$

## مراجع

1. Y. Bedrani, F. Kittaneh and M. Sababeh, *From positive to accretive matrices*, Positivity, **25**(4) (2021), 1601–1629.
2. R. Bhatia, *Matrix analysis* (Vol. 169). Springer Science & Business Media 2013.
3. S. Durury, M. Lin, *Singular value inequalities for matrices with numerical ranges in a sector*, Oper. Matrices **8** (2014), 1143–1148.
4. R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press., Cambridge, 2013.
5. M. Lin, *Extension of a result of Hanynsworth and Hartfiel*, Arch. Math. **104** (2015), 93–100.
6. S. Malekinejad, H. Mohammadzadehkan, *Adjointations of Operator Inequalities for Sector Matrices*, Mathematical Analysis & Convex Optimization, **4**(2) (2023), 51–59.
7. F. Zhan, *A matrix decomposition and its applications*, Linear and Multilinear Algebra., **63**(10) (2015), 2033–2042.

## فصل ۲

### جبر

## برخی ویژگی های گراف های نامتباین گروه های متناهی

غلامرضا آقابابایی بنی ، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه جامع علمی کاربردی،

صندوق پستی ۱۵۹۹۶۶۵۱۱۱ تهران، ایران

aghababaei1359@gmail.com

---

**چکیده:** گراف نامتباین  $\Pi_{G,H}$  گروه متناهی  $G$  که با  $H$  مرتبط است گراف ساده ای است که راس های آن عبارتند از  $G - \{e\}$  و دو راس  $g$  و  $h$  به هم متصل اند هرگاه  $(|g|, |h|) \neq 1$  و  $g$  یا  $h$  متعلق به  $H$  باشند. در این مقاله قطر و کمر این گراف را مورد بررسی قرار داده و ثابت می کنیم اگر  $G$  یک گروه پوچتون باشد این گراف یک گراف تام است. کلمات کلیدی: گراف های نامتباین، گراف تام.

---

### ۱ مقدمه

در این مقاله تمامی گرافها ساده هستند. مجموعه رئوس و یالهای گراف  $\Pi$  را به ترتیب با  $V(\Pi)$  و  $E(\Pi)$  نشان می دهیم. در این مقاله ساختار گراف  $\Pi_{G,H}$  با زوج مرتب  $(G, H)$  مرتبط است که  $G$  یک گروه است و  $H$  زیرگروهی از  $G$  است. گراف نامتباین  $G$  نسبت به  $H$  که آن را با  $\Pi_{G,H}$  نشان می دهیم گرافی است با مجموعه راسهای  $G - \{e\}$  و دو راس  $g$  و  $h$  از این گراف به هم متصل اند اگر  $(|g|, |h|) \neq 1$  و  $g$  یا  $h$  متعلق به  $H$  باشند. اگر  $G = H$  باشد  $\Pi_{G,H}$  را با  $\Pi_G$  نشان می دهیم و به آن گراف نامتباین گروه  $G$  می گوئیم. یک زیرمجموعه  $S$  از مجموعه رأس های گراف  $G$  را مستقل گوئیم هرگاه هیچ دو رأس از  $S$  در  $G$  مجاور نباشند.  $S \subseteq V$  را مجموعه مستقل ماکسیمم از  $G$  گوئیم اگر هیچ مجموعه مستقل  $S'$  با  $|S'| > |S|$  وجود نداشته باشد. یک مجموعه مستقل ماکسیمم از  $G$  یک مجموعه مستقل است که زیرمجموعه سره ی مجموعه ی مستقل دیگری نباشد. تعداد رأس های یک مجموعه مستقل ماکسیمم از  $G$  را عدد استقلال  $G$  می نامیم و با  $\alpha(G)$  نشان می دهیم. مینیمم تعداد خوشه های گراف  $G$  که مجموعه رأس های  $G$  را می پوشاند عدد پوشش خوشه ی گراف  $G$  می نامیم و با  $\theta(G)$  نشان می دهیم. گذری که هر یال  $G$  را بپیماید گذر اویلری  $G$  می نامند. یک سیر  $G$  گشت بسته ای است که از هر یال  $G$  حد اقل یک بار عبور کند. یک سیر اویلری، سیری است که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند. یک گراف اویلری است اگر شامل یک سیر اویلری باشد. یک گراف همبند ناتهی اویلری است اگر و تنها اگر دارای رأس با درجه فرد نباشد. تعریف گراف نامتباین برای اولین بار توسط Yang, Wei [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. در [۵] گراف تمام نماد ها استاندارد می باشند. هدف ما گسترش نتایج گراف نامتباین می باشد.

## ۲ بخش یک

اگر  $G$  یک گروه متناهی از مرتبه  $n$  باشد  $n \geq 4$ ،  $HG$  و  $|H| < 2$  آن گاه  $\text{girth}(\Pi_{G,H}) = 3$ .

اثبات. اگر  $|H| \leq 4$  آن گاه بنابر [۲۰۲، قضیه ۲.۱].  $\Pi_H$  دارای کمر ۳ است پس  $\text{girth}(\Pi_{G,H}) = 3$ . اگر  $|H| = 3$  آن گاه  $H$  دارای دو رأس  $x$  و  $y$  از مرتبه ۳ است که به هم متصل اند حال از آن جا که حداقل یک رأس مانند  $a$  از  $G \setminus H$  وجود دارد که  $3 \mid |a|$  لذا  $a \sim x \sim y \sim a$ ، پس یک مثلث درون  $\Pi_{G,H}$  وجود دارد پس  $\text{girth}(\Pi_{G,H}) = 3$ .  $\square$

اگر  $G$  یک گروه پوچ توان متناهی باشد.  $H \leq G$  و  $\{e\} \neq H \cong Z_2$  آن گاه  $\Pi_{G,H}$  یک درخت است.

اثبات. اثبات واضح است.  $\square$

اگر  $G$  یک گروه پوچ توان متناهی باشد و  $HG \neq \{e\}$ ،  $|H| \geq 2$  آن گاه  $\Pi_{G,H}$  دارای یک زیرگراف فراگیر اویلری است.

اثبات. می دانیم اگر هر یال  $\Pi_{G,H}$  به یک مثلث متعلق باشد آن گاه  $\Pi_{G,H}$  یک زیر گراف فراگیر اویلری دارد. ابتدا ثابت می کنیم  $\Pi_H$  زیرگراف فراگیر اویلری دارد. فرض کنیم  $|H| = h \geq 4$  بنابر قضیه ۲.۱ کافی است ثابت کنیم  $\Pi_{Z_h}$  یک زیرگراف فراگیر اویلری دارد. اگر  $e$  یک یال دلخواه از  $\Pi_{Z_h}$  باشد حالات زیر را در نظر می گیریم:

(الف) اگر دو سر یال  $e$  عناصر غیر مولد  $Z_h$  مانند  $x$  و  $y$  باشند از آن جا که هر  $Z_h$  حداقل دو عضو مولد دارد و عناصر مولد دارای مرتبه گروه می باشند که به تمام رئوس متصل اند لذا عنصر مولد  $z$  از  $Z_h$  وجود دارد که  $x \sim z \sim y$  لذا  $e$  در یک مثلث قرار دارد؛

(ب) اگر دو سر یال  $e$  عناصر  $x$  و  $y$  باشند که  $x$  عنصر مولد و  $y$  عنصر غیر مولد است چون  $Z_h$  دارای دو عنصر مولد است پس عنصر مولد  $z$  وجود دارد که  $x \sim z \sim y$  پس  $e$  در یک مثلث واقع است؛

(ج) اگر دو سر یال  $e$  عناصر مولد  $x$  و  $y$  باشند چون عناصر مولد به تمام عناصر متصل اند پس  $e$  در یک مثلث واقع است.

بنابراین  $\Pi_H$  یک زیرگراف فراگیر اویلری دارد. به همین ترتیب  $\Pi_G$  یک زیرگراف فراگیر اویلری دارد. حال فرض کنیم  $HG$  باشد که  $HZ_2$ . اگر  $|H| \geq 4$ ، هر یال از زیرگراف القایی توسط رئوس  $H$  در یک مثلث واقع است. همچنین بین رئوس  $G \setminus H$  هیچ یالی وجود ندارد. فرض کنیم  $\{a, b\}$  یالی باشد که  $b \in H$  و  $a \in G \setminus H$  ثابت می کنیم این یال در یک مثلث واقع است. اگر  $|G| = p^x$  باشد که حکم ثابت است. فرض کنیم  $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ . چون رأس  $a$  به دو سر هر یال از رئوس  $H$  متصل است پس این یال متعلق به یک مثلث است و حکم برقرار است.

اگر  $|H| = 3$  باشد یعنی  $H \cong Z_3$  و زیرگراف القایی توسط  $H$  تنها یک یال است که دو سر این یال در  $\Pi_{G,H}$  همزمان به رئوس  $G \setminus H$  متصل است یعنی برای هر  $a \in G \setminus H$  یا دو سر یال متعلق به  $\Pi_{Z_3}$  به  $a$  متصل است یا  $a$  یک رأس تنها است.

$\square$

اگر  $G$  یک گروه پوچ توان از مرتبه  $n$  باشد به طوری که  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$  که  $p_i$  ها اعداد اول متمایزند و



که در آن

$$a_1 = \sum_{\alpha_1 \neq 0, 0 \leq \alpha_i \leq k_i} \Phi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = \frac{n(p_1^{k_1} - 1)}{p_1^{k_1}}$$

$$a_2 = \sum_{\forall i_1 \neq i_2 \in \{1, 2, 3\}, \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \neq 0, 0 \leq \alpha_i \leq k_i} \Phi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$$

$$a_3 = \sum_{\forall i_1 \neq i_2 \neq i_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \neq 0, 0 \leq \alpha_i \leq k_i} \Phi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$$

⋮

$$a_{[\frac{r}{2}]+1} = \sum_{\forall i_1 \neq i_2 \dots \neq i_{[\frac{r}{2}]+1} \in \{1, 2, \dots, r\}, \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{[\frac{r}{2}]+1}} \neq 0, 0 \leq \alpha_i \leq k_i} \Phi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$$

اثبات. برای به دست آوردن بزرگترین خوشه از گراف  $\Pi_G$  کافی است بزرگترین زیر مجموعه از عناصر  $G$  را پیدا کنیم که بزرگترین مقسوم علیه مشترک مرتبه هر دو عنصر دلخواه از این مجموعه مخالف ۱ باشد. برای این کار تعداد عناصری را که  $p_1$  مرتبه آنها را می شمارد در مجموعه ای به نام  $A_1$  قرار می دهیم که تعداد عناصر این مجموعه برابر است با  $a_1$ . حال مجموعه عناصری از  $G$  که  $p_1 p_2$  یا  $p_1 p_3$  یا  $p_2 p_3$  مرتبه آنها را می شمارند به دست می آوریم و آنها را در مجموعه  $A_2$  قرار می دهیم که تعداد عناصر این مجموعه برابر  $a_2$  می باشد و از اندازه سایر زیر مجموعه های  $G$  که دو تا از سه عدد اول مرتبه آنها را می شمارد بزرگتر است. به همین ترتیب تعداد عناصری از  $G$  را که حاصل ضرب  $t$  عدد اول از مجموعه  $\{p_1, p_2, \dots, p_{2t-1}\}$  مرتبه آنها را می شمارد را در مجموعه  $A_t$  قرار می دهیم که تعداد عناصر این مجموعه برابر است با  $a_t$  و به همین ترتیب تعداد عناصری از  $G$  که حد اقل  $[\frac{r}{2}] + 1$  تا از  $r$  تا عدد اول مرتبه آنها را می شمارد به دست می آوریم و آن را  $A_{[\frac{r}{2}]+1}$  می نامیم که تعداد عناصر این مجموعه با  $a_{[\frac{r}{2}]+1}$  برابر است. بدیهی است که

$$w(\Pi_G) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{[\frac{r}{2}]+1}\}$$

□

اگر  $G$  یک گروه پوچ توان باشد و  $H$  یک زیرگروه  $\cap$  نابدیهی از  $G$  باشد که  $|H| = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_s^{h_s} = n_1$  که  $p_i$  ها اعداد اول متماز هستند و  $h_i \in N$  و برای هر  $1 \leq i \leq s$ ،  $1$ ، آن گاه

$$w(\Pi_{G.H}) = w(\Pi_H) + 1.$$



اثبات. چون  $G \neq H$ ، و رأسی از مرتبه  $k$  در  $G \setminus H$  وجود دارد که  $p_1 p_2 \dots p_s | k$  پس تمام رئوس  $H$  به رأسی از مرتبه  $k$  متصل اند و چون بین دو رأس دلخواه  $G \setminus H$  هیچ یالی وجود ندارد پس

$$w(\Pi_{G,H}) = w(H) + 1.$$

□

در [؟، قضیه ۱۰.۲] ثابت شد که  $\alpha(\Pi_G) = \pi(G)$  که در آن  $\pi(G)$  تعداد اعداد اولی است که  $|G|$  را می‌شمارد. فرض کنیم  $G$  یک گروه و  $H$  یک زیرگروه سره نابديهی از  $G$  باشد آنگاه

$$|G| - |H| \leq \alpha(\Pi_{G,H}).$$

اثبات. بنابر تعریف گراف  $\Pi_{G,H}$  هیچ دو رأسی از  $G \setminus H$  به هم متصل نیستند پس  $|G| - |H| = |G \setminus H| \leq \alpha(\Pi_{G,H})$ .

□

فرض کنیم  $H$  یک زیرگروه نابديهی از گروه  $G$  باشد.

۱. اگر  $G = H$ ، آنگاه  $\theta(\Pi_{G,H}) = \alpha(\Pi_{G,H})$ .

۲. اگر  $G \neq H$  و  $\Pi_{G,H}$  همبند باشد آنگاه  $\theta(\Pi_{G,H}) = \pi(H) + (|G| - |H|)$ .

اثبات. ۱. اگر  $G = H$  آنگاه مینیم تعداد خوشه‌هایی که رئوس  $\Pi_G$  را می‌پوشاند برابر است با  $\pi(G)$  که بنابر قضیه قبل می‌دانیم  $\alpha(\Pi_G) = \pi(G)$  پس  $\theta(\Pi_{G,H}) = \alpha(\Pi_{G,H})$ .

۲. اگر  $G \neq H$ ، مینیم تعداد خوشه‌هایی که تمام رئوس  $\Pi_{G,H}$  را می‌پوشاند برابر است با  $\theta(\Pi_H)$  به علاوه  $|G| - |H|$  یالی که رئوس  $G \setminus H$  را به رئوس  $\Pi_H$  متصل می‌کند پس

$$\theta(\Pi_{G,H}) = \Pi_H + (|G| - |H|).$$

□

اگر  $G$  یک گروه پوچ توان از مرتبه  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$  باشد که  $p_1^{k_1} < p_2^{k_2} < \dots < p_r^{k_r}$ ، آنگاه  $\Pi_G$  یک گراف تام است.

اثبات. می‌دانیم  $\chi(\Pi_G) \geq w(\Pi_G)$  حال ثابت می‌کنیم  $\chi(\Pi_G) = w(\Pi_G)$  یعنی عدد رنگی دقیقاً با عدد خوشه‌ای برابر است. برای  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  فرض کنیم  $B_i$  مجموعه عناصری از  $G$  باشد که  $p_i$  مرتبه آنها را می‌شمارد و  $A_i$  ها مجموعه‌های تعریف شده در اثبات قضیه؟؟ باشند. اگر  $|A_1| > |A_2| > \dots > |A_r|$  بنابرین رئوس گراف  $\Pi_G$  با  $|A_1|$  رنگ قابل رتب آمیزی است و حکم ثابت است. اگر  $w(\Pi_G) = |A|$  که  $|A_1| \neq |A|$  آنگاه  $|A_1| > |B_1| > |B_2| > \dots > |B_r|$  بنابرین با توجه به تعریف گراف می‌توان همانند حالت قبل تمام



## مراجع

- [۱] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, "Graph Theory with Applications," American Elsevier, New York, ۱۹۷۶
- [۲] H. R. Dorbidi, A note on the coprime graph of a group, "Int. J. Group Theory" ۵ (۴) (۲۰۱۶) .۲۲-۱۷
- [۳] C. Godsil and G. F. Royle, "Algebraic Graph Theory," Springer Science, Business Media, ۲۰۱۳
- [۴] X. Ma, H. Wei and L. Yang, "The coprime graph of a group," "Int. J. Group Theory," ۳ (۳) (۲۰۱۴) .۲۳-۱۳
- [۵] The Gap Team, GAP – Groups, Algorithms and Programing,

# گراف های نامتباين گروه های پوچتوان

غلامرضا آقابابایی بنی ، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه جامع علمی کاربردی،

صندوق پستی ۱۵۹۹۶۶۵۱۱۱ تهران، ایران

aghababaei۱۳۵۹@gmail.com

**چکیده:** گراف نامتباين  $\Pi_{G,H}$  گروه متناهی  $G$  که با  $H$  مرتبط است گراف ساده ای است که راس های آن عبارتند از  $G - \{e\}$  و دو راس  $g$  و  $h$  به هم متصل اند هرگاه  $1 \neq (|g|, |h|)$  و  $g$  یا  $h$  متعلق به  $H$  باشند. در این مقاله حالت هایی که دو گراف نامتباين يکریخت هستند را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین ثابت می کنیم گراف نامتباين دو گروه پوچتوان هم مرتبه يکریخت هستند.

**کلمات کلیدی:** گراف های نامتباين، يکریختی گراف ها.

## ۱ مقدمه

در این مقاله تمامی گرافها ساده هستند. مجموعه رئوس و یالهای گراف  $\Pi$  را به ترتیب با  $V(\Pi)$  و  $E(\Pi)$  نشان می دهیم. در این مقاله ساختار گراف  $\Pi_{G,H}$  با زوج مرتب  $(G, H)$  مرتبط است که  $G$  یک گروه است و  $H$  زیرگروهی از  $G$  است. گراف نامتباين  $G$  نسبت به  $H$  که آن را با  $\Pi_{G,H}$  نشان می دهیم گرافی است با مجموعه راسهای  $G - \{e\}$  و دو راس  $g$  و  $h$  از این گراف به هم متصل اند اگر  $1 \neq (|g|, |h|)$  و  $g$  یا  $h$  متعلق به  $H$  باشند. اگر  $G = H$  باشد  $\Pi_{G,H}$  را با  $\Pi_G$  نشان می دهیم و به آن گراف نامتباين گروه  $G$  می گوییم. تعریف گراف نامتباين برای اولین بار توسط Wei Yang [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. در این گراف تمام نماد ها استاندارد می باشند. هدف ما گسترش نتایج گراف نامتباين می باشد.

## ۲ بخش یک

فرض کنیم  $G$  یک گروه پوچ توان متناهی از مرتبه  $n$  باشد که  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$  و  $p_i$  ها اعداد اول متمایز هستند و  $Z_n$  گروه دوری از مرتبه  $n$  باشد. در این صورت تعداد عناصری که مرتبه آنها را  $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_t}$  که  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_t \leq r$  می شمارد ولی  $p_j$  که  $1 \leq j \leq r$  و  $j \neq i_1, i_2, \dots, i_t$  مرتبه آنها را نمی شمارد در دو گروه  $G$  و  $Z_n$  با هم برابراند.

**اثبات.** فرض کنیم  $P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_t}$  زیرگروه های سیلوی  $\mathcal{S}_0$  باشند و

$$H = P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_t}.$$

کافی است ثابت کنیم:

$x \in H \setminus (P_{i_2}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_1}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-1}})$  اگر و تنها اگر  $p_j o(x)$  داشته باشیم  $(1 \leq j \leq r)$   $j \neq i_1, i_2, \dots, i_t$  و به ازای هر  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_t} \mid o(x)$  ابتدا توجه داریم که اگر  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_t} \mid o(x)$  و  $p_j o(x)$  آنگاه  $x \notin P_{i_1}P_{i_3} \cdots P_{i_t}$  و  $x \notin P_{i_2}P_{i_3} \cdots P_{i_t}$  و  $x \notin P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-1}}$  که نشان می‌دهد

$$x \in H \setminus (P_{i_2}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_1}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-1}}).$$

برعکس اگر  $x \in H \setminus (P_{i_2}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_1}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-1}})$  آنگاه  $x \in H$  و  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_t} \mid o(x)$  که این نشان می‌دهد  $p_j o(x)$  و  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_t} \mid o(x)$

سپس ثابت می‌کنیم تعداد عناصری که مرتبه آنها را  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_t}$  که  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_t \leq r$  می‌شمارد ولی  $p_j$  که  $1 \leq j \leq r$  و  $j \neq i_1, i_2, \dots, i_t$  مرتبه آنها را نمی‌شمارد در هر دو گروه  $G$  و  $Z_n$  با هم برابر است. در گروه  $G$  این تعداد برابر است با:

$$\begin{aligned} & |H \setminus (P_{i_2}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_1}P_{i_3} \cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-1}})| \\ &= |H| - (|P_{i_2}P_{i_3} \cdots P_{i_t}| + |P_{i_1}P_{i_3} \cdots P_{i_t}| + \cdots + |P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-1}}| - |P_{i_3}P_{i_4} \cdots P_{i_t}| \\ &\quad - \cdots - |P_{i_1}P_{i_2} \cdots P_{i_{t-2}}| + \cdots + (1)^t) \\ &= p_{i_1}^{k_{i_1}} p_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} - p_{i_2}^{k_{i_2}} p_{i_3}^{k_{i_3}} \cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} - p_{i_1}^{k_{i_1}} p_{i_3}^{k_{i_3}} \cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} - \cdots - p_{i_1}^{k_{i_1}} p_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots p_{i_{t-1}}^{k_{i_{t-1}}} \\ &\quad + p_{i_3}^{k_{i_3}} p_{i_4}^{k_{i_4}} \cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} + p_{i_1}^{k_{i_1}} p_{i_4}^{k_{i_4}} \cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} + \cdots + p_{i_1}^{k_{i_1}} p_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots p_{i_{t-2}}^{k_{i_{t-2}}} \cdots + (-1)^t \\ &= (p_{i_1}^{k_{i_1}} - 1)(p_{i_2}^{k_{i_2}} - 1) \cdots (p_{i_t}^{k_{i_t}} - 1). \end{aligned}$$

و در گروه  $Z_n$  این تعداد برابر است با

$$|A_{p_{i_1}} + A_{p_{i_2}} + \cdots + A_{p_{i_t}}|;$$

که برای  $1 \leq j \leq t$

$$A_{p_{i_j}} = \left\{ \frac{n}{p_{i_j}^{k_{i_j}}}, \frac{2n}{p_{i_j}^{k_{i_j}}}, \frac{3n}{p_{i_j}^{k_{i_j}}}, \dots, \frac{(p_{i_j}^{k_{i_j}} - 1)n}{p_{i_j}^{k_{i_j}}} \right\}$$

و در نتیجه

$$|A_{p_{i_1}} + A_{p_{i_2}} + \cdots + A_{p_{i_t}}| = (p_{i_1}^{k_{i_1}} - 1)(p_{i_2}^{k_{i_2}} - 1) \cdots (p_{i_t}^{k_{i_t}} - 1).$$

□

در این مثال ثابت می‌کنیم  $\Pi_{Z_{180}} \cong \Pi_{Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_5} \cong \Pi_{Z_4 \oplus Z_9 \oplus Z_5}$  اثبات این مثال را با کمک مرتبه عناصر و تعداد آنها بیان می‌کنیم. ابتدا عناصر و تعداد آنها را با  $\text{sameorder}_1(G)$  نشان می‌دهیم به طوری که مولفه اول هر زوج مرتب بیانگر مرتبه عنصر و مولفه دوم بیانگر تعداد آن مرتبه در گروه باشد همچنین  $\text{sameorder}_2(G)$  را به این



$$\text{sameorder}_1(Z_{180}) := [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [5, 4], [6, 2], [9, 6], [10, 4], [12, 4], [15, 8], [18, 6], [20, 8], [30, 8], [36, 12], [45, 24], [60, 16], [90, 24], [180, 48]];$$

$$\text{sameorder}_2(Z_{180}) := [[1, 180], [2, 135], [3, 160], [4, 90], [5, 144], [6, 120], [9, 120], [10, 108], [12, 80], [15, 128], [18, 90], [20, 72], [30, 96], [36, 60], [45, 96], [60, 64], [90, 72], [180, 48]];$$

$$\text{sameorder}_1(Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_5) := [[1, 1], [2, 3], [3, 8], [5, 4], [6, 24], [10, 12], [15, 32], [30, 96]];$$

$$\text{sameorder}_2(Z_{Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_5}) := [[1, 180], [2, 135], [3, 160], [5, 144], [6, 120], [10, 108], [15, 128], [30, 96]];$$

$$\text{sameorder}_1(Z_4 \oplus Z_9 \oplus Z_5) := [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [5, 4], [6, 2], [9, 6], [10, 4], [12, 4], [15, 8], [18, 6], [20, 8], [30, 8], [36, 12], [45, 24], [60, 16], [90, 24], [180, 48]];$$

$$\text{sameorder}_2(Z_4 \oplus Z_9 \oplus Z_5) := [[1, 180], [2, 135], [3, 160], [4, 90], [5, 144], [6, 120], [9, 120], [10, 108], [12, 80], [15, 128], [18, 90], [20, 72], [30, 96], [36, 60], [45, 96], [60, 64], [90, 72], [180, 48]];$$

که قضیه فوق در این مثال به وضوح مشهود است.

واضح است اگر  $G_1$  و  $G_2$  دو گروه باشند و  $G_1 \cong G_2$  آنگاه  $\Pi_{G_1} \cong \Pi_{G_2}$ .

اگر  $G_1$  و  $G_2$  دو گروه پوچ توان باشند، آنگاه  $\Pi_{G_1} \cong \Pi_{G_2}$  اگر و تنها اگر  $|G_1| = |G_2|$ .

اثبات. اگر  $G$  یک گروه پوچ توان از مرتبه  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$  باشد که  $p_i$  ها اعداد اول متمایز هستند، با فرض اینکه  $P_1, P_2, \dots, P_r$  زیرگروه‌های سیلوی  $G$  باشند، آنگاه

$$G = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_r.$$

حال ثابت می‌کنیم  $\Pi_{P_1 \times P_2 \times \dots \times P_r} \cong \Pi_{Z_n}$ . می‌۲۲ عناصر مرتبه  $p_i$  و توانهای آن در گروه  $G$  به صورت  $(1, 1, \dots, 1, a_i, 1, \dots, 1)$  هستند که  $a_i \in P_i$  و  $a_i \neq 1$  و این تعداد برابر است با  $p_i^{k_i} - 1$ . به همین شکل، عناصر مرتبه  $p_i$  و توانهای آن در  $Z_n$  عبارتند از:



همچنین عناصر مرتبه  $p_i p_j$  و توانهای آنها در گروه  $G$  به صورت  $(1, 1, \dots, 1, a_i, 1, 1, \dots, 1, a_j, 1, 1, \dots, 1)$  هستند که  $a_i \in P_i, a_j \in P_j$  و  $a_i, a_j \neq 0$  و عناصر مرتبه  $p_i p_j$  و توانهای آن در  $Z_n$  عبارتند از عناصر مجموعه  $A_i + A_j$  به همین ترتیب عناصر مرتبه  $p_1 p_2 \dots p_r$  و توانهای آنها در گروه  $G$  به صورت  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  هستند که  $a_i \in P_i$  و  $a_i \neq 0$  و  $(1 \leq i \leq r)$ . و عناصر مرتبه  $p_1 p_2 \dots p_r$  و توانهای آنها در  $Z_n$  برابر است با مرتبه عناصر مجموعه  $A_1 + A_2 + \dots + A_r$ . پس می‌توانیم یکریختی زیر را تعریف کنیم:

$$\varphi : v(\Pi_{P_1 \times P_2 \times \dots \times P_r}) \longrightarrow v(\Pi_{Z_n})$$

$$\varphi(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}) = j_1 \frac{n}{p_1^{k_1}} + j_2 \frac{n}{p_2^{k_2}} + \dots + j_r \frac{n}{p_r^{k_r}}$$

□

که  $a_{i j_i} \in P_i$  و  $1 \leq j_i \leq p_i^{k_i}$  و اگر  $a_{i j_i} = 0$  آنگاه  $j_i = 0$ .

$$\text{sameorder}_1(D_8 \times Z_3) = [[1, 1], [2, 5], [3, 2], [4, 2], [6, 10], [12, 4]]$$

و

$$\text{sameorder}_1(Z_{24}) = [[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [6, 2], [8, 4], [12, 4], [24, 8]]$$

همانطور که ملاحظه می‌نمایید

$$\Pi_{D_8 \times Z_3} \cong \Pi_{Z_{24}}$$

## مراجع

- [۱] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. "Graph Theory with Applications." American Elsevier, New York, ۱۹۷۶.
- [۲] H. R. Dorbidi, A note on the coprime graph of a group, "Int. J. Group Theory" ۵ (۴) ۱۷-۲۲ (۲۰۱۶).
- [۳] C. Godsil and G. F. Royle. "Algebraic Graph Theory." Springer Science, Business Media, ۲۰۱۳.
- [۴] X. Ma, H. Wei and L. Yang. "The coprime graph of a group," Int. J. Group Theory, ۳ (۳) ۱۳-۲۳ (۲۰۱۴).
- [۵] The Gap Team. GAP – Groups, Algorithms and Programming.

# مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته آرتینی روی حلقه‌های کوهن-مکالی

محمد شفیعی دیزج\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

shafiei\_m@pnu.ac.ir

میرصادق سیدصادقی†، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

m\_sayedsadeghi@pnu.ac.ir

**چکیده:** فرض کنید  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$  یک حلقه همگن نوتری با ایده‌آل نامرتب  $R_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$  و حلقه پایه موضعی  $(R_0, m_0)$  باشد و  $M$  و  $N$  دو  $R$ -مدول  $Z$ -مدرج با تولید متناهی باشند. در این مقاله نشان می‌دهیم  $R$ -مدول مدرج  $H_{R_+}^i(M, N)$  روی برخی حلقه‌های کوهن-مکالی آرتینی است.  
**کلمات کلیدی:** کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته، ایده‌آل نامرتب، آرتینی

## ۱ مقدمه

فرض می‌کنیم  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$  یک حلقه همگن نوتری با حلقه پایه موضعی  $(R_0, m_0)$  باشد که  $R_0$  یک حلقه نوتری است؛ یعنی تعداد متناهی عضو  $u_1, \dots, u_r \in R_1$  وجود دارد به طوری که  $R = R_0[u_1, \dots, u_r] = R_0[R_1]$ . فرض کنید  $M, N$  دو  $R$ -مدول  $Z$ -مدرج با تولید متناهی باشند. مشخص است که برای هر  $i \in \mathbb{N}_0$  و هر ایده‌آل مدرج  $a$  از  $R$ ، در  $i$ -امین مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته  $H_a^i(M, N) = \lim_{n \in \mathbb{N}} Ext_R^i\left(\frac{M}{a^n M}, N\right)$  یک ساختار مدولی  $Z$ -مدرج به صورت  $H_a^i(M, N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_a^i(M, N)_n$  دارد و هرگاه  $a = R_+$  باشد،  $R_0$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, N)_n$  به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}$  با تولید متناهی است و برای هر  $n \gg 0$  صفر است. در [۵، قضیه ۳.۲] اثبات شده است، اگر  $\dim R_0 \leq 1$ ، آنگاه  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N))$  یک  $R$ -مدول آرتینی است.

## ۲ قضایای مقدماتی

لم ۱.۲. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری،  $M$  یک  $R$ -مدول و  $a$  ایده‌آلی از  $R$  باشد. در این صورت

۱. اگر  $a$  شامل یک عنصر نامقسوم‌علیه صفر روی  $M$  باشد، آنگاه  $a$ ،  $M$  -آزاد تاب است؛ یعنی  $\Gamma_a(M) = 0$ .

۲. اگر  $M$  با تولید متناهی باشد، آنگاه  $a$ ،  $M$  -آزاد تاب است اگر و فقط اگر  $a$  یک عنصر نامقسوم‌علیه صفر نسبت به  $M$  داشته باشد.

اثبات. [۱، لم ۱.۱.۲] □

لم ۲.۲. فرض کنید  $R$  یک حلقه نوتری،  $a$  یک ایده‌آل  $R$  و  $M$  یک  $R$ -مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

۱. اگر  $N$  یک  $R$ -مدول  $a$ -تاب باشد، آنگاه برای هر  $i \geq 0$  داریم  $H_a^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$ . به علاوه اگر  $N$  با تولید متناهی باشد، آنگاه برای هر  $i \geq 0$ ،  $H_a^i(M, N)$ ، نیز با تولید متناهی است.

۲. اگر  $pd(M)$  متناهی باشد، آنگاه برای هر  $i > pd(M) + ara(a)$ ،  $H_a^i(M, N) = 0$ .

اثبات. [۴، لم ۱.۲] □

گزاره ۳.۲. فرض کنید  $R$  یک حلقه مدرج همگن،  $(R_0, m_0)$  موضعی و  $M$  و  $N$  دو  $R$ -مدول مدرج با تولید متناهی باشند. اگر  $pd(M)$  متناهی باشد. آنگاه:

۱. برای هر  $i \in N_0$  و هر  $n \in Z$ ،  $R_0$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, N)_n$  با تولید متناهی است.

۲.  $r \in Z$  وجود دارد به طوری که برای هر  $i \in N_0$  و هر  $n \geq r$ ،  $H_{R_+}^i(M, N)_n = 0$ .

اثبات. [۴، گزاره ۳.۲] □

توجه ۴.۲. فرض کنید  $R = \bigoplus_{n \in N_0} R_n$  یک حلقه مدرج همگن و  $A = \bigoplus_{n \in N_0} A_n$  یک  $R$ -مدول مدرج باشد. در این صورت اگر  $A$  یک  $R$ -مدول مدرج آرتینی باشد، آنگاه  $\text{Tor}_i^R(A, B)$  و  $\text{Ext}_R^i(B, A)$  برای هر  $R$ -مدول مدرج با تولید متناهی  $B$  و هر  $i \in N_0$ ،  $R$ -مدول‌های مدرج آرتینی خواهند بود.

تعریف ۵.۲. بُعد طول متناهی کوهمولوژیکال  $N, M$  را، کوچکترین  $i$  که  $R_0$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, N)_n$  از طول نامتناهی برای تعداد نامتناهی اعداد صحیح  $n$  باشد می‌نامیم و با نماد  $g(M, N)$  نشان می‌دهیم. در واقع

$$g(M, N) := \inf\{i \in N_0 \mid \#\{n \mid \ell_{R_0}(H_{R_+}^i(M, N)_n) = \infty\} = \infty\}.$$

## ۳ نتایج

قضیه ۱.۳. فرض کنید  $R_0$  یک میدان و  $R$  یک حلقه کوهن-مکالی با بُعد  $d$  و مدول کانونی  $w_R$  باشد. اگر  $pd_R(N)$

اثبات. فرض کنید  $i \in N_0$ ، به وضوح  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N)_n) = \Gamma_{m_0}(H_{R_+}^i(M, N)_n)$ ، بنابراین طبق گزاره ۳.۲،  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N)_n) = \Gamma_{m_0}(H_{R_+}^i(M, N)_n)$ ، به عنوان یک  $R_0$ -زیرمدول  $H_{R_+}^i(M, N)_n$ ، توسط توانی از  $m_0$  صفر می شود و بنابراین یک  $R_0$ -مدول آرتینی است. لذا بنابر توجه ۴.۲، کافی است نشان دهیم برای  $0 \leq i \leq g(M, N)$ ،  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N))$  یک  $R$ -مدول آرتینی است. این کار را با استقراء روی  $i$  انجام می دهیم. اگر  $i = 0$ ، آنگاه طبق [۳، گزاره ۱.۲]، داریم

$$\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^0(M, N)) = \Gamma_{m_0 R}(\Gamma_{R_+}(\text{Hom}_R(M, N))) = \Gamma_m(\text{Hom}_R(M, N))$$

که به وضوح یک  $R$ -مدول آرتینی است که  $m = m_0 + R_+$ ، فرض کنید  $0 < i \leq g(M, N)$  و حکم برای مقادیر کوچکتر از  $i$  برقرار باشد. به علاوه، فرض کنید  $X$  یک مجهول روی حلقه  $R_0$  باشد،  $n_0 = m_0 S_0$ ،  $S_0 = R_0[X]_{m_0 R_0[X]}$ ،  $S = S_0 \otimes_{R_0} R$ ،  $M' = S \otimes_R M = S_0 \otimes_{R_0} M$ ،  $N' = S \otimes_R N = S_0 \otimes_{R_0} N$ ، به سادگی دیده می شود که  $S_0$  یک  $R_0$ -جبر یکدست با وفای نوتری با ایده آل ماکسیمال  $n_0$  با میدان مانده نامتناهی است. بنا بر قضیه تغییر پایه یکدست برای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته داریم

$$S_0 \otimes_{R_0} \Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N)) \cong \Gamma_{m_0 S}(S_0 \otimes_{R_0} H_{R_+}^i(M, N)) \cong \Gamma_{n_0 S}(H_{S_+}^i(M', N'))$$

بنابراین کافی است نشان دهیم  $\Gamma_{n_0 S}(H_{S_+}^i(M', N'))$  یک  $S$ -مدول مدرج آرتینی است. بنابراین بدون کاستن از کلیت مسئله، می توان به جای  $R$ ،  $M$ ،  $N$  به ترتیب  $S$ ،  $M'$ ،  $N'$  قرارداد و فرض کرد  $k_0$  نامتناهی است. همچنین به ازای هر عدد صحیح  $i$ ،  $R$ -مدول  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N))$  آرتینی است اگر و فقط اگر  $R$ -مدول  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N/\Gamma_{m_0}(N)))$  آرتینی باشد. با جایگذاری  $\frac{N}{\Gamma_{R_+}(N)}$  به جای  $N$  می توان فرض کرد  $\Gamma_{R_+}(N) = 0$ . لذا طبق لم ۱.۲، عنصر  $N$ -منظم  $x$  متعلق به  $R_1$  وجود دارد. حال از رشته دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow N(-1) \xrightarrow{x} N \longrightarrow \frac{N}{xN} \longrightarrow 0$$

رشته دقیق طولانی (از  $R$ -مدول ها و  $R$ -همریختی های مدرج)

$$\xrightarrow{x} H_{R_+}^{i-1}(M, N) \longrightarrow H_{R_+}^{i-1}(M, N/xN) \longrightarrow H_{R_+}^i(M, N)(-1) \xrightarrow{x} H_{R_+}^i(M, N)$$

بدست می آید که از آن رشته دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow \frac{H_{R_+}^{i-1}(M, N)}{xH_{R_+}^{i-1}(M, N)} \longrightarrow H_{R_+}^{i-1}(M, N/xN) \longrightarrow (0 :_{H_{R_+}^i(M, N)} x)(-1) \longrightarrow 0 \quad (1)$$

حاصل می شود.

با اعمال فانکتور  $\Gamma_{m_0 R}(-)$  روی رشته دقیق کوتاه (۱) رشته دقیق زیر از  $R$ -مدول ها و  $R$ -همریختی ها مدرج بدست می آید

$$\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^{i-1}(M, N/xN)) \longrightarrow \Gamma_{m_0 R}(0 :_{H_{R_+}^i(M, N)} x)(-1) \longrightarrow H_{m_0 R}^1\left(\frac{H_{R_+}^{i-1}(M, N)}{xH_{R_+}^{i-1}(M, N)}\right) \quad (2)$$



طبق [۱]، نتیجه ۱۳.۴.۳ داریم

$$\begin{aligned} H_{m_0 R}^1(H_{R_+}^{i-1}(M, N)/xH_{R_+}^{i-1}(M, N)) &\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (H_{m_0 R}^1(H_{R_+}^{i-1}(M, N)/xH_{R_+}^{i-1}(M, N))_n) \\ &\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_{m_0}^1(H_{R_+}^{i-1}(M, N)_n/xH_{R_+}^{i-1}(M, N)_n) \end{aligned}$$

پس آخرین مدول از تعداد متناهی درجه تشکیل شده است و مولفه‌های مدرج آن  $R_0$  -مدول آرتینی هستند. لذا  $H_{m_0 R}^1(H_{R_+}^{i-1}(M, N)/xH_{R_+}^{i-1}(M, N))$  یک  $R$  -مدول آرتینی است. از طرف دیگر، می‌بینیم که  $i-1 \leq g(M, N) -$  در نتیجه، بنابر فرض استقراء  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^{i-1}(M, N/xN))$  یک  $R$  -مدول آرتینی است. لذا از رشته دقیق (۲) نتیجه می‌گیریم  $\Gamma_{m_0 R}(0 :_{H_{R_+}^i(M, N)} x)$  آرتینی است. چون

$$\Gamma_{m_0 R}(0 :_{H_{R_+}^i(M, N)} x) = (0 :_{\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N))} x)$$

پس طبق قضیه ملکرسون [۱]، قضیه ۲.۱.۷، نتیجه می‌گیریم  $\Gamma_{m_0 R}(H_{R_+}^i(M, N))$  نیز یک  $R$  -مدول آرتینی است. در نتیجه  $H_{R_+}^i(M, N)$  یک  $R$  -مدول مدرج آرتینی به ازای هر  $0 \leq i \leq d$  خواهد بود.  $\square$

## مراجع

- [1] Brodmann, M. P. and R. Y. Sharp, 2013. Local cohomology, volume 136 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition. An algebraic introduction with geometric applications.
- [2] Bruns, W. and J. Herzog, 1993. Cohen-Macaulay rings, volume 39 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Suzuki, N., 1978. On the generalized local cohomology and its duality. *J. Math. Kyoto Univ.*, 18(1): 71–85.
- [4] Zamani, N., 2003. On the homogeneous pieces of graded generalized local cohomology modules. *Colloq. Math.*, 97(2): 181–188.
- [5] Zamani, N. and A. Khojoli, 2015. Artinian graded generalized local cohomology. *J. Algebra Appl.*, 14(7): 1550111, 10.

## زیرگروه‌ها، حلقه‌ها و ایده‌آل‌های مطلق گروه‌های مرلی

فاطمه کریمی\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

fatemehkarimi@pnu.ac.ir

**چکیده:** برای هر گروه آبلی مانند  $G$ ، زیرگروه  $A$  از  $G$  را یک ایده‌آل مطلق  $G$  می‌نامیم هرگاه  $A$  ایده‌آلی از هر حلقه روی گروه باشد. در این مقاله گروه‌های مرلی بی‌تاب را مورد مطالعه قرار داده و بعد از مرور حلقه‌های روی این گروه‌ها، به بررسی برخی از زیرگروه‌ها و ایده‌آل‌های مطلق آنها پرداخته و نتایجی در این ارتباط خواهیم آورد.

**کلمات کلیدی:** گروه مرلی، ایده‌آل مطلق، حلقه روی گروه، رتبه

### ۱ مقدمه

فرض کنید که  $G$  یک گروه آبلی جمعی باشد، در این صورت هر همریختی به صورت  $\mu: G \otimes G \rightarrow G$  یک ضرب روی  $G$  و  $(G, \mu)$  یک حلقه روی  $G$  نامیده می‌شود.  $G$  را پوچ شرکت‌پذیر گوئیم هرگاه تنها ضرب شرکت‌پذیر روی  $G$  همان ضرب صفر باشد. برای هر  $G$ ،  $S \subseteq G$ ، منظور از  $\langle S \rangle_*$ ، زیرگروه خالص تولید شده توسط  $S$  است. در [۱]، گروه‌های آبلی از رتبه‌های مختلف در نظر گرفته شده و زیرگروه‌هایی از آنها که زیرحلقه‌ای از هر حلقه روی گروه هستند را معرفی نمودیم. در این مقاله حلقه‌های روی گروه‌های مرلی در نظر گرفته شده و ضمن بررسی آنها، زیرگروه‌هایی که ایده‌آل از هر حلقه روی گروه می‌باشند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این زیرگروه‌ها را ایده‌آل‌های مطلق نامیده و در کنار آنها نتایجی در مورد زیرگروه‌های اساسی و خالص گروه‌های مرلی خواهیم آورد. توجه کنید که برای دو گروه  $A$  و  $B$  داریم  $A \subseteq B$  هرگاه  $0 < n \in \mathbb{Z}$  چنان موجود باشد که  $nA \subseteq B$  و اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$ ، آنگاه  $A$  و  $B$  را شبه مساوی خوانده و این مطلب را با نماد  $A \doteq B$  نمایش می‌دهیم. همچنین اگر زیرگروه‌های  $A' \leq A$  و  $B' \leq B$  چنان موجود باشند که  $A' \doteq B'$  و  $A \subseteq A'$  و  $B \subseteq B'$ ، آنگاه  $A$  و  $B$  را شبه یکریخت نامیم و این مطلب را با نماد  $A \cong B$  نمایش می‌دهیم. برای بقیه‌ی نمادها و تعریف‌ها به [۴] مراجعه نمایید.

### ۲ گروه‌های مرلی و حلقه‌های روی آنها

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه آبلی بی‌تاب از رتبه متناهی باشد. در این صورت  $G$  را یک گروه مرلی نامیم هرگاه برای هر عدد اول  $p$ ،  $r_p(G) \leq 1$ .

**تعریف ۲.۲.** یک گروه مرلی را خاص گوئیم هرگاه قویاً همگن و به طور خارج قسمتی بخش پذیر باشد.

با توجه به [۲] می دانیم که گروه های مرلی تحویل یافته همگن هستند و هر گروه مرلی تحویل یافته مانند  $G$  به فرم  $G = G_t \otimes E$  می باشد که  $G_t$  زیرگروهی از رتبه ی یک با تایپ  $t$  است و  $E = E(G)$  همان حلقه ی اندومورفسم های گروه  $G$  می باشد. همچنین در این مقاله اشاره شده که  $E$  یک قلمرو ایده آل اصلی است و گروه جمعی آن، یعنی  $E^+$ ، نیز یک گروه مرلی تحویل یافته است.

**قضیه ۳.۲ ([۶]).** با تقریب یکرختی جمعوندها، هر گروه مرلی به فرم یکتای

$$G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k \oplus H, \quad (*)$$

که  $G_i$  ها گروه های خاص و  $H$  یک گروه پوچ است، نمایش داده می شود.

**قضیه ۴.۲ ([۵]).** احکام زیر برای گروه های مرلی برقرار است:

- (۱) هر ضرب روی گروه های مرلی، شرکت پذیر و جابجایی است
- (۲) هر ضرب ناصفر روی یک گروه مرلی پوچ توان نیست.
- (۳) هر گروه مرلی همگن قویاً تجزیه ناپذیر است.

توجه نمایید که در قضیه بالا عکس (۳) لزوماً برقرار نیست. یعنی گروه های مرلی قویاً تجزیه ناپذیری وجود دارند که همگن نیستند. مثالی از چنین گروهی در [۵] آورده شده است.

**قضیه ۵.۲ ([۶]).** اگر  $G$  یک گروه مرلی غیر پوچ باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:

- (الف)  $G$  همگن با تایپ خودتوان است.
- (ب)  $G$  گروهی تجزیه ناپذیر است.
- (ج)  $G$  گروهی قویاً تجزیه ناپذیر است.
- (د) روی گروه  $G$  حلقه ای از نوع میدان است.
- (ه) هر حلقه ی غیر بدیهی روی  $G$  از نوع میدان است.

حال فرض کنید  $MH$  رده ی همه ی گروه های مرلی همگن و  $NIL$  رده ی همه ی گروه های بی تاب پوچ (پوچ شرکت پذیر) از رتبه ی متناهی باشد. در این صورت از قسمت (۱) قضیه ی ۴.۲:

**نتیجه ۶.۲.** برای رده های  $MH$ ،  $NIL$  و  $NIL_a$  داریم:

$$MH \cap NIL_a = MH \cap NIL, MH \setminus NIL_a = MH \setminus NIL$$

**نتیجه ۷.۲.** اگر  $r(G) = 1$ ، در این صورت  $G \in MH$  و  $G \in MH \cap NIL$  اگر و تنها اگر  $t(G)$  خودتوان نباشد.

**نتیجه ۸.۲.** با استفاده از قضیه ی ۵.۲ روی هر گروه از  $MH \setminus NIL$ ، حلقه ای از نوع میدان موجود است.

### ۳ زیرگروه ها و ایده آل های مطلق

در این بخش به بیان نتایجی در مورد زیرگروه ها و ایده آل های مطلق گروه های مرلی می پردازیم:

**قضیه ۱.۳ ([۳]).** اگر  $G$  یک گروه مرلی باشد و  $A \leq G$ ، آنگاه  $n \in N$  چنان موجود است که  $A = nG$ .

**قضیه ۲.۳.**  $G$  فرض کنید  $G$  یک گروه بی تاب تحویل یافته باشد. در این صورت  $G$  یک گروه مرلی تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیرگروه خالص غیربدیهی مانند  $H$ ،  $G/H$  بخش پذیر باشد.

برهان. فرض کنید  $H$  زیرگروه خالصی با رتبه‌ی یک از  $G$  باشد. چون  $G/H$  بخش پذیر است و برای هر عدد اول  $p$ ،  $r_p(G) = r_p(H) + r_p(G/H) = r_p(H) \leq 1$  پس  $G$  یک گروه مرلی بوده و به خصوص  $\text{Ext}(G, G)$  بی تاب است. حال اگر  $G$  تجزیه‌ناپذیر نباشد آنگاه  $G = C \oplus D$  و یکی از جمعوندها باید بخش پذیر باشد که با توجه به تحویل یافته بودن  $G$ ، غیر ممکن است. حال حکم و اثبات قسمت عکس به سادگی به دست می‌آیند.

□

**قضیه ۳.۳.** اگر  $G$  یک گروه مرلی از رتبه‌ی متناهی و  $H$  یک زیرگروه اساسی آن باشد آنگاه

$$(1) \quad H \cong G \quad (\text{و در حقیقت } H \cong G)$$

$$(2) \quad T(H) = T(G), G_t = H_t, G_t^* = H_t^* \quad (2)$$

برهان. اگر  $r(G) = n$  و  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  یک مجموعه مستقل خطی از آن باشد، آنگاه عدد  $k$  را ک.م.م همه‌ی اعدادی مانند  $n_i$  می‌گیریم که  $n_i x_i \in A$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$ . در نتیجه حکم‌ها به راحتی اثبات می‌شوند.

□

**قضیه ۴.۳.** اگر  $G$  یک گروه مرلی باشد که روی آن حلقه‌ای از نوع میدان موجود است آنگاه هر ایده‌آل این حلقه به فرم  $nG$ ، برای برخی  $n \in N \cup \{0\}$ ، می‌باشد.

برهان. فرض کنید حلقه‌ی  $(\bar{G}, \times)$ ، که  $\bar{G} = Q \otimes G$ ، میدانی با عضو همانی  $e$ ،  $H$  ایده‌آلی از حلقه‌ی  $(G, \times)$  و  $h \in H$ ،  $h \neq 0$ . در این صورت حلقه‌ی  $(\bar{G}, \times)$  دارای عضو  $h^{-1}$  است که وارون  $h$  می‌باشد و برای عدد صحیحی مانند  $k$ ،  $kh^{-1} \in G$ . حال اگر  $x$  عضو دلخواهی از  $G$  باشد آنگاه

$$h \times kh^{-1} \times x = ke \times x = kx \in H,$$

که نتیجه می‌دهد  $kG \subseteq H$  و لذا  $H \cong G$ . ولی چون  $G$  و  $H$  هردو گروه مرلی هستند پس  $G \cong H$  و حکم با استفاده از ۱.۳ به دست می‌آید.

□

**قضیه ۵.۳ ([۲]).** هر زیرگروه کاملاً پایا از یک گروه مرلی، یک ایده‌آل مطلق است. ولی عکس این مطلب درست نیست.

**قضیه ۶.۳.** اگر  $G$  یک گروه مرلی با فرم استاندارد (\*) باشد آنگاه حلقه‌ای روی  $G$  موجود است که هر ایده‌آل این حلقه به فرم

$$C = n_1 G_1 \oplus \dots \oplus n_k G_k \oplus H_1 \quad (**)$$

می‌باشد که  $n_i \in N \cup \{0\}$  و  $H_1$  زیرگروهی از  $H$  است. همچنین زیرگروه دلخواه  $C$  از  $G$  یک ایده‌آل مطلق است اگر و تنها اگر به فرم (\*\*) باشد.

## مراجع

- [1] A. M. Aghdam, F. Karimi, A. Najafizadeh, *On the subgroups of torsion free groups which are subrings in every rings*, Journal of pure and applied matl., ۳۰ (2013), 63–76.



- [2] U. Albrecht, S. Friedenberg, *Murley groups and torsion-freeness of Ext*, J. Algebra. **331** (2011), 378–387.
- [3] A.R. Chekhlov, *On abelian groups such that all their subgroups are ideals*, Bulletin of Tomsk State University. **3** (2009), 64–67.
- [4] L. Fuchs, *Abelian groups*, Springer Int. Publ, Cham, **1, 2** (2015).
- [5] E. I. Kompantseva, A. A. Fomin *Absolute ideal of almost completely decomposable abelian groups corresponding to finite (Russian)*, **22(4)** (2015), 101–110.
- [6] E. I. Kompantseva, A. A. Tuganbaev, *rings on abelian torsion free groups of finite rank*, Beitr. Algebra Geom. **63** (2022), 267–285.

## نتایجی از مدول‌های متمم‌شده $H$ - به‌طور هم‌متناهی تولید شده

منصوره معانی شیرازی<sup>\*</sup>، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

maani@pnu.ac.ir

شمس‌الملوک خوش‌دل، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

khoshdel@pnu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، مثال‌هایی از مدول‌های متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده آورده و نتایجی در رابطه با آن‌ها بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم که تحت شرطی تمام مدول‌ها روی حلقه‌های بولی متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده هستند. متذکر می‌شویم که هر مدول تک‌سریال متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده است اما مدول‌های تجزیه‌ناپذیر در حالتی خاص به رده مدول‌های متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده تعلق دارند.  
**کلمات کلیدی:** به‌طور متناهی تولیدشده، به‌طور هم‌متناهی تولیدشده، تجزیه‌ناپذیر، متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده.

### ۱ مقدمه

در سراسر این مقاله، مگر آن که خلاف آن ذکر شود،  $R$  یک حلقه ناصفر شرکت‌پذیر و یک‌دار است. هم‌چنین، تمام مدول‌ها  $R$  - مدول چپ ناصفر و یکانی هستند. بعضی از ریاضی‌دانان به بررسی رده مدول‌های متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده پرداخته‌اند ([۳]). در این مقاله، مثال‌هایی از این مدول‌ها آورده شده است. نشان می‌دهیم که تحت یک شرط تمام مدول‌ها روی حلقه‌های بولی متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده‌اند. هم‌چنین، به این سؤال پاسخ می‌دهیم که آیا مدول‌های تجزیه‌ناپذیر و تک‌سریال به رده مدول‌های متمم‌شده  $H$  - به‌طور هم‌متناهی تولیدشده متعلق هستند؟

### ۲ نتایج اصلی

این فصل را با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول چپ باشد. زیرمدول  $N$  از  $M$  به طور هم‌متناهی تولید شده نامیده می‌شود هرگاه  $\frac{M}{N}$  به طور متناهی تولید شده باشد.

روشن است که اگر مدول  $M$  به طور متناهی تولید شده باشد آن‌گاه هر زیرمدول آن به طور هم‌متناهی تولید شده است.

**تعریف ۲.۲.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول چپ باشد. در این صورت،  $M$  متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول به طور هم‌متناهی تولید شده  $N$  از  $M$  جمع‌وند مستقیم  $D$  از  $M$  موجود باشد به طوری که  $M = N + X$  اگر و تنها اگر  $M = D + X$ ، برای هر زیرمدول  $X$  از  $M$ .

روشن است که اگر مدول  $M$  دارای هیچ زیرمدول به طور هم‌متناهی تولید شده نباشد آن‌گاه  $M$  متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده است. هم‌چنین، می‌دانیم که هر زیرفضا از یک فضای برداری دل‌خواه یک جمع‌وند مستقیم آن فضای برداری است. بنابراین هر فضای برداری متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده است. به علاوه، از آنجایی که هر زیرمدول از یک مدول نیم‌ساده یک جمع‌وند مستقیم از آن مدول است، همه مدول‌های نیم‌ساده متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده هستند.

**مثال ۳.۲.** فرض کنید  $P$  مجموعه‌ی متشکل از تمام اعداد اول باشد و  $M = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ . از آن‌جا که  $M$  به عنوان یک  $\mathbb{Z}_p$ -مدول یک فضای برداری است،  $M$  متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده است. هم‌چنین،  $M$  به عنوان یک  $\mathbb{Z}$ -مدول نیم‌ساده است و لذا متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده می‌باشد.

یادآوری می‌کنیم که یک حلقه بولی  $([2])$  حلقه‌ای است که تمام عناصر آن خودتوان هستند. می‌دانیم که برای یک حلقه بولی  $R$  موارد زیر معادل هستند.

(الف) حلقه  $R$  آرتینی است.

(ب) حلقه  $R$  نوتری است.

(ج) حلقه  $R$  متناهی است.

(د) حلقه  $R$  نیم‌ساده است.

بنابراین اگر  $M$  مدولی روی حلقه بولی  $R$  باشد که در شرایط معادل بالا صدق کند آن‌گاه  $M$  نیم‌ساده و لذا یک مدول متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده است.

یک مدول  $M$  روی حلقه  $R$  تجزیه‌ناپذیر  $([4])$  است هرگاه  $M$  به صورت جمع مستقیم هیچ دو زیرمدول سره‌ی ناصفر از آن نوشته نشود.

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول تجزیه‌ناپذیر باشد. در این صورت، مدول  $M$  در یکی از دو شرط زیر صدق می‌کند.

(\*) دو زیرمدول سره‌ی ناصفر  $K$  و  $L$  از  $M$  وجود دارند به طوری که  $M = K + L$ .

(\*\*) برای هر دو زیرمدول سره‌ی ناصفر  $K$  و  $L$  از  $M$ ،  $M \neq K + L$ .

**مثال ۴.۲.**  $\mathbb{Z}$  به عنوان یک  $\mathbb{Z}$ -مدول دارای هیچ جمع‌وند سره‌ی ناصفر نیست. بنابراین  $\mathbb{Z}$  به عنوان یک  $\mathbb{Z}$ -مدول تجزیه‌ناپذیر و در شرط (\*) صدق می‌کند. توجه کنید که  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Z}$  متمم شده  $H$ -به طور هم‌متناهی تولید شده نیست.

مثال زیر مثال دیگری است از یک مدول تجزیه‌ناپذیر  ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ -ر شرط (\*) صدق می‌کند.

**مثال ۵.۲.** در  $\mathbb{Z}$ -مدول تجزیه‌ناپذیر  $\mathbb{Q}$  اگر  $L = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$  و  $N = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b = 2k+1 \right\}$  آن‌گاه  $L$  و  $N$  زیرمدول‌هایی از  $\mathbb{Q}$  هستند و  $\mathbb{Q} = L + N$ . تساوی اخیر نشان می‌دهد که  $\mathbb{Q}$  در  $(*)$  صدق می‌کند. اما،  $\mathbb{Q}$  به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده است. برای این منظور، ابتدا توجه کنید که هر زیرمدول به‌طور متناهی تولیدشده از  $\mathbb{Q}$  دوری است. از طرفی دیگر  $\mathbb{Q}$  دارای هیچ زیرمدول سره‌ی به‌طور هم‌متناهی تولیدشده نیست. زیرا اگر  $L$  چنین زیرمدولی از  $\mathbb{Q}$  باشد آن‌گاه زیرمدول دوری  $\left(\frac{a}{b}\right)$  وجود دارد به‌طوری که  $\mathbb{Q} = \left(\frac{a}{b}\right) + L$  و از آنجا نتیجه می‌شود که  $\mathbb{Q} = (a) + L$ . چون  $(a)$  یک زیرمجموعه از  $\mathbb{Z}$  است پس باید عدد گویایی مانند  $\frac{r}{s} \in L - \mathbb{Z}$  وجود داشته باشد. از آنجا  $\frac{1}{r} = na + l$  که در آن  $n \in \mathbb{Z}$  و  $l \in L$  بنابراین  $1 = r(na) + rl \in L$  که نشان می‌دهد  $(a) \subseteq L$  و در نتیجه  $L = \mathbb{Q}$ . بنا به آن‌چه ذکر شد،  $\mathbb{Q}$  به‌عنوان یک  $\mathbb{Z}$ -مدول متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده است.

مثال زیر مثالی است از یک مدول تجزیه‌ناپذیر که در شرط  $(**)$  صدق می‌کند.

**مثال ۶.۲.** فرض کنید  $p$  یک عدد اول باشد.  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  را به‌عنوان یک  $\mathbb{Z}$ -مدول در نظر بگیرید. زنجیر صعودی

$$0 \subset \left(\frac{1}{p} + \mathbb{Z}\right) \subset \left(\frac{1}{p^2} + \mathbb{Z}\right) \subset \cdots \subset \mathbb{Z}_{p^\infty}$$

متشکل از تمام زیرمدول‌های  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  است. زنجیر فوق نشان می‌دهد که مجموع هیچ دو زیرمدول سره از  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  برابر با  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  نیست و لذا  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  تجزیه‌ناپذیر و متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده است.

**گزاره ۷.۲.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول چپ تجزیه‌ناپذیر باشد. در این صورت، شرط لازم و کافی برای آن که  $M$  متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده باشد آن است که  $M$  در شرط  $(**)$  صدق کند.

**اثبات.** فرض کنید  $M$  متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده باشد. اگر زیرمدول‌های سره  $K$  و  $L$  از  $M$  وجود داشته باشند که  $M = K + L$  آن‌گاه، بنا به فرض،  $M$  دارای یک جمع‌وند مستقیم  $D$  می‌باشد به‌طوری که  $M = D + L$ . این تناقض نشان می‌دهد که  $M$  در شرط  $(**)$  صدق می‌کند. قسمت عکس گزاره بدیهی است.  $\square$

مدول  $M$  تک‌سریال است هرگاه هر دو زیرمدول دل‌خواه آن تحت رابطه شمول مقایسه‌پذیر باشند.

**نتیجه ۸.۲.** هر مدول تک‌سریال یک مدول متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده است.

**اثبات.** روشن است که هر مدول تک‌سریال یک مدول تجزیه‌ناپذیر است که در شرط  $(**)$  صدق می‌کند. لذا بنا به گزاره (۷.۲) هر مدول تک‌سریال یک مدول متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده است.  $\square$

مثال زیر معرف یک مدول تک‌سریال است  $([1])$  و لذا یک مدول متمم‌شده  $H$ -به‌طور هم‌متناهی تولیدشده نیز می‌باشد.

**مثال ۹.۲.** فرض کنید  $p$  و  $q$  دو عدد اول متمایز از حلقه  $\mathbb{Z}$  باشند. موضعی‌سازی حلقه  $\mathbb{Z}$  در ایده‌آل‌های اول  $(p)$  و  $(q)$  را به ترتیب با  $\mathbb{Z}_{(p)}$  و  $\mathbb{Z}_{(q)}$  نشان می‌دهیم. حلقه‌ی

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z}_{(q)} \end{bmatrix}$$

و ایده‌آل راست

$$H = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{bmatrix}$$

۳

از  $R$  را در نظر بگیرید. اعمال حلقه‌ی  $R$  همان جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها هستند. به‌سادگی دیده می‌شود که ایده‌آل‌های راست حلقه  $R$  و شامل  $H$  به‌شکل

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & 0 \\ J & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & 0 \\ \mathbb{Q} & I \end{bmatrix}$$

هستند، که در آن  $J$  یک  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -زیرمدول از  $\mathbb{Q}$  شامل  $\mathbb{Z}_{(p)}$  و  $I$  یک ایده‌آل دل‌خواه از  $\mathbb{Z}_{(q)}$  می‌باشند. بنابراین  $\frac{R}{H}$  یک  $R$ -مدول تک‌سریال است.

## مراجع

- [1] A. Facchini, “Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules”, Birkhauser Springer Basel, London, (1998).
- [2] T. W. Hungerford, “Algebra”, Springer Verlag, New York, (1974).
- [3] M.T. Koasan, “ $H$ -cofinitely supplemented modules”, Vietnam J. Math. **35(2)** (2007), 215-222.
- [4] T. Y. Lam, “Introduction to quadratic forms over fields”, Academic Press, New York, (1983).

## انواع مشتق‌های ضربی روی جبرهای هوپ

علی معدن‌شکاف\*؛ عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

amadanshekaf@semnan.ac.ir

محمد مهدی معتمدی نژاد، دانشجوی دکتری دانشگاه سمنان و عضو هیات علمی دانشگاه جامع علمی کاربردی

motamedinezhad@semnan.ac.ir

چکیده: در این مقاله، ضمن معرفی انواع مشتق‌ها شامل مشتق ضربی، مشتق  $f$  - ضربی و مشتق  $(f, g)$  - ضربی و مثال‌هایی برای هر کدام، خاصیت‌های مشتق‌های معرفی شده را در غالب مشتق انقباضی، مشتق یکنوا و مشتق ایدال بر روی برخی جبرهای هوپ بررسی می‌کنیم. سپس ضمن معرفی نقطه ثابت در مشتق‌های معرفی شده، در هر حالت، نشان می‌دهیم در صورتی که مشتق ایدال باشد، مجموعه نقاط ثابت تحت مشتق ایدال، تحت شرایطی تشکیل جبر هوپ می‌دهند.

کلمات کلیدی: جبر هوپ، مشتق ضربی، مشتق  $f$  - ضربی، مشتق  $(f, g)$  - ضربی

### ۱ مقدمه

جبرهای هوپ، یکی از انواع جبرهای منطقی بوده که در سال ۱۹۶۹ توسط بوسباخ معرفی شدند [۱]. یکی از ویژگی‌هایی که کمتر در این جبرها، مورد بررسی قرار گرفته، مفهوم مشتق و کاربردهای آن است. در این مقاله مفهوم مشتق در جبرهای هوپ و سایر مشتق‌های ضربی مانند مشتق  $f$  - ضربی و مشتق  $(f, g)$  - ضربی و خواص آنها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در نهایت در تمامی این مشتق‌ها نشان داده شده است که مجموعه نقاط ثابت آنها تحت مشتق ایدال و برخی شرایط دیگر، تشکیل جبر هوپ می‌دهند.

### ۲ جبرهای هوپ

در این بخش، تعاریف و برخی ویژگی‌های جبرهای هوپ و همچنین انواع جبرهای هوپ شامل کراندار، دارای  $DNP$ ، و غیره را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۲] جبر هوپ  $(H; \odot, \rightarrow, 1)$  ساختار جبری از نوع  $(2, 2, 0)$  است بطوریکه:

$(H1)$ .  $(H; \odot, 1)$  تکواره جابجایی با عضو همانی ۱ ۳۶

$$(H2). x \rightarrow x = 1, \text{ برای هر } x \in H,$$

$$(H3). x \odot (x \rightarrow y) = y \odot (y \rightarrow x), \text{ برای هر } x, y \in H,$$

$$(H4). (x \odot y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z), \text{ برای هر } x, y, z \in H,$$

تعریف ۲.۲. در جبر هوپ  $H$ ، تعریف می‌کنیم  $x \rightarrow y = 1$  اگر تنها و اگر  $x \leq y$ . به راحتی قابل بررسی است که  $\leq$  رابطه ترتیب جزئی روی  $H$  است. جبر هوپ کراندار، جبر  $(H; \odot, \rightarrow, 0, 1)$  است بطوریکه  $0 \leq x$ ، برای هر  $x \in H$ . در جبر هوپ  $H$ ، تعریف می‌کنیم  $x^0 = 1$  و  $x^n = x^{n-1} \odot x$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$ . فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار باشد. عمل متمم " ' " را برای هر  $x \in H$  به صورت  $x' = x \rightarrow 0$  تعریف می‌کنیم. همچنین قرار می‌دهیم  $(x')' = x$ . اگر برای هر  $x \in H$ ،  $x'' = x$  باشد، آنگاه گوئیم جبر هوپ کراندار  $H$ ، دارای «ویژگی نفی مضاعف» یا به اختصار (DNP) است. عضو  $x \in H$  را خودتوان نامیم اگر و فقط اگر  $x^2 = x$ . مجموعه اعضای خودتوان  $H$  را با  $Id(H) = \{x \in H : x^2 = x\}$  نشان می‌دهیم. اگر  $H$  شبکه توزیع پذیر باشد، آنگاه مجموعه تمام اعضای متمم دار  $H$  را با  $B(H)$  نشان می‌دهیم. جبر هوپ  $H$  را حذف پذیر نامیم اگر تکواره  $(H; \odot, 1)$  حذف پذیر باشد.

تعریف ۳.۲. جبر هوپ  $H$  را  $\vee$ -هوپ می‌نامیم اگر عمل دوتائی  $\vee$  که به صورت  $x \vee y = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$  تعریف می‌شود، دارای سوپریمم (کوچکترین کران بالا) روی  $H$  باشد.

### ۳ مشتق ضربی

در این بخش، ضمن تعریف مفهوم مشتق (ضربی) بر جبرهای هوپ، به بررسی برخی خاصیت‌های آن می‌پردازیم. در تمامی این بخش و بخش‌های دیگر،  $H$  را جبر  $\vee$ -هوپ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۳. [۵] یک تابع  $d : H \rightarrow H$  را مشتق روی  $H$  نامیم اگر برای هر  $x, y \in H$ ،  $d(x \odot y) = d(x) \odot y \vee x \odot d(y)$ . این مشتق را مشتق ضربی نیز نامیم [۳].  $d$  را یکنوا نامیم اگر  $x \leq y$  آنگاه  $d(x) \leq d(y)$ .  $d$  را انقباضی نامیم اگر  $d(x) \leq x$ .  $d$  را ایدال نامیم اگر هم یکنوا و هم انقباضی باشد.  $d$  را خودتوان می‌نامیم اگر  $d^2 = d$  باشد، بطوریکه  $d^2(x) = d(d(x))$ ، برای هر  $x \in H$ .

مثال ۲.۳. الف) فرض کنیم  $H$  کراندار باشد. تابع  $d_0 : H \rightarrow H$  را به صورت  $d_0(x) = 0$  برای هر  $x \in H$ ، تعریف کنیم، در این صورت  $d_0$  مشتقی روی  $H$  است که آن را مشتق صفر می‌نامیم. ب) برای هر  $x \in H$ ، تابع  $d_1$  را به صورت  $d_1(x) = x$  تعریف کنیم، در این صورت  $d_1$  مشتقی روی  $H$  است که آن را مشتق همانی می‌نامیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم  $d : H \rightarrow H$ ، مشتقی روی  $H$  است. مجموعه همه نقاط ثابت  $H$  تحت مشتق  $d$  را با  $Fix_d(H) = \{x \in H : d(x) = x\}$  یعنی  $Fix_d(H)$  نشان می‌دهیم،

گزاره ۴.۳. فرض کنیم  $d : H \rightarrow H$ ، مشتقی روی  $H$  است. در این صورت برای هر  $x, y \in Fix_d(H)$ ،  $x \odot y \in Fix_d(H)$  و اگر  $d$  ایدال باشد،  $x \vee y \in Fix_d(H)$ .

گزاره ۵.۳. فرض کنیم  $H$  جبر  $\vee$ -هوپ و  $d : H \rightarrow H$ ، مشتق ایدال و خودتوان روی  $H$  است. در این صورت  $(Fix_d(H); \odot, \rightarrow_d, 1)$  جبر هوپ است بطوریکه  $1(1) = 1$  و  $x \rightarrow_d y = d(x \rightarrow y)$  برای هر  $x, y \in Fix_d(H)$ . اگر  $H$  کراندار باشد،  $Fix_d(H)$  نیز کراندار است بطوریکه  $0 = d(0)$ .

## ۴ مشتق $f$ - ضربی

تعریف ۱.۴. [۳] فرض کنیم  $H$  جبر  $\vee$ -هوپ است. تابع  $d : H \rightarrow H$  را مشتق  $f$ -ضربی روی  $H$  می‌نامیم اگر تابع  $f : H \rightarrow H$  وجود داشته باشد بطوریکه  $d(x \odot y) = (d(x) \odot f(y)) \vee (f(x) \odot d(y))$ . مشتق  $d$  را معمولاً با  $d_f$  نشان می‌دهیم.  $d_f$  را یکنوا می‌نامیم اگر  $x \leq y$  آنگاه  $d_f(x) \leq d_f(y)$ .  $d_f(x) \leq d_f(y)$  را انقباضی می‌نامیم اگر  $d_f(x) \leq d_f(y)$  را ایدال می‌نامیم اگر هم یکنوا و هم انقباضی باشد.  $d_f$  را منظم می‌نامیم اگر  $d_f(1) \in Id(H)$ .

تذکر ۲.۴. در صورتی که تابع  $f$ ، تابع همانی باشد، مشتق  $f$ -ضربی همان مشتق ضربی تعریف ۱.۳ است.

مثال ۳.۴. فرض کنیم تابع  $f : H \rightarrow H$  دلخواه باشد. تابع  $d_f : H \rightarrow H$  را برای هر  $x \in H$ ، به صورت  $d_{f_0}(x) = 0$  تعریف می‌کنیم. در این صورت  $d_{f_0}$  مشتق  $f$ -ضربی روی  $H$  است.

گزاره ۴.۴. فرض کنیم  $H$  کراندار و  $d_f : H \rightarrow H$  مشتقی  $f$ -ضربی روی  $H$  است. در این صورت:

(i) اگر  $f(0) = 0$ ، آنگاه  $d_f(0) = 0$ ،  $d_f(x) \leq f(x)'$  و  $d_f(x') \leq f(x)'$ ، برای هر  $x \in H$ .

(ii)  $f(x) \odot d_f(1) \leq d_f(x)$ ، برای هر  $x \in H$ .

گزاره ۵.۴. فرض کنیم  $d_f : H \rightarrow H$  مشتقی  $f$ -ضربی و یکنوا روی  $H$  است. در این صورت:

(i) اگر  $z \leq x \rightarrow y$  آنگاه  $d_f(y) \rightarrow d_f(x)$  و  $f(z) \leq d_f(x) \rightarrow d_f(y)$  و  $f(x) \leq d_f(z) \rightarrow d_f(y)$ ، برای هر  $x, y, z \in H$ .

(ii)  $d_f(y) \rightarrow d_f(x) \rightarrow d_f(y)$  و  $f(x \rightarrow y) \leq d_f(x) \rightarrow d_f(y)$  و  $d_f(x \rightarrow y) \leq f(x) \rightarrow d_f(y)$ ، برای هر  $x, y \in H$ .

(iii)  $d_f(x) \leq d_f(1)$ ، برای هر  $x \in H$ .

گزاره ۶.۴. فرض کنیم  $d_f : H \rightarrow H$  مشتقی  $f$ -ضربی و انقباضی روی  $H$  است. در این صورت:

(i)  $d_f(x) \odot d_f(y) \leq d_f(x \odot y) \leq d_f(x) \vee d_f(y)$ ، برای هر  $x, y \in H$ .

(ii) اگر  $d_f$  یکنوا باشد، آنگاه  $d_f(x \rightarrow y) \leq d_f(x) \rightarrow d_f(y) \leq d_f(x) \rightarrow f(y)$ .

(iii) اگر  $d_f(1) = 1$ ، آنگاه  $d_f(x) = f(x)$ ، برای هر  $x \in H$ .

گزاره ۷.۴. فرض کنیم  $d_f : H \rightarrow H$  مشتق  $f$ -ضربی روی  $H$  و برای هر  $x \in H$ ،  $f(x) \leq x$ . در این صورت:

(i) اگر  $d_f$  مشتق  $f$ -ضربی انقباضی باشد، آنگاه  $x \odot y \in Fix_{d_f}(H)$ ، برای هر  $x, y \in Fix_{d_f}(H)$ .

(ii) اگر  $d_f$  مشتق  $f$ -ضربی ایدال باشد، آنگاه  $x \vee y \in Fix_{d_f}(H)$ ، برای هر  $x, y \in Fix_{d_f}(H)$ .

قضیه ۸.۴. فرض کنیم  $H$  کراندار و  $d_f : H \rightarrow H$  مشتق  $f$ -ضربی ایدال و خودتوان روی  $H$  و برای هر  $x \in H$ ، داشته باشیم  $f(x) \leq x$ . در این صورت  $(Fix_{d_f}(H); \odot, \rightarrow_d, d_f(0), d_f(1))$  جبر هوپ کراندار است بطوریکه  $x \rightarrow_d y = d_f(x \rightarrow y)$ ، برای هر  $x, y \in Fix_{d_f}(H)$ .

## ۵ $(f, g)$ - مشتق ضربی

تعریف ۱.۵. [۴] فرض کنیم  $H$  جبر  $\vee$ -هوپ و  $f, g : H \rightarrow H$  مشتق‌های ضربی روی  $H$  باشند. برای هر  $x, y \in H$ ،  $d : H \rightarrow H$  را  $(f, g)$ -مشتق می‌نامیم اگر  $d(x \odot y) = (f(x) \odot g(y)) \vee (x \odot g(y))$ .  $(f, g)$ -مشتق یکنوا می‌نامیم اگر  $x \leq y$  آنگاه  $d(x) \leq d(y)$ .  $d(x) \leq d(y)$  را  $(f, g)$ -مشتق انقباضی<sup>۳۸</sup> می‌نامیم اگر  $d(x) \leq x$  را  $(f, g)$ -مشتق ایدال می‌نامیم اگر هم یکنوا باشد و هم انقباضی.

مثال ۲.۵. الف) فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار و  $a \in H$ . تعریف می‌کنیم  $f, g : H \rightarrow H$  با ضابطه  $f(x) = x \odot a$  و  $g(x) = 0$  برای هر  $x \in H$ . واضح است که  $f$  و  $g$  مشتق روی  $H$  هستند. تعریف می‌کنیم  $d : H \rightarrow H$  با ضابطه  $d(x) = x \odot a$ ، برای هر  $x \in H$ . به سادگی دیده می‌شود که  $d, (f, g)$  -مشتق ایدال روی  $H$  است. ب) اگر  $f = g$ ، آنگاه  $d(x \odot y) = (f(x) \odot y) \vee (x \odot f(y)) = f(x \odot y)$ . لذا سازگاری با تعریف مشتق ضربی ۱.۳ دارد.

گزاره ۳.۵. فرض کنیم  $H$  جبر  $\vee$ -هوپ کراندار و  $d_{fg} : H \rightarrow H$ ،  $(f, g)$  -مشتق روی  $H$  است. در این صورت:

$$(i) \quad d_{fg}(0) = 0, \quad d_{fg}(x) \leq f(1) \odot x \leq d_{fg}(x) \text{ و } g(x) \leq d_{fg}(x) \text{ برای هر } x \in H$$

$$(ii) \quad \text{اگر } x \odot y = 0 \text{، آنگاه } x \odot f(y) = d_{fg}(x \odot y) = 0$$

$$(iii) \quad \text{اگر } H \text{ دارای } (DNP) \text{ باشد، آنگاه } d_{fg}(x) \leq x$$

گزاره ۴.۵. فرض کنیم  $d_{fg} : H \rightarrow H$ ،  $(f, g)$  -مشتقی یکنوا روی  $H$  است. در این صورت:

$$(i) \quad z \leq x \rightarrow y \text{ ایجاب می‌کند که } d_{fg}(y) \leq f(x) \rightarrow d_{fg}(y) \text{ و } d_{fg}(y) \leq g(z) \rightarrow d_{fg}(y) \text{ برای هر } x, y, z \in H$$

$$(ii) \quad d_{fg}(y) \leq f(x) \rightarrow d_{fg}(y) \text{ و } g(x) \rightarrow d_{fg}(y) \leq x \rightarrow d_{fg}(y) \text{ برای هر } x, y \in H$$

$$(iii) \quad d_{fg}(x) \leq d_{fg}(1) \text{ برای هر } x \in H$$

گزاره ۵.۵. فرض کنیم  $d_{fg} : H \rightarrow H$ ،  $(f, g)$  -مشتقی انقباضی روی  $H$  است. در این صورت برای هر  $x, y \in H$ :

$$(i) \quad d_{fg}(x \rightarrow y) \leq x \rightarrow y \leq d_{fg}(x) \rightarrow y \text{ و } x \rightarrow d_{fg}(y) \leq d_{fg}(x) \rightarrow d_{fg}(y) \leq d_{fg}(x) \rightarrow y$$

$$(ii) \quad \text{اگر } d_{fg} \text{ یکنوا باشد، آنگاه } d_{fg}(x) \rightarrow d_{fg}(y) \leq d_{fg}(x) \rightarrow d_{fg}(x \rightarrow y)$$

گزاره ۶.۵. فرض کنیم  $d_{fg} : H \rightarrow H$ ،  $(f, g)$  -مشتق ایدال روی  $H$  است. در این صورت برای هر  $x, y \in \text{Fix}_{d_{fg}}(H)$ :

$$x \vee y \in \text{Fix}_{d_{fg}}(H) \text{ و } x \odot y \in \text{Fix}_{d_{fg}}(H)$$

گزاره ۷.۵. فرض کنیم  $H$  جبر  $\vee$ -هوپ حذف پذیر و  $d_{fg} : H \rightarrow H$ ،  $(f, g)$  -مشتق ایدال روی  $H$  بطوریکه

$$d_{fg}(1) \in B(H) \text{ است. در این صورت } (d_{fg}(1), \rightarrow_d, \bar{1}) \text{ جبر هوپ است بطوریکه } \bar{1} = d_{fg}(1) \text{ و } x \rightarrow_{d_{fg}} x$$

$$y = d_{fg}(x \rightarrow y) \text{ برای هر } x, y \in \text{Fix}_{d_{fg}}(H) \text{، اگر } H \text{ کراندار باشد، } \text{Fix}_{d_{fg}}(H) \text{ کراندار است بطوریکه } \bar{0} = d_{fg}(0)$$

## مراجع

- [1] B. Bosbach, Komplementare Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik, Fund. Math. 64, (1969), 257-287.
- [2] M. Kondo, Some types of filters in hoops, 41st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, (2011), 50-53, DOI:10.1109/ISMVL.2011.9.
- [3] M. Zaoui, D. Gretete, B. Fahid, On  $f$ -derivations in residuated lattices, Journal of Prime Research in Mathematics, 19(2) (2023), 17-23.
- [4] M. Zaoui, D. Gretete, B. Fahid,  $(f, g)$ -Derivations in residuated lattices, Journal of Algebraic Systems, (2024); <https://doi.org/10.22044/JAS.2023.11989.1615>.
- [5] L. J. Zhang, X. L. Xin, Derivations and differential filter semihoops, Italian Journal of pure and applied mathematics, N. 42, (2019), 916-933.

## فصل ۳

# ریاضیات کاربردی

## بررسی توافق پیشرو- دنباله‌رو مکان سیستم‌های چندعامله با دینامیک‌های خطی

آرش جدائی \*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

jodaei56@pnu.ac.ir

محمدرضا نیکنام، عضو هیأت علمی گروه علوم پایه، واحد خلخال، دانشگاه آزاد اسلامی، خلخال، ایران

Rezanik82@yahoo.com

**چکیده:** در این مقاله، طراحی کنترل‌کننده برای مسئله توافق پیشرو- دنباله‌رو یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های خطی، یکسان و گراف ارتباطی ثابت و بی‌سو مطالعه می‌شود. برای طراحی کنترل‌کننده از قضیه پایداری لیاپانوف، نظریه گراف و نامساوی ریکاتی استفاده شده و کنترل‌کننده‌ای برای کنترل مکان عامل‌های دنباله‌رو پیشنهاد می‌شود. نشان می‌دهیم این کنترل‌کننده عامل‌های سیستم چندعامله را به توافق پیشرو- دنباله‌رو می‌رساند.  
**کلمات کلیدی:** سیستم‌های چندعامله، توافق، پیشرو، دنباله‌رو.

### ۱ مقدمه

ایده سیستم‌های چندعامله و کنترل گروهی با الهام از حرکت گروهی حیوانات مانند حرکت گروهی پرندگان، ماهی‌ها و... مطرح شده است. این سیستم‌ها از تعدادی عامل تشکیل شده‌اند که برای رسیدن به هدفی مشخص با یکدیگر تبادل اطلاعات می‌کنند [۴]. مهمترین ویژگی در سیستم‌های چندعامله این است که هر عامل فقط بطور موضعی اطلاعات را با عامل‌های مجاور (همسایه) بصورت بیسیم به اشتراک می‌گذارد. کنترل‌کننده‌های عامل‌ها را اصطلاحاً پروتکل نیز می‌نامند. در سال‌های اخیر روش‌های کنترل سیستم‌های چندعامله به علت کاربرد وسیع آن در علوم مهندسی، بیولوژیکی، کامپیوتر و... بطور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است که کاربرد آن را می‌توان در زمینه‌هایی همچون وسایل هوایی بدون سرنشین UAV، وسایل زمینی بدون سرنشین UGV، وسایل زیردریایی بدون سرنشین UUV، تیم‌های رباتیک و شبکه‌های حسگر مشاهده نمود [۵، ۳، ۱]. روش‌های کنترل سیستم‌های چندعامله به منظور دستیابی به اهداف مختلفی ایجاد شده‌اند که یکی از آنها مسئله توافق است. اگر بردارهای مکان عامل‌ها به یک مقدار مشخص و مشترک همگرا شوند، در این صورت مسئله را توافق عامل‌ها در سیستم‌های چندعامله گویند. در مسئله توافق، عامل‌ها به دو گروه پیشرو و دنباله‌رو تقسیم‌بندی می‌شوند. اگر در یک سیستم چند عامله چندین عامل دنباله‌رو و یک عامل پیشرو موجود باشند بطوریکه بردارهای مکان عامل‌های دنباله‌رو به بردار عامل پیشرو همگرا شوند یا در اصطلاح آن را ردیابی کنند، آنگاه این توافق را توافق پیشرو-دنباله‌رو مکانی گویند [۲]. در مسئله توافق پیشرو-

دنباله‌رو، همه عوامل دنباله‌رو به کنترل‌کننده‌هایی مجهز می‌شوند که عامل پیشرو را ردیابی کنند. لذا هر عامل دنباله‌رو باید از عامل پیشرو و سایر عامل‌های دنباله‌رو دیگر، اطلاعات دریافت کند. در مقاله حاضر حل مسئله توافق پیشرو-دنباله‌رو از نظر مکانی برای یک سیستم چند عامله با دینامیک‌های خطی مورد بررسی قرار گرفته و کنترل‌کننده‌ای جهت حل آن پیشنهاد می‌شود.

یک سیستم چندعامله با  $N$  عامل دنباله‌رو و یک عامل پیشرو مفروض هستند. عامل پیشرو را با اندیس 0 و عامل‌های دنباله‌رو با اندیس‌های  $1, 2, \dots, N$  در نظر می‌گیریم. دینامیک‌های عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو بصورت زیر می‌باشند:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t), \quad (2)$$

که در آنها  $x_0 \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m, x_i \in \mathbb{R}^n$  به ترتیب بردارهای مکان و کنترل مکان عامل دنباله‌رو  $i$ ام و بردار مکان عامل پیشرو هستند.  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب هستند. در این سیستم چندعامله، عامل‌های دنباله‌رو را طوری کنترل می‌کنیم که از نظر مکان عامل پیشرو را ردیابی کنند. به عبارت دیگر برای هر عامل دنباله‌رو و هر شرط اولیه متناظر آن عامل باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall x_i(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

## تعاریف

در این بخش چند تعریف از [۲] که در بررسی مقاله حاضر بکار برده شده است، معرفی می‌شوند: برای ماتریس حقیقی و متقارن  $P$ ،  $P > 0$  و  $P < 0$  به ترتیب یعنی ماتریس  $P$  معین منفی و معین مثبت باشد. برای ماتریس  $P$ ،  $P > 0$ ،  $\rho(P)$  کوچکترین مقدار ویژه مثبت ماتریس  $P$  است.  $N_i = \{v_j \in V, (v_j, v_i) \in E, i \neq j\}$  را مجموعه راس‌های مجاور راس  $i$  گویند. علامت  $\otimes$  نماد ضرب کرونگر می‌باشد.

ماتریس  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  را ماتریس مجاورت گراف گویند هرگاه  $c_{ii} = 0$  و  $c_{ij} = 1$  اگر یک یال بین راس  $i$  و راس  $j$  موجود باشد در غیر اینصورت  $c_{ij} = 0$ . نشانگر وزن یال بین راس  $i$  و راس  $j$  است. ماتریس  $L = (L_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  را ماتریس لاپلاسیان گراف گویند هرگاه  $L_{ij} = -c_{ij}$  و  $i \neq j$  و  $L_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}$ . ماتریس قطری  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$  را ماتریس مجاورت عامل پیشرو گویند.  $d_i = 1$  هرگاه عامل پیشرو یک عامل مجاور  $i$ ام باشد، در غیر این صورت  $d_i = 0$ .

## ۲ طراحی کنترل‌کننده

کنترل‌کننده‌ای برای کنترل مکان عامل‌های دنباله‌رو جهت رسیدن به توافق پیشرو-دنباله‌رو بصورت زیر طراحی می‌شود:

$$u_i(t) = K \left[ \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) + d_i (x_0(t) - x_i(t)) \right] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  را ماتریس فیدبک می‌نامند. ماتریس  $K$  چنان طراحی می‌شود که عامل‌های دنباله‌رو عامل پیشرو را از نظر مکان ردیابی کنند. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۱) معادله مکان عامل‌های دنباله‌رو بصورت زیر می‌باشد:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + BK \left[ \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)) + K d_i (x_0(t) - x_i(t)) \right] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

با فرض  $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$ ، دینامیک بردار خطای  $e_i$  بصورت زیر است:

$$\dot{e}_i(t) = A e_i(t) + B u_i(t) = A e_i(t) + B K \sum_{j \in N_i} (e_j(t) - e_i(t)) - B K d_i e_i \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

با فرض  $e(t) = [e^T_1(t), \dots, e^T_N(t)]^T$ ،  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$  رابطه (۶) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{e}(t) = (I_N \otimes A) e(t) - (I_N \otimes B) (L \otimes I_m) (I_N \otimes K) e(t) - \quad (7)$$

$$(I_N \otimes B) (D \otimes I_m) (I_N \otimes K) e(t) = [I_N \otimes A - (L + D) \otimes B K] e(t)$$

که در آن  $L$  ماتریس لاپلاسن گراف عامل‌های دنباله‌رو است. با فرض  $H = L + D$  معادله (۷) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{e}(t) = [I_N \otimes A - H \otimes B K] e(t) \quad (8)$$

بنابراین حل مسئله توافق پیشرو- دنباله‌رو معادل اثبات پایداری مجانبی سیستم خطای (۸) در مبدا است.

لم ۱.۲. ماتریس  $H$  معین مثبت است اگر و فقط اگر گراف ارتباطی عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو همبند باشد. ماتریس معین مثبت دارای مقادیر ویژه مثبت است [۲].

لم ۲.۲. اگر رابطه (۱) قابل پایدارسازی باشد آنگاه ماتریس معین مثبت  $P$  وجود دارد بطوریکه در نامساوی ریکاتی  $PA + A^T P - 2\rho(H) P B B^T P + \rho(H) I_n < 0$  صدق می‌کند [۶].

### ۳ توافق پیشرو- دنباله‌رو

در این بخش، مسئله توافق عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو با دینامیک‌های (۱) و (۲) مورد بررسی قرار می‌گیرد. این بررسی با اثبات قضیه زیر محقق می‌شود.

قضیه ۱.۳. اگر در سیستم چند عامله گراف ارتباطی شامل عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو با دینامیک‌های (۱) و (۲) باشد و رابطه (۱) کنترل پذیر و پایداری پذیر بوده و گراف ارتباطی عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو همبند باشد، آنگاه عامل‌ها در سیستم چند عامله تحت کنترل کننده (۴) می‌توانند به توافق پیشرو- دنباله‌رو برسند.

برهان. ماتریس  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  را بصورت  $K = B^T P$  در نظمی گیریم (ماتریس  $P$  در لم ۲.۲ تعریف شده است). ثابت می‌کنیم سیستم خطای (۸) در مبدا پایدار مجانبی می‌باشد. تابع لیانوف  $V(t) = e^T(t) (I_N \otimes P) e(t)$  را برای سیستم خطای (۸) در نظر می‌گیریم. با مشتق‌گیری از تابع لیانوف نسبت به زمان نتیجه می‌گیریم:

$$\dot{V}(t) = e^T(t) [(I_N \otimes A^T - H \otimes K^T B^T) (I_N \otimes P)] e(t) + \quad (9)$$

$$e^T(t) [(I_N \otimes P) (I_N \otimes A - H \otimes B K)] e(t) =$$

$$e^T(t) [(I_N \otimes (PA + A^T P)) - H \otimes (2PB B^T P)] e(t)$$

بنابر لم ۱.۲ ماتریس  $H$  معین مثبت است لذا ماتریس متعامد  $Z \in \mathbb{R}^{N \times N}$  وجود دارد بطوریکه  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z H Z^T$  و  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  مقادیر ویژه ماتریس  $H$  بوده و مثبت می‌باشند. با فرض  $\bar{e}(t) = (Z \otimes I_n) e(t)$  رابطه (۹) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{V}(t) = \bar{e}^T(t) [(I_N \otimes (PA + A^T P)) - ZHZ^T \otimes (2PBB^T P)] \bar{e}(t) = \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N \bar{e}_i^T(t) [PA + A^T P - \lambda_i(2PBB^T P)] \bar{e}_i(t) \\ \leq \sum_{i=1}^N \bar{e}_i^T(t) [PA + A^T P - \rho(H)(2PBB^T P)] \bar{e}_i(t)$$

بنابر لم ۲.۲ داریم:

$$\dot{V}(t) \leq -\rho(H) \sum_{i=1}^N \bar{e}_i^T(t) \bar{e}_i(t) = -\rho(H) \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t)$$

پس برای هر  $e_i(t) \neq 0$ ،  $\dot{V}(t) < 0$  و سیستم خطای (۸) در مبدا پایدار مجانبی بوده و  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  در نتیجه عامل‌ها در سیستم چندعامله به توافق پیشرو-دنباله‌رو می‌رسند.  $\square$

## ۴ نتایج

در این مقاله مسئله توافق پیشرو-دنباله‌رو برای یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های خطی یکسان و گراف ارتباطی ثابت و بی‌سو بررسی شد. برای حل مسئله، کنترل‌کننده‌ای شامل یک ماتریس فیدبک ارائه گردید. با بکارگیری ماتریس فیدبک مناسب ثابت شد که این کنترل‌کننده باعث ایجاد توافق پیشرو-دنباله‌رو در سیستم چندعامله گردید.

## مراجع

- [1] L. Biao, W. Liwen, X. Zhiwei, W. Sibao and L. Qian, "Cooperative control of aircraft ground deicing resources", Journal of Shanghai Jiao Tong University, vol. 55, pp. 1362- 1370, 2021.
- [2] W. Gao, Y. Ren, L. Zhao, K. Weng and H. Wang, "Leader-following Consensus of Second-order Multi-agent Systems With Input Delays", International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 21, pp. 2844-2855, 2023.
- [3] Z. Jianxia, D. Haibin, Z. Yanjie, F. Yanming and W. Chen, "Consensus control of manned-unmanned aerial vehicle swarm based on hierarchy interaction of pigeons", Journal of Shanghai Jiao Tong University, vol. 54, pp. 973- 980, 2020.
- [4] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric and A. Das, "Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches", Springer-Verlag, London, 2014.
- [5] E. Restrepo, A. Loria and I. Sarras, "Robust consensus of high-order systems under output constraints: Application to rendezvous of underactuated UAVs", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 68, pp. 329-342, 2023.
- [6] H. Sun, Z. Yang and X. Peng, "On common solutions of Riccati inequalities", J Control Theory. vol. 9, pp. 225-230, 2011.

## یک روش PSBTS- نیوتن برای حل دستگاه‌های غیرخطی مختلط

زهرا خانی کهنوئی\*، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد، یزد، ایران

zahrakhani.math@gmail.com

نرگس بیدآبادی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

n\_bidabadi@yazd.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله یک روش تکراری کارا برای حل دستگاه‌های غیرخطی با ماتریس ژاکوبی متقارن معرفی می‌شود. در این روش از یک جداسازی مثلثی بلوکی متقارن پیش‌شرط‌سازی شده برای حل معادلات روش نیوتن استفاده شده است. همگرایی موضعی تحت فرض‌های مناسب اثبات شده و نتایج عددی با استفاده از نرم‌افزار متلب به دست آمده است.

**کلمات کلیدی:** بلوک مثلثی متقارن پیش‌شرط‌ساز، دستگاه‌های خطی و غیرخطی مختلط، روش PSBTS- نیوتن

### ۱ مقدمه

با توسعه و پیشرفت علوم و تکنولوژی نیاز به دقت و کارایی در حل دستگاه‌ها نیز افزایش یافته است. حل معادلات خطی و غیرخطی در علوم طبیعی و اجتماعی، کنترل ربات و فضانوردی مورد توجه قرار گرفته‌اند [۴]. در این مقاله به معرفی یک روش جداسازی مثلثی بلوکی متقارن پیش‌شرط‌سازی شده- نیوتن<sup>۱</sup> (PSBTS) برای حل دستگاه غیرخطی مختلط بزرگ و تنک زیر پرداخته می‌شود:

$$F(v) = 0, \quad (1)$$

که در آن  $F : D \subset C^n \rightarrow C^n$  تابعی غیرخطی و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است؛ به‌طوری که  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ ،  $F_i = F_i(v)$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ . همچنین ماتریس ژاکوبی  $F'(v)$  یک ماتریس پیوسته و متقارن مختلط بزرگ و تنک است.

برای این منظور ابتدا دستگاه خطی مختلط  $Av = b$  را در نظر گرفته؛ که در آن  $v, b \in C^n$  و ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  به‌صورت  $A = W + iT$  تعریف می‌شود و  $W, T \in R^{n \times n}$  ماتریس‌های حقیقی، متقارن و نیمه‌معین مثبت هستند که

\*Corresponding Author

<sup>1</sup>Preconditioned Symmetric Block Triangular Splitting

حداقل یکی از آن‌ها معین مثبت است. برای حل این دستگاه مختلط، ابتدا دستگاه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(W + iT)(y + iz) = (m + in), \quad (2)$$

که در آن  $y, z, m, n \in \mathbb{R}^n$  و  $b = m + in$ ,  $v = y + iz$  است. سپس معادله حقیقی معادل با دستگاه خطی مختلط (۲) را به صورت  $Av = b$  به دست می‌آوریم که در آن  $A = \begin{pmatrix} W & -T \\ T & W \end{pmatrix}$  و  $v = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  و  $b = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$  با در نظر

گرفتن ثابت مثبت پیش شرط ساز  $\zeta$  و ضرب ماتریس پیش شرط ساز  $Z = \begin{pmatrix} \zeta I & I \\ -I & \zeta I \end{pmatrix}$  در دستگاه خطی  $Av = b$ ,

دستگاه  $\tilde{A}v = \begin{pmatrix} \tilde{W} & -\tilde{T} \\ \tilde{T} & \tilde{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{n} \end{pmatrix}$  به دست می‌آید؛ که در آن  $\tilde{W} = \zeta W + T$ ,  $\tilde{T} = \zeta T - W$  و  $\tilde{m} = \zeta m + n$  و  $\tilde{n} = \zeta n - m$ . با فرض اینکه  $\alpha$  مثبت است؛ جداسازی‌های زیر را داریم:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{W} & o \\ \tilde{T} & \alpha \tilde{W} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} o & \tilde{T} \\ o & (\alpha - 1)\tilde{W} \end{pmatrix} := \mathcal{M}_1 - \mathcal{N}_1, \quad (3)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{W} & -\tilde{T} \\ o & \alpha \tilde{W} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} o & o \\ -\tilde{T} & (\alpha - 1)\tilde{W} \end{pmatrix} := \mathcal{M}_2 - \mathcal{N}_2, \quad (4)$$

با استفاده از این جداسازی‌ها، دنباله  $v_k = (y_k^T, z_k^T)^T$  برای حل دستگاه  $Av = b$  به صورت زیر است [۲، ۳]:

$$\begin{cases} \tilde{W}y_{k+\frac{1}{2}} = \tilde{T}z_k + \tilde{m}, \\ \alpha \tilde{W}z_{k+\frac{1}{2}} = (\alpha - 1)\tilde{W}z_k - \tilde{T}y_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{n}, \\ \alpha \tilde{W}z_{k+1} = (\alpha - 1)\tilde{W}z_{k+\frac{1}{2}} - \tilde{T}y_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{n}, \\ \tilde{W}y_{k+1} = \tilde{T}z_{k+1} + \tilde{m}. \end{cases}$$

## ۲ روش PSBTS- نیوتن برای حل دستگاه غیرخطی مختلط

در این بخش به حل دستگاه غیرخطی مختلط (۱) می‌پردازیم. قرار می‌دهیم  $\hat{v} = \begin{pmatrix} Re(v) \\ Im(v) \end{pmatrix}$  و  $F(v)$  را به صورت

$F(v) = M(v) + iN(v)$  بازنویسی می‌کنیم؛ که در آن  $N(v), M(v) \in \mathbb{R}^n$ . بنابراین ماتریس ژاکوبی  $F'(v)$  به صورت  $F'(v) = W(v) + iT(v)$  قابل نمایش است؛ که در آن  $W(v), T(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، ماتریس‌های متقارن حقیقی مقدار و نیمه معین مثبت هستند که حداقل یکی از آن‌ها معین مثبت است. بدون از دست دادن کلیت اغلب فرض می‌کنیم که  $W(v)$  معین مثبت است. برای حل دستگاه (۱) از روش نیوتن دو مرحله‌ای به صورت زیر استفاده می‌کنیم [۱]:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(v_k)d_k = -\mathcal{H}(v_k), & v_{k+\frac{1}{2}} = d_k + v_k, \\ \mathcal{A}(v_k)h_k = -\mathcal{H}(v_{k+\frac{1}{2}}), & v_{k+1} = h_k + v_{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

که در آن  $\mathcal{H}(v) := \begin{pmatrix} M(v) \\ N(v) \end{pmatrix}$  و  $\mathcal{A}(v) := \begin{pmatrix} W(v) & -T(v) \\ T(v) & W(v) \end{pmatrix}$

مشابه فرآیندی که در حل دستگاه خطی انجام شد؛ بعد از عملیات پیش شرط سازی بر روی دستگاه اول از رابطه (۵)

داریم  $\hat{d}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ ،  $d_k = y_k + iz_k$  که در آن  $\tilde{A}(v_k) = \begin{pmatrix} \tilde{W}(v_k) & -\tilde{T}(v_k) \\ \tilde{T}(v_k) & \tilde{W}(v_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}(v_k) \\ \tilde{N}(v_k) \end{pmatrix}$  و  $\tilde{N}(v_k) = \zeta N(v_k) - M(v_k)$ ،  $\tilde{M}(v_k) = \zeta M(v_k) + N(v_k)$  برای حل دستگاه دوم از رابطه (۵) نیز از فرآیند مشابهی استفاده می‌شود.

### الگوریتم ۱: الگوریتم روش PSBTS-نیوتن [۴]

۱. بردار اولیه  $v_0 \in D$  داده شده است. دو دنباله ثابت و مثبت  $\{l_k\}_{k=0}^\infty$  و  $\{m_k\}_{k=0}^\infty$  و همچنین اعداد ثابت و مثبت  $\alpha, \zeta$  و  $tol$  را در نظر بگیرید. قرار دهید  $k = 0$ .

۲. اگر  $\|H(v_k)\| < tol \|H(v_0)\|$  توقف کنید. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

۳. قرار دهید  $d_{k,0} = (y_{k,0}^T, z_{k,0}^T)^T$  که در آن  $y_{k,0} = 0, z_{k,0} = 0$  برای  $l = 0, 1, \dots, l_k - 1$  روش PSBTS را برای حل اولین دستگاه از رابطه (۵) به کار ببرید.  $v_{k+\frac{1}{2}}, d_{k,l_k}$  و  $\tilde{H}(v_{k+\frac{1}{2}})$  را محاسبه کنید.

۴. قرار دهید  $h_{k,0} = (\bar{y}_{k,0}^T, \bar{z}_{k,0}^T)^T$  که در آن  $\bar{y}_{k,0} = 0, \bar{z}_{k,0} = 0$  برای  $m = 0, 1, \dots, m_k - 1$  روش PSBTS را برای حل دومین دستگاه از رابطه (۵) به کار ببرید.  $v_{k+1}$  و  $h_{k,m_k}$  را محاسبه کنید. قرار دهید  $k = k + 1$  و به گام ۲ برگردید.

**تعریف.** [۴] فرض می‌کنیم  $F : D \subset C^n \rightarrow C^n$  یک نگاشت غیرخطی و  $v$  یک نقطه درونی  $D$  است. اگر عملگر خطی  $E \in L(R^n, R^n)$  وجود داشته باشد که برای هر  $h \in C^n$  رابطه  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \|F(v + sh) - F(v) - sEh\| = 0$  برقرار باشد؛ آنگاه گوئیم  $F$  در نقطه  $v$  مشتق پذیر گاتو<sup>۲</sup> (G-مشتق پذیر) است.

**فرض ۱.** [۴] فرض می‌کنیم تابع  $F : D \subset C^n \rightarrow C^n$  در زیرمجموعه باز  $D_0$  از  $D$  به مرکز  $v_*$  جواب دستگاه  $F(v) = 0$  است (G-مشتق پذیر است).

**فرض ۲.** [۴] فرض می‌کنیم  $v_* \in D_0$  و برای هر  $v \in N(v_*, r) \subset D_0$  شرایط زیر برقرار است:

(A۱) (شرط کران‌داری) ثابت‌های مثبت  $\delta, \gamma$  وجود دارند به طوری که:

$$\max\{\|W(v_*)\|, \|T(v_*)\|\} \leq \delta, \quad \|A(v_*)^{-1}\| \leq \gamma, \quad \max\{\|W(v_*)^{-1}\|, \|T(v_*)^{-1}\|\} < \beta.$$

(A۲) (شرط هولدر) ثابت‌های نامنفی  $R_t$  و  $R_w$  وجود دارند؛ برای  $p \in (0, 1]$  داریم:

$$\|W(v) - W(v_*)\| \leq R_w \|v - v_*\|^p, \quad \|T(v) - T(v_*)\| \leq R_t \|v - v_*\|^p.$$

**قضیه ۱.** [۴] فرض کنید شرایط (A۱) و (A۲) برقرار است و  $p \in (0, 1]$ . قرار می‌دهیم:

$$R = R_w + R_t, \quad r \in (0, 1/(\gamma R)^{\frac{1}{p}}), \quad r_1 = \left( \frac{1}{\beta(R_w + R_t)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$r_2 = \left( \frac{1 + \zeta^2}{2\gamma(1 + \zeta) \left( (1 + \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} + \frac{(\beta\delta + 1)\beta\delta}{1 - L})(\zeta R_w + R_t) + (1 + \frac{\beta\zeta(2 - L) + 1}{1 - L})(R_w + \zeta R_t) \right)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$r_3 = \left( \frac{\tau\theta(1 + \zeta^2)(2\gamma(1 + \zeta))^{-1}}{(1 + \tau\theta)(1 + \zeta)R + \left( \frac{\alpha^2 + \alpha^2\tau\theta + (\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} + \frac{(2 + \tau\theta)((\beta\delta)^2 + \beta\delta)}{1 - L} \right)(\zeta R_w + R_t) + \frac{(2 + \tau\theta)\beta\delta(2 - L) + (1 + \tau\theta)}{1 - L}(R_w + \zeta R_t)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$r_4 = \left( \frac{1 - 2\delta\gamma[(\tau + 1)\theta]v_*}{4\gamma R} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad r_0 = \min_{1 \leq j \leq 4} \{r_j\}. \quad \text{۴۷}$$

<sup>2</sup>Gateaux Differentiable

| $\zeta$ | $\alpha$ | Iter | $\ F(v_k)\ $ | $v_k$                                                                                                  |
|---------|----------|------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱       | ۱        | ۳    | $4.90E-10$   | $(1.000000000003090e+00 + 1.000000000002686e+00i, 9.999999999704553e-01 + 9.999999999743191e-01i)^T$   |
| ۲       | ۱        | ۷    | $5.25E-09$   | $(9.999999999861506e-01 + 9.999999999584519e-01i, 1.0000000000131460e+00 + 1.0000000000394381e+00i)^T$ |
| ۲       | ۱۰       | ۱۳   | $3.12E-09$   | $(1.000000000007466e+00 + 1.000000000022399e+00i, 9.999999999668834e-01 + 9.999999999006499e-01i)^T$   |
| ۱۰      | ۱۰       | ۱۱   | $1.69E-09$   | $(1.000000000007684e+00 + 1.000000000009391e+00i, 9.999999999873407e-01 + 9.999999999845276e-01i)^T$   |

جدول ۱: نتایج عددی الگوریتم ۱ برای حل دستگاه (۶)

پیش تعیین شده ای می باشد و به علاوه  $\theta \equiv \theta_{\alpha, \zeta}(v_*) = \|Q_{\alpha, \zeta}(v_*)\| < 1$  که  $\nu_* > \lfloor -\frac{\ln(2\delta\gamma)}{\ln((\tau+1)\theta)} \rfloor$  و  $m^* = \liminf_{k \rightarrow \infty} m_k$ ،  $l^* = \liminf_{k \rightarrow \infty} l_k$ ،  $\nu_* = \min\{l^*, m^*\}$  را یک عدد مثبت در نظرمی گیریم به طوری که  $L < 1$ ،  $\beta(R_w + R_t)\|v - v_*\|^p < L$ ، همچنین فرض می کنیم فرض ۱ برقرار است و برای هر  $v \in N(v_*, r) \in D_0$  ماتریس  $A(v)$  نامنفرد است. در این صورت برای هر  $v \in N(v_*, r) \subset D_0$  و دنباله های  $\{l_k\}_{k=0}^\infty$  و  $\{m_k\}_{k=0}^\infty$  از اعداد صحیح مثبت، دنباله تکراری  $\{v_k\}_{k=0}^\infty$  که توسط روش PSBTS- نیوتن تولید شده، خوش تعریف است و به  $v_*$  همگرا است.

### ۳ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از الگوریتم روش PSBTS- نیوتن که با استفاده از نرم افزار متلب به دست آمده است؛ ارائه می شود. دستگاه غیرخطی مختلط زیر را در نظر می گیریم:

$$F(v) = F(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1^2 + v_2^2 + (100 + 100i)v_1 - 204i \\ 2v_1v_2 - 4i \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

می دانیم  $v_* = (1 + i, 1 + i)^T$  جواب دقیق دستگاه (۶) است. نتایج حاصل از الگوریتم ۱ به ازای برخی مقادیر پارامترهای پیش شرط سازی و جداسازی برای حل این مسئله در جدول (۱) آمده است. در این جدول Iter نشان دهنده تعداد کاراکترهاست. همچنین نقطه شروع الگوریتم  $v_0 = (1 + 2i, 2 - i)^T$  در نظر گرفته شده است.

### مراجع

- [1] M.T. Darvishi and A. Barati, "A third-order Newton-type method to solve systems of nonlinear equations," Applied Mathematics and Computation, 187(2), 630-635. 2007.
- [2] X.A. Li, W.H. Zhang, and Y.J. Wu, "On symmetric block triangular splitting iteration method for a class of complex symmetric system of linear equations," Applied Mathematics Letters, 79, 131-137. 2018.
- [3] J. Zhang, Z. Wang, and J. Zhao, "Preconditioned symmetric block triangular splitting iteration method for a class of complex symmetric linear systems," Applied Mathematics Letters, 86, 95-102. 2018.
- [4] Y. Zhang, Q. Wu, Y. Feng, and Y. Xiao, "Modified Newton-PSBTS method for solving complex nonlinear systems with symmetric Jacobian matrices," Ap ۴۸ Numerical Mathematics, 182, 308-329. 2022.

## فیلترهای بالاگذر عملگرهای دیفرانسیلی جزئی مرتبه دوم

کوروش دبیقی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، دهدشت، ایران

koroshdabighi@gmail.com

مهین اردشیری، فارغ التحصیل دکتری ریاضی و دبیر، آموزش و پرورش، تهران، ایران،

mah.ardeshiry@gmail.com

پروین اردشیری، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد کامپیوتر و دبیر، آموزش و پرورش، دهدشت، ایران

parvinardeshiry@gmail.com

مریم دبیقی، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی و کارمند، شهرداری، یاسوج، ایران

maryamdabighi2@gmail.com

**چکیده:** عملگرهای دیفرانسیلی به عنوان زیرشاخه ای از ریاضیات، کاربردهای متعددی داشته اند. یکی از کاربردها در نوع فیلترهایی است که عملگرهای دیفرانسیلی آنها را تولید می کنند. در این مقاله دسته ای از عملگرهای دیفرانسیلی جزئی مرتبه دوم با ضرایب ثابت را مورد بررسی قرار داده ایم و به کمک یک لم نشان داده ایم که به فیلترهای بالاگذر منجر می شوند.

**کلمات کلیدی:** عملگرهای دیفرانسیلی جزئی، گسسته سازی عملگرها، فیلترهای بالاگذر

### ۱ مقدمه

برای تحلیل، بازسازی سیگنالها و نظیر آن، به عملگرهای ویژه ای روی سیگنال ها نیازمندیم. در بین این عملگرها، فیلترها یکی از مهمترین آنهاست. فیلترها اغلب برای استخراج مؤلفه های فرکانسی مورد نظر از سیگنالها به کار می-روند. [۲، ۳].

طراحی فیلتر یکی از شاخه های اصلی پردازش سیگنال است [۴]. بنابراین، فیلترینگ موضوع گسترده ای در پردازش سیگنال است و دارای بسیاری از برنامه های کاربردی است [۵، ۶].

## ۲ گسسته سازی مشتق توابع یک متغیره

اگر  $U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $u \in C^\infty(U)$  طبق تعریف عددی مشتق داریم:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

حال اگر بدون اینکه به کلیت مسائله خالی وارد شود با انتخاب  $h = 1$  و با جایگزینی در این رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} [u(x+1) - u(x-1)]$$

حال با ادامه این روند برای مشتق مرتبه ۳ و ۴، ... رابطه کلی برای گسسته سازی مشتق مرتبه  $n$  - ام به صورت زیر است [۶]:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u(x+n-2k)$$

## ۳ گسسته سازی مشتق توابع دو متغیره

اگر  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u \in C^\infty(U)$  (در حالت دومتغیره  $u = (x, y)$ ) مشتق جزئی مرتبه- $n$  ام نسبت به  $x, y$  (مرتبه نسبت به  $x$  و  $y$  مرتبه نسبت به  $y$  که  $n = s + m$ ) با نماد  $\frac{\partial^n u}{\partial x^s \partial y^m}$  نمایش داده می شود و مطابق روند گفته شده در بخش قبل به فرم زیر نمایش داده شود [۶]:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^s \partial y^m} = \frac{1}{2^{s+m}} \sum_{k,j} (-1)^{k+j} \binom{s}{k} \binom{m}{j} u(x+s-2k, y+m-2j)$$

## ۴ فیلترهای بالا گذر بر اساس عملگرهای مشتق

قضیه (۴-۱) فیلتر بالاگذر، عسکری همت): فرض کنید  $H(w) = \sum_k h[k]e^{-ikw}$  یک تابع پاسخ فرکانس باشد که در شرایط زیر صدق کند.

$$(1) \sum_k (-1)^k h[k] = 1 \quad (2) \sum_k h[k] = 0$$

آنگاه  $H(w)$  یک فیلتر بالاگذر است، بدین معنی که فرکانسهای بالا را عبور داده و فرکانس پایین را صفر می-کند (یعنی وقتی  $w \simeq \pi$  آنگاه  $H(w) = 1$  و وقتی  $w \simeq 0$  آنگاه  $H(w) = 0$ ). [۱]  
 اگر شرایط فوق را برای عملگرهای مشتق مورد بررسی قرار دهیم خواهیم دید که عملگرهای مشتق منجر به فیلترهای بالا گذر می شوند.

لم (۴-۱): اگر  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $u \in C^\infty(U)$  فیلتر تولید شده توسط عملگر  $\frac{\partial^n u}{\partial x^s \partial y^m}$  بالا گذر است. [۶]

## ۵ نتیجه

آن چه که در بالا اثبات شد بیانگر این بود که همگی فیلترهای مربوط به عملگرهای مشتق، بالا گذر هستند. در پایان آنچه که واضح است این است که دسته ای از عملگرهای دیفرانسیلی بالا گذر نیستند اما دسته ای دیگر منجر به فیلترهای بالا گذر می شوند که با لم های زیر این ادعا ثابت می شود.

لم: در هر عملگر دیفرانسیل با مرتبه  $r = 2$  و  $n \geq 2$ :

$$Pu := \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n a_j(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(X)u$$

در صورتیکه  $a_0(X) = 0$  و مجموع ضرایب غیر صفر باشند آنگاه فیلتر حاصل بالا گذراست.

اثبات: فرض کنید  $H(w)$  پاسخ فرکانسی و  $h[k, j]$  پاسخ معادل باشد. چون طبق لم بالا (لم ۱، دبیقی و همکاران) [۶] مشتقات به تنهایی بالا گذر هستند شرایط ۱ و ۲ قضیه بالا (قضیه فیلترهای بالا گذر، عسکری همت) [۱] صدق می کنند، از طرفی

$$H(\pi) = \sum_{k,j} (-1)^{k+j} h[k, j] = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(X) \times 1 + \sum_{j=1}^n a_j(X) \times 1 + 0$$

طبق فرض چون مجموع ضرایب مخالف صفر است در نتیجه  $H(\pi) \neq 0$ ، که این بیانگر برقراری شرط (۱) است. از طرفی

$$H(0) = \sum_{k,j} h[k, j] = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(X) \times 0 + \sum_{j=1}^n a_j(X) \times 0 + 0$$

و این نشان می دهد که شرط (۲) برقرار است، بنابراین فیلتر به دست آمده بالا گذر است. ■

## مراجع

- [۱] ع. عسکری همت، آشنایی با موجکها، تهران، آذرخش، چاپ اول، ۱۳۷۹.
- [2] D. Hong, J. Wang, R. Gardner, *Real Analysis with an Introduction to Wavelets*, Academic Press, Elsevier, 2004.
- [3] A.V. Oppenheim, R. Schaffer, J.R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd Ed, Prentice Hall, NJ, (1999).
- [4] A. Savitzky, M. J. E. Golay, *Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures*, Analytical Chemistry, 36(1964), 1627-1639
- [5] F. Riaz, A. Hassan, S. Rehman, U. Qamar, *Texture Classification Using Rotation-and Scale-Invariant Gabor Texture Features*, IEEE Signal Processing Letters, 20: 607-610, 2013
- [6] K. Dabighi, A. Nazari, S. Saryazdi, V. Momenaei, *A Class of High Pass Filters Derived From Elliptic Differential Operators*, Int. J. Industrial Mathematics, Vol. 12, No. 2, 2020 Article ID IJIM-1299, 8 pages.

## روش‌های نقطه ثابت برای حل معادله قدرمطلق

فرزاد راه‌پیمایی<sup>۱</sup> \*

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران.

Email: rahpeyma\_۸۳@yahoo.com

چکیده. جواب تقریبی معادله قدرمطلق معمولاً با روش‌های تکراری محاسبه می‌شود. در این مقاله دو روش تکراری مبتنی بر الگوریتم‌های نقطه ثابت برای یافتن جواب تقریبی معادله قدرمطلق معرفی می‌کنیم. همچنین شرایط لازم برای همگرایی جواب‌های تقریبی به جواب دقیق معادله را بیان می‌کنیم. سرانجام یک مثال عددی از معادله قدرمطلق را با روش‌های نقطه ثابت حل کرده و دقت جواب‌های تقریبی به دست آمده را بررسی می‌کنیم.   
واژه‌های کلیدی: معادله قدرمطلق، روش‌های نقطه ثابت، آنالیز همگرایی، نتایج عددی.   
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 90C59, 90C33, 49M20.

### ۱. مقدمه

فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $b \in \mathbb{R}^n$  باشد. معادله قدرمطلق به صورت زیر است

$$(۱) \quad Ax - |x| = b,$$

که در آن ماتریس ضرایب  $A$  اکیداً قطر غالب یا  $M$ -ماتریس و  $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$  می‌باشد. مسأله‌های زیادی به صورت یک معادله قدرمطلق مدل‌سازی می‌شوند که از جمله آن‌ها می‌توان به نظریه بازی‌ها، مسأله برنامه‌ریزی خطی، مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب و شبکه جریان اشاره کرد [۳-۵]. برای حل تقریبی معادله قدرمطلق (۱) روش‌های تکراری مختلفی ارائه شده است [۳، ۵].

**تعریف ۱.۱.** [۳] ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را  $Z$ -ماتریس می‌نامند هرگاه مؤلفه‌های غیرقطری آن مثبت نباشند.

**تعریف ۲.۱.** [۲] اگر ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  نامنفرد،  $Z$ -ماتریس و  $A^{-1} \geq 0$  باشد آن‌گاه  $A$  را یک  $M$ -ماتریس می‌نامند.

**تعریف ۳.۱.** [۳] ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را اکیداً قطر غالب سطری می‌نامند هرگاه

$$\sum_{i \neq j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

در ادامه دو روش تکراری نقطه ثابت برای حل معادله قدرمطلق (۱) را معرفی کرده و شرایط لازم برای همگرایی آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

\* سخنران.

## ۲. روش تکراری نقطه ثابت اول

ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$(۲) \quad A = D - U - L,$$

که در آن  $D$ ،  $U$  و  $L$  به ترتیب ماتریس‌های قطری، اکیداً بالا مثلثی و اکیداً پایین مثلثی هستند. ماتریس قطری

$$Q = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix},$$

را به سمت راست (۲) اضافه و کم می‌کنیم که  $0 < \mu_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) هستند. بنابراین

$$A = (Q + D - U) - (Q + L).$$

فرض کنید

$$G_1 = Q + D - U, \quad G_2 = Q + L.$$

بنابراین

$$(۳) \quad A = G_1 - G_2.$$

چون  $0 = |x| - b = Ax - |x| - b$  می‌باشد، با ضرب کردن طرفین این معادله در  $\lambda D^{-1}$  ( $\lambda > 0$ ) خواهیم داشت

$$(۴) \quad x = x - \lambda D^{-1} (Ax - |x| - b).$$

با جایگذاری (۳) در (۴) داریم

$$x = x - \lambda D^{-1} (G_1 x - G_2 x - |x| - b).$$

در نتیجه

$$(I - \lambda D^{-1} G_2) x = x - \lambda D^{-1} (G_1 x - |x| - b).$$

بنابراین روش تکراری نقطه ثابت اول (FPAVE<sub>1</sub>) برای حل معادله قدرمطلق به صورت زیر خواهد بود

$$(۵) \quad x^{(k+1)} = (I - \lambda D^{-1} G_2)^{-1} (x^{(k)} - \lambda D^{-1} (G_1 x^{(k)} - |x^{(k)}| - b)).$$

قضیه زیر همگرایی روش تکراری نقطه ثابت اول به جواب دقیق معادله قدرمطلق (۱) را نشان می‌دهد.

**قضیه ۱.۲.** [۱] فرض کنید دنباله  $\{x^{(k)}\}$  با روش تکراری نقطه ثابت اول (۵) تولید شده باشد و  $x^*$  جواب دقیق معادله قدرمطلق (۱) باشد. در این صورت نامساوی زیر برقرار است

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq |P^{-1}| S |x^{(k)} - x^*|,$$

که در آن  $P = I - \lambda D^{-1} G_2$  و  $S = \lambda D^{-1} + |I - \lambda D^{-1} G_1|$  می‌باشد. اگر  $\rho(|P^{-1}| S) < 1$  باشد آنگاه دنباله  $\{x^{(k)}\}$  به جواب دقیق  $x^*$  همگرا خواهد بود.

### ۳. روش تکراری نقطه ثابت دوم

برای به دست آوردن روش تکراری نقطه ثابت دوم معادله زیر را در نظر می‌گیریم

$$x = x - \lambda D^{-1}(Ax - |x| - b).$$

با اضافه و کم کردن عبارت  $\lambda x$  به طرف راست داریم

$$x = \lambda \left( x - D^{-1}(Ax - |x| - b) \right) + (1 - \lambda)x.$$

فرض کنید  $0 < \alpha \leq 1$  باشد. ماتریس  $\alpha I$  را به سمت راست معادله اخیر اضافه و کم کرده و از (۳) استفاده می‌کنیم

$$x = \lambda \left( x - D^{-1}((G_1 + \alpha I)x - (G_2 + \alpha I)x - |x| - b) \right) + (1 - \lambda)x.$$

پس

$$x - \lambda D^{-1}(G_2 + \alpha I)x = \lambda \left( x - D^{-1}((G_1 + \alpha I)x - |x| - b) \right) + (1 - \lambda)x.$$

به طور معادل

$$(I - \lambda D^{-1}(G_2 + \alpha I))x = \lambda \left( x - D^{-1}((G_1 + \alpha I)x - |x| - b) \right) + (1 - \lambda)x.$$

بنابراین روش تکراری نقطه ثابت دوم (FPAVE<sub>2</sub>) برای حل معادله قدرمطلق (۱) به صورت زیر خواهد بود

$$x^{(k+1)} = \left( I - \lambda D^{-1}(G_2 + \alpha I) \right)^{-1} \left( \lambda \left( x^{(k)} - D^{-1}((G_1 + \alpha I)x^{(k)} - |x^{(k)}| - b) \right) + (1 - \lambda)x^{(k)} \right). \quad (6)$$

همگرایی روش تکراری نقطه ثابت دوم در قضیه زیر بررسی شده است.

**قضیه ۱۰۳.** [۱] فرض کنید دنباله  $\{x^{(k)}\}$  با روش تکراری نقطه ثابت دوم (۶) تولید شده باشد و  $x^*$  جواب دقیق معادله قدرمطلق (۱) باشد. در این صورت نامساوی زیر برقرار است

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq |\tilde{P}^{-1}| \tilde{S} |x^{(k)} - x^*|,$$

که در آن  $\tilde{P} = I - \lambda D^{-1}(G_2 + \alpha I)$  و  $\tilde{S} = \lambda D^{-1} + |I - \lambda D^{-1}(G_1 + \alpha I)|$  می‌باشد. اگر  $\rho(|\tilde{P}^{-1}| \tilde{S}) < 1$  باشد آن‌گاه دنباله  $\{x^{(k)}\}$  به جواب دقیق  $x^*$  همگرا خواهد بود.

### ۴. نتایج عددی

برای بررسی کارایی روش‌های نقطه ثابت FPAVE<sub>1</sub> و FPAVE<sub>2</sub> برای حل معادله قدرمطلق، یک مثال عددی را در ابعاد مختلف با روش‌های نقطه ثابت حل می‌کنیم. برای مقایسه بهتر این دو روش از معیارهای تعداد تکرارهای لازم (IT)، زمان لازم برای اجرای الگوریتم (C<sub>t</sub>) و خطای باقیمانده نسبی (RES) استفاده می‌کنیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود [۴، ۶]

$$\text{RES} = \frac{\|Ax^{(k)} - |x^{(k)}| - b\|}{\|b\|}. \quad (7)$$

هر دو الگوریتم با نرم‌افزار متلب  $a = 17 \times 10^2$  روی لپ‌تاپ سه هسته‌ای با ۴ گیگابایت حافظه پیاده‌سازی شده‌اند که با برقراری شرط  $\text{RES} \leq 10^{-6}$  متوقف می‌شوند. مثال‌های عددی طوری ساخته شده‌اند که شرایط قضیه‌های ۱۰۲ و ۱۰۳ برقرار باشند. به عبارت دیگر

$$\rho(|P^{-1}|S) < 1, \quad \rho(|\tilde{P}^{-1}|\tilde{S}) < 1.$$

مثال ۱۰۴. [۲] فرض کنید  $m \in \mathbb{N}$  و  $n = m^2$  باشد. ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را به صورت  $A = M + I$  در نظر بگیرید که در آن ماتریس بلوکی  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  به صورت زیر ساخته می شود

$$M = \begin{bmatrix} S & -0.5I & O & \cdots & O \\ -0.5I & S & -0.5I & \cdots & O \\ O & -0.5I & S & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & S \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 4 & -0.5 & 0 & \cdots & 0 \\ -0.5 & 4 & -0.5 & \cdots & 0 \\ 0 & -0.5 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{bmatrix}.$$

همچنین  $O$  ماتریس صفر و  $I$  ماتریس همانی است. مقادیر اولیه را به صورت  $x^{(0)} = [-1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ \cdots \ 2 \ 1]^T$  و  $b = Ax^{(0)} - |x^{(0)}|$  در نظر می گیریم و از پارامترهای  $\alpha = 0.8$  و  $\mu = 0.9$  استفاده می کنیم. نتایج حاصل برای هر دو روش در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج این جدول نشان می دهد که روش FPAVE<sub>2</sub> معادله قدرمطلق در ابعاد مختلف را با تعداد تکرارهای کمتر و در زمان کوتاهتری نسبت به روش FPAVE<sub>1</sub> حل می کند.

جدول ۱. نتایج عددی مثال ۱۰۴ برای حل معادله قدرمطلق با روش های نقطه ثابت

| روش                | بعد  | IT  | C <sub>t</sub> | RES                   |
|--------------------|------|-----|----------------|-----------------------|
| FPAVE <sub>1</sub> | ۱۰۰  | ۶۳  | ۰/۲۹۳۴         | $8.17 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۱۰۰  | ۴۳  | ۰/۱۶۴۲         | $9.14 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>1</sub> | ۵۰۰  | ۹۷  | ۰/۹۵۴۳         | $8.42 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۵۰۰  | ۶۶  | ۰/۴۱۱۲         | $9.39 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>1</sub> | ۱۰۰۰ | ۱۲۷ | ۱/۹۳۱۸         | $9.11 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۱۰۰۰ | ۸۵  | ۰/۸۹۲۵         | $9.42 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>1</sub> | ۲۰۰۰ | ۱۶۲ | ۲/۶۹۱۷         | $9.33 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۲۰۰۰ | ۱۰۹ | ۱/۸۹۱۳         | $9.52 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>1</sub> | ۳۰۰۰ | ۱۷۴ | ۲/۹۹۱۸         | $8.45 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۳۰۰۰ | ۱۱۱ | ۲/۱۷۲۳         | $8.13 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>1</sub> | ۴۰۰۰ | ۱۷۹ | ۳/۸۶۱۱         | $9.93 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۴۰۰۰ | ۱۱۳ | ۲/۵۵۲۰         | $9.89 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>1</sub> | ۵۰۰۰ | ۱۹۱ | ۴/۷۵۱۷         | $9.01 \times 10^{-7}$ |
| FPAVE <sub>2</sub> | ۵۰۰۰ | ۱۱۶ | ۳/۱۹۵۷         | $9.23 \times 10^{-7}$ |

## مراجع

1. R. Ali, Z. Zhang, and F. A. Awwad, *The study of new fixed-point iteration schemes for solving absolute value equations*, Heliyon, **10** (2024), e34505.
2. A. J. Fakharzadeh, and N. N. Shams, *An efficient algorithm for solving absolute value equations*, Journal of Mathematical Extension, **15** (2021), 1–23.
3. O. L. Mangasarian, *Equilibrium points of bimatrix games*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, **12** (1964), 778–780.
4. J. Rohn, *A theorem of the alternatives for the equation  $Ax + B|x| = b$* , Linear Multilinear Algebra, **52** (2004), 421–426.
5. Z. Yu, L. Li, and Y. Yuan, *A modified multivariate spectral gradient algorithm for solving absolute value equations*, Applied Mathematics Letters, **121** (2021), 107461.
6. C. C. Zhou, Y. Cao, Q. Q. Shen, and Q. Shi, *A modified Newton-based matrix splitting iteration method for generalized absolute value equations*, Journal of Applied Mathematics and Computing, **442** (2024), 115747.

# استفاده از الگوریتم کاکزمارز برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی

حانیه ظهوری مهریزی\* دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد، یزد، ایران،

h.zohouri۷۹@gmail.com

نرگس بیدآبادی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران،

n\_bidabadi@yazd.ac.ir

## چکیده:

اخیراً انواعی از الگوریتم‌های غیرخطی کاکزمارز برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی در مقیاس بزرگ پیشنهاد شده‌اند. این الگوریتم‌ها تعمیمی از روش نیوتن-رافسون است و نیازی به محاسبه کل ماتریس ژاکوبی ندارد. در این مقاله، یک الگوریتم کاکزمارز غیرخطی برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی در مقیاس بزرگ معرفی می‌کنیم که در هر تکرار، سطر با حداکثر باقیمانده را انتخاب می‌کند. همچنین همگرایی این الگوریتم را بررسی می‌کنیم. به‌علاوه با الهام از اثربخشی الگوریتم‌های بلوکی کاکزمارز برای حل دستگاه‌های خطی، یک الگوریتم بلوکی حریصانه بر اساس حداکثر باقیمانده و یک روش طراحی شده قطعی نیوتن-رافسون را معرفی نموده و سپس همگرایی سراسری الگوریتم‌ها را بررسی می‌نماییم.

**کلمات کلیدی:** الگوریتم کاکزمارز، الگوریتم نیوتن-رافسون، دستگاه‌های معادلات خطی و غیرخطی، همگرایی

## ۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی  $Ax = b$  را در نظر می‌گیریم که در آن  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ )،  $b \in \mathbb{R}^m$  و بردار مجهول  $x$  بعدی است. فرض می‌کنیم این دستگاه دارای  $m$  معادله به‌صورت زیر است:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

یکی از الگوریتم‌های مهم برای حل این مسئله، الگوریتم تکراری کاکزمارز<sup>۱</sup> است. در الگوریتم کاکزمارز برای حل دستگاه خطی با شروع از نقطه  $x^0$  دنباله نقاط به این صورت ساخته می‌شود که نقطه  $x^1$  با تصویر نقطه  $x^0$  به روی

\*Corresponding Author

<sup>1</sup>Kaczmarz

قید اول، نقطه  $x^2$  با تصویر نقطه  $x^1$  به روی قید دوم و بقیه نقاط نیز به همین ترتیب ساخته می‌شوند. یعنی داریم:

$$x^{k+1} = x^k + \frac{b_{i_k} - a_{i_k}^T x^k}{\|a_{i_k}\|_2^2} a_{i_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

که در آن  $a_{i_k}$  سطر  $i_k$ ام ماتریس  $A$  و  $b_{i_k}$  درایه  $i_k$ ام بردار  $b$  می‌باشد و  $i_k = k(\bmod m) + 1$ . با فرض وارون‌پذیر بودن ماتریس  $A$  و  $\|a_i\|_2^2 = 1$ ، کاکزمارز، همگرایی الگوریتم را اثبات نمود [۲].  
الگوریتم حریصانه کاکزمارز (MRLK<sup>۲</sup>) برای حل دستگاه خطی (۱) بدین صورت است که برای انتخاب اندیس  $i_k$  در تکرار  $k$ ام، قیدی را که نقطه  $x^k$  در آن باقیمانده  $|b_{i_k} - a_{i_k}^T x^k|$  بیشتری دارد، انتخاب می‌کند [۱].  
در الگوریتم بلوکی حریصانه کاکزمارز (MRBLK<sup>۳</sup>) یک بلوک از ماتریس  $A$ ، به این صورت انتخاب می‌شود که پارامتر  $\eta \in (0, 1]$  را در نظر گرفته و اندیس‌هایی که در رابطه

$$\frac{|b_{i_k} - a_{i_k}^T x^k|^2}{\|a_{i_k}\|_2^2} \geq \eta \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{|b_i - a_i^T x^k|^2}{\|a_i\|_2^2} \right\}, \quad (3)$$

صدق می‌کنند را در  $J_k$  قرار می‌دهد، یعنی با تعریف  $\epsilon_k = \eta \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{|b_i - a_i^T x^k|^2}{\|a_i\|_2^2} \right\}$  داریم:

$$J_k = \{i_k : |b_{i_k} - a_{i_k}^T x^k|^2 \geq \epsilon_k \|a_{i_k}\|_2^2\},$$

و نقطه  $x^k$  به روی فضای  $\{x \in \mathbb{R}^n | A_{J_k} x = b_{J_k}\}$  تصویر می‌شود تا  $x^{k+1}$  به دست آید، یعنی داریم [۳]:

$$x^{k+1} = x^k + A_{J_k}^\dagger (b_{J_k} - A_{J_k} x^k). \quad (4)$$

**قضیه ۱.** [۳] (همگرایی الگوریتم کاکزمارز بلوکی حریصانه) فرض کنیم دستگاه خطی  $Ax = b$ ، سازگار (دارای جواب) باشد. در این صورت دنباله تکراری  $\{x^k\}$  تولیدشده توسط الگوریتم کاکزمارز بلوکی-حریصانه، همگرا به جواب با طول مینیمال دستگاه، یعنی  $x^* = A^\dagger b$  می‌باشد.

## ۲ الگوریتم کاکزمارز برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

حال دستگاه معادلات غیرخطی

$$F(x) = 0, \quad (5)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(m \geq n)$  و فرض می‌کنیم که این دستگاه، حداقل یک جواب  $x^* \in \mathbb{R}^n$  داشته باشد. برای حل مسائل غیرخطی نیز الگوریتم کاکزمارز دارای انواع مختلفی مانند قطعی، حریصانه و بلوکی حریصانه است [۴].

برای  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))^T$  بر پایه بسط تیلور در نقطه  $x^k$ ، تقریب خطی زیر را داریم:

$$F(x) \approx F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k), \quad (6)$$

که در آن  $F'(x^k)$  ماتریس ژاکوبی است. جواب تقریبی دستگاه (۵) با حل دستگاه خطی زیر محاسبه می‌شود:

$$F_i(x^k) + \nabla^T F_i(x^k)(x - x^k) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

<sup>2</sup>Maximum Residual Linear Kaczmarz

<sup>3</sup>Maximum Residual Block Linear Kaczmarz

که معادل است با:

$$\nabla^T F_i(x^k) x = -F_i(x^k) + \nabla^T F_i(x^k) x^k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (۸)$$

با به کارگیری روش کاکزمارز برای حل دستگاه معادلات خطی (۸)، تکرار  $k+1$  اُم به صورت زیر می باشد:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F_{i_k}(x^k)}{\|\nabla F_{i_k}(x^k)\|^2} \nabla F_{i_k}(x^k), \quad (۹)$$

که در آن  $i_k = k(\bmod m) + 1$ .

در الگوریتم کاکزمارز غیرخطی با ماکسیمم باقیمانده (MRNK<sup>۴</sup>) که یک الگوریتم حریصانه است، در هر تکرار اندیس قیدی که حداکثر باقیمانده را دارد انتخاب می شود تا نقطه بر روی آن تصویر شود، یعنی

$$i_k = \arg \max_{1 \leq i \leq m} |F_i(x^k)|^2$$

**قضیه ۲. [۵]** دستگاه معادلات غیرخطی  $F(x) = 0$  و تابع غیرخطی  $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  روی یک مجموعه بسته کراندار  $D$  را در نظر می گیریم. فرض کنیم  $x^*$  به طوری که  $F(x^*) = 0$  وجود دارد، مشتق  $F$  روی  $D$  پیوسته است و برای هر  $x \in D$  یک ماتریس رتبه ستونی کامل و دارای سطرهای از پایین کراندار است. اگر برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  و برای هر  $x, y \in \mathbb{R}^n$  تابع غیرخطی  $F_i$  در شرط

$$|F_i(x) - F_i(y)| \geq \frac{1}{1 + \eta_i} |(\nabla F_i(x))^T (x - y)|, \quad (۱۰)$$

صدق کند و  $\eta = \max_i \eta_i < \frac{1}{2}$ ، الگوریتم MRNK همگراست و داریم:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \left(1 - \frac{1 - 2\eta}{(1 + \eta)^2 m^2 \kappa_F^2(F'(x^k))}\right) \|x^k - x^*\|^2,$$

که در آن  $\kappa_F(F'(x^k)) = \|F'(x^k)\|_F \| (F'(x^k))^\dagger \|_2$ . برای سرعت بخشیدن به فرایند همگرایی، الگوریتم بلوکی حریصانه غیرخطی (MRBNK<sup>۵</sup>) معرفی شده است که در آن بردار باقیمانده در تکرار  $k$  اُم را به صورت  $r = -F(x^k)$  تعریف نموده و قرار می دهیم  $\tau_k = \{i_k : |r(i_k)|^2 \geq \eta \max |r(i)|^2\}$  که  $\eta \in (0, 1]$  ثابت دلخواهی است [۵]. یعنی

$$x^{k+1} = x^k + (F'_{\tau_k}(x^k))^\dagger r(\tau_k), \quad (۱۱)$$

که در آن منظور از  $F'_{\tau_k}(x^k)$  سطرهایی از  $F'(x^k)$  است که اندیس آن ها در  $\tau_k$  می باشد. رابطه (۱۱) را می توان به صورت رابطه زیر بازنویسی کرد:

$$x^{k+1} = x^k - \gamma (S_k^T F'(x^k))^\dagger (S_k^T F(x^k)), \quad (۱۲)$$

که در آن  $S_k = E_{\tau_k} = [\dots e_i \dots]^T$ ،  $i \in \tau_k$  و مقدار طول گام  $\gamma$  برابر با یک می باشد. رابطه (۱۲)، دستگاه نیوتن-رافسون طراحی شده (SNR<sup>۶</sup>) نامیده می شود. ابتدا فرض های زیر را در نظر می گیریم:

**فرض ۱. [۵]** برای هر بردار  $x$  در  $\mathbb{R}^n$  داریم:  $F(x) \in \text{Im}(F'(x))$ .

**فرض ۲. [۵]** برای هر بردار  $x$  در  $\mathbb{R}^n$  داریم:  $F(\mathbb{R}^n) \cap \ker(H_s(x)) = \{0\}$  که در آن  $H_s(x) = S(S^T F'(x)(F'(x)^T S)^\dagger S^T)$ .  
 باتوجه به فرض ۱، تکرارهای الگوریتم نیوتن-رافسون طراحی شده قطعی (DSNR<sup>۷</sup>) به صورت زیر هستند:

$$x^{k+1} = x^k - (F'(x^k))^T H_{S_k}(x^k) F(x^k), \quad H_{S_k}(x^k) = S_k(S_k^T F'(x^k)(F'(x^k)^T S_k)^\dagger (S_k)^T). \quad (۱۳)$$

<sup>4</sup>Maximum Residual Nonlinear Kaczmarz

<sup>5</sup>Maximum Residual Block Nonlinear Kaczmarz

<sup>6</sup>Sketched Newton-Raphson

<sup>7</sup>Deterministic Sketched Newton-Raphson



بنابراین الگوریتم DSNR با جایگزینی رابطه (۱۱) در الگوریتم MRBNK، به وسیله رابطه (۱۳) حاصل می شود. برای سادگی،  $f_{S_k, x^k}(x)$  را با  $f_k(x)$  نمایش می دهیم. فرض ۳. [۵] فرض کنیم  $\mu > 0$  وجود دارد به طوری که

$$f_k(x^*) \geq f_k(x) + \nabla^T f_k(x) (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|^2, \forall x, x^k \in \mathbb{R}^n,$$

در نتیجه یک  $x^*$  یکتا وجود دارد که  $f_k(x)$  را مینیمم می سازد. حال به بررسی همگرایی الگوریتم DSNR که معادل با الگوریتم MRBNK می باشد، می پردازیم. قضیه ۳. [۵] اگر فرض های ۱ تا ۳ برقرار باشند، آنگاه روش DSNR به طور خطی همگراست و داریم:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \mu) \|x^k - x^*\|^2,$$

که در آن  $0 < \mu \leq 1$ .

### ۳ نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی به دست آمده از الگوریتم های MRBNK و DSNR را با استفاده از نرم افزار متلب ارائه می دهیم. دستگاه معادلات غیرخطی زیر را در نظر می گیریم:

$$f_k(x) = n - \sum_{j=1}^n \cos(x_j) + k(1 - \cos(x_k)) - \sin(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

نتایج حاصل از الگوریتم ها با شروع از  $x_0 = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  و به ازای برخی پارامترها در جدول (۱) آمده است. در این جدول، Iter نشان دهنده تکرارهای الگوریتم و  $\|F(x)\|$  نشان دهنده نرم خطا در نقطه تقریبی به دست آمده، می باشد.

|      |      |        | MRBNK |                      | DSNR |                      |
|------|------|--------|-------|----------------------|------|----------------------|
| m    | n    | $\eta$ | Iter  | norm                 | Iter | norm                 |
| ۱۰۰  | ۱۰۰  | 0.6    | ۴۴    | 0.000969023625681359 | ۴۴   | 0.000969023625681359 |
| ۱۰۰  | ۱۰۰  | 0.5    | ۳۷    | 0.000845380160806403 | ۳۷   | 0.000845380160806403 |
| ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰ | 0.5    | ۳۶    | 0.000801975092688769 | ۳۶   | 0.000801975092688769 |
| ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰ | 0.6    | ۲۴۲   | 0.000981721815008137 | ۲۱۴  | 0.000952809867919373 |
| ۲۰۰۰ | ۱۰۰۰ | 0.6    | ۶     | 0.000529869519719666 | ۶    | 0.000529869519719684 |
| ۲۰۰۰ | ۱۰۰۰ | 0.5    | ۴     | 0.000634882947272433 | ۴    | 0.000634882947272435 |
| ۲۰۰۰ | ۲۰۰۰ | 0.5    | ۷۲    | 0.000910194460764034 | ۷۳   | 0.000950712476030772 |
| ۲۰۰۰ | ۲۰۰۰ | 0.6    | ۴۵    | 0.000963450742166379 | ۴۵   | 0.000963450907718264 |

جدول ۱: نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم های MRBNK و DSNR برای حل دستگاه (۱۴)

## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا به معرفی الگوریتم تکراری کاکزمارز برای حل دستگاه‌های معادلات خطی در مقیاس بزرگ پرداختیم و سپس از این روش برای حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی در مقیاس بزرگ، استفاده نمودیم. الگوریتم کاکزمارز غیرخطی دارای انواع مختلفی مانند قطعی، حریصانه و بلوکی حریصانه می‌باشد. در الگوریتم قطعی کاکزمارز غیرخطی با فرض وجود حداقل یک جواب برای دستگاه معادلات غیرخطی، ابتدا معادله غیرخطی موردنظر را با بسط تیلور به یک معادله خطی تقریب زده و سپس مشابه روش کاکزمارز خطی، جواب تقریبی معادله غیرخطی را محاسبه نمودیم. در الگوریتم حریصانه کاکزمارز غیرخطی در هر تکرار اندیس قیدی که حداکثر باقیمانده را دارا بود؛ انتخاب می‌شد تا نقطه  $x^k$  بر روی آن تصویر شود و نقطه  $x^{k+1}$  به دست آید. همچنین در الگوریتم بلوکی حریصانه کاکزمارز غیرخطی، اندیس تعدادی از قیود که در رابطه‌ای مشخص، صدق نمودند؛ انتخاب شد و نقطه بر روی مجموعه‌ی این قیود، تصویر شد. همچنین با استفاده از یک تغییر نماد در الگوریتم بلوکی حریصانه کاکزمارز آن را به الگوریتم نیوتن-رافسون طراحی شده قطعی تبدیل نمودیم. علاوه بر این همگرایی الگوریتم‌های بیان شده را نیز بررسی نمودیم. در پایان، نتایج عددی الگوریتم‌های بلوکی حریصانه و نیوتن-رافسون طراحی شده قطعی، ارائه شد.

## مراجع

- [1] Z.Z. Bai, W.T. Wu, "On greedy randomized Kaczmarz method for solving large sparse linear systems", SIAM Journal on Scientific Computing, 40, no. 1, pp. 592-606, Jan 2018.
- [2] S. Kaczmarz, "Angenaherte auflosung von systemen linearer gleichungen", Bull. Int. Acad. Pol. Sic. Let., Cl. Sci. Math. Nat, pp. 355-357, 1937.
- [3] Y.Q. Niu, B. Zheng, "A greedy block Kaczmarz algorithm for solving large-scale linear systems", Applied Mathematics Letters, 104, p. 106294, Jun. 2020.
- [4] Q. Wang, W. Li, W. Bao, X. Gao, "Nonlinear Kaczmarz algorithms and their convergence", Journal of Computational and Applied Mathematics, 399, p. 113720, Jan. 2022.
- [5] J. Zhang, Y. Wang, J. Zhao, "On maximum residual nonlinear Kaczmarz-type algorithms for large nonlinear systems of equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 425, p. 115065, Jun. 2023.

## حل عددی معادلات سهموی کسری-زمانی غیرخطی در دامنه نامحدود

سیدعلی غنی زاده؛ دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

ghanizadeh@stu.yazd.ac.ir

محمدحسین اکرمی ابرقویی، عضو هیأت علمی ریاضی کاربردی دانشگاه یزد، یزد، ایران

akrami@yazd.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، هدف توسعه یک روش کارآمد برای حل عددی معادلات سهموی کسری-زمانی غیرخطی در دامنه‌های نامحدود است. این روش شامل طراحی شرایط مرزی جاذب غیرخطی است که مسئله‌ی اصلی را به یک مسأله با دامنه محدود تبدیل می‌کند و سپس می‌توان با استفاده از روش‌های تفاضل متناهی خطی شده به حل آن مسئله پرداخت.

**کلمات کلیدی:** معادلات سهموی غیرخطی، شرایط مرزی جاذب، دامنه‌ی نامحدود

### ۱ مقدمه

پدیده‌ی انتشار غیرعادی موج و یا جریان سیال، که در بسیاری از مسائل کاربردی در حوزه‌ی فیزیک، شیمی، و پدیده‌های طبیعی رخ می‌دهد را می‌توان با استفاده از روابط ریاضی مانند معادلات سهموی غیرخطی مشتقات کسری مدل‌سازی کرد. شبیه‌سازی این نوع از مسائل چالش برانگیز است، زیرا در عمل رایانه‌ها نمی‌توانند دامنه‌های بینهایت را شبیه‌سازی کنند، باید دامنه به یک ناحیه محدود تقلیل یابد. اما در دامنه‌های محدود موج‌ها یا جریان‌ها در مرزها ممکن است بازتاب پیدا کنند و نتایج شبیه‌سازی را تحریف نمایند [۱]. شرایط مرزی جاذب راه‌حلی برای این مشکل هستند. این شرایط مرزی به گونه‌ای طراحی می‌شوند که موج‌ها یا جریان‌ها بتوانند بدون بازتاب از مرزهای دامنه عبور کنند، به طوری که انگار دامنه محدود نیست و همچنان جریان دارد. در این مقاله، براساس یک روش مؤثر با استفاده از شرایط مرزی جاذب مسئله‌ای که در اصل باید در یک دامنه‌ی نامحدود حل شود، به یک مسأله‌ی مقدار مرزی اولیه

در یک دامنه‌ی محدود تبدیل می‌شود. مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

${}^C D_t^\alpha$  عملگر مشتق کسری کاپوتو است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

عبارت غیرخطی  $f(u)$  می‌تواند بنابر معادلات مختلف در صورت مسئله متفاوت ظاهر شود.

## ۲ ساخت شرایط مرزی جاذب غیرخطی

ابتدا دو نقطه مرزی مصنوعی برای سمت چپ و راست دامنه به شکل  $\Gamma^+ := \{x|x = l_+\}$  و  $\Gamma^- := \{x|x = l_-\}$  معرفی کرده، سپس کل دامنه  $\mathbb{R}$  را به سه بخش تقسیم می‌کنیم،  $\Omega_i := \{x|l^- < x < l^+\}$ ،  $\Omega_- := \{x|-\infty < x < l^-\}$ ،  $\Omega_+ := \{x|l^+ < x < \infty\}$  و خارج دامنه را با  $\Omega_e = \Omega_- \cup \Omega_+$  نشان می‌دهیم. پس از تعریف شرایط مرزی مصنوعی، برای قسمت خطی معادله‌ی اصلی را در فضای لاپلاس بازنویسی می‌کنیم. شرایط مرزی غیرخطی متناظر با بهره‌گیری از تقریب‌های پاده برای ریشه‌های کسری، استخراج می‌گردد. در نهایت مسئله‌ی اصلی به یک مسئله‌ی مقدار اولیه (IVP) به فرم زیر در یک دامنه‌ی محدود تبدیل می‌شود:

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} + f(u), \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \Omega_i, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (6)$$

$$(\partial_x + \mathfrak{I} s_x^\alpha) {}^C D_t^\alpha u + (\mathfrak{I} s_x^\alpha \partial_x + s_x^{\frac{\alpha}{\Gamma}}) u = (\partial_x + \mathfrak{I} s_x^\alpha) f(u), \quad x = l_+, \quad (7)$$

$$(\partial_x - \mathfrak{I} s_x^\alpha) {}^C D_t^\alpha u + (\mathfrak{I} s_x^\alpha \partial_x - s_x^{\frac{\alpha}{\Gamma}}) u = (\partial_x - \mathfrak{I} s_x^\alpha) f(u), \quad x = l_-. \quad (8)$$

این روش نشان می‌دهد که شرایط مرزی غیرخطی پیشنهادی می‌تواند با دقت بالا برای حل مسائل سهموی کسری-زمانی غیرخطی استفاده شوند، در حالی که تقریب‌های پاده نقش کلیدی دارند. پارامتر  $s_x$  در شرایط مرزی جاذب‌کننده (ABCs) به عنوان نقطه بسط برای تقریب پاده مطرح است [۳، ۱].

## ۳ چالش‌های شرایط مرزی جاذب غیرخطی

چالشی که با آن روبرو هستیم مربوط به مشتقات مختلط است. یعنی مشتقاتی که همزمان شامل تغییرات زمانی و مکانی هستند.  $u_j^n$  به عنوان تقریب عددی  $u(x_j, t_n)$  در نظر گرفته شده، فضای تابع شبکه  $u \in V$  را به فرم  $V$ ،  $V = \{u_{nj} \mid 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N\}$  که بر روی تمام سبجه‌ی مش بندی شده تعریف شده است، مشخص می‌کنیم.

در فرآیند گسسته‌سازی برای هر  $u \in V$  از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\delta_x u_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, \quad \delta_x^\gamma u_i^n = \frac{\delta_x u_{i+1}^n - \delta_x u_{i-1}^n}{h}, \quad (9)$$

$$f(v) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=v}$$

همچنین از روش  $(L1)$  برای قسمت کسری به فرم زیر [۱] استفاده می‌کنیم:

$$D_\tau u_{nj} = \frac{1}{\mu} \left( u_{nj} - \sum_{l=1}^{n-1} (a_{n-l-1} - a_{n-l}) u_{lj} - a_{n-1} u_{oj} \right), \quad (10)$$

برای هر  $u \in V$  در اینجا  $a_i = (i+1)^{1-\alpha} - (i)^{1-\alpha}$  و  $i \geq 0$  برای  $\mu = \tau^\alpha(2-\alpha)$ . برای ساده‌سازی مسئله و غلبه بر چالش مشتقات مختلط، از دو متغیر کمکی  $\phi$  و  $\varphi$  بهره می‌بریم به این سبب مسئله به یک فرم معادل و ساده‌تر تبدیل می‌شود که حل عددی آن آسان‌تر خواهد بود. از روش تفاضلات متناهی خطی برای تقریب مشتقات زمانی و مکانی روی شبکه‌ی موردنظر استفاده می‌کنیم که منجر به تولید یک سیستم معادلات جبری سه‌قطری در هر گام زمانی می‌شود. فرض کنید  $U_{i,n}$ ،  $\phi_n$  و  $\varphi_n$  به ترتیب تقریب‌های عددی برای  $u(x_i, t_n)$ ،  $\phi(t_n)$  و  $\varphi(t_n)$  باشند. آنگاه یک روش تفاضل خطی شده برای مسئله کاهش یافته به صورت زیر ساخته می‌شود،  $1 \leq n \leq N$ :

$$D_\tau U_{i,n} = \delta_x^\gamma U_{i,n} + f(U_{i,n-1}), \quad 1 \leq i \leq M-1,$$

$$\delta_x U_{1,n} = \phi_n + \frac{\gamma s_o^{\alpha/\gamma}}{h} U_{o,n} + \frac{h}{\gamma} (D_\tau U_{o,n} - f(U_{o,n-1})),$$

$$\delta_x U_{M-1,n} = \phi_n - \frac{\gamma s_o^{\alpha/\gamma}}{h} U_{M,n} - \frac{h}{\gamma} (D_\tau U_{M,n} - f(U_{M,n-1})),$$

$$D_\tau \phi_n = (f(U_{o,n-1}) - \gamma s_o^{\alpha/\gamma}) \phi_n + \left( \lambda s_o^{\alpha/\gamma} - \gamma s_o^{\alpha/\gamma} f(U_{o,n-1}) \right) U_{o,n} + \gamma s_o^{\alpha/\gamma} f(U_{o,n-1}),$$

$$D_\tau \varphi_n = (f(U_{M,n-1}) - \gamma s_o^{\alpha/\gamma}) \varphi_n - \left( \lambda s_o^{\alpha/\gamma} - \gamma s_o^{\alpha/\gamma} f(U_{M,n-1}) \right) U_{M,n} - \gamma s_o^{\alpha/\gamma} f(U_{M,n-1}),$$

$$U_{i,o} = u_o(x_i), \quad \phi_o = \phi(o), \quad \varphi_o = \varphi(o).$$

از آنجا که ماتریس ضرایب کاملاً غالب قطری است، حل عددی مسئله یکتا است.

## ۴ مثال عددی

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} + u(x, t)(1 - u(x, t)^\epsilon) \quad (11)$$

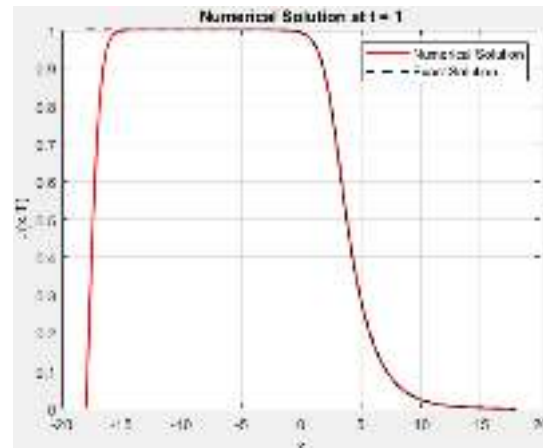
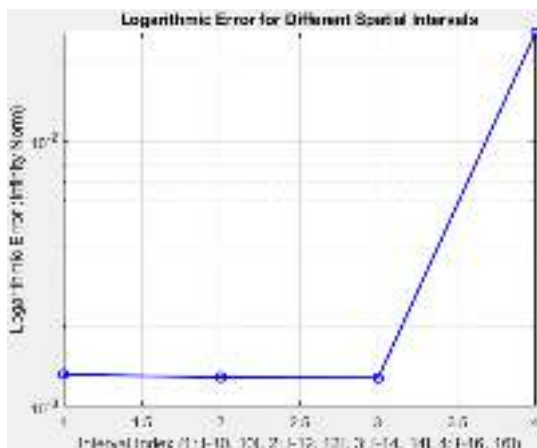
شرایط مرزی در نقاط انتهایی دامنه  $x = 0$  و  $x = 1$  به سه ت توابع وابسته به زمان تعریف شده‌اند:

$$u(o, t) = \varphi(t) = \left( \frac{1}{1 + e^{-\frac{10t}{\gamma}}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}}, \quad u(1, t) = \phi(t) = \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{10t}{\gamma}}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}}. \quad (12)$$

جواب دقیق معادله برای  $\alpha = 1$  به شکل زیر است:

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{1 + e^{-\frac{15x+6x}{4}}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

تعریف پارامترها و متغیرها برای بررسی کارایی روش عددی مطرح شده مقادیر را به فرم  $M = 2^7$  و  $N = 2^8$  و  $T = 1$  در نظر میگیریم و مشاهده میکنیم که خطای نهایی با نرم بی نهایت برابر است با  $0.027\%$  که بیانگر کارایی روش عددی مورد بحث است، نمودار مقایسه بین جوابها در بازه‌ی مورد حل و همچنین خطاها به ازای حل مسئله در بازه‌های متفاوت به شکل زیر هستند.



## ۵ نتایج

انتشار ناهنجار به دلیل ارتباط نزدیک با بسیاری از پدیده‌های طبیعی و صنعتی اهمیت زیادی دارد. درک این نوع انتشار به دانشمندان کمک می‌کند تا رفتارهای پیچیده‌ی مواد و ذرات را در محیط‌های متنوع بهتر مدل‌سازی و پیش بینی کنند که این امر می‌تواند در بهینه‌سازی فرآیندهای صنعتی درک بهتر بیماری‌ها و توسعه مواد جدید مؤثر باشد.

## مراجع

- [1] D. Li, and J. Zhang, *Efficient implementation to numerically solve the nonlinear time fractional parabolic problems on unbounded spatial domain*, J. Comp. Phy. **322** (2016), 415-428.
- [2] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, (1999).
- [3] J. Zhang, Z. Xu, X. Wu, *Unified approach to split absorbing boundary conditions for nonlinear Schrödinger equations: two dimensional case*, Phys. Rev. E **79** (2009), 046711.

## جایگذاری بهینه سنسور جریان به کمک الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر

خاطره قربانی مقدم\* عضو هیأت علمی موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی تهران،

k.ghorbani@khu.ac.ir

فاطمه خداترس، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد

رضا قنبری، عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

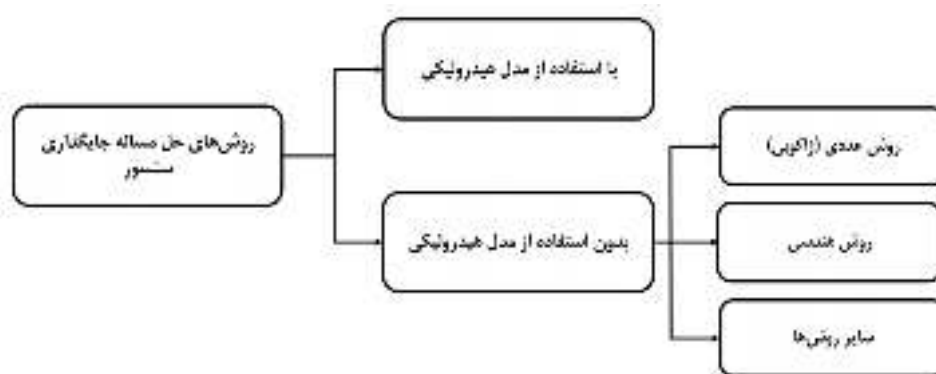
احمد ابویی مهریزی، فارغ التحصیل دکتری دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

**چکیده:** بهره‌برداری بهینه و به موقع از شبکه‌های بزرگ مقیاس، از جمله شبکه‌های آب و فاضلاب و توزیع برق، همواره یکی از دغدغه‌های اصلی مدیران بوده است. جایگذاری سنسورها به عنوان یکی از مراحل کلیدی در طراحی بهینه این شبکه‌ها، تأثیر قابل توجهی بر بهبود عملکرد این زیرساخت‌های شهری دارد. شرکت آب و فاضلاب به طور خاص به دنبال راهکارهایی برای افزایش قابلیت اطمینان و بهبود خدمات در شبکه آبرسانی است، که این امر از طریق افزایش مشاهده‌پذیری در شبکه محقق می‌شود. تشخیص زودهنگام نشتی‌ها در شبکه آبرسانی می‌تواند زمان شناسایی محل دقیق نشتی را به حداقل برساند و در نتیجه هدررفت آب را کاهش دهد. به همین دلیل، شرکت‌های آب و فاضلاب به استفاده از سنسورهای هوشمند برای نظارت بهتر بر شبکه آبرسانی شهری روی آورده‌اند. یکی از چالش‌های اصلی در مدیریت این سنسورها، هزینه‌های مربوط به تهیه و نصب آن‌ها است. ما در این مقاله، با تأکید بر رصد نقاط مختلف شبکه و هدف حداکثر مشاهده‌پذیری، به دنبال یافتن جایگذاری بهینه سنسورهای دبی‌سنج هستیم. در این روش، از ترکیب الگوریتم‌های فراابتکاری جستجوی همسایگی متغیر و جستجوی ممنوع استفاده می‌شود. نتایج این روش بر روی چندین شبکه با ابعاد متفاوت نشان می‌دهد که پیشنهادات ارائه شده، هم از نظر زمان و هم از نظر مقدار بهینه تابع هدف، نتایج قابل قبولی را به دست می‌آورد. **کلمات کلیدی:** شبکه توزیع آب، جایگذاری سنسور، قابلیت اطمینان

### ۱ مقدمه

طی سال‌های اخیر، پژوهش‌های بسیاری به جایگذاری سنسور در شبکه‌های آبرسانی پرداخته‌اند که هر کدام هدف خاصی را مد نظر داشته‌اند. اهداف جایگذاری سنسور در شبکه‌های آبرسانی را می‌توان به دو دسته کلیدی تقسیم‌بندی کرد: هدف اول، مشاهده‌پذیری شبکه آبرسانی و هدف دوم، شناسایی نشتی‌های شبکه است. غالباً مشاهده‌پذیری با هدف رصد کردن پارامترهای جریان، لوله‌ها یا فشار، ۶۵٪ در نظر گرفته می‌شود. دیدگاه دیگر در مشاهده‌پذیری

شبکه می‌تواند با رویکرد مشاهده‌پذیری جریان یا فشار شبکه مطرح شود. مطالعاتی که با هدف مشاهده‌پذیری شبکه به جایگذاری سنسور پرداخته‌اند، به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند: دسته اول شامل مطالعاتی است که به منظور مشاهده‌پذیری کامل شبکه و با هدف کاهش هزینه‌های بهره‌برداری انجام شده‌اند و الگوریتم‌هایی برای جایگذاری سنسورها در شبکه ارائه کرده‌اند. دسته دوم مقالاتی هستند که به حل این مسئله پرداخته‌اند و دو روش کلی برای حل آن معرفی کرده‌اند: مدل‌های ریاضی و روش‌های داده‌محور. در سال ۱۹۸۱، اولین الگوریتم مشاهده‌پذیری ارائه شد که از محاسبات شناور استفاده می‌کرد. اما اشکال مهم این الگوریتم این است که کاربرد آن محدود به مطالعات مکان‌یابی آفلاین است و برای اجرای آن لاین روی شبکه مناسب نیست [۲، ۳]. بارگیلا<sup>۱</sup> [۱]، با اشاره به این نکته که مشاهده‌پذیری کامل شبکه معادل است با پیدا کردن درخت پوشای حداقل در گراف متناظر با شبکه، برخی مطالعات روشی برای پیدا کردن درخت پوشای حداقل و در نتیجه، مشاهده‌پذیری کامل شبکه ارائه کرده‌اند. ژو و ابور<sup>۲</sup> [۴] مدل‌های ریاضی برای نحوه جایگذاری سنسورهای واحد اندازه‌گیری فاضلاب در شبکه انتقال برق ارائه شده است. این مقاله با هدف کاهش هزینه‌های مربوط به جایگذاری سنسورها در شبکه برق، تعداد و مکان بهینه برای نصب سنسورها را با هدف مشاهده‌پذیری کامل شبکه به دست می‌آورد. پژوهش‌هایی که به مسئله جایگذاری سنسور با هدف مشاهده‌پذیری در شبکه پرداخته‌اند، عمدتاً نتایجی مانند، شناسایی شکست در شبکه، نشت‌یابی در شبکه، مدیریت بهتر شبکه و کاهش هدررفت و تلفات در شبکه را به دنبال دارد. برای حل مسئله جایگذاری سنسور با هدف مشاهده‌پذیری، می‌توان مشاهده‌پذیری کامل یا حداکثری شبکه را در نظر گرفت. منظور از مشاهده‌پذیری کامل شبکه، تعیین تعداد سنسور لازم برای مشاهده پذیر کردن تمام گره‌ها، اتصالات و لوله‌های شبکه است. اما مسئله جایگذاری سنسور با هدف مشاهده‌پذیری حداکثری، شامل تعیین موقعیت تعداد محدود سنسور در شبکه است، به طوریکه ماکسیمم مشاهده‌پذیری در شبکه برقرار باشد. در واقع در حالت دوم با محدودیت بودجه و محدودیت در تعداد سنسور روبرو هستیم. روش‌های حل مسئله جایگذاری سنسور را می‌توان به دو دسته کلیدی تقسیم‌بندی کرد: حل مسئله جایگذاری سنسور با استفاده از مدل‌های هیدرولیکی، حل مسئله جایگذاری سنسور بدون استفاده از مدل‌های هیدرولیکی.



شکل ۱: روش‌های حل مسئله جایگذاری سنسور در شبکه

## ۲ الگوریتم ترکیبی جستجوی ممنوع و جستجوی همسایگی متغیر برای یافتن مشاهده‌پذیری بیشینه در شبکه‌های آبرسانی

در این بخش، یک الگوریتم ابتکاری ترکیبی برای یافتن بهترین شیوه جایگذاری سنسور جریان در شبکه با هدف دستیابی به بیشترین مشاهده‌پذیری ارائه می‌شود. این الگوریتم از ترکیب دو روش جستجوی ممنوع<sup>۳</sup> و جستجوی همسایگی متغیر<sup>۴</sup> تشکیل شده است. برای تعریف الگوریتم ابتکاری ابتدا لازم است تابعی معرفی کنیم که به ازای یک شیوه جایگذاری سنسور در شبکه، تعداد لوله‌های مشاهده‌پذیر شبکه را برگرداند. این تابع را تابع ارزیاب می‌نامیم. الگوریتم پیشنهادی، ترکیبی از الگوریتم‌های جستجوی همسایگی متغیر و جستجوی ممنوع است که در یک فضای شدنی به دنبال پیدا کردن بهترین شیوه جایگذاری تعداد محدود سنسور جریان در شبکه است. جزئیات الگوریتم ابتکاری به شرح زیر است:

---

**الگوریتم ۱ جایگذاری بهینه سنسور جریان در شبکه توزیع آب**

---

۱- مقدار دهی اولیه: یک جواب اولیه (*FeasibleSol*) به صورت تصادفی به طول *NumSensor* از بین لوله‌های شبکه در نظر بگیر. سپس همسایگی‌های  $N_1, \dots, N_n$  و یک شرط توقف در نظر بگیر و قرار بده:

$$FeasibleSol \leftarrow BestSofar \text{ و } Iter \leftarrow 1 \text{ و } q \leftarrow 0.$$

۲- تکرار: تا زمانی که شرط توقف الگوریتم برقرار نشده ( $Iter < MaxIter$ ) گام‌های زیر را تکرار کن:

۳- قرار دهی  $k \leftarrow 1$ .

۴- تا زمانی که شرط توقف الگوریتم جستجوی ممنوع برقرار نشده، گام‌های زیر را تکرار کن:

آ ۱-  $k$  امین همسایگی حول *FeasibleSol* را در نظر بگیر و به تعداد *NumNeighbor* همسایه برای *FeasibleSol* ایجاد کن (به کمک همسایگی‌های پیشنهادی و بهترین همسایه را در متغیر *Temp* ذخیره کن (همسایه‌ای که بیشترین مقدار تابع ارزیاب را داشته باشد).

آ ۱- اگر بهترین همسایه در لیست ممنوع بود، آنگاه شرط زیر را بررسی کن:

آ ۱-۱- اگر  $Fitness(Temp) > Fitness(BestSofar)$  آنگاه:  $BestSofar \leftarrow Temp$  و  $FeasibleSol \leftarrow Temp$ .

آ ۱-۲- در غیر اینصورت بهترین همسایه بعد از آن را در نظر بگیر.

آ ۲- اگر بهترین همسایه در لیست ممنوع نبود آنگاه قرار بده  $FeasibleSol \leftarrow Temp$ .

آ ۲-۱- اگر  $Fitness(Temp) > Fitness(BestSofar)$  آنگاه قرار بده  $BestSofar \leftarrow Temp$ .

آ ۳- قرار بده  $Iter \leftarrow Iter + 1$ .

آ ۴-  $BestSol \leftarrow BestSofar$ .

پ: اگر بهینه محلی  $Fitness(BestSol) > Fitness(FeasibleSol)$  آنگاه قرار بده:

$FeasibleSol \leftarrow BestSol$  و جستجو را با  $N_1$  ادامه بده ( $k \leftarrow 1$ )، در غیر اینصورت  $k \leftarrow k + 1$ .

---



سپس الگوریتم پیشنهادی را بر روی شبکه‌های آبرسانی واقعی پیاده‌سازی کردیم.

### ۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله، با تأکید بر رصد نقاط مختلف شبکه و هدف حداکثر مشاهده‌پذیری، به دنبال یافتن جایگذاری بهینه سنسورهای دبی‌سنج هستیم. در روش پیشنهادی از ترکیب الگوریتم‌های فراابتکاری جستجوی همسایگی متغیر و جستجوی ممنوع استفاده می‌شود. نتایج این روش بر روی چندین شبکه با ابعاد متفاوت نشان می‌دهد که پیشنهادات ارائه‌شده، هم از نظر زمان و هم از نظر مقدار بهینه تابع هدف، نتایج قابل قبولی را به دست می‌آورد.

### مراجع

- [1] A. Bargiela, "An algorithm for observability determination in water-system state estimation," in IEE Proceedings D (Control Theory and Applications) 132 (1985) 245-250.
- [2] Edelman, H. A., "universal assesment for the superior quality of distribution of measuring points for the state-estimate of high voltage network," in Proc, 5th PSC Conference (1975).
- [3] Duff, I. S., "On algorithms for obtaining a maximum transversal," in ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS) 7 (1981) 315-330.
- [4] B. Xu and A. Abur, "Observability analysis and measurement placement for systems with PMUs," in IEEE PES Power Systems Conference and Exposition (2004) 943-946 .

## نقش بهینه سازی در مدل سازی ریاضی برای فعالیت الکتریکی قلب در ماکروسکوپی

فهیمة السادات کاظمی، دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۷ تهران، ایران

f.sadat.kazemi@gmail.com

عقیله حیدری، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۷ تهران، ایران

a\_heidari@pnu.ac.ir

علی دلاورخلفی، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

delavarkh@yazd.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله یک مدل ریاضی برای فعالیت الکتریکی قلب در سطح ماکروسکوپی بررسی شده است. مدل غشایی مورد استفاده برای توصیف جریان‌های یونی، تعمیم فاز آی-لو-رودی است، مدلی که به طور گسترده در شبیه‌سازی‌های دوبعدی و سه بعدی از انتشار پتانسیل عمل استفاده می‌شود. از دیدگاه ریاضی، مدل از یک واکنش سهموی منحنی سیستم انتشار همراه با یک سیستم PDE ساخته شده است در بخش پایانی وجود و منحصر بفردي جواب مورد بررسی گرفته است.  
**کلمات کلیدی:** معادلات واکنش-انتشار، مدل دو دامنه‌ای، معادلات تکاملی منحنی

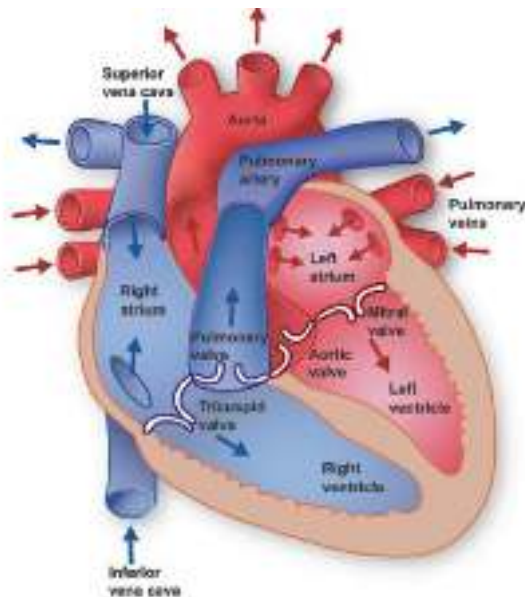
### ۱- مقدمه

هدف این مقاله بررسی سیستم‌های واکنش انتشار ناشی از مدل‌های ریاضی فعال الکتریکی از فعالیت سلول‌های بطن قلب، در سطح ماکروسکوپی است. مدل‌هایی که مورد بررسی طور گسترده در پزشکی و مطالعات مهندسی زیستی ظاهر شده و در شبیه‌سازی‌های عددی آن، زمینه تحقیقاتی مدل‌های دقیق و پیچیده را تشکیل داده است. علاوه بر این، مطالعات محاسباتی و شبیه‌سازی‌های عددی نقش مهمی در الکتروکاردیولوژی ایفا می‌کنند. البته در مطالعات تجربی و یافتن جواب‌های عددی با دشواری اندازه‌گیری مستقیم به همراه دارد. همچنین مدل دودامنه‌ای ناهمسانگرد کاملترین مدلی است که در شبیه‌سازی عددی فعالیت بیوالکتریک قلب استفاده می‌شود.

در این مقاله، وجود و منحصر به فردی یک جواب را برای کلاس گسترده‌ای از مدل‌ها، از جمله مدل کلاسیک هوچکین-هاسکی [۱] اثبات شده است. اولین مدل غشایی برای جریان‌های یونی در یک آکسون و مدل فاز (LR1) آی-لو-رودی<sup>۲</sup> [۲] که یکی از پرکاربردترین مدل‌ها در شبیه‌سازی‌های دو بعدی و سه بعدی انتشار پتانسیل عمل قلبی است و مبنایی برای مدل‌های دینامیکی مدرن بوده است. لازم به ذکر است در این مقاله خوش تعریفی برای مدل دودامنه‌ای، همراه با مدل سازی Fitz Hugh-Nagumo برای جریان‌های یونی شده است.

در مقاله حاضر روش متفاوتی را معرفی می‌کنیم که می‌تواند در مدل‌های کلی‌تر و واقعی‌تر به کار رود. انقباض عضله قلب توسط یک سیگنال الکتریکی از گره سینوسی دهلیزی شروع<sup>۳</sup> ۹. د. سپس سیگنال الکتریکی در امتداد نوع خاصی از سلول‌ها

از طریق دهلیز و بطن حرکت می‌کند. هنگامی که سلول‌های ماهیچه‌ای به صورت الکتریکی تحریک می‌شوند، به سرعت دپلاریزه شده که به معنی تغییر کردن پتانسیل الکتریکی داخل سلول است. دپلاریزاسیون باعث انقباض سلول‌ها می‌شود و سیگنال الکتریکی نیز به سلول سلول‌های همسایه منتقل می‌شود. این واکنش باعث ایجاد میدان الکتریکی در قلب و بدن می‌شود. اندازه‌گیری از این میدان در سطح بدن، الکتروکاردیوگرام (ECG) نامیده می‌شود. به منظور دستیابی به شبیه‌سازی واقع‌بینانه از این اندازه‌گیری‌ها، مطالعه چگونگی ایجاد سیگنال الکتریکی در قلب و نحوه هدایت آن در قلب و بافت بدن بسیار مهم است. رسانایی در بافت بدن و به‌طور کلی در سیستم‌های بیولوژیکی، حوزه وسیعی از تحقیقات اخیر است که به آن پرداخته شده است. باید توجه داشت که دینامیک درون قلب نسبتاً پیچیده است. این موضوع عمدتاً به دلیل ناهمسانگردهای مختلف سلولی و بافت‌های خارج سلولی است که به تحریک پذیری سلول‌های عضله قلب و به تنوع زیاد سلول‌های مختلف و یونی، انواع کانال‌ها، رفتار الکتریکی غشای سلول‌های تحریک پذیر منجر می‌شود. این موضوع به طور گسترده، در پنجاه سال گذشته مورد بررسی قرار گرفته است و مدل‌سازی جریان‌های یونی در میوکارد بطنی توسعه یافته است. لازم به ذکر است که یکی از کاملترین دینامیک‌های مربوط به ساختار قلب در مقاله [۳] ارائه شده است.



## ۲- نتایج خوش تعریفی براساس آرگومان های نقطه ثابت

در این بخش، نتیجه خوش تعریفی را برای شکل‌گیری معرفی شده مدل دودامنه‌ای، به دست آمده در [۴] با استفاده از یک آرگومان نقطه ثابت بررسی شده است. این نتیجه طیف گسترده‌ای از مدل‌های غشای پیچیده را پوشش می‌دهد.

فرض کنید که جریان یونی

$$I_{ion} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times (0, +\infty)^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w, z) \rightarrow I_{ion}(v, w, z)$$

است که در آن  $z$  ظرفیت یون و  $v = u_i - u_e$  و شاخص‌های  $u_e$  و  $u_i$  مقادیر پتانسیل الکتریکی درون و برون سلولی را نشان می‌دهد.

ساختار کلی  $I_{ion}$  به صورت زیر است:

$$I_{ion}(v, w, z) := \sum_{i=1}^m J_i(v, w, \log \zeta_i) + \tilde{H}(v, w, z), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

که در آن

$$J_i \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R})$$

و داریم

$$0 < \underline{G}(w) \leq \frac{\partial}{\partial \xi} J_i(v, w, \xi) \leq \overline{G}(w)$$

همچنین

$$\left| \frac{\partial}{\partial v} J_i(v, w, \cdot) \right| \leq L_v(w)$$

که  $\underline{G}, \overline{G}, L_v$  متعلق به  $C^0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+)$  و

$$\tilde{H} \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times (\cdot, +\infty)^m) \cap Lip(\mathbb{R} \times [\cdot, 1]^k \times (\cdot, +\infty)^m) \quad (2)$$

دینامیک متغیرهای دروازه‌ای توسط سیستم PDE ها شرح داده شده است.

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} := \alpha_j(v)(1 - w_j) - \beta_j(v)w_j \quad j = 1, \dots, k \quad (3)$$

که  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{c_1 \exp\left(\frac{v-v_n}{c_\gamma}\right) + c_\gamma(v - v_n)}{1 + c_\xi \exp\left(\frac{v-v_n}{c_o}\right)}$$

و  $c_1, c_\gamma, c_\xi, v_n$  ثابت‌های غیرمنفی و  $c_o, c_\gamma$  ثابت‌های مثبت هستند.

دینامیک غلظت‌های یونی به وسیله سیستم PDE شرح داده شده است.

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = G_i(v, w, z) := -J_i(v, w, z_i) + H_i(v, w, z) \quad (4)$$

$$H_i \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times (\cdot, +\infty)^m) \cap Lip(\mathbb{R} \times [\cdot, 1]^k \times (\cdot, +\infty)^m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

$$\begin{cases} C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla u_i) + I_{ion}(v, w, z) = I_i^s, & \text{in } \Omega_H \times (\cdot, T), \\ -C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(D_e \nabla u_e) + I_{ion}(v, w, z) = I_e^s, & \text{in } \Omega_H \times (\cdot, T), \\ \frac{\partial w}{\partial t} - F(v, w) = \cdot, & \text{in } \Omega_H \times (\cdot, T), \\ \frac{\partial z}{\partial t} - G(v, w, z) = \cdot, & \text{in } \Omega_H \times (\cdot, T), \\ n^T D_{i,e} \nabla u_{i,e} = \cdot, & \text{in } \Omega_H \times (\cdot, T), \\ v(x, \cdot) = v_\cdot(x), w(x, \cdot) = w_\cdot(x), z(x, \cdot) = z_\cdot(x), & \text{in } \Omega_H \times (\cdot, T). \end{cases} \quad (6)$$

با حل دو معادله ابتدایی دستگاه در (6) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$-\operatorname{div}(D_i \nabla u_i) - \operatorname{div}(D_e \nabla u_e) = I_i^s + I_e^s$$

لازم به ذکر است با ادغام  $\Omega_H$  و استفاده از قضیه واگرایی و استفاده از شرایط مرزی نیومن شرایط سازگاری برای سیستم قابل حل داریم:

$$\int_{\Omega_H} (I_i^s + I_e^s) dx = 0 \quad (V)$$

انتخاب معمول شامل انتخاب ثابت  $u_e$  در  $\Omega_H$  با میانگین صفر به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega_H} u_e dx = 0$$

حال با فرض اینکه  $D_i(x)$  و  $D_e(x)$  قابل اندازه‌گیری هستند و شرایط بیضی یکنواخت (۶) را برآورده می‌کنند، می‌توان نوشت:

$$\xi \cdot \xi \leq m|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega_H, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \exists \alpha, m > 0 : \alpha|\xi|^2 \leq D_{i,e}(x).$$

## ۱ مراجع

- [1] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, J. Physiol. 117(1952) 500-544.
- [2] C.-H. Luo, Y. Rudy, A model of the ventricular cardiac action potential: Depolarization, repolarization, and their interaction, Circ. Res. 68 (1991) 1501-1526.
- [3] A. QUARTERONI, L. DEDE, F. REGAZZONI, MODELING THE CARDIAC ELECTROMECHANICAL, Am. Math. Soc. 59(3) (2022) 371-403.
- [4] Veneroni, M.: Reaction - Diffusion systems for the macroscopic Bidomain model of the cardiac electric field. Nonlinear Anal. Real Wand Appl. 10(2), 849-868 (2009)
- [5] R.W. Ogden, Nonlinear elastic deformations, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Herwood Ltd., Chichester; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, 1984. MR 770388.
- [6]. S.S. Antman, Nonlinear problems of elasticity, Applied Mathematical Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, New York 1995, DOI 10.1007/978-1-4757-4147-6. MR1323857



## مدل ریاضی چندهدفه در زنجیره تامین معکوس و ارائه مثال عددی زمان حل مسئله با الگوریتم NSGAI

پرستو کعبی نژاد<sup>۱</sup>\*

<sup>۱</sup> استادیار گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران.

Email: parastookabinejad@iust.ac.ir

چکیده. در این مقاله، با استفاده از تحقیق صورت گرفته برای یک زنجیره تامین روبه جلو و توسعه یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط چندهدفه، چندهوره ای، چندمحصولی با در نظر گرفتن عدم قطعیت که اخیراً انجام گرفته و با در نظر گرفتن ایده جدیدی از ادغام مفهوم مدیریت ارتباط با مشتری و مدیریت زنجیره تامین که در قالب مدل سازی ریاضی گنجانده شده است به حل مثال عددی خواهیم پرداخت. برای این منظور، مدل چندهدفه مبتنی بر راهکار پیشنهادی را به دنبال بهینه سازی قوی و رویکردهای برنامه ریزی هدف چندگزینه ای بازنگری شده بیان کرده و برای مثال عینی مورد نظر با استفاده از الگوریتم NSGAI پیاده سازی می کنیم و کارایی آن را بررسی خواهیم نمود.

واژه های کلیدی: مدل ریاضی چندهدفه، زنجیره تامین، لجستیک معکوس، سرویس دهی، الگوریتم NSGAI. طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 91B76, 91B60.

### ۱. مقدمه

زنجیره تامین ترکیبی از فرآیندها جهت پاسخگویی به درخواست مشتری است که می تواند شامل همه نهادها مانند تامین کنندگان، تولیدکنندگان، حمل و نقل، خرده فروشان و فروشندگان تجاری باشد. منظور از مدیریت زنجیره تامین هدایت تمام اعضای زنجیره تامین به صورت یکپارچه و هماهنگ با هدف ارتقا عملکرد جهت بهبود بهره وری و سود بیشتر است. در دهه های گذشته، شبکه های لجستیک معکوس در زنجیره های تامین صنایع مختلف رشد چشمگیری داشته اند. لجستیک معکوس عبارت است از فرآیند موثر برنامه ریزی، اجرا و کنترل جریان مواد خام، موجودی نیمه ساخته، محصولات نهایی و اطلاعات مربوط به آنها به صورت موثر از لحاظ هزینه، جابجایی از مصرف به مبدا، با هدف خلق مجدد ارزش یا دفع مناسب [۲]. از آنجایی که هزینه های لجستیک معکوس و زنجیره تامین همواره به صورت هم ردیف در صنعت و علم مورد استفاده قرار می گیرند محققان بر روی این حالت های مختلف این مدل در سال های اخیر روی آورده اند متمرکز شدند [۳، ۴]. اخیراً ما چندین بینش ارزشمند را برای متخصصان ارائه نمودیم تا بتوان از طریق لجستیک معکوس یک اقتصاد دایره ای ایجاد نمود [۱]. این تحقیق به اهداف توسعه پایدار سازمان ملل متحد نیز کمک می کند. در اینجا ضمن بررسی مجدد طرح ارائه شده مان و تکمیل اطلاعات آن، مثالی عددی را به طور کامل با استفاده از الگوریتم NSGAI جهت کارایی مدل ارائه شده مطالعه خواهیم نمود.

### ۲. مدل سازی ریاضی

ابتدا مدل سازی ارائه شده توسط نویسنده را مرور خواهیم نمود [۱].  
شاخص ها.

$l$ : فهرست مکان های ثابت کارخانه های تولیدی؛  $i$ : فهرست مکان های ثابت مراکز توزیع؛  $j$ : فهرست مکان های بالقوه مراکز جمع آوری؛  $k$ : فهرست

\* سخنران.

مکان‌های بالقوه برای مراکز ترکیبی؛  $m$ : فهرست مکان‌های ثابت مشتریان نوع ۱ و ۲؛  $n$ : فهرست مکان‌های بالقوه موجود برای کارخانه‌های بازیافت؛  $o$ : فهرست مکان‌های ثابت مشتریان نوع ۳.

#### متغیرهای تصمیم‌گیری.

$Q_{p'lt}$ : مقدار محصول  $p$  تولید شده توسط کارخانه تولیدی  $l$  در دوره  $t$ ؛  $Q'_{p'nt}$ : مقدار محصول بازیافتی  $p'$  تولید شده توسط کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AB_{plit}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید  $l$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AC_{plkt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید  $l$  به مرکز هیبریدی  $k$  در دوره  $t$ ؛  $AD_{pimt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز توزیع  $i$  به مشتری  $m$  در دوره  $t$ ؛  $AE_{pkmt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز هیبریدی  $k$  به مشتری  $m$  در دوره  $t$ ؛  $AF_{pmkt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AH_{pmit}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مشتری  $m$  به مرکز توزیع  $i$  در دوره  $t$ ؛  $AI_{pjnt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز جمع‌آوری  $j$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AJ_{pint}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز توزیع  $i$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AK_{pknt}$ : مقدار محصول  $p$  ارسال شده از مرکز هیبریدی  $k$  به کارخانه بازیافت  $n$  در دوره  $t$ ؛  $AL_{p'not}$ : مقدار محصول بازیافتی  $p'$  ارسال شده از کارخانه بازیافت  $n$  به مشتری  $o$  در دوره  $t$ ؛  $AN_{plts}$ : سطح موجودی محصول  $p$  در کارخانه  $l$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $BO_{mpts}$ : سطح سفارش پشتیبان مشتری  $m$  برای محصول  $p$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $X_i, Y_j, Z_k, W_n$ : متغیرهای صفر و یک می‌باشند که به ترتیب اگر مراکز توزیع  $i$ ، جمع‌آوری  $j$ ، هیبریدی  $k$  و کارخانه بازیافت  $n$  باز باشند و در غیر این صورت صفر می‌باشند؛  $OE, OD, OC, OB, OA$ : متغیرهای صفر و یک هستند که به ترتیب یک می‌باشند اگر گزینه‌های  $A, B, C, D, E$  و  $F$  فعال باشند و در غیر این صورت، صفر هستند؛  $FF_{pmt}$ : تعداد کل محصول رایگان  $p$  داده شده به مشتری در دوره  $t$ .

#### پارامترها.

$PP_{pt}$ : قیمت واحد محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $PA_{p't}$ : قیمت واحد محصول بازیافتی  $p'$  بر حسب تن در دوره  $t$ ؛  $PC_{pt}$ : واحد تامین و هزینه تولید محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $RC_{p't}$ : هزینه واحد تامین و تولید محصول بازیافتی  $p'$  بر حسب تن در دوره  $t$ ؛  $D_{mpts}$ : تقاضای مشتری  $m$  برای محصول  $p$  در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $D'_{op'ts}$ : کاهش تقاضای مشتری  $o$  برای محصول بازیافتی  $p$  به تن در دوره  $t$  تحت سناریو  $s$ ؛  $TD_{pt}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول  $p$  ارسال شده از کارخانه تولید به مراکز توزیع/هیبریدی در دوره  $t$ ؛  $TR_{pt}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول  $p$  ارسال شده از مراکز جمع‌آوری/هیبرید به کارخانه‌های بازیافت در دوره  $t$ ؛  $TO_{p't}$ : هزینه حمل و نقل واحد برای محصول بازیافتی  $p'$  ارسال شده از کارخانه‌های بازیافت به مشتریان نوع ۳ در دوره  $t$ ؛  $IC_i$ : هزینه ثابت برای تبدیل مرکز توزیع  $i$  به هیبریدی؛  $FCC_j$ : هزینه ثابت برای افتتاح مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $FCH_k$ : هزینه ثابت برای باز کردن مرکز هیبریدی  $k$ ؛  $FC_n$ : هزینه ثابت برای افتتاح کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $\alpha_t$ : تعداد محصولات استفاده شده که می‌توان بدون درگیری مشتری با آنها در دوره زمانی  $t$  برخورد کرد؛  $\gamma$ : میانگین میزان مصرف محصولات در کشور در هر دوره؛  $\beta$ : تعداد محصولات استفاده شده‌ای که مشتریان برای داشتن یک محصول جدید رایگان باید برگردانند؛  $DA_{li}$ : فاصله بین کارخانه تولید  $l$  و مرکز توزیع  $i$ ؛  $DB_{lk}$ : فاصله بین کارخانه تولید  $l$  و مرکز هیبریدی  $k$ ؛  $DC_{kn}$ : فاصله بین مرکز هیبریدی  $k$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DD_{jn}$ : فاصله بین مرکز جمع‌آوری  $j$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DE_{in}$ : فاصله بین مرکز توزیع  $i$  و کارخانه بازیافت  $n$ ؛  $DF_{no}$ : فاصله بین کارخانه بازیافت  $n$  و مشتری  $o$ ؛  $MXC_j$ : حداکثر ظرفیت مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $MNC_j$ : حداقل ظرفیت قابل قبول استفاده از مرکز جمع‌آوری  $j$ ؛  $XCF_k$ : حداکثر ظرفیت مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات در جهت جلو؛  $NCF_k$ : حداقل ظرفیت قابل قبول مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات در جهت جلو؛  $XCR_k$ : حداکثر ظرفیت مرکز هیبریدی  $k$  در دریافت محصولات مصرف شده در جهت عقب؛  $UF_i$ : حداکثر ظرفیت مرکز توزیع  $i$  در جهت جلو؛  $UR_i$ : حداکثر ظرفیت مرکز توزیع  $i$  که در جهت عقب به هیبریدی تبدیل شد؛  $CAP_{pls}$ : ظرفیت تولید محصول  $p$  در کارخانه تولیدی  $l$  تحت سناریو  $s$ ؛  $CN_{ns}$ : ظرفیت کارخانه بازیافت  $n$  تحت سناریو  $s$ ؛  $MM_{p'p}$ : ماتریس تغییر تعداد واحد محصولات به وزن معادل اجزای محصول بر حسب تن؛  $P$ : شاخص برای محصولات در جهت رو به جلو؛  $P'$ : شاخص برای محصولات بازیافتی در جهت معکوس؛  $t$ : شاخص برای دوره‌ها؛  $a$ : فهرست گزینه‌های CRM؛  $s$ : شاخص برای سناریوها؛  $HH_{plt}$ : بهای تمام شده نگهداری موجودی واحد محصول  $p$  در کارخانه تولیدی  $l$  در دوره  $t$ ؛  $CBO_{pt}$ : هزینه سفارش پشتیبان واحد محصول  $p$  در دوره  $t$ ؛  $M$ : یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ؛  $COB, COE, COD, COC, COF$  به ترتیب هزینه گزینه  $B, C, D, E$  و  $F$ ؛  $\alpha = [\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D, \alpha_E, \alpha_F]$ ؛  $\alpha$ : بردار تأثیر نشان‌دهنده سطح تاثیر گزینه‌های CRM تعریف شده بر رضایت مشتری است.

مدل ارائه شده در [۱] به منظور به حداکثر رساندن سود کل، به حداکثر رساندن رضایت کلی مشتری و به حداقل رساندن فاصله کل بین مجموعه‌ای که قرار است افتتاح شود و مشتریانی که محصولات استفاده شده خود را بیشتر باز می‌گردانند به صورت زیر می‌باشد:

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{Max } F_1 = & \sum_p \sum_t \left( \sum_i \sum_m AD_{pimt} + \sum_k \sum_m AE_{pkmt} \right) PP_{pt} + \sum_i \sum_{p'} \sum_n \sum_o AL_{p'not} PA_{p't} \\ & - \sum_t \sum_p \sum_l PC_{pt} Q_{plt} - \sum_t \sum_n \sum_{p'} RC_{p't} Q'_{p'nt} - \sum_t \sum_{p'} \sum_n \sum_o TO_{p't} AL_{p'not} DF_{no} \\ & - \sum_p \sum_t TR_{pt} \left( \sum_k \sum_n AK_{pknt} DC_{kn} + \sum_j \sum_n AI_{pjnt} DD_{jn} + \sum_i \sum_n AJ_{pint} DE_{in} \right) \\ & - \sum_p \sum_t TD_{pt} \left( \sum_l \sum_i AB_{plit} DA_{li} + \sum_l \sum_k AC_{plkt} DB_{lk} \right) - \sum_j FCC_j Y_j - \sum_k FCH_k Z_k \\ & - \sum_n FC_n W_n - \sum_i IC_i X_i - \sum_t \sum_p \sum_l HH_{plt} IN_{plts} - \sum_t \sum_p \sum_m CBO_{pt} BO_{mpts} \\ & - \left( \sum_t \sum_p \sum_m FF_{pmt} PP_{pt} tOA \right) - COB \times OB - (COC \times OC) - (COD \times OD), \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{Max } F_2 = \frac{1}{\gamma} V(U(\alpha)),$$

که در آن  $U(\alpha)$  تابعی برای محاسبه سطح رضایت مشتری و  $V$  تابعی خطی برای محاسبه مقدار کل محصولات مصرف شده دریافت شده از مشتریان را با در نظر گرفتن رضایت مشتری است.

$$(۳) \quad \text{Min } F_7 = \sum_t \sum_p \sum_m \sum_k AF_{pmtk} DG_{mk} + \sum_t \sum_p \sum_m \sum_j AG_{pmjt} DH_{mj} + \sum_t \sum_p \sum_m \sum_i AH_{pmit} DI_{mi}$$

تعداد قیدهای تعادل، ظرفیت و حمل و نقل مدل ارائه شده به ترتیب ۱۱، ۱۰ و ۱۲ می‌باشد که به دلیل طولانی بودن و محدودیت صفحات از ارائه آن در اینجا صرف نظر می‌کنیم.

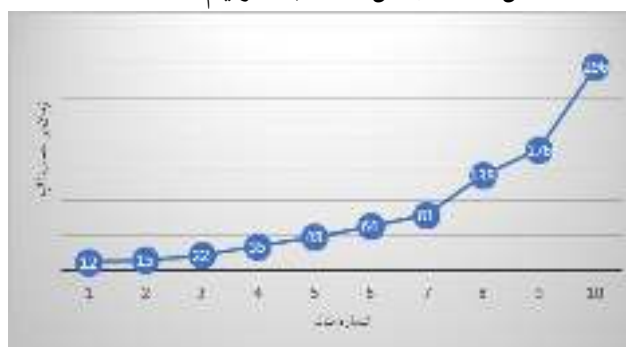
### ۳. مثال عددی

در این بخش، با ارائه مثال عددی زمان حل مسئله با الگوریتم NSGAI بررسی خواهد شد و سپس کارایی الگوریتم را در سه تابع هدف مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و در نهایت پارامترهای الگوریتم که نرخ جهش و تعداد جمعیت است را بیان خواهیم نمود. با توجه به بررسی زمان انجام شده در ابعاد مختلف، نتایج نشان می‌دهد که با بزرگتر شدن ابعاد مسئله، زمان حل به صورت قابل توجهی افزایش پیدا نکرده و الگوریتم از نظر زمان حل دارای کارایی مناسبی است. این موضوع با ارائه ۱۰ مثال عددی تصادفی در جدول ۱ به اثبات رسیده است و همان‌طور که در نمودار ۱ نیز مشخص شده است حداکثر زمان حل این مسائل ۲۹۶ ثانیه می‌باشد که مقدار قابل قبولی هست. نمادهای زیر نشان‌دهنده مجموعه‌های مشخص شده است:  $j$ : مکان مشتریان،  $k$ : مکان‌های کاندید برای مراکز جمع‌آوری،  $L$ : مراکز بازیافت قطعات فولادی،  $m$ : مراکز بازیافت قطعات پلاستیکی،  $n$ : شاخص مراکز سوزاندن،  $tc$ : فناوری‌های مختلف مراکز جمع‌آوری،  $t$ : دوره‌های زمانی.

جدول ۱. بررسی زمان حل مسئله با الگوریتم NSGAI

| شماره مثال | مجموعه‌ها |    |   |   |   |    |   | زمان حل بر حسب ثانیه |
|------------|-----------|----|---|---|---|----|---|----------------------|
|            | j         | k  | l | m | N | tc | t |                      |
| ۱          | ۸         | ۳  | ۳ | ۳ | ۳ | ۲  | ۳ | ۱۲                   |
| ۲          | ۱۰        | ۴  | ۳ | ۳ | ۳ | ۲  | ۳ | ۱۵                   |
| ۳          | ۱۲        | ۵  | ۳ | ۳ | ۳ | ۲  | ۴ | ۲۲                   |
| ۴          | ۱۵        | ۵  | ۴ | ۴ | ۴ | ۳  | ۴ | ۳۵                   |
| ۵          | ۲۰        | ۶  | ۴ | ۴ | ۴ | ۳  | ۵ | ۴۸                   |
| ۶          | ۲۵        | ۶  | ۴ | ۴ | ۴ | ۳  | ۵ | ۶۴                   |
| ۷          | ۲۰        | ۷  | ۵ | ۵ | ۵ | ۴  | ۶ | ۸۱                   |
| ۸          | ۲۵        | ۸  | ۵ | ۵ | ۵ | ۴  | ۷ | ۱۳۸                  |
| ۹          | ۳۰        | ۹  | ۵ | ۵ | ۵ | ۴  | ۸ | ۱۷۶                  |
| ۱۰         | ۴۰        | ۱۰ | ۶ | ۶ | ۵ | ۵  | ۹ | ۲۹۶                  |

شکل ۱. زمان حل مسئله با الگوریتم NSGAI



همچنین، پنج مثال تصادفی برای هر سه تابع هدف ایجاد و با الگوریتم NSGAI حل شده است. نتایج و اختلاف بین بهترین و بدترین جواب‌های موجود و همچنین بین میانگین و بهترین جواب و انحراف معیار جواب‌ها دارای مقادیر بسیار کوچکی است که این میانگین برای تابع هدف هزینه مقدار ۲/۳٪ با واریانس ۸/۳۹۱، برای تابع هدف فاصله مقدار ۱/۸٪

با واریانس ۵۳۷٪ و در نهایت برای تابع هدف رضایت مشتری ۲/۴۴٪ با واریانس ۱/۵۴۶ می باشد که نشان دهنده کارایی الگوریتم و همگرا بودن آن به جواب های بهینه است.

جدول ۲. بررسی کارایی الگوریتم برای تابع هدف هزینه

| تابع هدف هزینه |       |       |       |       |       |       |       |       |             |             |              |                         |                        |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|--------------|-------------------------|------------------------|
| شماره مثال     | اجرا  |       |       |       |       |       |       |       |             |             | واریانس      | انحراف میانگین و بدترین | انحراف بهترین و بدترین |
|                | ۱     | ۲     | ۳     | ۴     | ۵     | ۶     | ۷     | ۸     | بهترین جواب | بدترین جواب | میانگین جواب |                         |                        |
| ۱              | ۵۲/۲  | ۵۲/۲  | ۵۲/۳  | ۵۲/۲  | ۵۲/۲  | ۵۲/۲  | ۵۲/۳  | ۵۲/۲  | ۵۲/۲        | ۵۲/۳        | ۵۲/۲۳        | ۰/۰۵%                   | ۰/۱۹%                  |
| ۲              | ۶۹/۷  | ۶۹/۸  | ۶۹/۶  | ۶۹/۷  | ۶۹/۷  | ۶۹/۸  | ۶۹/۹  | ۶۹/۷  | ۶۹/۶        | ۶۹/۹        | ۶۹/۷۴        | ۰/۲۰%                   | ۰/۴۳%                  |
| ۳              | ۸۵/۷  | ۸۵/۸  | ۸۵/۶  | ۸۶/۷  | ۸۶/۷  | ۸۵/۷  | ۸۶/۹  | ۸۵/۹  | ۸۵/۷        | ۸۶/۹        | ۸۶/۱۸        | ۰/۵۵%                   | ۱/۴۰%                  |
| ۴              | ۸۵/۹  | ۸۵/۳  | ۸۵/۹  | ۸۷/۴  | ۸۶/۹  | ۸۷/۲  | ۸۵/۹  | ۸۵/۹  | ۸۵/۹        | ۸۷/۴        | ۸۶/۴۳        | ۰/۶۱%                   | ۱/۷۵%                  |
| ۵              | ۲۷۸/۴ | ۲۷۸/۲ | ۲۷۸/۶ | ۲۷۸/۱ | ۲۸۶/۳ | ۲۸۱/۳ | ۲۷۷/۹ | ۲۷۸/۴ | ۲۷۷/۹       | ۲۸۶/۳       | ۲۷۹/۶۵       | ۰/۶۳%                   | ۳/۰۲%                  |

جدول ۳. بررسی کارایی الگوریتم برای تابع هدف فاصله

| تابع هدف فاصله |       |       |       |       |       |       |       |       |             |             |              |                         |                        |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|--------------|-------------------------|------------------------|
| شماره مثال     | اجرا  |       |       |       |       |       |       |       |             |             | واریانس      | انحراف میانگین و بدترین | انحراف بهترین و بدترین |
|                | ۱     | ۲     | ۳     | ۴     | ۵     | ۶     | ۷     | ۸     | بهترین جواب | بدترین جواب | میانگین جواب |                         |                        |
| ۱              | ۵۸/۳  | ۵۸/۳  | ۵۸/۴  | ۵۸/۳  | ۵۸/۳  | ۵۸/۲  | ۵۸/۳  | ۵۸/۲  | ۵۸/۲        | ۵۸/۴        | ۵۸/۳۰        | ۰/۱۷%                   | ۰/۳۴%                  |
| ۲              | ۶۷/۲  | ۶۷/۳  | ۶۷/۵  | ۶۷/۲  | ۶۷/۲  | ۶۷/۳  | ۶۷/۱  | ۶۷/۲  | ۶۷/۱        | ۶۷/۵        | ۶۷/۲۵        | ۰/۲۲%                   | ۰/۶۰%                  |
| ۳              | ۸۳/۴  | ۸۳/۴  | ۸۳/۵  | ۸۳/۹  | ۸۳/۹  | ۸۳/۸  | ۸۳/۴  | ۸۳/۲  | ۸۳/۲        | ۸۳/۹        | ۸۳/۵۶        | ۰/۴۴%                   | ۰/۸۴%                  |
| ۴              | ۹۴/۶  | ۹۴/۶  | ۹۴/۸  | ۹۶/۳  | ۹۶/۹  | ۹۵/۷  | ۹۵/۳  | ۹۴/۷  | ۹۴/۶        | ۹۶/۳        | ۹۵/۱۱        | ۰/۵۴%                   | ۱/۸۰%                  |
| ۵              | ۱۰۴/۸ | ۱۰۴/۹ | ۱۰۵/۵ | ۱۰۵/۹ | ۱۰۶/۱ | ۱۰۶/۷ | ۱۰۴/۸ | ۱۰۴/۸ | ۱۰۴/۸       | ۱۰۶/۷       | ۱۰۵/۴۴       | ۰/۶۱%                   | ۱/۸۱%                  |

جدول ۴. بررسی کارایی الگوریتم برای تابع هدف رضایت مشتری

| تابع هدف رضایت مشتری |       |       |       |       |       |       |       |       |             |             |              |                         |                        |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|--------------|-------------------------|------------------------|
| شماره مثال           | اجرا  |       |       |       |       |       |       |       |             |             | واریانس      | انحراف میانگین و بدترین | انحراف بهترین و بدترین |
|                      | ۱     | ۲     | ۳     | ۴     | ۵     | ۶     | ۷     | ۸     | بهترین جواب | بدترین جواب | میانگین جواب |                         |                        |
| ۱                    | ۹۰/۲  | ۹۰/۳  | ۹۰/۳  | ۹۰/۲  | ۹۰/۲  | ۹۰/۳  | ۹۰/۲  | ۹۰/۴  | ۹۰/۲        | ۹۰/۴        | ۹۰/۲۶        | ۰/۰۷%                   | ۰/۲۲%                  |
| ۲                    | ۹۹/۶  | ۹۹/۷  | ۹۹/۶  | ۹۹/۸  | ۹۹/۸  | ۹۹/۹  | ۹۹/۷  | ۹۹/۶  | ۹۹/۶        | ۹۹/۹        | ۹۹/۷۱        | ۰/۱۱%                   | ۰/۳۰%                  |
| ۳                    | ۱۲۵/۵ | ۱۲۵/۵ | ۱۲۵/۶ | ۱۲۵/۹ | ۱۲۵/۹ | ۱۲۵/۷ | ۱۲۵/۵ | ۱۲۵/۹ | ۱۲۵/۵       | ۱۲۵/۵       | ۱۲۵/۸۶       | ۰/۲۹%                   | ۰/۸۰%                  |
| ۴                    | ۱۴۳/۲ | ۱۴۳/۹ | ۱۴۳/۶ | ۱۴۳/۳ | ۱۴۳/۲ | ۱۴۳/۲ | ۱۴۳/۵ | ۱۴۳/۲ | ۱۴۳/۲       | ۱۴۳/۵       | ۱۴۳/۹۳       | ۰/۵۱%                   | ۱/۲۳%                  |
| ۵                    | ۱۶۸/۱ | ۱۶۸/۹ | ۱۶۸/۹ | ۱۶۸/۸ | ۱۷۲/۲ | ۱۶۸/۹ | ۱۶۸/۹ | ۱۶۸/۹ | ۱۶۸/۱       | ۱۷۲/۲       | ۱۶۹/۲۰       | ۰/۶۵%                   | ۲/۴۴%                  |

در بررسی پارامترهای الگوریتم نیز چند مثال تصادفی ایجاد و با الگوریتم NSGAII حل شده است و نتایج حاصل از آن در دو جدول بررسی مقدار پارامتر نرخ جهش و مقدار ارامتر نرخ جمعیت گردآوری شده است که به جهت محدودیت مطالب ارائه شده فقط تفسیر آن در ادامه آمده است. نتایج نشان می دهد نرخ جهش ۰/۲ می باشد که در تابع هدف هزینه مقدار ۷۳/۱، تابع هدف فاصله مقدار ۴۹/۱ و تابع هدف رضایت اجتماعی مقدار ۷۲/۲ در بهترین شرایط قرار دارند. همچنین، تعداد جمعیت بین ۱۰۰ تا ۱۵۰ دارای بهترین مقدار می باشد.

## مراجع

۱. پ. کعبی نژاد، ارائه مدل ریاضی چندهدفه در زنجیره تامین معکوس برای بهبود عملکرد رضایتمندی مشتری در خصوص عملیات سرویس دهی از بُعد جغرافیایی، ۵۵امین کنفرانس ریاضی ایران، مشهد، ایران، مرداد ۱۴۰۳.
2. Z. Lu, and N. Bostel, *A facility location model for logistics systems including reverse flows: The case of remanufacturing activities*, Comput. Oper. Res. **34** (2007), 299–323.
3. L. Ding, T. Wang, and P.W. Chan, *Forward and reverse logistics for circular economy in construction: A systematic literature review*, J. Cleaner Production. **388** (2023), no. 135981.
4. A.S. Butt, I. Ali, and K. Govindan, *The role of reverse logistics in a circular economy for achieving sustainable development goals: a multiple case study of retail firms*, Product. Plan. Control. (2023), 1–13.

## فصل ۴

# سایر شاخه های مرتبط با علوم ریاضی

## چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی ادغام دو گراف

محمد حسن آهنگرانی فراهانی\*؛ دانشجوی دکتری گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

mhafarahani@gmail.com

غلامحسین فتح‌تبار، عضو هیات علمی گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

fathtabar@kashanu.ac.ir

**چکیده:** فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  گراف‌های ساده با مجموعه راس‌های  $V_1$  و  $V_2$  و مجموعه یال‌های  $E_1$  و  $E_2$  باشند. با شناسایی دو خوشه  $C_1 \subseteq V_1$  و  $C_2 \subseteq V_2$  با مرتبه یکسان  $t$  و جایگزینی آنها با خوشه  $C^*$  ادغام دو گراف حاصل می‌گردد، که با نماد  $G_1 \circ_t G_2$  نمایش داده می‌شود. در صورتی که  $t$  برابر یک یا دو باشد، به ترتیب ادغام راسی و یالی گراف نامیده می‌شود.

فرض کنید  $A$  ماتریس مجاروت و  $D$  ماتریس قطری درجات گراف باشند، در این صورت ماتریس لاپلاسی یک گراف به صورت  $L = D - A$  تعریف می‌شود. چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی گراف به صورت  $\varphi(G) = \det(\mu I - L)$  تعریف می‌گردد. در این مقاله به بررسی چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی ادغام راسی و یالی دو گراف می‌پردازیم. **کلمات کلیدی:** ادغام گراف‌ها، ماتریس لاپلاسی، چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی

### ۱ مقدمه

فرض کنید  $G$  گراف ساده بدون علامت با مجموعه رئوس  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$  باشد. ماتریس  $A(G) = [a_{ij}]$  که به صورت زیر تعریف می‌گردد را ماتریس مجاروت گراف می‌نامند.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رئوس } v_i \text{ و } v_j \text{ مجاور باشند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرض کنید درجه راس  $i$ -ام گراف  $G$ ،  $d_i$  باشد، آنگاه ماتریس قطری درجات به صورت  $D(G) = \text{diag}[d_1, d_2, d_3, \dots, d_n]$  و ماتریس لاپلاسی به صورت  $L(G) = D(G) - A(G)$  تعریف می‌شوند. چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی گراف به صورت  $\varphi(G) = \det(\mu I - L(G))$  تعریف می‌گردد.

فرض کنید  $G_1 = (V_1, E_1)$  و  $G_2 = (V_2, E_2)$  دو گراف ساده و  $C_1 \subseteq V_1$ ،  $C_2 \subseteq V_2$  دو خوشه (زیرگراف کامل) با مرتبه یکسان  $t$  باشند، در این صورت با جایگزینی این  $t$  شه با یک خوشه مشترک  $C^*$ ، ادغام گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$

بدست می‌آید، که با نماد  $G = G_1 \circ_t G_2$  نمایش داده می‌شود. چنانچه  $t = 1$  ادغام حاصل را ادغام راسی گراف می‌نامند، در صورتی که  $t = 2$  به آن ادغام یالی دو گراف گویند. در این مقاله گراف کامل  $n$  راسی، ماتریس‌های همانی  $n \times n$  و صفر  $n \times m$  به ترتیب با  $I_n$  و  $O_{n \times m}$  نمایش داده می‌شود. لازم به ذکر است، چنانچه راس  $v$  از گراف  $G$  حذف شود، تمام یال‌های متصل به آن نیز حذف می‌شوند، که با نماد  $G_v$  نشان داده می‌شود. با حذف یال  $e$  از گراف  $G$  هیچ گونه تغییری در تعداد رئوس گراف به وجود نمی‌آید، این گراف با نماد  $G_e$  نشان داده می‌شود.

## ۲ نتایج

در این بخش به بررسی ارتباط چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی گراف ادغام یالی و راسی و چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی گراف‌های اولیه می‌پردازیم.

**قضیه ۱.۲.** فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف از مرتبه  $n_1, n_2$  و  $v_1 v_2 = e_1 \in E_1$  و  $v'_1 v'_2 = e_2 \in E_2$  باشند. چنانچه گراف حاصل از ادغام دو یال  $e_1$  و  $e_2$  را در نظر بگیریم، چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\varphi(G_1 \circ_e G_2) = \varphi(G_1)\varphi(G_{2e_2}) + \varphi(G_2)\varphi(G_{1e_1}) - \varphi(K_2)\varphi(G_{1e_1})\varphi(G_{2e_2})$$

**اثبات.** فرض کنید  $d(v_1) = d_1, d(v_2) = d_2, d(v'_1) = d'_1$  و  $d(v'_2) = d'_2$  باشند. در این صورت داریم

$$L(G_1 \circ_e G_2) = \begin{bmatrix} d_1 + d'_1 - 1 & -1 & V_1 & V'_1 \\ -1 & d_2 + d'_2 - 1 & V_2 & V'_2 \\ V_1^T & V_2^T & L(G_{1e_1}) & O_{n_1-2 \times n_2-2} \\ V_1'^T & V_2'^T & 0 & L(G_{2e_2}) \end{bmatrix}$$

درجایی که  $V_i$ ، بردارهای متناظر با راس‌های  $v_i$  برای  $i \in \{1, 2\}$  در  $G_1$  باشند و بردارهای  $V'_i$  نیز در  $G_2$  چنین تعریف شوند. در نتیجه  $\varphi(G_1 \circ_e G_2)$  به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{vmatrix} \mu - (d_1 + d'_1 - 1) & -1 & V_1 & V'_1 \\ -1 & \mu - (d_2 + d'_2 - 1) & V_2 & V'_2 \\ V_1^T & V_2^T & \mu I_{n_1-2} - L(G_{1e_1}) & O_{n_1-2 \times n_2-2} \\ V_1'^T & V_2'^T & O_{n_2-2 \times n_1-2} & \mu I_{n_2-2} - L(G_{2e_2}) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \mu - d_1 & -1 & V_1 & 0 \\ -1 & \mu - d_2 & V_2 & 0 \\ V_1^T & V_2^T & \mu I_{n_1-2} - L(G_{1e_1}) & O_{n_1-2 \times n_2-2} \\ V_1'^T & V_2'^T & O_{n_2-2 \times n_1-2} & \mu I_{n_2-2} - L(G_{2e_2}) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -d'_1 + 1 & 0 & 0 & V'_1 \\ 0 & -d'_2 + 1 & 0 & V'_2 \\ V_1^T & V_2^T & \mu I_{n_1-2} - L(G_{1e_1}) & O_{n_1-2 \times n_2-2} \\ V_1'^T & V_2'^T & O_{n_2-2 \times n_1-2} & \mu I_{n_2-2} - L(G_{2e_2}) \end{vmatrix}$$

لذا با استفاده از قوانین دترمینان ماتریس و تعریف چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی گراف عبارت فوق به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{aligned} \varphi(G_1 \circ_e G_2) &= \varphi(G_1)\varphi(G_{2e_2}) + \\ &\begin{vmatrix} \mu - d'_1 & -1 & 0 & V'_1 \\ -1 & \mu - d'_2 & 0 & V'_2 \\ V_1^T & V_2^T & \mu I_{n_1-2} - L(G_{1e_1}) & O_{n_1-2 \times n_2-2} \\ V_1'^T & V_2'^T & O_{n_2-2 \times n_1-2} & \mu I_{n_2-2} - L(G_{2e_2}) \end{vmatrix} - \\ &\begin{vmatrix} \mu - 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \mu - 1 & 0 & 0 \\ V_1^T & V_2^T & \mu I_{n_1-2} - L(G_{1e_1}) & O_{n_1-2 \times n_2-2} \\ V_1'^T & V_2'^T & O_{n_2-2 \times n_1-2} & \mu I_{n_2-2} - L(G_{2e_2}) \end{vmatrix} = \\ &= \varphi(G_1)\varphi(G_{2e_2}) + \varphi(G_2)\varphi(G_{1e_1}) - \varphi(K_2)\varphi(G_{1e_1})\varphi(G_{2e_2}) \end{aligned}$$

□

**قضیه ۲.۲.** فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف از مرتبه  $n_1, n_2$  و  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$  باشند. چنانچه گراف حاصل از ادغام دو راس  $v_1$  و  $v_2$  را در نظر بگیریم، چند جمله‌ای مشخصه لاپلاسی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\varphi(G_1 \circ_v G_2) = \varphi(G_1)\varphi(G_{2v_2}) + \varphi(G_2)\varphi(G_{1v_1}) - \mu\varphi(G_{1v_1})\varphi(G_{2v_2})$$

□

اثبات. با استفاده از تکنیک معرفی شده در قضیه (۱.۲) و [۵] به آسانی اثبات می‌گردد.

## مراجع

- [1] Biggs N. *Algebraic graph theory*. Cambridge university press; 1993.
- [2] F.M. Dong, K. M. Koh, and K. L. Teo, *Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs*, World Scientific Publishing, 2005
- [3] Hoffman, K. Kunze, R. *Linear Algebra*. India: Prentice-Hall, 1971.
- [4] Jog, S. R., Kotambari, R. *On the adjacency, Laplacian, and signless Laplacian spectrum of coalescence of complete graphs*. Journal of Mathematics, 2016.
- [5] Najiya VK, Chithra AV. A study on k-coalescence of two graphs. Le Matematiche. 2023;78(2):317-35.

# برآورد بیزی E-MSE و توزیع پاره تو دو پارامتری تحت تابع زیان های مختلف

نسرین بلوچ رودباری\*، عضو هیات علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

N\_roodbary@pnu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله برآورد E-MSE - بیزی توزیع پاره تو تحت تابع زیان های مختلف با یک هایپرپارامتر را بررسی می کنیم. E-MSE یعنی امید میانگین مربع خطا را براساس برآورد E - بیزی و فرمول های آن ها را براساس توزیع پیشین مزدوج تحت تابع زیان های مربع خطا، مربع خطای وزنی و پیشگیرانه تعریف می کنیم. در نهایت شبیه سازی مونت کارلو را برای بکار می بریم. **کلمات کلیدی:** برآورد E - بیزی، E-MSE، توزیع پاره تو، شبیه سازی مونت کارلو، تابع زیان.

## ۱ مقدمه

تابع چگالی احتمال (pdf) توزیع پاره تو دوپارامتری بصورت زیر می باشد:

$$f(x) = \lambda \alpha^\lambda x^{-(\lambda+1)} \quad \lambda > 0 \quad 0 < \alpha \leq x \quad (1)$$

که  $\lambda$  پارامتر شکل و  $\alpha$  پارامتر مقیاس است.

برای توزیع پاره تو، پارامتر مقیاس  $\alpha$  حداقل مقدار ممکن از همه مقادیر است یا اگر بخواهیم آن را بصورت دیگری برآورد کنیم (مثلا، برآورد ماکسیمم درستنمایی آن) نیز حداقل مقدار ممکن از همه مقادیر است. هنگامی که این توزیع به عنوان مدل توزیع های ثروت بکار می رود، پارامتر شکل  $\lambda$  شاخص پاره تو نامیده می شود. اگر  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مشاهدات نمونه توزیع پاره تو (۱) باشند، تحت این شرط که  $\alpha$  معلوم است، تابع درستنمایی می شود:

$$l(x | \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda \alpha^\lambda x_i^{-(\lambda+1)} \propto \lambda^n \exp(-\lambda T) \quad (2)$$

$$T = \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \alpha)$$

روش های بیزی در استنباط آماری وابسته به انتخاب توزیع پیشین و تابع زیان هستند. اما پارامترهای توزیع پیشین ممکن است وابسته به هایپرپارامترها باشند. در این حالت، ما اغلب از روش بیزی سلسله مراتبی استفاده می کنیم. عبارت دیگر، انتخاب تابع زیان در روش های بیزی مهم است. همچنین در استنباط بیزی بیشتر از تابع زیان مربع خطا

استفاده می شود. این تابع زیان متقارن است و برای کم برآوردی و بیش برآوردی وزن یکسانی را در نظر می گیرد. تابع زیان پیشگیرانه اولین بار توسط زلنر معرفی شد. [۱۵]

ویژگی های ریاضی توزیع لیندلی براساس روش بیزی تحت توابع زیان های مختلف توسط یوسف زاده [۱۴] و علی ، اسلام و کاظمی [۱] که شامل تابع زیان مربع خطا، تابع زیان مربع خطای وزنی ، تابع زیان پیشگیرانه ، تابع زیان مربع خطای اصلاح شده، تابع زیان الگوریتمی، تابع زیان آنتروپی و تابع زیان  $k$ -میشد را بررسی کردند.

اخیرا، چند روش برآورد  $E$  - بیزی ارائه شده است. مانند برآورد  $E$ -بیزی فازی و برآورد  $E$  -بیزی گاوسی. ( قلی زاده، باراهانا و خلیل پور [۲] ، ریاد، یونس و الغدیر [۱۳]). درباره تحقیقات مربوط به برآوردهای بیزی- $E$  می توان به هان [۴] و [۵] و [۶] ، جیهان و اکاشا [۹] ، اکاشا [۱۱] ، اکاشا و وانگ [۱۲] رجوع نمود. در تحقیق های موجود روش بیزی سلسله مراتبی با روش  $E$  -بیزی مقایسه شده اند. در چارچوب بیزی، قانون بیز با در نظر گرفتن یک توزیع پیشین خاص برای پارامتر مورد نظر بررسی می گردد اما در عمل، استفاده از یک پیشین خاص با هایپرپارامترهای خاص، بحث برانگیز است. مخصوصا، زمانی که مساله توسط چند آماردان بررسی می شود ممکن است آن ها پیشین های یکسانی را استفاده کنند اما ممکن است از هایپرپارامترهای متفاوتی استفاده کنند. از این رو برآورد  $E$  -بیزی روباست تر از برآوردهای بیزی است. ( کریم زاده و مرادی [۱۰]).

هان [۶] برآوردهای  $E$  -بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامترهای توزیع پاره تو را تحت توابع زیان مختلف مطالعه کرد. برآوردهای  $E$  -بیزی را هم برای هر دو پارامتر و هم با معلوم در نظر گرفتن پارامتر مقیاس فرمول بندی کرد. در این مقاله بخش های زیر ارائه شده است.

در بخش ۲، براساس تعریف برآورد  $E$  -بیزی ، تعریفی برای  $E$ -MSE ارائه شده است. در بخش ۳، برآورد بیزی تحت توابع زیان مختلف داده شده است. در بخش ۴، فرمول های برآورد بیزی- $E$  تحت همان توابع زیان به ترتیب داده شده است. در بخش ۵، فرمول های  $E$ -MSE به ترتیب محاسبه شده است. در بخش ۶، نتیجه گیری آورده شده است.

## ۲ تعریف برآورد $E$ -بیزی و $E$ -MSE متناظر با آن

### ۱.۲ تعریف برآورد $E$ -بیزی $\lambda$

در توزیع پاره تو (۱)، اگر برای  $\lambda$  توزیع پیشین مزدوج گاما  $(a, b)$  را در نظر بگیریم، آنگاه تابع چگالی احتمال آن می شود:

$$\pi(\lambda | a, b) = \frac{b^a \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda)}{\Gamma(a)} \quad \lambda > 0$$

که  $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$  تابع گاما و هایپرپارامترهای آن  $a > 0$  و  $b > 0$  هستند. طبق تعریف هان [۳] ،  $a, b$  را باید طوری انتخاب کنیم که مطمئن شویم  $\pi(\lambda a, b)$  تابعی نزولی از  $\lambda$  است. مشتق  $\pi(\lambda a, b)$  نسبت به  $\lambda$  برابر است با:

$$\frac{d\pi(\lambda | a, b)}{d\lambda} = \frac{b^a \lambda^{a-2} \exp(-b\lambda)}{\Gamma(a)} [(a-1) - b\lambda]$$

با توجه به اینکه  $b > 0, a > 0, \lambda > 0$ ، انتخاب  $b > 0, 0 < a \leq 1$  منجر به نزولی شدن  $\pi(\lambda a, b)$  می شود. هنگامی که  $a = 1$  باشد نیز  $\pi(\lambda a, b)$  تابع نزولی از  $\lambda$  است.

اگر  $a = 1$  و  $b$  بزرگتر باشد، تابع چگالی توزیع گاما دم کلفت تر می شود. برای بررسی کردن روپاست بودن برآورد بیزی، توزیع پیشین دم کلفت تر اغلب روپاست بودن برآورد بیزی را کاهش می دهد. بهمین منظور،  $b$  نمی تواند بزرگتر از کران بالای  $c$  باشد که  $c$  یک ثابت از پیش تعیین شده است. ممکن است دامنه های پیرامترها بین  $0 < b < c$  باشد. در این مقاله، ما فقط موردی را در نظر می گیریم که  $a = 1$  باشد. در این صورت تابع چگالی احتمال  $\lambda$  می شود:

$$\pi(\lambda | b) = b \exp\{-b\lambda\}, \quad \lambda > 0 \quad (3)$$

**تعریف ۱:** با توجه به برآورد بیزی  $\hat{\lambda}_B(b)$  برای توزیع های پیوسته داریم:

$$\hat{\lambda}_{EB}(b) = \int_D \hat{\lambda}_B(b) \pi(b) db$$

$\hat{\lambda}_{EB}$  را برآورد  $E$  - بیزی پارامتر  $\lambda$  ( بطور خلاصه برآورد  $E$  - بیزی اما در واقع امید ریاضی برآورد بیزی ) می نامیم که  $b$  با دامنه  $D$  و متناهی است.  $\hat{\lambda}_B(b)$  برآورد بیزی  $\lambda$  با هایپرپارامتر  $b$  و  $\pi(b)$  تابع چگالی  $b$  روی  $D$  می باشد. بنابراین،

$$\hat{\lambda}_{EB}(b) = \int_D \hat{\lambda}_B(b) \pi(b) db = E [\hat{\lambda}_B(b)] \quad (4)$$

امید برآورد بیزی برای هایپر پارامتر است. [۴]

### ۳ تعریف E-MSE برای $\hat{\lambda}_{EB}$

بعد از محاسبه برآورد بیزی، خطای برآورد معمولاً با استفاده از MSE محاسبه می گردد. خطای برآورد برای  $E$  - بیزی را با E-MSE نشان داده و بصورت زیر تعریف می شود:

**تعریف ۲:** با استفاده از تعریف  $\text{MSE} [\hat{\lambda}_B(b)]$  برای توزیع پیوسته داریم:

$$E - \text{MSE} (\hat{\lambda}_{EB}) = \int_D \text{MSE} [\hat{\lambda}_B(b)] \pi(b) db = E [\text{MSE} (\hat{\lambda}_B(b))] \quad (5)$$

### ۴ برآورد بیزی تحت چند تابع زیان

برطبق علی، اسلام و کاظمی [۱]، لم ۱ را تعریف می کنیم.

لم ۱: برای توزیع پیشین پارامتر  $\lambda$

(i) اگر تابع زیان مربع خطا (SELF) را داشته باشیم، یعنی  $L_1(\lambda, \delta) = (\lambda - \delta)^2$ ، برآورد بیزی  $\lambda$  می شود:

$$\hat{\lambda}_{B_1}(x) = E(\lambda | x)$$

(ii) اگر تابع زیان مربع خطای وزنی (WSELF) را داشته باشیم، یعنی  $L_2(\lambda, \delta) = \frac{(\lambda - \delta)^2}{\lambda}$ ، برآورد بیزی  $\lambda$  می شود:

$$\hat{\lambda}_{B_2}(x) = [E(\lambda^{-1} | x)]^{-1}$$

(iii) اگر تابع زیان سختگیرانه (PLF) را داشته باشیم، یعنی  $L_3(\lambda, \delta) = \frac{(\lambda - \delta)^2}{\delta}$ ، برآورد بیزی  $\lambda$  می شود:

$$\hat{\lambda}_{B_3}(x) = \sqrt{E(\lambda^2 | x)}$$

## ۵ برآورد E - بیزی $\lambda$

**قضیه ۱:** فرض کنید  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مشاهدات نمونه‌ای از توزیع پاره‌تو (۱) باشد. با استفاده تابع درستنمایی (۲) و تابع چگالی پیشین (۳)، تابع چگالی احتمال  $b$  یعنی  $\pi(b)$  را چنین تعریف می کنیم:

$$\pi(b) = \frac{1}{c}, \quad 0 < b < c \quad (۴)$$

و نتایج زیر را خواهیم داشت:

(i) اگر تابع زیان مربع خطا (SELF) را داشته باشیم، برآورد بیزی  $\lambda$  می شود:

$$\hat{\lambda}_{B_1}(b) = \frac{n+1}{T+b}$$

و برآورد E - بیزی متناظر با آن

$$\hat{\lambda}_{EB_1} = \frac{n+1}{c} \ln \left( 1 + \frac{c}{T} \right)$$

(ii) اگر تابع زیان مربع خطای وزنی (WSELF) را داشته باشیم، برآورد بیزی  $\lambda$  می شود:

$$\hat{\lambda}_{B_2}(b) = \frac{n}{T+b}$$

و برآورد E - بیزی متناظر با آن

$$\hat{\lambda}_{EB_2} = \frac{n}{c} \ln \left( 1 + \frac{c}{T} \right)$$

(iii) اگر تابع زیان سختگیرانه (PLF) را داشته باشیم، برآورد بیزی  $\lambda$  می شود:

$$\hat{\lambda}_{B_3}(b) = \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{T+b}$$

و برآورد E - بیزی متناظر با آن

$$\hat{\lambda}_{EB_3} = \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{c} \ln \left( 1 + \frac{c}{T} \right)$$

□

اثبات. هان [۸]

## ۶ E-MSE برآورد E – بیزی

**قضیه ۲:** فرض کنید  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مشاهدات نمونه‌ای از توزیع پاره‌تو (۱) باشد. با استفاده تابع درستنمایی (۲) و تابع چگالی پیشین (۳) و تابع چگالی احتمال  $b$  یعنی  $\pi(b)$  (۴)، خواهیم داشت:

(i) با استفاده از تابع زیان مربع خطا (SELF)، MSE برآورد بیزی  $\hat{\lambda}_{B_1}(b)$  می‌شود:

$$\text{MSE}(\hat{\lambda}_{B_1}(b)) = \frac{n+1}{(T+b)^2}$$

E-MSE برآورد E – بیزی متناظر با آن

$$E - \text{MSE}(\hat{\lambda}_{EB_1}) = \frac{n+1}{T(T+c)}$$

(ii) با استفاده از تابع زیان مربع خطای وزنی (WSELF)، MSE برآورد بیزی  $\hat{\lambda}_{B_2}(b)$  می‌شود:

$$\text{MSE}(\hat{\lambda}_{B_2}(b)) = \frac{n+2}{(T+b)^2}$$

برآورد E-MSE E – بیزی متناظر با آن

$$E - \text{MSE}(\hat{\lambda}_{EB_2}) = \frac{n+2}{T(T+c)}$$

(iii) با استفاده از تابع زیان سختگیرانه (PLF)، MSE برآورد بیزی  $\hat{\lambda}_{B_3}(b)$  می‌شود:

$$\text{MSE}(\hat{\lambda}_{B_3}(b)) = \frac{2(n+1)[(n+2) - \sqrt{(n+2)(n+1)}]}{(T+b)^2}$$

برآورد E-MSE E – بیزی متناظر با آن

$$E - \text{MSE}(\hat{\lambda}_{EB_3}) = \frac{2(n+1)[(n+2) - \sqrt{(n+2)(n+1)}]}{T(T+c)}$$

□

اثبات. هان [۸]

## ۷ نتیجه گیری



۱. براساس مقایسات شبیه سازی ارائه شده در هان [۸] نتایج زیر بدست آمده اند:

$$E - \text{MSE}(\hat{\lambda}_{EB_1}) < E - \text{MSE}(\hat{\lambda}_{EB_3}) < E - \text{MSE}(\hat{\lambda}_{EB_2}) \quad i = 1, 2, 3$$

۲. براساس توابع زیان مختلف برآوردها با افزایش  $n$  بهتر شده اند.

۳. برای  $n$  های یکسان و  $c$  های متفاوت مقادیر برآورد  $E - \text{MSE}$  و بیزی و  $E - \text{MSE}$  آن ها رو باست هستند.

## مراجع

- [1] Ali, S., M. Aslam, and S. M. A. Kazmi. 2013. A study of the effect of the loss function on Bayes estimate, posterior risk and hazard function for Lindley distribution. *Applied Mathematical Modelling* 37 (8):6068–78. doi:10.1016/j.apm.2012.12.008.
- [2] Gholizadeh, R., M. J. P. Barahona, and M. Khalilpour. 2016. Fuzzy E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimations on the Kumaraswamy distribution using censoring data. *International Journal of Fuzzy System Applications* 5 (2):74–95. doi:10.4018/IJFSA.2016040106.
- [3] Han, M. 1997. The Structure of hierarchical prior distribution and its applications. *Chinese Operations Research and Management Science* 6 (3):31–40.
- [4] Han, M. 2009. E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied Mathematical Modelling* 33 (4):1915–22. doi:10.1016/j.apm.2008.03.019.
- [5] Han, M. 2011. E-Bayesian estimation of the reliability derived from binomial distribution. *Applied Mathematical Modelling* 35 (5):2419–24. doi:10.1016/j.apm.2010.11.051.
- [6] Han, M. 2015. Bayesian statistics and its applications. Shanghai: Tongji University Press. Han, M. 2017. The E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimations of Pareto distribution parameter under different loss functions. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 87 (3): 577–93. doi:10.1080/00949655.2016.1221408.
- [7] Han, M. 2018. E-Bayesian estimation and its E-MSE under the scaled squared error loss function, for exponential distribution as example. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* :1. <https://doi.org/10.1080/03610918.2018.1425444> doi:10.1080/03610918.2018. 1425444.
- [8] Han, M. (2019): E-Bayesian estimations of parameter and its evaluation standard: E-MSE (expected mean square error) under different loss functions, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, DOI: 10.1080/03610918.2019.1589510 1425444.



- [9] Jaheen, Z. F., and H. M. Okasha. 2011. E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring. *Applied Mathematical Modelling* 35 (10):4730–7. doi:10.1016/j.apm.2011.03.055.
- [10] Karimnezhad, A., and F. Moradi. 2016. Bayes, E-Bayes and robust Bayes prediction of a future observation under precautionary prediction loss functions with applications. *Applied Mathematical Modelling* 40 (15–16):7051–61. doi:10.1016/j.apm.2016.02.040.
- [11] Okasha, H. M. 2014. E-Bayesian estimation for the Lomax distribution based on type-II censored data. *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 22 (3):489–95. doi:10.1016/j.joems.2013.12.009.
- [12] Okasha, H. M., and J. Wang. 2016. E-Bayesian estimation for the geometric model based on record statistics. *Applied Mathematical Modelling* 40 (1):658–70. doi:10.1016/j.apm.2015.05.004.
- [13] Reyad, H. M., A. M. Younis, and A. A. Alkheldir. 2016. Quasi-E-Bayesian criteria versus quasiBayesian, quasi-hierarchical Bayesian and quasi-empirical Bayesian methods for estimating the scale parameter of the Erlang distribution. *International Journal of Advanced Statistics and Probability* 4 (1):62–74. doi:10.14419/ijasp.v4i1.6095.
- [14] Yousefzadeh, F. 2017. E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimations for the system reliability parameter based on asymmetric loss function. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 46 (1):1–8. doi:10.1080/03610926.2014.968736.
- [15] Zellner, A. 1994. Bayesian and Non-Bayesian estimation using balanced loss functions. In *Statistical decision theory and methods V*, eds. J.O. Berger and S.S. Gupta, 337–390. New York: Springer-Verlag.



## بررسی تاثیر باورهای معرفت شناسی مکاتب فلسفه ریاضی در طراحی روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی

سعید پناهیان فرد<sup>۱</sup> \*

<sup>۱</sup> عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

Email: s.panahianfard@pnu.ac.ir

چکیده. یکی از مباحث مهم در فلسفه آموزش ریاضی تبیین نحوه ارتباط فلسفه ریاضی با آموزش ریاضی است. ادبیات موضوع مورد پژوهش نشان می‌دهد که مطالعات اندکی در داخل کشور در مورد تاثیر فلسفه ریاضی بر آموزش ریاضی انجام شده است. در این پژوهش نشان خواهیم داد که باورهای معرفت شناسی مکاتب فلسفه ریاضی می‌تواند در انتخاب روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی نقش بسیار مهمی ایفا کنند. ابتدا، بر دیدگاهها و نظریات مهمترین مکاتب فلسفه ریاضی خواهیم داشت. سپس تاثیر این مکاتب فلسفه ریاضی در طراحی روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی را بررسی می‌کنیم. روش پژوهش ما بر مبنای جمع آوری منابع و اسناد علمی انجام پذیرفته است. نتایج این پژوهش می‌تواند به عنوان راهبردی موثر و مفید برای مدرسان ریاضی در انتخاب روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی تلقی شود. **واژه‌های کلیدی:** فلسفه آموزش ریاضی، مکاتب فلسفه ریاضی، ذهنیت فلسفی، برنامه درسی ریاضی، روش تدریس ریاضی. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]:** 97D40, 97D30, 97D20.

### ۱. مقدمه

اغلب ما مدرسان ریاضی با این سوال های بنیادین مواجه هستیم که ریاضی به چه دردی می خورد (جلوداری مقانی، ۱۴۰۱)، جهت گیری آموزش ریاضی در مدارس و دانشگاه‌های ما چگونه باید انجام شود (آرین نژاد، ۱۳۹۵)، آیا این جهت گیری می‌تواند به درک، تفسیر و توصیف از جهان پیرامون ما منجر شود. برای تحقق این جهت گیری‌ها انتخاب روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی امری ضروری است (صالحی، ۱۴۰۲). در واقع از آنجا که روش تدریس به فرایندهای تدریس و یادگیری که طی آن فراگیر با مهارتهایی که در برنامه درسی گنجانیده شده است اطلاق می‌شود؛ اگر فعالیتی منجر به یادگیری نشود روش تدریس محسوب نمی‌شود (حقانی و دیگری، ۱۳۸۹). می‌دانیم که در جریان تدریس رعایت سه نکته لازم و ضروری است. اول داشتن هدف آموزشی، دوم روش تدریس متناسب با هدف آموزشی، و سوم تطابق روش تدریس با فهم و توانایی فراگیر. بنابراین مدرس ریاضی باید با چگونگی فرایند یادگیری ریاضی آشنا باشد. یعنی بفهمد وقتی که یک فراگیر در تلاش است تا یک مفهوم ریاضی را بفهمد چه نوع فعالیتی در ذهن او رخ می‌دهد. هر چه با فرایند یادگیری آشنایی داشته باشد بهتر می‌تواند رهیافت مناسب آموزشی خود را اتخاذ کند. مدرس ریاضی برای آموزش یک مفهوم باید در کلاس درس ساز و کار مشخص و متناسبی با ساختار ذهنی فراگیر بکارگیرد. به بیان دیگر مدرس ریاضی در فرایند آموزش باید به فراگیر کمک کند تا فرایند هضم و جذب ریاضی را که با آن مواجه شده است در ساختار ذهنی خود فراهم سازد. باید گفت علم آموزش علم ریاضی هم‌تراز با خود علم ریاضی رشد نکرده است. یکی از مباحث مهم در آموزش ریاضی

\* سخنران.

موضوع فلسفه آموزش ریاضی است. در نظام آموزشی اغلب شاهد عدم تناسب محتوای ریاضی و روش تدریس آن با نیازهای فراگیران هستیم. عدم آگاهی مدرسان ریاضی از مبانی مکاتب فلسفه ریاضی را می توان از جمله عوامل موثر در عدم تناسب روش تدریس با محتوای آموزش ریاضی دانست. این مساله در حوزه فلسفه آموزش ریاضی است. این حوزه ترکیبی از آموزش ریاضی و فلسفه ریاضی است. بنابراین آشنایی با فلسفه ریاضی امری ضروری است. خود کلمه فلسفه از ترکیب دو کلمه فیلیا به معنی دوستی و کلمه سوفیا به معنی خرد و اندیشه است. بنابراین معنی فلسفه دوستدار خرد و اندیشه است. فلسفه ریاضی از هستی، چیستی و ماهیت ریاضی صحبت می کند. دست یافتن به یک دیدگاه واحد در فلسفه ریاضی امری دشوار و غیر ممکن به نظر می رسد. بطور دقیق تر می توان گفت مکاتب فلسفه ریاضی درباره موضوعاتی از قبیل مفاهیم پایه، اصول بنیادی ریاضی، ماهیت گزاره ها، رابطه ریاضی با علوم دیگر بحث می کنند. به طور دقیق تر مباحث فلسفه ریاضی را می توان بر مبنای هفت مبحث جداگانه دسته بندی کرد. این مباحث عبارتند از: روانشناسی فلسفی، معرفت شناسی، وجود شناسی، روش شناسی، زبان شناسی، انسان شناسی و ارتباط ریاضی با سایر علوم. اکنون بعضی از معیارهای معرفت شناسی را معرفی می کنیم. این معیارها عبارتند از: عقیده به ساده بودن دانش، عقیده به مطلق انگاری دانش، ذاتی دانستن توانایی یادگیری، یادگیری سریع بدون فعالیت ذهنی (داوود ناصری و همکارانش، ۱۳۹۵).

از آنجا که ریاضی به طور ذاتی مقوله ای پیچیده و با ابعاد متعدد است (حق وردی، ۱۴۰۱)، لازم است مکاتب فلسفه ریاضی با دقت زیادی مورد تحلیل و بررسی قرار گیرند تا بتوان نحوه تاثیر آنها بر آموزش ریاضی را مشخص کرد. می توان گفت در گذر زمان با دو رویکرد پیشینی و پسینی در مکاتب فلسفه ریاضی مواجه هستیم. رویکرد پیشینی شامل دیدگاه افلاطون گرایان، صورت گرایان، منطق گرایان و شهودگرایان می باشد. طرفداران این رویکرد از منطقی بودن و قیاسی بودن ریاضی صحبت می کنند. در دهه ۶۰ و ۷۰ میلادی منطق گرایی تحت عنوان ریاضیات جدید برای محور کردن برهان در آموزش ریاضی مطرح شد. افراط در رویکرد پیشینی بخصوص دیدگاه منطق گرایی در برنامه درسی ریاضی منجر به ظهور رویکرد پسینی شد. رویکرد پسینی شامل دیدگاه تجربه گرایان، عمل گرایان و انسان گرایان است. طرفداران این رویکرد از تجربی بودن ریاضی در حل مساله صحبت می کنند. با این رویکرد برنامه درسی ریاضی مبتنی بر رویکرد تجربی در ریاضی خواهد بود. سپس توسط لاکاتوش شاگرد پولیا رویکرد شبه تجربه گرایی مطرح شد. از دیدگاه این مکتب ریاضیدان برهان خود را به صورت حدس مطرح می کند و سپس به کمک مثال نقض به آزمون آن می پردازد. در قسمت بعد مروری بر پیشینه پژوهش در حوزه تاثیر گذاری ذهنیت فلسفی بر آموزش و یادگیری خواهیم داشت.

## ۲. پیشینه پژوهش، بیان مساله و روش تحقیق

در مبحث تاثیر ذهنیت فلسفی در آموزش و یادگیری مطالعات بسیار کمی انجام گرفته است. در مطالعه ای بهرنگی و همکارش (۱۳۹۴) نشان دادند که مکاتب فلسفه تربیت با الگوی مدیریت آموزشی می توانند بر یادگیری خود راهبری دانشجویان تاثیر مثبت داشته باشند. محمدی پویا و همکارانش (۱۳۹۸) نشان دادند که فلسفه های آموزشی با رویکردهای تدریس دانشجو معلمان رابطه دارند. سلیمانی (۱۴۰۲) نشان داده است که ذهنیت فلسفی معلمان در نحوه آموزش و تدریس آنان در کلاس درس موثر است.

همین طور در مبحث تاثیر ذهنیت فلسفی در آموزش ریاضی هم تحقیقات معدودی انجام گرفته است. سخنور و همکارش (۱۳۸۹) مطالعه ای در مورد رابطه ذهنیت فلسفی و نگرش به روش های تدریس فعال در میان معلمان ریاضی مقطع راهنمایی انجام دادند. احمدپور و همکارانش (۱۳۹۲) شیوه آموزش ریاضی مبتنی بر افلاطون گرایی را مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه دیگری مرادی و همکارانش (۱۳۹۸) تاثیر مکاتب فلسفه ریاضی را بر آموزش بررسی کردند. فلاحان و همکارانش (۱۳۹۹) مطالعه ای در مورد تبیین چگونگی تاثیر گذاری ذهنیت فلسفی بر بهبود آموزش حل مساله انجام دادند. خراسانی نژاد و همکارانش (۱۴۰۰) نشان دادند که فلسفه و آموزش ریاضی بر یکدیگر تاثیر گذارند.

فلسفه ریاضی مقصد و هدف را در ریاضی تبیین می کند، و آموزش ریاضی ابزاری است که نحوه انتخاب روش تدریس و محتوای متناسب با آن را برای رسیدن به مقصد و هدف فراهم می سازد. اگر مدرس ریاضی نتواند رابطه بین فلسفه ریاضی و آموزش ریاضی را درک کند به معنای واقعی یک مدرس ریاضی نیست. برای تبیین رابطه بین فلسفه ریاضی و آموزش ریاضی در این پژوهش قصد داریم به بررسی تاثیر معرفت شناختی مکاتب فلسفه ریاضی بر آموزش ریاضی از نقطه نظر انتخاب روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی بپردازیم. روش تحقیق و پژوهش ما بر مبنای جمع آوری منابع و اسناد علمی در این زمینه است.

### ۳. معرفی مهمترین مکاتب فلسفه ریاضی

در این بخش به ترتیب سیر تاریخی مهمترین مکاتب فلسفه ریاضی یعنی مکتب افلاطونی، مکتب منطق‌گرایی، مکتب صورت‌گرایی، مکتب شهودگرایی و مکتب انسان‌گرایی را مرور می‌کنیم (شهشهانی، ۱۳۹۵).

نخستین مکتب فلسفه ریاضی که در اینجا معرفی می‌کنیم مکتب افلاطون‌گرایی است که توسط افلاطون و فیثاغورث معرفی شد (علوی نیا، ۱۳۸۱). در دیدگاه این مکتب مفاهیم ریاضی خارج از ذهن انسان و دنیای مادی است و در عالم مثل به صورت ازلی و ابدی وجود دارند. از دیدگاه این مکتب یک ریاضیدان مبدع ریاضی نیست بلکه مانند دانشمندان علوم تجربی حقایق علمی را کشف می‌کند. قصد این مکتب استفاده از ریاضی برای ساخت آرمانشهر است. افلاطون آموزش ریاضی را برای تعالی روح هر متعلمی ضروری می‌دانست.

دومین مکتب فلسفه ریاضی که معرفی می‌کنیم مکتب منطق‌گرایی بود که توسط لاینینتز مطرح شد. ریاضیدانان دیگری همچون ددکیند، فرگه، پئانو، راسل و وایتهد با استفاده نمادگرایی منطقی به بیان قضایای ریاضی پرداختند. منطق‌گرایی عبارت است از فروکاستن مفاهیم و قضایای ریاضی به مفاهیم و قضایای منطقی (مقدم حیدری، ۱۳۹۲). ایراد وارد بر این مکتب این است که شهود و فعالیت‌های غیر رسمی ریاضی محدود می‌شود. برای آشنایی کامل با دیدگاه منطق‌گرایی می‌توان به کتاب اصول ریاضیات نوشته وایتهد و راسل اشاره کرد. امروزه دیدگاه این مکتب در فروگاهی ریاضی به منطق امری بیهوده تلقی می‌شود.

سومین مکتب فلسفه ریاضی که معرفی می‌کنیم مکتب صورت‌گرایی است که توسط هیلبرت معرفی شد. او سعی بر ساخت ریاضی به صورت اصل موضوعی داشت (منیری، ۱۳۹۷). منظور از ریاضی به روش اصل موضوعی انتخاب یک دستگاه منطقی که دارای قوانین و شیوه‌های استنتاج است. این دستگاه دارای تعدادی اصل موضوع هم هست و همچنین دارای تعدادی عبارت تعریف نشده که به کمک اصطلاحات بکار رفته در دستگاه منطقی تعریف می‌شود. جهت‌گیری بسیاری از ریاضیدانان در تحقیقات خود دیدگاه صورت‌گرایی را تقویت کرده‌است. پیروان این مکتب معتقدند که هیچ مفهوم ریاضی در خارج ذهن انسان وجود ندارد و این مفاهیم صرفاً زائیده ذهن انسان روی کاغذ هست. از نظر ایشان ریاضیات تعدادی اصل، تعریف و نماد است که طبق قوانین خاصی باید با آنها بازی کرد. از جمله ایرادات این مکتب این است که درباره این که ریاضی از کجا می‌آید ابراز نظری نمی‌کند.

چهارمین مکتب فلسفه ریاضی را که معرفی می‌کنیم مکتب شهودگرایی است که توسط بروئر بنیانگذاری شد (مقدم حیدری، ۱۳۸۶). در دیدگاه این مکتب ماهیت ریاضی هم از دایره محسوسات و هم از روابط منطقی خارج است، در واقع فرایند ساخت ریاضی حاصل فعالیت ذهن انسان بر اساس شهود است (حقیری، ۱۳۸۶). بطور مثال مفاهیم اعداد به علت وجود درک مفاهیم تناسب، هماهنگی، جز و کل، و ترتیب در ذهن انسان ساخته می‌شود. از جمله انتقاداتی که به دیدگاه شهودگرایی وارد شده است این است که شهود امری فراگیر و کلی نیست.

پنجمین مکتب فلسفه ریاضی را که معرفی می‌کنیم مکتب انسان‌گرایی است (رهبرنیا و همکارش، ۱۳۸۲). این مکتب در تلاش است که ریاضی را به عنوان یک محصول فرهنگی حاصل از تعاملات زندگی بشر معرفی کند. این مکتب ریاضی را به مانند زبانی در نظر می‌گیرد که توانسته است مورد توافق جوامع انسانی قرار بگیرد. ریاضی همانند علوم تجربی در نظر گرفته می‌شود که از طریق تصحیح و بازسازی خطاها و اشتباه رشد می‌کند. در این دیدگاه انسان جنبه‌های مختلف زندگی خود را در قالب الگوهای ریاضی وارد می‌کند تا به بهترین شکل ممکن انجام شود. ریاضی یک پدیده اجتماعی است و بدون وجود انسان‌ها وجود ندارد.

در پایان به این نکته باید توجه کنیم که علی‌رغم ایرادهای وارد شده بر فلسفه‌های فوق این به این معنا نیست که این فلسفه‌های مهم موجه نیستند. این فلسفه‌ها بازتاب اندیشه‌های فلسفه ریاضی زمانه خود بوده‌اند. در قسمت بعدی در مورد نحوه تاثیر پذیری طراحی روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی از مکاتب فلسفه ریاضی صحبت خواهیم کرد.

### ۴. تاثیر مکاتب فلسفه ریاضی در طراحی روش تدریس متناسب با محتوای آموزشی

در مکتب افلاطون‌گرایی آثار تربیتی ریاضی بر فکر و شخصیت انسان بسیار مهم تر از کاربرد آن در زندگی است. این مکتب تفکر و برهان عقلی را تنها راه یادگیری ریاضی می‌داند و برای حس و تجربه نقشی قابل نیست. شیوه آموزش ریاضی در مکتب افلاطون‌گرایی مبتنی بر پرسش و پاسخ سقراطی است. در مکتب منطق‌گرایی منطق صوری پیشنیاز برنامه درسی ریاضی است و ریاضی در قالب منطق آموزش داده می‌شود. این نوع ریاضی با زندگی واقعی مرتبط نمی‌شود. در مکتب

صورت گرایی تاکید بر آموزش نظریه مجموعه ها و نمادهای جبری از زیر بنایی ترین محتویات آموزشی است. همچنین دستگاه های مجرد و صوری ریاضی به عنوان پایه و اساس ریاضی در نظر گرفته می شود. مکتب شهود گرایی در پاره ای از موارد با ریاضیات کلاسیک ناسازگار است (منیری، ۱۳۹۸). از دیدگاه مکتب انسانگرایی ریاضی به مثابه یک پدیده فرهنگی-اجتماعی است و به عنوان یک ابزار تحلیلی برای حل مساله های فرهنگی و اجتماعی است. آرایه تصویر اجتماعی و انسان گرایانه از ریاضیات باعث می شود که ریاضیات برای فراگیران از موضوعی انتزاعی به موضوعی ملموس تبدیل شود. در این دیدگاه هدف درک اهمیت دانش ریاضی در جامعه است. در واقع ریاضی می تواند برای مشکلات اجتماعی راه حل های مناسبی ارائه کند (غلام آزاد ۱۳۹۵). همچنین ریاضی را به عنوان ساز و کار مناسبی برای تعامل در جوامع چند فرهنگی تلقی می کند (خاکباز، ۱۳۹۹). بهترین روش تدریس در این دیدگاه این است که فراگیر با کمک قدرت تفکر خود مساله ای را شناسایی و برای آن راه حل پیدا کند و آن را مرحله به مرحله به اجرا بگذارد.

استفاده از مکاتب فلسفه ریاضی می تواند به رویکردهای اصلاحی در روش های سنتی آموزش ریاضی شود. طراحی برنامه درسی ریاضی که شامل مولفه های محتوا، روش تدریس است باید مبتنی بر پرورش ذهنیت فلسفی مدرس ریاضی باشد. در آموزش ریاضی باید از محدودیت های ساخته شده توسط ریاضیات ساختگی ذهن بیرون بیایم و رویکرد موثری نسبت به ریاضیات طبیعی و مسایل برگرفته از زندگی روزمره داشته باشیم. بدین منظور باید از روشهای تدریس مبتنی بر مشارکت مدرس ریاضی و فراگیران، طرح پرسش و آرایه راهبرد حل مساله استفاده کنیم. همچنین ایجاد ارتباط مثبت با فراگیران و تشویق آنها می تواند زمینه ایجاد اعتماد به نفس را در ایشان فراهم سازد. تمرکز بر درک مفاهیم اصلی و کاربردهای آنها در زندگی و مسایل واقعی از جمله عوامل موثر در یادگیری است. استفاده از ابزارها و فناوری آموزشی می تواند به فرایند یادگیری مفاهیم پیچیده کمک کند. در مجموع می توان گفت ذهنیت فلسفی مدرس ریاضی در طراحی روش تدریس و محتوای آموزشی باید منجر به بهبود عملکرد ریاضی فراگیران شود. به بیان دیگر آن دسته از مدرسان ریاضی که دارای ذهنیت فلسفه ریاضی هستند می توانند توانایی ذهن فراگیران را در یافتن راه حل مناسب و خلق ایده ها تقویت نمایند.

## ۵. نتیجه گیری

این مطالعه نشان می دهد که مکاتب فلسفه ریاضی به صورت غیر صریحی شامل اصول و نظریه های مربوط به آموزش ریاضی هستند. با توجه به تاثیر مکاتب مهم فلسفه ریاضی در آموزش ریاضی با دو رویکرد کلی روبرو هستیم. اول تدریس ریاضی و انتخاب محتوای برنامه درسی مبتنی بر روشهای سنتی و غیر فعال ذهنی حاصل از رویکرد پسینی در فلسفه ریاضی. دوم تدریس ریاضی و انتخاب محتوای برنامه درسی ریاضی مبتنی بر روشهای نوین و فعال ذهنی حاصل از رویکرد پیشینی.

## مراجع

۱. م. حق وردی، ریاضی چیست؟ و چرا به آن نیازمندیم، کجا باید تجربه و آموخته شود، و چطور تدریس شود، فرهنگ و اندیشه ریاضی ۷۰ (۱۴۰۱)، ۱۶۳-۱۴۷.
۲. ع. خراسانی نژاد، ن. فتح آبادی، د. آشوری، دیدگاه فلسفه و آموزش ریاضی و تاثیر آن ها بر یکدیگر، فصلنامه مطالعات روانشناسی و علوم تربیتی ۲۳ (۱۴۰۰)، ۲۹۵-۳۱۵.
۳. ف. سلیمانی، بررسی تاثیر ذهنیت فلسفی معلمان (باورهای معرفت شناختی)، در نحوه آموزش و تدریس آنان در کلاس درس با تکیه بر نظریه افراد صاحب نظر در این زمینه، فصلنامه مطالعات روانشناسی و علوم تربیتی ۴۹ (۱۴۰۲)، ۱۰۳-۱۱۳.
۴. ز. صالحی، اهمیت محتوا و روش تدریس معلم، اولین همایش بین المللی افق های نوین در آموزش و پرورش (۱۴۰۲)، ۱-۱۴.
۵. ز. فلاحان، ع. محمودنیا، ی. قائدی، س. ضرغامی، تبیین چگونگی تاثیرگذاری عناصر شناختی پژوهش فلسفی بر بهبود آموزش حل مساله ریاضی، مجله علوم شناختی ۶۰ (۱۳۹۹)، ۶۷۷-۶۸۶.
۶. م. منیری، چرا فلسفه های سه گانه مشهور ریاضی مهم هستند؟، فرهنگ و اندیشه ریاضی ۶۵ (۱۳۹۷)، ۶۱-۷۵.

## اثربخشی الگوی آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه بر نگرش دانش‌آموزان دوره متوسطه به درس ریاضی

هاجر سادات جزایری نوکابادی\*، کارشناس ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

hajarjazaeri@gmail.com

مریم نادری پاریزی، استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

M.Naderi.Parizi@pnu.ac.ir

اکبر رضایی، دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

rezaei@pnu.ac.ir

چکیده: هدف پژوهش حاضر بررسی اثربخشی آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه بر نگرش به درس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه هفتم مدارس روستایی شهرستان فلاورجان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ بود. این پژوهش از نظر هدف، کاربردی و از نظر روش، نیمه‌آزمایشی از نوع «پیش‌آزمون- پس‌آزمون با گروه کنترل و شمارش غیر تصادفی» می‌باشد. تعداد اعضای جامعه پژوهش، ۳۷۹ نفر بوده که به روش نمونه‌گیری در دسترس، دو کلاس ۲۲ و ۲۴ نفره انتخاب شدند. ابزار جمع‌آوری اطلاعات شامل پرسشنامه استاندارد نگرش سنج آیکن<sup>۱</sup> (۱۹۷۹) بود. روایی و پایایی پرسشنامه نگرش سنج در پژوهش‌های پیشین، بررسی و تأیید شد. تجزیه و تحلیل داده‌ها به روش کوواریانس یک متغیره انجام پذیرفت. نتایج پژوهش نشان داد ( $p < 0/05$ )، آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه، موجب ایجاد نگرش مثبت به درس ریاضی در دانش‌آموزان دختر پایه هفتم می‌گردد.

کلمات کلیدی: آموزش ریاضی- راه‌حل‌های چندگانه- نگرش

### ۱ مقدمه

نظام آموزش و پرورش در دنیای امروزی مفهومی متفاوت با نظام آموزشی پیشین در جهان دارد. تغییرات در نگرش و باورها با توجه به تغییرات و تحولات آموزشی، متحول شدند و ارتقا یافته‌اند. در سال‌های گذشته، چالش آموزش و پرورش، کنکاش و کشف علم و درنهایت استدلال و حل مسئله بوده‌است که باید در دانش‌آموزان نهادینه شود. برای پرورش و توسعه چنین رویکردی، باید از الگوهای آموزشی سازمان‌یافته استفاده شود. در چنین الگوهای، فرآیند

Author Corresponding\*

تفکر توأم با تأمل و تغییرات در رویکرد حل مسئله برای دانش‌آموزان در مدارس مورد تأکید است. متأسفانه اغلب مشاهده شده که معلمان هم به تبع محتوای کتاب، بیشتر تمرکز خود بر تدریس را صرفاً به بازنمایی نمایشی با شکل و محور معطوف می‌کنند؛ درحالی‌که دانش‌آموزان دارای سبک‌های مختلف یادگیری (کلامی، تصویری و دست‌ورزی) می‌باشند [۵]. آموزش برای ریاضی به‌ویژه در مقطع متوسطه باید با کشاندن فراگیر به راه کشف و شهود، آماده ساختن او به تحقیق و پژوهش، عادت دادن او به تفکر منطقی، ترغیب دانش‌آموز به پرسش‌گری و جست‌وجوگری و با خلّاق ساختن ذهن او همراه باشد [۱]. یکی از الگوهای تدریس که اساس آن را پرهیز از تمرکز بر صرفاً یک راهبرد و اختیار و میدان دادن به دانش‌آموزان در استفاده از راه‌حل‌های متنوع در طول فرایند یاددهی-یادگیری تشکیل می‌دهد، آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه است. لیکین و لو<sup>۲</sup> (۲۰۰۷) روش راه‌حل‌های چندگانه را ذره‌بینی مناسب برای تشخیص و مشاهده خلّاقیت ریاضی و حتی سنجش آن قلمداد می‌کنند. به اعتقاد آنها حل مسئله با چند روش ویژگی ریاضی‌دانان مجرب بوده و مستلزم دانش ریاضی غنی‌تری است [۶].

## ۲ رویکرد آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه

یکی از رویکردهای آموزشی که در برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی مورد توجه و تأکید مؤلفان کتاب‌های ریاضی و برنامه‌ریزان درسی قرار گرفته است، رویکرد به کارگیری راه‌حل‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و موضوعات ریاضی می‌باشد. راه‌حل‌های چندگانه؛ به معنای ارائه چند روش حل برای یک مسأله ریاضی، انجام یک فعالیت ریاضی با شیوه‌های متفاوت، نشان دادن یک مفهوم با مدل‌های مختلف و نظایر آن می‌باشد [۳]. این رویکرد حاوی بایستگی یا نوعی پتانسیل واضح و آشکار جهت حل مسئله به روش‌های مختلف است. تفاوت بین این راه‌حل‌ها در سه محور بازنمایی‌های مختلف از یک مفهوم ریاضی، ارائه تعاریف و ویژگی‌های مختلف برای مفهومی ویژه در ریاضیات و یا نگرش به یک مقوله از شاخه‌های متفاوت ریاضی، انعکاس خواهد یافت [۴]. به گفته لیکین<sup>۳</sup> (۲۰۰۱) حل یک مسئله یا انجام یک فعالیت ریاضی به چند شیوه، ویژگی ریاضی‌دانان مجرب است و مستلزم دانش ریاضی غنی‌تری بوده و مسائلی که چنین قابلیت داشته‌اند قدرت انعطاف فکری فراگیران را در انتقال از فرایندی ذهنی به فرایندی دیگر افزایش می‌دهد. به اعتقاد لیکین (۲۰۰۲) استفاده از راه‌حل‌های چندگانه ابزاری برای تعمیق دانش ریاضی فراگیران و علاوه بر آن معلمان قلمداد می‌شود [۶]. از دیدگاه هنینگسن و آستین<sup>۴</sup> (۱۹۹۷) پیاده‌سازی رویکرد راه‌حل‌های چندگانه در تدریس، زمینه را برای جلوه‌گری بعضی مفاهیم و قابلیت‌ها فراهم کرده که بازنمایی‌های چندگانه و گفت‌وگوهای ریاضیات را می‌توان بارزترین آنها دانست. حل مسائل ریاضی به طرق مختلف، ابزاری است که با دارا بودن پتانسیلی خاص می‌تواند پیامدهای مثبت بسیاری را در حوزه‌ی مهارت‌ها و نگرش‌ها هم در فراگیران و هم در فرهنگیان به همراه داشته باشد [۳].

## ۳ نگرش

از جمله مهم‌ترین موضوعات در آموزش ریاضی، نگرش فراگیران نسبت به درس ریاضیات است. زیرا نگرش و میزان موفقیت در یادگیری ارتباط مستقیمی با یکدیگر دارند. نگرش عبارت است از برداشت فرد به هر شیء، تفکر، شخص، گروه و یا موقعیت به عنوان جهت‌گیری پایدار با عناصر شئ، عاطفی و رفتاری دانش‌آموز. قسمت شناختی نگرش

<sup>۲</sup> Leikin & Lev

<sup>۳</sup> Leikin

<sup>۴</sup> Henington & Asetin

شامل همه افکار، حقایق، دانش‌ها و باورهای است که دانش‌آموز در مورد موضوع نگرش دارد. قسمت رفتاری نگرش شامل آمادگی فراگیر جهت جوابدهی و رغبت به انجام عمل در مورد موضوع نگرش می‌باشد. لذا نگرش از یک طرف با دانش‌ها و تجربه‌های قبلی فراگیر و از سوی دیگر با برداشت ذهنی زمان حال او در مورد موضوع نگرش مرتبط بوده و در هر حالت عکس‌العمل مثبت یا منفی فراگیر را نسبت به اشیا، موقعیت‌ها و مسائل برمی‌انگیزد [۲]. فنما<sup>۵</sup> (۲۰۰۵) از معروف‌ترین اساتید حوزه آموزش ریاضی می‌نویسد: “علاقه دانش‌آموزان به ریاضی، باور آنها به کاربردی بودن علم ریاضیات در شغل آینده و نیز باورشان به نقش ریاضی در زندگی روزمره کنونی آنها ضروری می‌باشد.” آیکن (۲۰۰۰) نیز مطرح می‌کند مهم‌ترین عواملی که به فقدان موفقیت یادگیرندگان در ریاضیات منجر شده، نگرش منفی آنها به این درس می‌باشد. حاصل پژوهش‌های کلارا و همکاران<sup>۶</sup> (۲۰۱۷) نیز مطرح کرده که بین نگرش فراگیران نسبت به ریاضیات و دست‌یافتن به موفقیت در درس ریاضی ارتباط معناداری وجود دارد.

## ۴ روش

روش این تحقیق، نیمه‌آزمایشی از نوع “پیش‌آزمون- پس‌آزمون با گروه گواه و گمارش غیر تصادفی” می‌باشد. جامعه این تحقیق، شامل تمامی دانش‌آموزان دختر مشغول به تحصیل در پایه هفتم مدارس روستایی شهرستان فلاورجان از توابع استان اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ به تعداد ۳۷۹ نفر می‌باشد. در این پژوهش، به جهت کنترل عامل سلیق مختلف معلمین و کنترل بیشتر محقق بر فرایند پژوهش از روش نمونه‌گیری در دسترس استفاده گردید. محقق دو کلاس از مدارس روستایی که خود دبیر آنها بود انتخاب کرده و به شیوه تصادفی یک کلاس به عنوان گروه آزمایش و دیگری به عنوان گروه کنترل منظور شد. در این پژوهش از پرسشنامه استاندارد نگرش سنج آیکن (۱۹۷۹)، جهت سنجش سطح نگرش دانش‌آموزان استفاده شده است. ابتدا جهت پیش‌آزمون، پرسشنامه استاندارد نگرش سنج آیکن (۱۹۷۹) بین دانش‌آموزان دو کلاس توزیع و سپس پاسخنامه‌ها جمع‌آوری گردید. جهت به کارگیری رویکرد آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه مباحثی از ریاضی هفتم در ۱۵ جلسه آموزشی در فاصله زمانی یک و نیم ماهه بین پیش‌آزمون و پس‌آزمون در کلاسی که به عنوان گروه آزمایش انتخاب شده بود تدریس گردید. همزمان آموزش همین مبحث به شیوه سنتی جهت اعضای گروه کنترل توسط محقق تدریس شد. پس از آموزش‌ها مجدداً جهت پس‌آزمون، پرسشنامه نگرش سنج آیکن (۱۹۷۹) توزیع و داده‌ها جمع‌آوری گردید. سپس نتایج مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. پرسشنامه نگرش سنج آیکن از ۱۶ گویه و در طیف اندازه‌گیری لیکرت (کاملاً مخالفم= نمره ۱؛ مخالفم= نمره ۲؛ نظری ندارم= نمره ۳؛ موافقم= نمره ۴؛ کاملاً موافقم= نمره ۵) توسط آیکن در سال ۱۹۷۹ تدوین شد. حداقل نمره در این پرسشنامه ۱۶ و حداکثر ۸۰ است. در پژوهش فردایی بنام و فرزاد، روایی و پایایی این پرسشنامه تأیید شده که برای سنجش پایایی از روش آلفای کرانباخ ضرایب پایایی کل ابزار پژوهش و همچنین پایایی ابزار پژوهش برای دانش‌آموزان پسر و دختر به ترتیب ۰/۸۸۷، ۰/۸۴۱ و ۰/۹۱۲ به دست آمده که بیانگر پایایی بالای آن است. جهت تجزیه و تحلیل داده‌ها در این تحقیق از آمار توصیفی و آمار استنباطی استفاده شده است. تحلیل توصیفی داده‌ها براساس فراوانی، درصد، میانگین و انحراف معیار و تحلیل استنباطی داده‌ها براساس تحلیل واریانس / کوواریانس یک متغیری انجام شده است. همچنین از آزمون لوین جهت بررسی همگنی واریانس‌ها، از مجذور اتا جهت اندازه اثر یا رابطه و از آزمون تعقیب LSD جهت مقایسه میانگین نمره‌های گروه ۹۴ پس از کنترل اثر پیش‌آزمون استفاده شده است.

<sup>۵</sup> Fennema

<sup>۶</sup> Clara, Ajisuksmo and Saputri

## ۵ یافته‌ها و نتیجه‌گیری

یافته‌های توصیفی این پژوهش بر اساس فراوانی و درصد و همچنین شامل شاخص‌های آماری مانند میانگین، انحراف معیار، حداقل و حداکثر نمره برای متغیرهای مورد مطالعه در تحقیق است. با توجه به جدول‌های آماری و یافته‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم به کارگیری رویکرد آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه موجب ایجاد نگرش مثبت به درس ریاضی در دانش‌آموزان پایه هفتم می‌گردد. نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج اغلب پژوهش‌ها مطابقت دارد؛ از جمله اثربخشی مثبت به کارگیری آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه بر عملکرد تحصیلی دافعی (۱۳۹۴ و ۱۳۹۶)، رحیمی (۱۳۹۵، ۱۳۹۶ و ۱۳۹۷) و لیوان و لیکین (۲۰۰۶، ۲۰۰۷، ۲۰۰۸، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲). چالش‌های استفاده از رویکرد آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه عبارتند از حفظ تعادل بین یادگیری مفهومی و یادگیری رویه‌ای، ایجاد احساس سردرگمی، کمبود وقت، مقاومت فکری فراگیران، پدیده سکوت و توجه منفی یادگیرندگان به یکدیگر. بر همین اساس پتانسیل‌های این روش تدریس را می‌توان ایجاد فهم بهتر و عمیق‌تر، ایجاد لذت یادگیری و حل مسئله، آفرینش احساس توانمندی و خودباوری در فراگیران، خلق کلاس پویا، تقویت جو مشارکتی و بهبود ارتباط معلم و دانش‌آموز دانست [۴]. با توجه به نتایج به دست آمده، انجام پژوهش در حوزه‌های دیگر، اعم از پایه تحصیلی، جنسیت، جامعه و مفاهیم مختلف دیگر و نیز تحلیل محتوای کتب ریاضیات با هدف سنجش میزان انطباق با اصول محتوایی آموزش با تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه امری مهم و ضروری به نظر می‌رسد.

## مراجع

- [۱] بهادر، ملیحه. (۱۴۰۰). اثربخشی استفاده از الگوی آموزشی E5 به شیوه مجازی در باور معرفت‌شناختی و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه نهم شهرستان گراش در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. رشته آموزش ریاضی. دانشگاه پیام‌نور مرکز کرمان.
- [۲] پاشا شریفی، حسن. (۱۳۷۷). اصول روان‌سنجی و روان‌آزمایی. انتشارات رشد، چاپ پنجم. تهران.
- [۳] دافعی، حمید. (۱۳۹۶). راه‌حل‌های چندگانه در آموزش ریاضی دوره ابتدایی. اولین همایش کشوری دانش موضوعی- تربیتی (دانش‌آموزش محتوا) آموزش ریاضی در ابتدایی- دانشگاه فرهنگیان استان سمنان.
- [۴] رحیمی، زهرا. (۱۳۹۵). طراحی الگوی تدریس مبتنی بر راه‌حل‌های چندگانه، برای تحقق تفکر ریاضی‌وار در دانش‌آموزان دوره متوسطه. رساله دکتری. رشته علوم تربیتی (گرایش برنامه‌ریزی درسی). دانشکده علوم انسانی. دانشگاه تربیت مدرس تهران
- [۵] کاویانی، علی. (۱۳۹۹). اثربخشی به کارگیری رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار بر توانایی حل مسئله و کاهش بدفهمی دانش‌آموزان پایه چهارم مدارس دولتی شهر جاجریم. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. رشته آموزش ریاضی. دانشگاه پیام‌نور مرکز کرمان

[6] R. Leikin and M. Lev, (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity, In Proceedings of the 31<sup>st</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, 161-168. (Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics).

## برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش - مقاومت دو طرفه براساس توزیع لوماکس تحت داده های سانسور نوع دوم

روشنک زمان ، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

rzaman@pnu.ac.ir

چکیده: توزیع لوماکس یک توزیع طول عمر مفید در تحلیل قابلیت اعتماد است؛ که کاربردهای گسترده‌ای در اقتصاد، مدلسازی، مسائل صف و علوم زیستی دارد. مدل تنش - مقاومت نقش مهمی در تحلیل قابلیت اعتماد دارد. در مفاهیم قابلیت اعتماد  $R$  بعنوان احتمال بزرگتر بودن مقاومت  $X$  از تنش  $Y$  معرفی می شود و در تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد برآورد آن یک مسئله مهم است. از آنجایی که در دنیای واقعی در نظر گرفتن حد پایین تنش به اندازه حد بالای آن ارزشمند است از اینرو در این مقاله با در نظر گرفتن توزیع لوماکس برای داده های کامل و سانسور نوع دوم به بررسی برآورد  $R$  برای حالتی که مقاومت  $X$  بیشتر از تنش  $Y$  و کمتر از تنش  $Z$  باشد پرداخته شده است. برآورد ماکزیمم درستنمایی و فاصله اطمینان مجانبی برای هر دو حالت محاسبه شده است. همچنین از شبیه سازی مونت کارلو برای مقایسه عملکرد برآوردها استفاده شده است.

کلمات کلیدی: توزیع لوماکس، سانسور نوع دوم، قابلیت اعتماد، مدل تنش - مقاومت

### ۱ مقدمه

توزیع لوماکس در سال ۱۹۵۴ توسط لوماکس معرفی شد. کارهای آماری زیادی انجام شده است [۳]. اصطلاح تنش - مقاومت اولین بار توسط [۴] معرفی شد. مدل تنش - مقاومت، نقش مهمی در تحلیل قابلیت اعتماد دارد که از دیدگاه های مختلفی مورد بحث قرار گرفته است [۲]، [۱]. بنابراین برآورد  $R$  در تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد بسیار مهم است. برآورد  $R$  با در نظر گرفتن توزیع لوماکس برای مدل تنش - مقاومت با تنش بالا بحث شده است [۶]. همچنین برآورد  $R$  برای توزیع لوماکس با حضور داده های پرت در [۵] انجام شده است. در مفاهیم قابلیت اعتماد،  $R$  بعنوان احتمال بزرگتر بودن مقاومت واحد از تنش معرفی می شود، یعنی،  $R=P(X>Y)$  که در آن  $X$  مقاومت واحد و  $Y$  تنش لحظه ای اعمال شده بر آن است. اما در دنیای واقعی شرایطی وجود دارد که نه تنها تنش بالا بلکه تنش پایین را نیز باید در نظر گرفت. برای مثال بسیاری از دستگاه ها نمی توانند در دماهای بسیار بالا یا بسیار پایین کار کنند. همچنین بسیاری از قطعات الکترونیکی نمی توانند در ولتاژ پایین کار کنند. بر این اساس، در مقاله حاضر، برآورد مدل تنش - مقاومت،  $R=P(Y<X<Z)$  حالتی که مقاومت  $X$  بیشتر از تنش  $Y$  و کمتر از تنش  $Z$  باشد، در نظر گرفته

شده است. در بخش ۲ و ۳، به ترتیب مفاهیم اولیه مورد نیاز، و برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) و فاصله اطمینان مجانبی (CI) برای پارامتر R با در نظر گرفتن داده‌های کامل به دست آمده است. و در بخش ۴، به محاسبه برآوردها تحت داده‌های سانسور نوع دوم پرداخته شده است. در نهایت نتایج شبیه‌سازی آمده است.

## ۲ مفاهیم اولیه

فرض کنید متغیر تصادفی X، از توزیع لوماکس با پارامترهای  $\lambda_1$  و  $\theta$  پیروی می‌کند، که  $\lambda_1$  پارامتر شکل و  $\theta$  پارامتر مقیاس است. تابع چگالی توزیع لوماکس  $L(\lambda_1, \theta)$ ، برابر است با:

$$f(x; \lambda_1, \theta) = \frac{\lambda_1 \theta^{\lambda_1}}{(x + \lambda_1)^{\lambda_1 + 1}}; x > 0, \lambda_1 > 0, \theta > 0, \quad (1)$$

همچنین فرض کنید متغیرهای تصادفی تنش Y و Z از توزیع لوماکس به ترتیب با پارامترهای  $L(\lambda_2, \theta)$  و  $L(\lambda_3, \theta)$  پیروی می‌کنند. تابع چگالی‌های آنها به ترتیب برابر هستند با:

$$f(y; \lambda_2, \theta) = \frac{\lambda_2 \theta^{\lambda_2}}{(y + \lambda_1)^{\lambda_2 + 1}}; y > 0, \lambda_2 > 0, \theta > 0, \quad (2)$$

$$f(z; \lambda_3, \theta) = \frac{\lambda_3 \theta^{\lambda_3}}{(z + \lambda_1)^{\lambda_3 + 1}}; z > 0, \lambda_3 > 0, \theta > 0. \quad (3)$$

با چنین شرایطی قابلیت اعتماد تنش - مقاومت برابر است با:

$$R = P(Y < X < Z) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}; 0 < R < 1. \quad (4)$$

در این مقاله فرض می‌شود که پارامتر مقیاس  $\theta$  معلوم است.

## ۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی R براساس داده‌های کامل

فرض کنید  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$  نمونه تصادفی با  $n_1$  مشاهده از توزیع لوماکس  $L(\lambda_1, \theta)$  باشد، بنابراین تابع درستنمایی آن برابر است با:

$$L(x|\lambda_1, \theta) = \prod_{i=1}^{n_1} \frac{\lambda_1 \theta^{\lambda_1}}{(x_i + \lambda_1)^{\lambda_1 + 1}} = \lambda_1^{n_1} \theta^{n_1 \lambda_1} \prod_{i=1}^{n_1} (x_i + \theta)^{-(\lambda_1 + 1)}$$

همچنین فرض کنید که  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2})$  نمونه تصادفی با  $n_2$  مشاهده از توزیع لوماکس  $L(\lambda_2, \theta)$  و  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n_3})$  نمونه تصادفی با  $n_3$  مشاهده از توزیع لوماکس  $L(\lambda_3, \theta)$  باشند، که در اینصورت تابع درستنمایی توأم آنها برابر است با:

$$L(x, y, z|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta) = \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \lambda_3^{n_3} \theta^{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + n_3 \lambda_3} \prod_{i=1}^{n_1} (x_i + \theta)^{-(\lambda_1 + 1)} \prod_{j=1}^{n_2} (y_j + \theta)^{-(\lambda_2 + 1)} \\ \times \prod_{k=1}^{n_3} (z_k + \theta)^{-(\lambda_3 + 1)}$$

لگاریتم تابع درستنمایی توأم برابر است با:

$$\log L = n_1 \log \lambda_1 + n_2 \log \lambda_2 + n_3 \log \lambda_3 + (n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + n_3 \lambda_3) \log \theta - (\lambda_1 + 1) \sum_{i=1}^{n_1} \log(x_i + \theta) \quad (5) \\ - (\lambda_2 + 1) \sum_{j=1}^{n_2} \log(y_j + \theta) - (\lambda_3 + 1) \sum_{k=1}^{n_3} \log(z_k + \theta)$$

با مشتق‌گیری از عبارت ۵ نسبت به  $\lambda_1, \lambda_2$  و  $\lambda_3$  و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی  $\lambda_1, \lambda_2$  و  $\lambda_3$  به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_1} \log(1 + \frac{x_i}{\theta})}, \hat{\lambda}_2 = \frac{n_2}{\sum_{j=1}^{n_2} \log(1 + \frac{y_j}{\theta})}, \hat{\lambda}_3 = \frac{n_3}{\sum_{k=1}^{n_3} \log(1 + \frac{z_k}{\theta})} \quad (6)$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه ۴، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی  $R$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{R} = \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}{(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3)(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3)}; 0 < R < 1. \quad (7)$$

محاسبه واریانس دقیق و توزیع عبارت بالا بسیار مشکل است، بنابراین از روش دلتا چندمتغیره [۹] برای یافتن واریانس مجانبی  $\hat{R}$  استفاده شده است. ماتریس اطلاع فشر  $\phi$  برابر است با:

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_1^2}) & E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}) & E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3}) \\ E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1}) & E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_2^2}) & E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3}) \\ E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_1}) & E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_2}) & E(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda_3^2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_3}{\lambda_3^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \phi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2}{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^2}{n_3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

با تعریف  $B' = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial R}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial R}{\partial \lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$  که در آن  $b_1, b_2, b_3$  برابر است با:

$$b_1 = \frac{-\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}, b_2 = \frac{-\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}, b_3 = \frac{-\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}.$$

بنابراین می‌توان نوشت،  $\sigma_R^2 = V(R) = B' \phi^{-1} B$ . در نتیجه  $\sigma_R^2 = \frac{b_1^2 \lambda_1^2}{n_1} + \frac{b_2^2 \lambda_2^2}{n_2} + \frac{b_3^2 \lambda_3^2}{n_3}$ . با جایگذاری برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها در رابطه بالا،  $\hat{\sigma}_R^2$  به دست می‌آید. همچنین می‌توان گفت توزیع مجانبی  $\hat{R}$ ،  $N(R, \hat{\sigma}_R^2)$  است. که بر اساس توزیع مجانبی، فاصله اطمینان مجانبی  $\%100(1 - \gamma)$  برای  $R$  می‌شود:  $(\hat{R} \pm Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_R)$ ، که  $Z_{\gamma/2}$  مقدار جدول متناظر با  $\gamma/2$  از توزیع  $N(0, 1)$  است.

## ۴ برآورد ماکزیمم درست‌نمایی $R$ تحت داده‌های سانسور نوع دوم

در این بخش برآورد ماکزیمم درست‌نمایی وقتی که مقاومت تحت سانسور نوع دوم است، بررسی شده است. در سانسور نوع دوم مطالعه تا رخداد پیشامد مورد نظر، زمان شکست  $m$  مؤلفه اول،  $X_{(1)}, \dots, X_{(m)}$  ادامه می‌یابد، که در آن  $m$  ثابتی از پیش تعیین شده است. با در نظر گرفتن  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{(m)})$  از توزیع لوماکس  $L(\lambda_1, \theta)$  بعنوان نمونه سانسور نوع دوم، تابع درست‌نمایی آن برابر است با:

$$L(\mathbf{x}|\lambda_1, \theta) = \frac{n_1!}{(n_1 - m)!} \lambda_1^m \theta^{m\lambda_1} [1 + \frac{x_m}{\theta}]^{-\lambda_1(n_1 - m)} \prod_{i=1}^m (x_i + \theta)^{-(\lambda_1 + 1)}$$

بنابراین تابع درست‌نمایی توأم و لگاریتم تابع درست‌نمایی توأم به ترتیب برابر هستند با:

$$\begin{aligned} L &= \frac{n_1!}{(n_1 - m)!} \lambda_1^m \theta^{m\lambda_1} [1 + \frac{x_m}{\theta}]^{-\lambda_1(n_1 - m)} \prod_{i=1}^m (x_i + \theta)^{-(\lambda_1 + 1)} \\ &\times \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \lambda_3^{n_3} \theta^{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3} \prod_{i=1}^{n_1} (x_i + \theta)^{-(\lambda_1 + 1)} \prod_{j=1}^{n_2} (y_j + \theta)^{-(\lambda_2 + 1)} \times \prod_{k=1}^{n_3} (z_k + \theta)^{-(\lambda_3 + 1)} \\ \log L &= \log\left(\frac{n_1!}{(n_1 - m)!}\right) + m\lambda_1 \log \theta - \lambda_1(n_1 - m) \log\left[1 + \frac{x_m}{\theta}\right] - (\lambda_1 + 1) \sum_{i=1}^m \log(x_i + \theta) \\ &+ n_1 \log \lambda_1 + n_2 \log \lambda_2 + n_3 \log \lambda_3 + (n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3) \log \theta - (\lambda_2 + 1) \sum_{j=1}^{n_2} \log(y_j + \theta) - (\lambda_3 + 1) \sum_{k=1}^{n_3} \log(z_k + \theta) \end{aligned}$$



با مشتق‌گیری لگاریتم تابع درست‌نمایی توأم نسبت به  $\lambda_2$ ،  $\lambda_1$  و  $\lambda_3$  و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی  $\lambda_1$ ،  $\lambda_2$  و  $\lambda_3$  به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\lambda}_{1c} = \frac{m}{(n_1 - m) \log(1 + \frac{x_m}{\theta}) + \sum_{i=1}^m \log(1 + \frac{x_i}{\theta})}, \hat{\lambda}_{2c} = \frac{n_2}{\sum_{j=1}^{n_2} \log(1 + \frac{y_j}{\theta})}, \hat{\lambda}_{3c} = \frac{n_3}{\sum_{k=1}^{n_3} \log(1 + \frac{z_k}{\theta})} \quad (9)$$

با جایگذاری روابط اخیر در رابطه ۴، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی  $R$  می‌شود:  $0 < R < 1$ .  $\hat{R} = \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}{(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3)(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3)}$ ؛ بنابراین واریانس  $R$  برابر

$$\phi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2}{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^2}{n_3} \end{bmatrix}$$

که در این حالت، معکوس ماتریس اطلاع فشر برابر

$\sigma_R^2 = \frac{b_1^2 \lambda_1^2}{m} + \frac{b_2^2 \lambda_2^2}{n_2} + \frac{b_3^2 \lambda_3^2}{n_3}$  است. مشابه بخش قبل، فاصله اطمینان مجانبی  $100(1-\gamma)\%$  برای  $R$  می‌شود:  $(\hat{R} \pm Z_{\gamma/2} \hat{\sigma}_R^2)$ .

## ۵ نتایج

نتایج تئوری به دست آمده از بخش‌های پیشین با استفاده از نرم افزار R و شبیه سازی مونت کارلو، برای مقادیر مختلفی از اندازه نمونه و اندازه سانسور مورد بررسی قرار گرفت. نتایج شبیه سازی نشان داد که با افزایش اندازه نمونه مقادیر اریبی، میانگین توان دوم خطا و طول فاصله اطمینان کاهش می‌یابد. همچنین طول فاصله اطمینان  $R$  برای داده‌های کامل کمتر از داده‌های سانسور شده است.

## مراجع

- [1] I. B. Abdul-Moniem, "Recurrence relations for moments of lower generalized order statistics from exponentiated Lomax distribution and its characterization. J. Math. Comput. Sci., vol 4, pp. 999-1011, 2012.
- [2] E. M. Almetwally and H. M. Almongy, "Parameter estimation and stress-strength model of power Lomax distribution: classical methods and Bayesian estimation". Journal of Data Science, vol 4, pp. 718-738, 2020.
- [3] A. Baklizi, N. K. Saadati and A. Asgharzadeh, "Likelihood and Bayesian Inference in the Lomax Distribution under Progressive Censoring". Mathematics and Statistics. Vol 3, pp. 615-623, 2022.
- [4] J. D. Church and B. Harris, "The estimation of reliability from stress-strength relationships. Technometrics, vol 1, pp. 49-54, 1970.
- [5] P. Nasiri, "Estimation Parameter of  $R = P(Y < X)$  for Lomax Distribution with presence of outliers". International Mathematical Forum. vol 5, pp. 239-248, 2016.
- [6] J. Neethu and Es. Jeevanand, "Bayesian Estimation of Stress Strength Reliability  $P(X > Y)$  of Lomax and Exponential Distribution based on right censored sample". International Journal of Statistics and Applied Mathematics. vol 2, pp. 27- 30, 2021.

# ارائه یک مدل پتری رنگی برای بازیابی محتوای قابل اعتماد در بستر بلاکچین با استفاده از قرارداد هوشمند اتریوم برای شبکه داده نام

\*فاطمه سعادت جو، عضو هیئت علمی گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه علم و هنر، یزد، ایران،

saadatjou@sau.ac.ir

علی اصغر نصیری یزدی، کارشناسی ارشد گروه مدیریت فناوری اطلاعات، دانشگاه علم و هنر، یزد، ایران،

aliasgharnasiri1372@gmail.com

**چکیده:** شبکه داده نام یک معماری نوین برای اینترنت معرفی می کند که برپایه نام محتوا به جای آدرس IP بنا شده است. در این معماری مصرف کننده فقط با دانستن نام محتوا می تواند محتوای مورد علاقه اش را از هرجایی بازیابی کند اما بازیابی محتوا در این معماری یک سری چالش هایی مانند عدم شناخت مصرف کننده از اینکه آیا محتوا وجود دارد و آیا تولید کننده محتوا قابل اعتماد است دارد. برای حل این چالش ها از فناوری بلاکچین و قرارداد هوشمند برنامه پذیر اتریوم استفاده شده است این فناوری امکان ثبت و اشتراک گذاری محتوا و تولید کننده را به صورت شفاف و غیر قابل تغییر در یک شبکه توزیع شده فراهم می کند و از یک مدل پتری رنگی برای ارائه یک مدل ریاضی که امنیت رویکرد بازیابی محتوا قابل اعتماد را تضمین می کند استفاده شده است و سپس هزینه ذخیره سازی و گس قرارداد هوشمند با استفاده از ابزار آنلاین Remix محاسبه شده است. نتایج نشان می دهد که رویکرد پیشنهادی مقاله توانسته تا حدودی امنیت محتوا را تضمین کند و هزینه ذخیره سازی و گس را کاهش دهد.

**کلمات کلیدی:** شبکه داده نام، قرارداد هوشمند اتریوم، بازیابی محتوا مورد اعتماد، شبکه پتری رنگی، فناوری بلاکچین

## ۱ مقدمه

شبکه داده نام (NDN) به جای استفاده از آدرس های IP، بر نام محتوا تمرکز دارد و از دو نوع بسته (Data و Interest) استفاده می کند. چالش های اصلی این سیستم شامل عدم اطلاع از وجود داده و تأیید هویت تولیدکنندگان محتواست. مقاله به حل این مسائل با استفاده از فناوری بلاکچین و قراردادهای هوشمند پرداخته و مدل پتری رنگی برای امنیت و جلوگیری از بسته های نامعتبر پیشنهاد می دهد. درخ ۱۰۰ رند نام نیز در بلاکچین به کار می رود تا بهبود کارایی را

در بر داشته باشد.

## ۲ کارهای مرتبط

در بازیابی محتوا، مفهوم DNS در شبکه TCP/IP معرفی شده است و NDNS به عنوان سرویس جستجوی مشابه در شبکه داده نام (NDN) طراحی شده است. تفاوت‌ها و شباهت‌ها بین تفکیک نام در NDN و شبکه IP بررسی شده است. درخواست‌ها و پاسخ‌ها در NDNS بر اساس بسته‌ها هستند و حمله‌کنندگان می‌توانند با ارسال بسته‌های علاقه نامعتبر، حملات DDoS ایجاد کنند. برای احراز هویت تولیدکنندگان محتوا، طرح‌های متمرکز و توزیع شده بررسی شده است. در طرح متمرکز، زنجیره اعتماد از کاربران به تولیدکننده محتوا شکل می‌گیرد که ممکن است مشکلاتی نظیر نقطه شکست داشته باشد. طرح توزیع شده بر اساس WoT در برنامه ChronoChat پیشنهاد شده است که به کاربران امکان همکاری بدون لنگر اعتماد را می‌دهد، اما برای برنامه‌هایی با روابط اعتماد مشخص، مناسب نیست. جان لو و همکاران طرحی مبتنی بر بلاکچین برای مدیریت شبکه داده نام ارائه دادند که در آن مقدار هش کلید عمومی کاربران در بلاکچین منتشر می‌شود و مصرف‌کنندگان می‌توانند هویت تولیدکنندگان را با مقایسه هش‌ها تأیید کنند. این فرآیند ممکن است زمان‌بر باشد. تحقیقات نیز به مسائل مسیریابی در NDN پرداخته‌اند تا کارایی بازیابی محتوا را افزایش دهند. طرح‌هایی برای کاهش بار روی روترها و پشتیبانی از حرکت‌پذیری تولیدکنندگان پیشنهاد شده است.

## ۳ روش پیشنهادی

مقاله به بررسی مکانیسم بازیابی محتوای قابل اعتماد مبتنی بر قرارداد هوشمند در شبکه داده نام (NDN) می‌پردازد. این مکانیسم برای حل مشکلاتی مانند یکپارچگی، صحت، عدم انکار، و محرمانگی محتوا طراحی شده است. از درخت پیشوند نام برای بهبود کارایی جستجو استفاده می‌شود و مقدار هش محتوا در بلاکچین برای حفاظت از دستکاری ذخیره می‌شود. اطلاعات خصوصی با کلید عمومی مصرف‌کنندگان رمزگذاری می‌شود و قراردادهای هوشمند برای نظارت و ردیابی عملیات استفاده می‌شود. ساختار نام‌گذاری محتوا در این مکانیسم سلسله‌مراتبی و خوانا است، به طوری که محتوا با پیشوند نام تولیدکننده و نام خود محتوا به طور منحصر به فرد شناسایی می‌شود. مکانیسم پیشنهادی شامل چهار نقش اصلی است:

گره‌های اتریوم که شامل پایگاه داده بلاکچین، ماشین مجازی اتریوم و ماژول بازیابی محتوا هستند، تولیدکنندگان محتوا که محتوا را تولید و قراردادهای هوشمند را اجرا می‌کنند، مصرف‌کنندگان محتوا که درخواست‌های بازیابی محتوا را ارسال می‌کنند، و گره‌های مسیریابی که مسئول تبادل و کش کردن بسته‌ها هستند. این مکانیسم به کاربران NDN امکان می‌دهد تا داده‌های قابل اعتماد و تولیدکنندگان معتبر را شناسایی کرده و به کاهش بسته‌های نامعتبر کمک کند. در لایه شبکه، بسته‌های علاقه و داده در شبکه داده نام (NDN) تبادل می‌شوند. مصرف‌کننده بسته علاقه را به تولیدکننده ارسال می‌کند و تولیدکننده در پاسخ بسته داده را به مصرف‌کننده می‌فرستد. بسته داده اعتبارسنجی شده و به مصرف‌کننده می‌رسد. این بسته داده می‌تواند از طریق لایه بلاکچین مبتنی بر اتریوم و قراردادهای هوشمند برای ثبت، لغو، بازیابی و ردیابی استفاده شود. قرارداد<sup>۱۰</sup>، بوشمند دقیقاً با نام محتوا مطابقت دارند و پس از اجماع گره‌های اتریوم و ذخیره قراردادهای بلاکچین امنیت و اعتبار اطلاعات را تضمین می‌کند.

## ۴ مدل پتری پیشنهادی و آنالیز امنیتی

شبکه‌های پتری رنگی (CPNs) نسخه‌ای گسترش یافته از شبکه‌های پتری معمولی هستند که برای مدل‌سازی سیستم‌های بزرگ و پیچیده مناسب‌اند. این شبکه‌ها ویژگی‌های شبکه‌های پتری عادی (مکان‌ها، گذرها، کمان‌ها، و نشانه‌ها) را با زبان برنامه‌نویسی سطح بالا ترکیب می‌کنند، که امکان تعریف و دستکاری انواع داده‌ها و مقادیر داده را فراهم می‌آورد. در این مقاله، برای پیاده‌سازی مدل پتری رنگی از ابزار CPN Tools استفاده شده است. مدل پتری رنگی به صورت شبکه پتری سلسله‌مراتبی رسم شده است و ویژگی‌های رنگ‌ها و متغیرهای مورد استفاده برای ساخت مدل در مقاله توضیح داده شده‌اند. مدل پیشنهادی شامل ویژگی‌های زیر است: ۱. مصرف‌کننده می‌تواند همیشه درخواست جستجوی نام محتوا کند. ۲. تنها کاربرانی که پروتکل احراز هویت را پاس کنند، گواهی هویت دریافت می‌کنند. ۳. تولیدکنندگان نمی‌توانند بدون گواهی هویت قراردادهای هوشمند محتوا را اعمال کنند. ۴. اطلاعات بلاکچین پس از اعمال قرارداد هوشمند به روز می‌شود. ۵. بسته‌های داده پس از ارسال بسته علاقه، توسط تولیدکننده به مصرف‌کننده بازگردانده می‌شود. مدل در ابزار CPN Tools پیاده‌سازی شده و شامل فرآیندهایی برای ثبت گواهی هویت، انتشار محتوا و جستجوی اطلاعات است. شبیه‌سازی نشان می‌دهد که فرآیندها مطابق با ویژگی‌های مدل هستند و مدل عملی است.

## ۵ جزئیات پیاده‌سازی

مقاله به بررسی نقش تولیدکنندگان و مصرف‌کنندگان محتوا با استفاده از حساب‌های خارجی اتریوم (EOA) پرداخته است. در این سیستم، کاربران سطح ریشه هر اپلیکیشن با گره‌های بلاکچین اتحادیه و سایر کاربران سطح حساب‌های خارجی هر گره متناظر هستند. بلاکچین اتحادیه توسط کاربران سطح ریشه مدیریت می‌شود. قراردادهای هوشمند با زبان Solidity نوشته شده و برای توسعه و اجرای آن‌ها از محیط وب Remix استفاده شده است. هزینه اجرای تراکنش‌ها و قراردادهای به نام "گس" پرداخت می‌شود و برای تأمین گس، از کیف پول‌هایی مانند MetaMask و ابزارهایی مثل Ganache استفاده می‌شود.

## ۶ تحلیل و نتایج

در این بخش، به تحلیل هزینه‌های مربوط به قراردادهای هوشمند پرداخته شده است. این قراردادها شامل دو نوع هستند: یکی برای محتوا و دیگری برای گواهی هویت. هزینه ذخیره‌سازی قراردادهای هوشمند به شرح زیر است: قرارداد هوشمند محتوا ۱۱،۱۳۷ بایت و قرارداد هوشمند گواهی هویت ۱۸،۶۴۴ بایت. هزینه‌های گس برای قراردادهای هوشمند به صورت زیر محاسبه شده است. برای قرارداد هوشمند محتوا، هزینه اعمال قرارداد برابر با ۰۸،۲۶،۰۵۶،۹۷۸ دلار است. هزینه اضافه کردن داده به ۷۸،۱،۷۸۲،۲۵۲ دلار، هزینه لغو داده ۳۸،۲۲۲،۸۶۱ دلار، هزینه حذف داده ۰۸،۳۱۰،۶۵۶ دلار و هزینه درخواست خلاصه محتوا ۷۸،۱،۳۵۷،۱۹۸ دلار می‌باشد. برای قرارداد هوشمند گواهی هویت، هزینه اعمال قرارداد ۸۸،۲۵،۷۵۴،۲۷۹ دلار است. هزینه ابطال هویت برابر با ۷۱،۱۶۱،۲۵۵ دلار، هزینه اعمال هویت جدید ۷۲،۲،۶۵۹،۴۲۵ دلار و هزینه حذف متقاضی ۰۲،۳۱۸،۷۰۹ دلار می‌باشد. هزینه‌ها بر حسب گس (Wei) محاسبه شده‌اند و به دلار تبدیل<sup>۱۰۲</sup> اند. این هزینه‌ها بسته به حجم داده‌ای که به بلاکچین بارگذاری می‌شود، متفاوت خواهند بود. در مکانیسم پیشنهادی، انتظار می‌رود مصرف‌کنندگان محتوا نتایج پرس‌وجوها



را در مدت زمان نسبتاً کوتاهی دریافت کنند.

## ۷ نتیجه گیری و پیشنهادهای آینده

در این مقاله یک مکانیسم جدید برای بازیابی محتوا قابل اعتماد با استفاده از درخت پیشنهاد نام در شبکه داده نام ارائه شد و از بلاکچین و قرارداد هوشمند اتریوم برای ساخت یک بستر قابل اعتماد برای محتوا استفاده شد. همچنین یک مدل بر اساس شبکه پتری رنگی برای امنیت محتوا ارائه شد و سپس هزینه ذخیره سازی و گس قراردادهای هوشمند را محاسبه شد. نتایج نشان داد که مکانیسم پیشنهادی تا حدودی عملکرد خوبی دارد. به عنوان چشم انداز آینده می توان از محیط های شبیه ساز شبکه داده نام مثل NDNsim استفاده نمود و تاخیر در بازیابی محتوا را محاسبه و کاهش دهیم و نرخ اصابت کش را افزایش دهیم.

## مراجع

- [1] Azamuddin, W. M. H., Mohd Aman, A. H., Sallehuddin, H., Salam, M., & Abualsaud, K., Mathematical Models for Named Data Networking Producer Mobility Techniques: A Review. Mathematics, 2024, 12(5), No.649.
- [2] Herouala, A. T., Ziani, B., Kerrache, C. A., Karim Tahari, A. E., Lagraa, N., & Mastorakis, S., CaDaCa: a new caching strategy in NDN using data categorization. Multimedia Systems, 2023, 29(5), pp.2935-2950.
- [3] Soud, M., Liebel, G., & Hamdaqa, M., A fly in the ointment: an empirical study on the characteristics of Ethereum smart contract code weaknesses. Empirical Software Engineering, 2024, 29(1), No.13.
- [4] Kizza, J. M., Blockchains, Cryptocurrency, and Smart Contracts Technologies: Security Considerations. In Guide to Computer Network Security, Cham: Springer International Publishing, 2024, (pp. 575-600).
- [5] A. Afanasyev, X. Jiang, Y. Yu, J. Tan, Y. Xia, A. Mankin, and L. Zhang., NDNS: A DNS-like name service for NDN, in Proc. 26th Int. Conf. Comput. Commun. Netw. (ICCCN), Vancouver, BC, Canada, Jul. 2017, pp. 1-9.
- [6] Z. Yu, A. Dong, X. Wei, S. Guo, and Y. Yan., Hybrid chain based hierarchical name resolution service in named data network, in Security With Intelligent Computing and Big-data Services (SICBS). Berlin, Germany: Springer, 2020, pp. 629-637.

## مسئله باز-پاسخ ابزاری در خدمت محیط و مساحت

فاطمه سلیمیان ریزی<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری دانشگاه اصفهان و دبیر ریاضی منطقه باغبه‌دارن [f\\_salimian\\_r@yahoo.com](mailto:f_salimian_r@yahoo.com)

هاجر محمدی دورکی<sup>۲</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکز و دبیر ریاضی منطقه باغبه‌دارن

**چکیده:** در مرداد ماه ۱۴۰۳ یک دوره آموزشی با حمایت شرکت فولاد سپاهان و به میزبانی خانه ریاضیات اصفهان تحت عنوان دوره ارتقا سطح دانش و افزایش توانمندی حرفه ای معلمان ابتدایی برای ۴۷ نفر معلمان ابتدایی استان سیستان و بلوچستان برگزار گردید. بخشی از این دوره بر اساس تحقیقات نویسندگان این مقاله تحت عنوان کارگاه حل مسئله طراحی و اجرا گردید. مسئله باز-پاسخ انتخاب شده مشابه مسائل بسته کتاب درسی بود و در سه مرحله پاسخ انفرادی، گروهی و کلاسی اجرا گردید. نتایج نشان داد این مسئله به عنوان ابزاری برای تفکیک مفهوم مساحت و محیط، شناسایی و اصلاح بدفهمی ها و بررسی مولفه های خلاقیت می تواند موثر باشد.

**کلمات کلیدی:** مسئله باز پاسخ، محیط، مساحت، آموزش ریاضی، آموزش معلمان.

### ۱-مقدمه

قرار گرفتن حل مساله در قلب آموزش ریاضی این موضوع را ضروری می کند که دانش آموز گستره ی وسیعی از موقعیت ها از مسائل معمولی گرفته تا مسائل در زمینه های ناآشنا و پژوهش های باز-پاسخ را تجربه کند، موقعیت هایی که باعث استفاده از فرایندهای تفکر ریاضی می شوند. یکی از روش هایی که می تواند در این زمینه نویدبخش باشد، حرکت آموزش ریاضیات به سوی رویکرد باز است و این اتفاقات می تواند در خلال استفاده از تکالیف باز-پاسخ در کلاس ریاضیات اتفاق بیافتد و به مهارت های اجتماعی از جمله نقش آفرینی در گروه و اصلاح باورهای رایج به ریاضیات یاری رساند.

### ۲-پیشینه پژوهش

در طول دهه ی ۱۹۸۰ میلادی، دیدگاه های سازنده گرایی در روانشناسی شناختی گسترش یافت و طرح نظریه های یادگیری در این حوزه افزایش یافت. در این دیدگاه یادگیری، مفهوم اصلی این است که زمانی که یادگیرنده دانش جدید را کسب می کند، در ساخت آن فعال است استفاده از مسائل باز-پاسخ در کلاس برای بهبود مباحث یادگیری-یاددهی ریاضی، که "رویکرد باز پاسخ" نامیده می شود در ژاپن در دهه ی ۷۰ میلادی توسعه یافت. بکر و شیمادا(۱۹۷۷؛ ترجمه ی NCTM، ۱۹۷۷) در طول مطالعات خود به دنبال روشی برای سنجش سطوح تفکر بودند که رویکرد باز-پاسخ را روش مفیدی برای آموزش و ارزیابی ریاضیات یافتند و این گونه تعریفی برای این دست مسائل ارائه دادند: مسائل رایج مورد استفاده در آموزش ریاضی در هر دو مقطع ابتدایی و متوسطه یک ویژگی مشترک دارند که یک و تنها یک پاسخ صحیح دارند. مسائل به گونه ای فرمول بندی شده اند که پاسخ ها صحیح یا غلط هستند و پاسخ صحیح یکتاست، این گونه مسائل را بسته یا کامل ۴ می نامیم.

پاسخ های چنین آزمون هایی بسیار پیچیده تر از نتایج آزمون های مرسوم استنباط می شود. ارزیابی پاسخ ها باید هم به صورت کیفی و هم کمی باشد؛ از این رو اکثر محققان با استفاده از چهار مولفه ی خلاقیت به ارزیابی پاسخ ها می پردازند (بکر و شیمادا، ۱۹۹۷؛ کلاویر و هرشکویتز، ۲۰۰۸). چهار مولفه ی خلاقیت که گیلفورد (۱۹۶۷) بیان می کند عبارتند از: سیالی<sup>۵</sup> توانایی شخص

1. Corresponding Author

2. Corresponding Author

3 -open-ended approach

4-complete

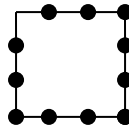
5- Fluency

برای خلاصه کردن تعداد زیادی راه حل که شرایط تکلیف را دارا باشند؛ -انعطاف پذیری<sup>۶</sup>: توانایی شخص برای تغییر یک روش تفکر به دیگری برای خلاصه کردن راه حل هایی که به دسته های متفاوت برمی گردد؛ -پیچیدگی<sup>۷</sup>: توانایی شخص برای با دقت شرح دادن ایده های داده شده، اضافه کردن جزییات به آن، گسترش آن با ابزاری از ترکیب ایده های اضافی و یا تصحیح آن؛ -بکر بودن<sup>۸</sup>: توانایی شخص برای برخورد با مساله داده شده در راه جدید و منحصر به فردی و استخراج راه حل های غیرمنتظره.

### ۳-روش

مسئله باز-پاسخ زیر همسو با مسائل کتاب های ابتدایی است و با دو مفهوم مساحت به عنوان فعالیت اصلی کارگاه مطرح گردید. به دلیل اهمیتی که تفکیک این دو مفهوم برای دانش آموزان ابتدایی دارد؛ دانش آموزان متوسطه اول فرمول هایی برای محیط و مساحت از این دوران به خاطر می آورند اما هنگام کاربرد آن در مسائل قادر به تفکیک محیط و مساحت در خواسته مسئله نیستند.

همان طور که در شکل می بینید با ۱۲ چوب کبریت مربعی به مساحت ۹ واحد مساحت ساخته ایم. آیا می توانید با استفاده از این ۱۲ چوب کبریت چندضلعی با مساحت ۵۸۹ بسازید.



تصویر ۱- مساله ی چوب کبریت (پهکون، ۱۹۹۷)

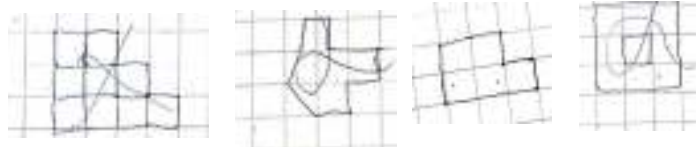
۴۷ شرکت کننده دوره به گروه های ۵ نفری تقسیم شدند؛ هر فرد یک برگ کاغذ شطرنجی جهت ثبت ایده های انفرادی و هر گروه یک کاربرگ شطرنجی دریافت کرد. این مسئله مطابق ۵ مرحله ی پیشنهادی خبیباح اجرا شد که در ادامه به اختصار به آن اشاره شده است.

الف- جهت دهی ۱۰: شروع یادگیری با انگیزه دادن به دانش آموزان آغاز می شود. ب- ارائه ی مساله ی باز: تلاش برای برقراری ارتباط، به ممکن ساختن این موضوع که هر یادگیرنده به مساله در برخی روش های معنادار خودش پاسخ دهد، منجر می شود. پ- مرحله ی انفرادی پاسخ گویی: این مرحله فرصتی برای به دست آوردن اطلاعات و افزایش خلاقیت فردی دانش آموز است. ت- بحث گروهی: این مرحله ی بررسی، باعث فهم عمیق و درک او از مساله شده و به شفاف شدن تفکر او در خصوص شیوه های موثر حل مساله و چگونگی ارتباط مساله و شیوه های مورد استفاده ی او به سایر مساله ها یا حوزه های ریاضی، کمک خواهد کرد. ث- ارائه ی نتیجه بحث گروهی: در بحث کلاسی، زمانی که دانش آموزان یافته های دیگران را می بینند یا روشی که سایر گروه ها استفاده کرده اند به مقایسه، آزمایش، اصلاح نتایج می پردازند و ایده هایشان گسترش می یابد. ج- جمع بندی ۱۱: معلم باید اشتراک گذاری راه حل ها را سازمان دهی کند تا دانش آموزان، دانش ریاضی مشارکتی مرتبط با هدف یادگیری را بسازند.

پس از اجرای مراحل و به اشتراک گذاری پاسخ ها در گروه و کلاس معیارهای خلاقیت ریاضی معرفی گردید و پاسخ برگ های فردی از لحاظ سیالی، انعطاف پذیری و بکر بودن ارزیابی شد.

#### ۴-یافته‌ها

۴-۱- این سوال یک مسئله برای مخاطبان محسوب می‌شود زیرا در پاسخ برگ‌های انفرادی تلاش و آزمون و خطا در پاسخ‌ها چالش برانگیزی آن را نشان می‌دهد.



تصویر ۲- نمونه ای از تلاش های ناموفق در پاسخ دهی انفرادی

۴-۲- مسئله زمینه بروز بدفهمی‌ها شکل گرفته در زمینه دانش پیشین ریاضی را فراهم می‌کند. نمونه های زیر بدفهمی مربوط به برابری قطر مربع واحد با ضلع آن و تعریف و ترسیم چندضلعی را در بین پاسخ ها نمایش می‌دهد.



تصویر ۳- نمونه ای از پتانسیل مسئله باز-پاسخ در بروز و اصلاح بدفهمی های پیشین

۴-۳- استفاده از ویژگی های و مفاهیم هندسی و ایجاد اتصال درون ریاضی با پاسخ برای تولید پاسخ های بیشتر در رقابت با سایر گروه‌ها.



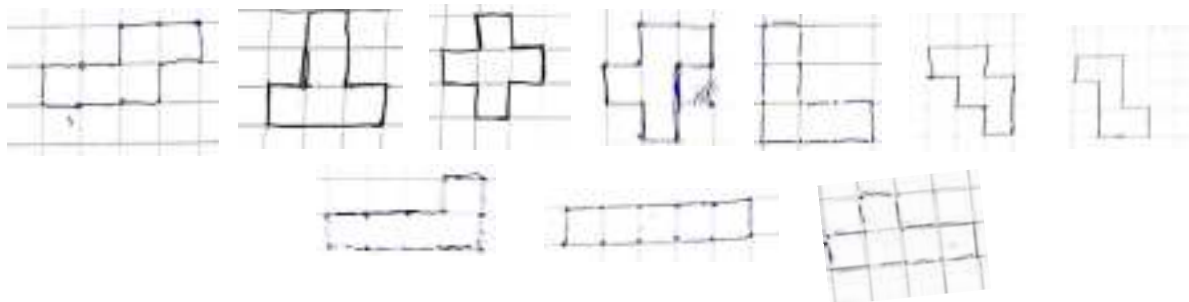
تصویر ۴- نمونه ای از کاربرد تبدیلات هندسی در تولید پاسخ های بیشتر

۴-۴- بدفهمی‌ها در ثبت نظرات گروه با استدلال رد شده بودند.



تصویر ۵- نمونه ای از اصلاح بدفهمی و حذف پاسخ های نادرست

۴-۵- برخی راه‌حلهایی ثبت شده در نتایج گروهی را هیچ‌یک از اعضا به تنهایی دست نیافته بودند، در واقع کنار هم قرار گرفتن نظرات آن‌ها، شاگردان را به راه‌های نو و مهارت‌های بیشتر در پاسخ‌گویی رسانده بود.



تصویر ۶- نمونه ای از گروهی انفرادی و گروهی

## ۵- بحث و نتیجه گیری

تغییر در شیوه‌های تدریس و کسب نتایج در آزمون‌های مختلف نیازمند زمان و تغییر در باور، مهارت و آگاهی برنامه‌ریزان، معلمان، والدین، کتب درسی و آزمون‌هاست. علم الهدایی (۱۳۸۸) اشاره می‌کند علی‌رغم نقص‌های روش‌های بسته و مزیت‌های روش باز، ترک روش اول و به کارگیری روش دوم به سادگی و کوتاه مدت ممکن به نظر نمی‌رسد؛ بنابراین، باید در یک برنامه‌ی میان مدت آموزشی با تلفیق منطقی و عملی از دو رویکرد مورد نظر، آرام و آرام به سمت و سوی روش‌های جدید یاددهی-یادگیری حرکت کرد.

دوره برگزار شده در خانه ریاضیات اصفهان تلاشی در جهت حرکت در این راستا بود تا با تغییر در باور معلمان به تغییر در باور و شیوه تفکر دانش‌آموزان باشد از سوی دیگر برای یک حرکت آرام و اثرگذار از تغییر و شکستن مسائل بسته کتاب درسی به مسائل باز به عنوان ابزار در دسترس برای معلمان بهره برد.

## ۶- منابع و مراجع

علم الهدایی، حسن (۱۳۸۸). اصول آموزش ریاضی. مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، چاپ اول.

- Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.) (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Guilford, J. P. (1959). Traits of creativity. In H. H. Anderson (Ed.), *Creativity and its cultivation* (pp. 142-161). New York: Harper & Brothers Publishers
- Pehkonen, Errki. (1997). *Use of open-ended problem in mathematics classroom*. Finland: University(Finland). Dept. of teacherEducation.
- Pehkonen, Errki. (1997). Use of problem fields as a method for educational change university of Helsinki, Finland. . *Psychology of Mathematics Education*, PME 17.

## دینامیکی گروه‌های اجتماعی و تحلیل پایداری آنها

مهدی فاتحی نیا\*؛ عضو هیات علمی گروه ریاضی محض، دانشگاه یزد، صندوق پستی ۸۹۱۵۸۱۸۴۱۱، یزد، ایران

fatehiniam@yazd.ac.ir

فضل‌الرحمان بشرمل، دانشجوی دکتری، گروه ریاضی محض، دانشگاه یزد، صندوق پستی ۸۹۱۵۸۱۸۴۱۱، یزد، ایران

F.Basharmal1984@yahoo.com

**چکیده:** این مقاله روی کاربرد مدل‌های دینامیکی بیماری‌های واگیردار در تحلیل دینامیک فعالیت گروه‌های اجتماعی تمرکز دارد. ابتدا از الگوی یکی از مدل‌های بیماری‌های واگیردار برای مدلسازی چگونگی شکل‌گیری گروه‌های اجتماعی و عضویت یا خروج شهروندان از این گروه‌ها بهره می‌بریم. در ادامه نقاط تعادل و رفتار مدارهای حاصل از سیستم از دیدگاه پایداری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از ابزارها و قضیه‌های نظریه انشعاب، وجود یا عدم وجود انشعاب نسبت به پارامترهای موثر سیستم را بررسی می‌کنیم. برای تأیید درستی نتایج نظری به دست آمده، نمای فاز سیستم در حالت‌های مختلف شبیه سازی شده است. در انتها نتایج ریاضی مدل مورد استفاده را برای تحلیل چگونگی فعالیت گروه‌های اجتماعی در جامعه به کار برده ایم.

**کلمات کلیدی:** مدل بیماری‌های واگیردار، انشعاب، نقاط تعادل، پایداری، دینامیک گروه‌های اجتماعی

### ۱ مقدمه

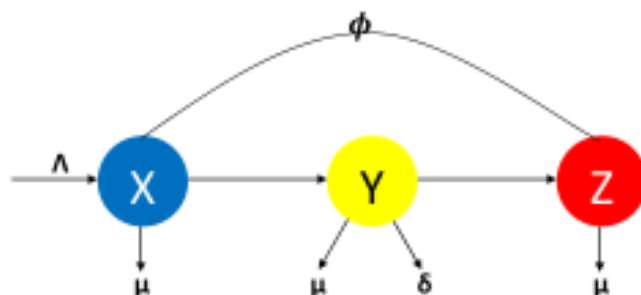
فرهنگ و اجتماع دو مقوله درهم تنیده هستند و آنچه در اجتماع به وقوع می‌پیوندد، در بستر فرهنگ است. از این رو، می‌توان هر یک از پدیده‌های اجتماعی و فرهنگ رابطه‌ای علت و معلولی برقرار کرد و گفت که جامعه و فرهنگ دو عنصر جدایی‌ناپذیر از یکدیگر هستند. وجود گروه‌های سازمان‌یافته غیرمسئول و بعضاً تبهکار نیز، به عنوان پدیده‌ای اجتماعی و محصول زندگی جمعی انسان‌ها، از این قاعده مستثنی نیست [۴]. عواملی نظیر نوع روابط انسانی حاکم بر جامعه، چگونگی ارتباط‌گیری و عضوگیری گروه‌های سازمان‌یافته، عوامل موثر بر آسیب‌پذیری افراد جامعه و جذب آنها توسط گروه‌های غیرمسئول یا خروج آنها از این گروه‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در این معضل و ابعاد گوناگون آن دارند. روش "مدل‌سازی سیستمی" یکی از روکردهای اصلی مدل‌سازی ریاضی برای مطالعه سیستم‌های اجتماعی است که خصوصیات سیستم‌ها و تغییرات آنها را در گذشت زمان بررسی می‌کند این رویکرد بیش از رفتارهای فردی بر مؤلفه‌ها و متغیرهای سیستمی متمرکز می‌شود.

در این مقاله از یک نوع مدل  $SIR$  برای مدل‌سازی شکل‌گیری و فعالیت گروه‌ها و جنبش‌های اجتماعی استفاده شده است. در ادامه نقاط تکین و رفتار مدارها در اطراف ۱۰۸ کین مورد بررسی قرار قرار گرفته است. در ادامه بر روی

پایداری و شرایط بروز انشعاب در زیر سیستم دو بعدی مرتبط متمرکز شده‌ایم. پارامتر اصلی برای بروز انشعاب نرخ ورود شهروندان در گروه انتخاب شده است. در نهایت کاربرد نتایج نظری به دست آمده در دنیای واقعی مورد بحث قرار گرفته است.

## ۲ مدل فعالیت گروه‌های اجتماعی:

مدل مورد استفاده این تحقیق بر اساس مفروضات زیر فرمول‌بندی شده است. ما مکانی (جامعه یا کشور یا ایالت) با جمعیت کل  $N$  در مدت زمان  $t$  شکل‌گیری یا فعالیت یک پدیده اجتماعی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید جمعیت کل را به سه دسته مجزا تقسیم می‌کنیم، که عبارت از طبقه مستعد  $X$ ، اعضای فعال در گروه  $Y$  و طبقه افرادی که به دلایل مختلف امکان پیوستن به گروه از طرف آنها وجود ندارد  $Z$  می‌باشند. دینامیک روابط بین این دسته‌ها به عنوان متغیرهای اصلی به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود. افراد با نرخ  $\Lambda$  به دسته افراد مستعد می‌روند،  $\beta$  نرخ ورود افراد به گروه،  $\mu$  نرخ مرگ و میر طبیعی،  $\gamma$  نرخ حرکت افراد از دسته  $Y$  به دسته  $Z$ ،  $\delta$  میزان مرگ و میر ناشی از خشونت‌های اجتماعی،  $\phi$  میزان رفتن افراد از دسته  $X$  به دسته  $Z$ ، و در نهایت  $\alpha$  نرخ کاهش جمعیت گروه بر اثر اقدامات نیروهای دولتی است. بر اساس این مفروضات و فرمول‌ها، یک مدل ریاضی ارائه شده را در معادله زیر به دست می‌آوریم.



شکل ۱: مدل ارتباط بین جمعیت گروه‌های عضو، مستعد به عضویت و غیر آسیب‌پذیر در برابر گروه‌های اجتماعی [۳].

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= \Lambda - (\mu + \phi)X - \beta XY \\
 \frac{dY}{dt} &= \beta XY - (\gamma + \delta + \alpha + \mu)Y \\
 \frac{dZ}{dt} &= \phi X + (\gamma + \alpha)y - \mu z
 \end{aligned} \tag{۱}$$

مدل ۱ سیستم دینامیکی است که دینامیک گروه‌های اجتماعی را توصیف می‌کند. از این رو، انتظار می‌رود که تحلیل این مدل درک ما را از یک دینامیک سیستم‌های اجتماعی در حضور یا عدم وجود اقدامات و پارامترهای موثر بهبود بخشد.

در مدل تغییرات این سیستم دارای دو نقطه تعادل می‌باشد. که عبارت از  $(X_0 = \frac{\Lambda}{\mu + \phi}, Y_0 = 0, Z_0 = 0)$  و  $q_0$

نقطه  $q_0$  وضعیتی است  $R_0 = \frac{\beta X_0}{\gamma + \delta + \alpha + \mu}$  می‌باشد.  $q_1 = (X^* = \frac{X_0}{R_0}, Y^* = \frac{\mu + \phi}{\beta}(R_0 - 1), Z^* = \frac{\gamma Y^*}{\mu})$  بوده و

که هنوز گروه یا جنبش اجتماعی شکل نگرفته است اما بخشی از جامعه مستعد پیوستن به چنین پدیده‌ای هستند و در صورت شکل‌گیری هسته اولیه گروه احتمال پیوستن  $10^9$  ن به نرخ  $\beta$  برای این افراد وجود دارد. نقطه تعادل  $q_1$  وضعیتی است که گروه شکل گرفته و فعال است و بخشی از جامعه مستعد نیز به آن پیوسته‌اند.

## ۱.۲ قضیه:

اگر  $1 < \frac{\beta X_0}{\gamma + \delta + \alpha + \mu}$  آنگاه نقطه تعادل  $q_0$  پایدار است.

## ۲.۲ قضیه:

اگر  $1 > \frac{\beta X_0}{\gamma + \delta + \alpha + \mu}$  آنگاه نقطه تعادل  $q_1$  وجود دارد و پایدار است. در این حالت نقطه تعادل  $q_0$  نیز ناپایدار خواهد بود.

## ۳ پایداری و انشعاب نقاط تعادل:

در این بخش نقاط تعادل سیستم ۲ پایداری آن‌ها بر اساس تغییرات پارامتر  $\beta$  بررسی می‌شود. در مدل ۱ تغییرات  $X$  و  $Y$  به تغییرات  $Z$  وابسته نیست. از این رو می‌توانیم دستگاه دوی بعدی زیر را برای مطالعه تغییرات جمعیت عضو گروه و جمعیت دسته مستعد پیوستن به گروه در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \Lambda - (\mu + \phi)X - \beta XY \\ \frac{dY}{dt} &= \beta XY - (\gamma + \delta + \alpha + \mu)Y\end{aligned}\quad (2)$$

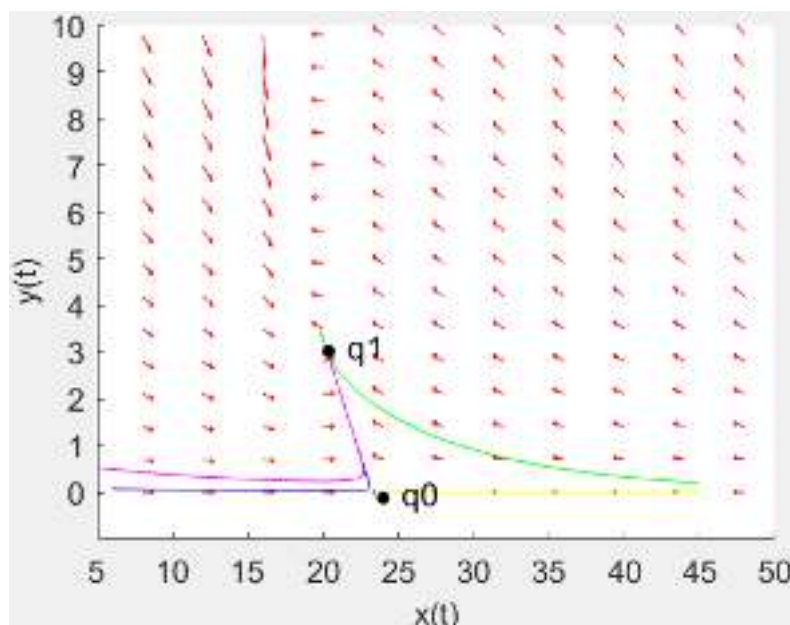
پارامتر  $\beta$  نشان دهنده نرخ پیوستن افراد دسته مستعد به گروه یا جنبش اجتماعی شکل گرفته را نشان می‌دهد. از این رو بررسی انشعاب‌های سیستم نسبت به این پارامتر دارای اهمیت است. در نقطه تعادل مقادیر ویژه حاصل از ماتریس ژاکوبی مربوط عبارتند از  $\lambda_1 = -(\mu + \phi)$  و  $\lambda_2 = (\gamma + \alpha + \delta + \mu)$  بدیهی است که  $\lambda_1$  همواره منفی است. از این رو پایداری نقطه تعادل  $q_0$  به مقدار ویژه  $\lambda_2$  وابسته است. اگر  $R_0 = \frac{\beta X_0}{\gamma + \alpha + \delta + \mu} < 1$  باشد، این نقطه مجانباً پایدار است و اگر  $R_0 > 1$  باشد، آنگاه نقطه  $q_0$  ناپایدار از نوع زینی است. رفتار مدارها در اطراف نقاط تعادل و پایداری این نقاط در شکل ۲ نشان داده شده است. پس این نقطه تعادل برای این مقادیر نقطه تعادل ناپایدار از نوع زینی می‌باشد. با توجه به این که شرایط قضیه سوتومایور برای سیستم ۲ برقرار است. برای بررسی انشعاب‌های سیستم قضیه زیر را داریم.

## ۱.۳ قضیه:

سیستم ۲ نسبت به تغییرات پارامتر  $\beta$  در نقطه تعادل  $q_0$  دارای انشعاب تبادل پایداری است.

## ۴ بحث و نتیجه‌گیری

در علوم اجتماعی هر پدیده و یا متغیر مرتبط با رفتار انسانی، تحت تاثیر عوامل بشماري قرار دارد که لزوماً همه متغیرهایی را که ممکن است پدیده مورد مطالعه را تحت تاثیر قرار دهد در بر نمی‌گیرد. از این رو برای مطالعه دینامیک گروه‌های اجتماعی و مقابله با پدیده تشکیل گروه‌های منحرف و تندرو باید به پارامترها و متغیرهای شکل‌گیری و گسترش این گروه‌ها در سطح جامعه توجه نمود. در این ۱۱ له روابط بین پارامترها و متغیرهای موثر در تشکیل یک پدیده اجتماعی به صورت یک مدل ریاضی استخراج شد. نتایج ریاضی حاصل از این مدل از جمله نقاط تعادل و



شکل ۲: این شکل بر اساس مقادیر پارامتری  $\mu = 0.5$ ،  $\theta = 0.004$ ،  $\gamma = 0.5$ ،  $\Lambda = 12$ ،  $\beta = 0.045$  شبیه‌سازی شده است.

نوع آنها از حیث پایداری در تحلیل فعالیت گروه و پدیده‌های اجتماعی دارای کاربرد است که در نسخه کامل مقاله به تفصیل خواهد آمد.

## مراجع

- [1] Z. Malicki, Mathematical Model of Radicalization And Terrorism Dynamics in the Central Sahel. pp. 1-18. Febuary. 2023.
- [2] P. E. Johnson, Formal theories of politics: the scope of mathematical modelling in political science, Mathematical and Computer Modelling, 12. pp. 397-404. 1989.
- [3] O. C. Collins. Mathematical approach to the analysis of terrorism dynamics. pp. 1-12. Febuary. 2020.

[۴] ا. حاجیانی و م. کریمی شیروودی، راهبردهای ضدتروریسم در ایران: رویکرد فرهنگی، فصلنامه آفاق امنیت، سال هفتم، شماره ۲۳، ۱۳۹۳، ۶۶-۳۷.

[۵] ک. یزدان‌پناه درو، ریشه‌یابی عوامل ایجاد و رشد گروه‌های افراطی و تروریستی در منطقه غرب آسیا، فصلنامه محیط راهبردی، سال چهارم، شماره ۱۰، ۱۳۹۹، ۸۶-۵۳.

## بررسی حدس کلی-اولام در گراف مقسوم علیه صفر حلقه

اکبر مختاری دینانی \* عضو هیأت علمی گروه علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لنجان، صندوق پستی ۶۸۳۳۳-۸۴۷۴۱، لنجان، ایران

mokhtari@iauln.ac.ir

عادل تدین فر، فارغ التحصیل دکترا، گروه علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لنجان، صندوق پستی ۶۸۳۳۳-۸۴۷۴۱، لنجان، ایران

adeltadayyonfar@yahoo.com

**چکیده:** عرشی گراف  $G$ ،  $D(G)$ ، به عنوان چندمجموعه از زیرگراف های رأس-حذفی  $G$  تعریف می شود. هم چنین دو گراف را هایپومورف می نامیم، هرگاه دارای عرشی یکسانی باشند. حدس کلی-اولام بیان می کند که هر دو گراف هایپومورف با دست کم سه رأس یکریخت هستند. در این مقاله دسته ای از حلقه ها را مشخص می کنیم که حدس کلی-اولام برای گراف مقسوم علیه صفر آن ها برقرار باشد.

**کلمات کلیدی:** حدس کلی-اولام، گراف مقسوم علیه صفر، مقسوم علیه صفر حلقه.

### ۱ مقدمه

فرض کنیم  $n \geq 3$  و  $G$  و  $H$  دو گراف با گردایه ی رئوس، به ترتیب،  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  و  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  باشند. عرشی گراف  $G$  ( $H$ ) که آن را با  $D(G)$  ( $D(H)$ ) نشان می دهیم، گردایه ی همه ی گراف های رأس-حذفی  $G \setminus \{v_i\}$  ( $H \setminus \{u_i\}$ ) است. اگر  $G \setminus \{v_i\} \cong H \setminus \{u_i\}$  برای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq n$  (در این حالت  $G$  و  $H$  را هایپومورف می نامند)، حدس کلی-اولام بیان می کند که  $G \cong H$ . این حدس توسط کلی و اولام در سال های ۱۹۵۷ و ۱۹۶۰، به ترتیب، در مقالات [۳] و [۷] بیان شد و تاکنون نیز برای گراف های متناهی غیرجهت دار به عنوان یک مسأله ی باز مطرح است. یک گراف را  $r$ -بخشی می نامند، هرگاه رئوس آن را بتوان به  $r$  بخش مجزا به گونه ای تقسیم کرد که بین دو رأس از هر بخش آن هیچ یالی موجود نباشد. هم چنین گراف  $r$ -بخشی را کامل می گویند، هرگاه هر دو رأس از دو بخش گوناگون مجاور باشند.

هدف در این مقاله، ارایه ی شماری از حلقه ها است که گراف مقسوم علیه صفر آن ها در حدس کلی-اولام صدق کند. در طول این مقاله،  $p$  را عدد اول در نظر می گیریم و حلقه ی  $R$  میدان نیست. هم چنین مقصود از یک  $p$ -حلقه، حلقه ای متناهی است که اندازه ی آن توانی از عدد اول  $p$  باشد. حلقه ی  $R$  را نیز تحویل یافته می نامیم، هرگاه عنصر پوچ توانی نداشته باشد.

ساییدوسی در [۴] گراف  $X$  - جمع گردایه‌ای از گراف‌های  $\{X_x\}_{x \in V(X)}$  را تعریف کرد. این گراف با جای‌گزینی گراف  $X_x$  به جای هر رأس  $x$  از  $V(X)$  و درج تمام یا هیچ‌یک از یال‌های ممکن بین رئوس  $X_x$  و  $X_y$  بسته به این‌که  $x$  و  $y$  توسط یک یال در  $X$  با هم مجاورند یا خیر، به دست می‌آید. هنگامی‌که تمامی  $X_x$  ها، برای هر  $x \in V(X)$ ، گراف تهی باشد، از عبارت  $X$  - جمع تهی برای نام‌گذاری آن استفاده می‌کنیم. آشکار است که یک گراف  $X$  - جمع تهی، یک گراف  $r$  - بخشی کامل است که در آن  $r \leq |V(X)|$ . خوانندگان علاقه‌مند برای اطلاعات بیش‌تر در این موضوع می‌توانند به [۵] مراجعه کنند.

گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی  $R$ ، گرافی است که در آن رئوس، مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه به جز ۰ است و یک یال بدون جهت بین دو رأس متمایز  $x$  و  $y$  وجود دارد، اگر و تنها اگر  $xy = 0$  یا  $yx = 0$ . گراف مقسوم‌علیه صفر  $R$  را با  $\Gamma(R)$  نشان می‌دهیم. این تعریف، برای نخستین بار در مقاله‌ای توسط اندرسون و لیوینگستون [۲] برای حلقه‌های جابه‌جایی ظاهر شد. گراف مقسوم‌علیه صفر یک از حلقه‌ی  $R$  را با  $\Gamma_{B,l}(R)$  نشان می‌دهیم که گردایه‌ی رئوس آن  $R$  بوده و  $\{xy \mid xy = 0 \text{ or } yx = 0\}$  به عنوان گردایه‌ی یال‌هایش شناخته می‌شود. دو قضیه‌ی زیر در توصیف گراف مقسوم‌علیه صفر  $p$  - حلقه، گراف  $r$  - بخشی کامل است که اندازه‌ی هر بخش آن توسط  $p - 1$  شمرده می‌شود.

اثبات. به [۶] رجوع شود.

□

نتیجه ۲. گراف مقسوم‌علیه صفر یک  $p$  - حلقه‌ی تحویل‌یافته را می‌توان به صورت گراف  $X$  - جمع تهی نوشت که اندازه‌ی هر بخش آن را  $p - 1$  می‌شمارد.

اثبات. به [۶] رجوع شود.

□

## ۲ حلقه‌هایی که گراف مقسوم‌علیه صفر آن‌ها در حدس کلی - اولام صدق می‌کند

نتیجه‌ی اصلی این مقاله در قضیه‌ی بعد در مورد گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ها آمده است. حلقه‌ای را که در قسمت (ث) آمده، راجع به حدس بک است.

قضیه ۳. گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های زیر در حدس کلی - اولام صدق می‌کنند.

الف) حلقه‌های مرتبه‌ی  $p$  و  $p^2$ ،

ب) حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلی  $2 \times 2$  روی میدان‌های متناهی،

پ)  $p$  - حلقه‌های تحویل‌یافته که  $p \geq 5$ ،

|                                                                                |                                                              |                                                                   |                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $F_4 \times F_9$                                                               | $\frac{Z_2[x]}{\langle x^3 \rangle}$                         | $Z_8$                                                             | $Z_6$                                              |
| $Z_5 \times F_8$                                                               | $\frac{Z_4[x]}{\langle 2, x \rangle^2}$                      | $\frac{Z_2[x, y]}{\langle x, y \rangle^2 - 2}$                    | $\frac{Z_4[x]}{\langle 2x, x^2 - 2 \rangle}$       |
| $Z_4 \times \frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$                                | $Z_2 \times F_4$                                             | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle}$                      | $\frac{F_4[x]}{\langle x^2 \rangle}$               |
| $\frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle} \times \frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$ | $Z_2 \times Z_4$                                             | $Z_3 \times F_4$                                                  | $Z_2 \times Z_5$                                   |
| $F_4 \times Z_5$                                                               | $Z_{16}$                                                     | $Z_3 \times \frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$                   | $Z_3 \times Z_4$                                   |
| $\frac{Z_4[x]}{\langle 2x, x^3 \rangle}$                                       | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^2 + 2x + 2 \rangle}$                | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^2 + 2 \rangle}$                          | $\frac{Z_2[x]}{\langle x^4 \rangle}$               |
| $Z_4 \times Z_4$                                                               | $\frac{Z_8[x]}{\langle 2x, x^2 \rangle}$                     | $\frac{Z_2[x, y]}{\langle x^3, xy, y^2 \rangle}$                  | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^3 - 2, 2x^2, 2x \rangle}$ |
| $Z_2 \times Z_7$                                                               | $\frac{Z_8[x]}{\langle 2x, x^2 + 4 \rangle}$                 | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^2 + 2x \rangle}$                         | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^3, 2x^2, 2x \rangle}$     |
| $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$                                                    | $\frac{Z_4[x, y]}{\langle x^2, y^2, xy - 2, 2x, 2y \rangle}$ | $\frac{Z_4[x, y]}{\langle x^2, y^2 - xy, xy - 2, 2x, 2y \rangle}$ | $\frac{Z_2[x, y]}{\langle x^2, y^2 - xy \rangle}$  |
| $Z_2 \times \frac{Z_2[x, y]}{\langle x, y \rangle^2}$                          | $\frac{Z_4[x, y]}{\langle x^2 - 2, xy, y^2, 2x, 2y \rangle}$ | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^2 \rangle}$                              | $\frac{Z_2[x, y]}{\langle x^2, y^2 \rangle}$       |
| $Z_2 \times \frac{Z_4[x]}{\langle 2, x \rangle^2}$                             | $\frac{F_8[x]}{\langle x^2 \rangle}$                         | $\frac{Z_4[x, y]}{\langle x^2, y^2, xy, 2x, 2y \rangle}$          | $\frac{Z_2[x, y, z]}{\langle x, y, z \rangle^2}$   |
| $Z_2 \times \frac{Z_4[x]}{\langle 2x, x^2 - 2 \rangle}$                        | $Z_3 \times Z_7$                                             | $Z_2 \times F_8$                                                  | $\frac{Z_4[x]}{\langle x^3 + x + 1 \rangle}$       |
| $Z_2 \times \frac{Z_2[x]}{\langle x^3 \rangle}$                                | $\frac{Z_9[x]}{\langle 3x, x^2 - 6 \rangle}$                 | $\frac{Z_9[x]}{\langle 3x, x^2 - 3 \rangle}$                      | $Z_{27}$                                           |
| $Z_2 \times Z_8$                                                               | $\frac{Z_9[x]}{\langle 3, x \rangle^2}$                      | $\frac{Z_3[x, y]}{\langle x, y \rangle^2}$                        | $\frac{Z_3[x]}{\langle x^3 \rangle}$               |
| $Z_5 \times \frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$                                | $Z_2 \times F_9$                                             | $\frac{Z_9[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$                          | $\frac{F_9[x]}{\langle x^2 \rangle}$               |
| $Z_5 \times Z_4$                                                               | $Z_2 \times Z_2 \times Z_3$                                  | $F_4 \times Z_7$                                                  | $Z_3 \times F_8$                                   |
| $Z_2 \times \frac{Z_3[x]}{\langle x^2 \rangle}$                                | $Z_3 \times F_9$                                             | $\frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle} \times F_4$                   | $Z_4 \times F_4$                                   |
| $Z_2 \times Z_9$                                                               | $Z_2 \times Z_{11}$                                          | $Z_5 \times Z_7$                                                  | $F_4 \times F_8$                                   |
|                                                                                | $F_4 \times F_4$                                             | $Z_3 \times Z_5$                                                  | $Z_2 \times \frac{Z_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$    |

ث) حلقه‌ی  $\frac{Z_4[x_1, x_2, x_3, x_4]}{I}$  که ایده‌آل  $I$  در آن برای هر  $\alpha_i, \beta_{i,j} \in \{0, 2\}$  به فرم

$$\langle 2x_i, x_i^2 - \alpha_i, x_i x_j - \beta_{i,j} \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4 \rangle$$

است.

اثبات. به [۶] رجوع شود.

□

### ۳ نتایج

در این مقاله سه دسته‌ی نامتناهی از حلقه‌ها (بخش‌های الف)، (ب) و (پ) از قضیه‌ی ۳، یک دسته‌ی متناهی (بخش ث) از قضیه‌ی ۳ و ۷۵ حلقه‌ی پراکنده (بخش ت) از قضیه‌ی ۳ را مشخص کرده‌ایم که گراف مقسوم‌علیه صفر آن‌ها در حدس کلی-اولام صدق می‌کند.

### مراجع

- [1] J.F. Fuller, E.F. Fuchs, and K.J. Roesler, "Influence of .....nics on power distribution system protection," IEEE Trans. Power Delivery, vol. 3, pp. 549-557, Apr. 1988.



- [2] D.F. Anderson and P.S. Livingston, "The zero-divisor graph of a commutative ring," J. Algebra, vol. 217, no. 2, pp. 434-447, 1999.
- [3] P.J. Kelly, "A congruence theorem for trees," Pacific J. Math., vol. 7, no. 1, pp. 961-968, 1957.
- [4] G. Sabidussi, "Graph Derivatives," Math. Z., vol. 76, pp. 385-401, 1961.
- [5] A. Tadayyonfar and A.R. Ashrafi, "The automorphism group of the reduced complete-empty  $X$ -join of graphs," J. Algebraic Structures and Their Appl., vol. 6, no. 2, pp. 21-38, 2019.
- [6] A. Tadayyonfar, A. Mokhtari Dinani and A. Amotaghi, "Some recognizable properties of graphs," 2024, Submitted.
- [7] S.M. Ulam, "A collection of mathematical problems," Wiley (Interscience), New York, 1960.

# مسیرها و دورها در بازسازی گراف از روی زیرگراف‌های تک‌رأس-حذفی

اکبر مختاری دینانی\* عضو هیأت علمی گروه علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لنجان، صندوق پستی ۶۸۳۳۳-۸۴۷۴۱، اصفهان، ایران

mokhtari@iauln.ac.ir

عادل تدین‌فر، فارغ‌التحصیل دکتری، گروه علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لنجان، صندوق پستی ۶۸۳۳۳-۸۴۷۴۱، اصفهان، ایران

adeltadayyonfar@yahoo.com

**چکیده:** در این مقاله، ثابت می‌کنیم برای دو گراف هایپومورف ساده‌ی متناهی با دست‌کم سه رأس، شمار  $l$ -مسیرها،  $l$ -ژئودزی‌ها و  $k$ -دورها در هر دو گراف با هم برابر است، که در آن  $1 \leq l \leq n-1$  و  $3 \leq k \leq n$ . هم‌چنین قضایایی راجع به ویژگی گراف‌های مثلث‌بندی‌شده، خالی از  $k$ -دور، کمر-بیشینه، همیلتونی، اویلری و غیره را برای بازسازی گراف، بیان می‌داریم.

## کلمات کلیدی:

حس بازسازی، مسیر، دور، گراف همیلتونی، گراف اویلری.

## ۱ مقدمه

یک چندگردایه از همه‌ی زیرگراف‌های رأس-حذفی گراف  $X$  را عرشه‌ی آن نامیده و با  $D(X)$  نشان می‌دهیم. دو گراف  $X$  و  $Y$  هنگامی که دارای عرشه‌ی یک‌سانی باشند، هایپومورفیک نامیده می‌شوند و از نماد  $X \cong Y$  بدین منظور استفاده می‌شود. یک ویژگی گراف را تشخیص‌پذیر می‌نامیم هرگاه بتوان آن را از روی عرشه‌اش به‌دست آورد.

مسیر و دور به‌طول  $n$  را، به‌ترتیب، در یک گراف با  $P_n$  و  $C_n$  نشان می‌دهیم.  $l$ -مسیر،  $r$ -ژئودزی و  $k$ -دور در گراف  $X$ ، مسیر، ژئودزی و دوری به‌طول‌های، به‌ترتیب،  $l$ ،  $r$  و  $k$  است. قطر ( $diam$ ) یک گراف نیز بیشینه عدد خروج از مرکز هر رأس است، که در آن خروج از مرکز رأس  $v$ ،  $\varepsilon(v)$ ، بزرگ‌ترین فاصله‌ی بین  $v$  و با رئوس دیگر است. رأس پیرامونی  $v$ ، رأسی است که  $\varepsilon(v) = diam(X)$ . علاوه‌بر این، طول کوتاه‌ترین دور،  $gr(X)$ ، و بلندترین دور،  $circ(X)$ ، به‌ترتیب، کمر و محیط  $X$  نامیده می‌شود. یک گراف را (ابر)مثلث‌بندی‌شده می‌نامیم، هرگاه هر رأس (یال) آن روی یک مثلث قرار بگیرد. افزون‌بر این، گراف مکمل  $X$  را با  $X^c$  نشان می‌دهیم. هم‌چنین  $X$  را کمر-بیشینه می‌نامیم، هرگاه برای هر یال  $e$  از  $X^c$ ،  $gr(X \cup \{e\}) < gr(X)$  ۱۱۶ است که گراف‌های کمر-بیشینه، آزاد از مثلث هستند.

کلی در سال 1957 در [۲] نشان داد که دو درخت هایپومورف یکریخت هستند. پس از وی اولام یکریخت بودن گراف های هایپومورف را مورد پرسش قرار داد [۵]. البته حدس کلی-اولام در مورد گراف های نامتناهی و جهت دار درست نیست. برای مطالعه ی بیش تر در این زمینه و یافتن مثال های نقض، مقالات [۳] و [۵] پیشنهاد می شود. در طول مقاله، فرض می کنیم  $n \geq 3$  و  $G$  و  $H$  دو گراف برجسب دار با گردایه ی رئوس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  و  $\{u_1, \dots, u_n\}$ ، به ترتیب، هستند به گونه ای که برای هر  $i$ ،  $1 \leq i \leq n$ ،  $G \setminus \{v_i\} \cong H \setminus \{u_i\}$ ، برای سادگی، قرار می دهیم که  $G_i = G \setminus \{v_i\}$  و  $H_i = H \setminus \{u_i\}$ .

بیش ترین و کم ترین درجه ی رأس در گراف  $X$  را، به ترتیب، با  $\Delta(X)$  و  $\delta(X)$  نشان می دهیم. هم چنین اگر  $x$  رأسی از  $X$  باشد، آنگاه شمار زیرگراف های القایی  $X$  و شمار زیرگراف های القایی  $X$  را که شامل  $x$  هست، به ترتیب، با  $S_X$  و  $S_X(x)$  نشان می دهیم. برای مطالعه ی بیش تر و آشنایی با دیگر نمادها و تعاریف در نظریه ی گراف [۱] پیشنهاد می شود.

لم ۱. اگر  $G \cong H$ ، آنگاه

$$|E(G)| = |E(H)| \quad (\text{الف})$$

$$\deg_G(v_i) = \deg_H(u_i) \quad (\text{ب})$$

پ)  $G$  و  $H$  دنباله ی درجه ی یکسانی دارند،

ت)  $G$  اویلری است، اگر و تنها اگر  $H$  اویلری باشد،

$$\Delta(G) = \Delta(H) \quad (\text{ث})$$

$$\delta(G) = \delta(H) \quad (\text{ج})$$

$$S_G = S_H \quad (\text{چ})$$

$$S_G(v_i) = S_H(u_i), 1 \leq i \leq n \quad (\text{ح})$$

اثبات. به [۲]، [۴] و [۶] رجوع شود.

□

بخش های (چ) و (ح) از لم ۱ به کلی معروف است. شمار مسیرها، ژئودزی ها و دوره های به طول  $l$  را در گراف  $X$ ، به ترتیب، با  $p_X(l)$ ،  $sp_X(l)$  و  $c_X(l)$  نشان می دهیم. افزون بر این، شمار مسیرها، ژئودزی ها و دوره های به طول  $l$  را که شامل رأس  $x$  از گراف  $X$  است، به ترتیب، با  $p_X(x, l)$ ،  $sp_X(x, l)$  و  $c_X(x, l)$  نشان خواهیم داد. لم ۲. برای هر  $l$  که  $1 \leq l \leq n-1$  و هر  $k$  که  $3 \leq k \leq n$ ، روابط زیر برقرار است.

$$\sum_{i=1}^n p_G(v_i, l) = (l+1)p_G(l) \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{i=1}^n sp_G(v_i, l) = (l+1)sp_G(l) \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=1}^n c_G(v_i, k) = kc_G(k) \quad (\text{پ})$$

اثبات. به [۴] رجوع شود.

□

## ۲ نقش مسیرها و دورها در بازسازی گراف

قضیه ۳. فرض کنیم  $1 \leq l \leq n-1$ ,  $1 \leq i \leq n$  و  $3 \leq k \leq n$ . در این صورت روابط زیر برقرار است.

الف)  $p_G(l) = p_H(l)$

ب)  $p_G(v_i, l) = p_H(u_i, l)$

پ)  $sp_G(l) = sp_H(l)$

ت)  $sp_G(v_i, l) = sp_H(u_i, l)$

ث)  $c_G(k) = c_H(k)$

ج)  $c_G(v_i, k) = c_H(u_i, k)$

چ)  $diam(G) = diam(H)$

ح)  $circ(G) = circ(H)$

خ)  $gr(G) = gr(H)$

د)  $G$  همیلتنی است، اگر و تنها اگر  $H$  همیلتنی باشد،

ذ)  $G$  یک گراف مثلث بندی شده است، اگر و تنها اگر  $H$  نیز مثلث بندی شده باشد،

ر)  $G$  یک گراف دوبخشی است، اگر و تنها اگر  $H$  نیز دوبخشی باشد،

ز)  $G$  یک گراف تک دور است، اگر و تنها اگر  $H$  نیز تک دور باشد،

ژ)  $G$  یک گراف آزاد از  $k$ -دور است، اگر و تنها اگر  $H$  نیز آزاد از  $k$ -دور باشد،

س)  $G$  یک گراف آزاد از مثلث است، اگر و تنها اگر  $H$  نیز آزاد از مثلث باشد،

ش)  $G$  یک گراف کمر-بیشینه است، اگر و تنها اگر  $H$  نیز کمر-بیشینه باشد.

اثبات. قسمت های (الف) تا (ج) به کمک لم ۴؟ و [۴] اثبات می شود. برای بررسی قسمت (چ)، از برهان خلف کمک می گیریم و فرض می کنیم که بدون کم شدن از کلیت مسأله،  $diam(H) < diam(G)$ . بنابراین یک ژئودزی به طول  $diam(H)$  در گراف  $H$  بایستی موجود باشد. اما طبق قسمت (پ) همین قضیه، در گراف  $G$  نیز ژئودزی از همین اندازه وجود خواهد داشت که با قطر  $G$  در تناقض است. قسمت های (ح)، (خ)، (د)، (ژ) و (س) نیز مستقیماً از روی قسمت (ث) همین قضیه نتیجه می شوند. قسمت (ذ) نیز از روی قسمت (ج) همین قضیه اثبات می شود. برای بررسی قسمت (ر) بایستی توجه داشته باشیم که طبق قضیه ۱۰.۵.۱ از [۱]، گراف های دوبخشی دور فرد ندارند. پس (ر) نیز از روی قسمت (ث) به سادگی به دست می آید. در نهایت، برای اثبات قسمت (ش)، از قسمت (ژ) همین قضیه و قرار دادن  $k=3$  بهره می گیریم.



### ۳ نتایج

در این مقاله بازسازی یک گراف ساده را از روی زیرگراف‌های تک‌رأس حذفی بیان کردیم و سابقه‌ی آن‌را که به حدس کلی-اولام شهره است، معرفی نمودیم. سپس رابطه‌ی این مفهوم را با انواع شاخص دورها، مسیرها، کوتاه‌ترین مسیرها، قطر، کمر، محیط و گراف‌های اویلری، همیلتونی، مثلث‌بندی‌شده، دوبخشی، تک‌دور، آزاد از مثلث، آزاد از  $k$ -دور و کمر-بیشینه مشخص ساختیم. به‌عنوان یک پرسش باز هنوز مطرح است که «آیا اگر  $G$  ابرمثلث‌بندی‌شده باشد، گراف  $H$  نیز همین‌طور است؟»

### مراجع

- [1] R. Balakrishnan and K. Ranganathan, "A textbook of graph theory," Second edition, Universitext, Springer, New York, 2012.
- [2] P.J. Kelly, "A congruence theorem for trees," Pacific J. Math., vol. 7, no. 1, pp. 961-968, 1957.
- [3] C.St.J.A. Nash-Williams, "Reconstruction of infinite graphs," Discrete Math., vol. 95, no. 1-3, pp. 221-229, 1991.
- [4] A. Tadayyonfar, A. Mokhtari Dinani and A.R. Amotaghi, "Some recognizable properties of graphs," 2024, Submitted.
- [5] S.M. Ulam, "A collection of mathematical problems," Wiley (Interscience), New York, 1960.
- [6] N.T. Wall, "On the reconstruction conjecture," Master dissertation, University of North Carolina, 2008.



## پارادوکس تحول علوم انسانی و آموزش ریاضی در ایران

علی مروت پور<sup>۱</sup> \*

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران.  
Email: alimorovvat@yahoo.com

چکیده. این مقاله ضمن برشمردن برخی از مؤلفه‌های تحول علوم انسانی که در اعصار مختلف مورد تأکید بزرگان علم و فلسفه بوده است، با توجه به شرایط حال حاضر کشورمان و تأکید بر تحول علوم انسانی، به بررسی نقش اهمیت و جایگاه تفکر و آموزش ریاضی در این فرآیند می‌پردازیم و در پایان متناسب با شرایط حال حاضر کشورمان پیشنهاداتی در راستای اهداف این برنامه ارائه می‌کنیم.  
واژه‌های کلیدی: تحول علوم انسانی، آموزش ریاضی، تفکر ریاضی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 97A40, 97E20, 97D70.

### ۱. مقدمه

تحول در علوم انسانی به دلیل این‌که از جنبه‌های گوناگون مبنای اعتلای انسان‌ها و در نهایت جوامع انسانی است از دیرباز مورد توجه اندیشمندان حوزه تفکر بوده است. در این راستا تاریخ تحولات علوم انسانی در اروپا را می‌توان به چهار دوره تقسیم کرد. دوره ی باستان (که تحت تأثیر تفکرات اندیشمندان یونان باستان چون افلاطون، سقراط، ارسطو، اقلیدس و دیگر دانشمندان آن دوران است)، قرون وسطی (که بدون مبالغه آن را می‌توان دوران حکومت بی چون و چرای کلیسا بر عقاید، باورها و افکار جامعه نام برد)، دوره رنسانس (دوره خردگرایی و ماده‌گرایی) و سرانجام دوران مدرن (دوره اتکای به توانائی‌های فردی و پس‌زدن سنت). در ایران نیز مقارن با دوره‌های مختلف تلاش زیادی در جهت تحول و اعتلای علوم انسانی صورت گرفته است. در کلیه این تلاش‌ها، اندیشمندانی که پرچمدار این تحول بوده‌اند، بر نقش اساسی تفکر و اندیشه‌ی ریاضی از یک سو و آموزش ریاضیات از سوئی دیگر، تأکید ویژه‌ای داشته‌اند. افلاطون براین باور بود که علوم منظم و منطقی در افراد تأثیر تربیتی دارد. از دیدگاه او ریاضیات می‌تواند پایه و اساس تعلیم و تربیت کلی باشد از آن جهت که ریاضیات را ابزاری همگانی می‌دانست که انطباق دقیق فکر با اشیاء را در هر موردی تضمین می‌کند. افلاطون حقایق ریاضی را برای اثبات هر نوع حقیقت تجربی قابل استفاده می‌دانست و از نظر او اگر این حقایق ریاضی نبودند هیچ حقیقت عینی وجود نداشت و معرفت قطعی دست نمی‌داد و درواقع معرفت عینی را حاصل تجربه نمی‌دانست [۴، ۱]. نظام فلسفی باروخ اسپینوزا یکی از عمیق‌ترین نظام‌های فلسفی است. آرمان او ایجاد فلسفه‌ای مبنی بر قیاس ریاضی بود و سعی بر این داشت که استدلال تمام پدیده‌های جهان را دربرگیرد و در کتاب «اخلاقیات» خود در تلاش برای استفاده از یک نظام ریاضی برای داشتن یک زندگی خوب است [۶]. برتراند راسل ریاضی‌دان و فیلسوف شهیر انگلیسی در جایی می‌نویسد: «ریاضیات ما را دور از آن‌چه انسانی است به ضرورت مطلق می‌برد، که نه تنها بالفعل، بلکه هر جهان ممکن دیگری باید با آن در ارتباط باشد و در این جایگاه، منزل‌گاه ابدی خویش را می‌یابد در آن موقع است که به‌طور کافی اهمیت خطیر آن را درک می‌کنیم» [۵]. از دیگر اندیشمندان غربی می‌توان به گودل، فرگه، وایتهد، جان دیوئی، سرکارل ریموند پوپر، رنه دکارت، بنجامین بلوم، گادفری

\* علی مروت پور.

هارولد هاردی و تقریباً کلیه‌ی ریاضی‌دانان و اندیشمندان اشاره کرد که بر نقش انکارناپذیر عینی و ذهنی ریاضیات در تحول علوم و مبانی فکری بشر تأکید کرده‌اند.

در ادامه به برخی از باورهای اندیشمندان مسلمان و ایرانی در خصوص نقش غیرقابل انکار ریاضیات در اعتلای تفکر اسلامی-انسانی، نیز اشاره می‌کنیم. ابن خلدون بر این باور است که ابتدا باید خواندن، نوشتن و حساب کردن را یاد داد و پس از آن به آموزش قرآن و معنای آن پرداخت [۲]. این اندیشمند بزرگ اسلام در فضیلت علم هندسه می‌نویسد: «هندسه به خرد، فروغ و به اندیشه راستی می‌دهد. زیرا همه‌ی براهینش به روشی روشن و سبکی آشکار است. از همین جهت، غلط در قیاس‌هایش راه ندارد. لذا به ممارست آن فکر از خطا دور می‌گردد و بر اثر این روش روشن، هوش و بینش به هندسه‌دان دست می‌دهد. ممارست در علم هندسه برای فکر به مثبت صابون برای جامه است؛ چنان‌که این، جامه را تمیز می‌گرداند، آن، فکر را صافی می‌نماید. و این از جهت حسن ترتیب و انتظامی است که در مسائل هندسی به کار رفته است» [۲]. علامه سید محمد حسین طباطبائی و علامه حسن حسن‌زاده‌ی آملی نیز از اندیشمندان و محققان حوزه‌ی علوم اسلامی و انسانی در عصر حاضر بر نقش غیرقابل انکار ریاضیات تأکید داشته‌اند. علامه حسن‌زاده معتقد است که محصلان علوم دینی و انسانی احتیاج مبرم به تحصیل ریاضیات از هندسه و حساب و هیأت دارند. اکثر کارهای بشر امروزی مبتنی بر ریاضیات است. این ریاضیات است که اساس نظام اجتماع بشری است. مگر می‌شود ما دین را از ریاضیات جدا بدانیم؟ و از قول امام صادق نقل شده است که اشیاء همه به هندسه آفریده شده‌اند. یعنی به مقدار و اندازه. علامه حسن‌زاده علوم ریاضی را برای حکیم به مثابه مسطره برای خطاط می‌داند [۲]. علامه طباطبائی نیز به جهت این‌که با طرز تفکر برهانی آشنا شود و ذوق فلسفی ایشان تقویت گردد بنا به توصیه‌ی مرحوم بادکوبی، حکیم و فیلسوف مشهور، ابتدا به یادگیری ریاضیات پرداخت [۲].

## ۲. مروری تاریخی بر ارتباط علی ریاضیات و علوم انسانی

همان‌گونه که از مقدمه‌ی بالا برمی‌آید در این مقاله نگاهی علی (از دیدگاه گسترش مبانی فکری و بنیادی) به ریاضیات داریم نه نگاه معلولی (از دیدگاه رفتاری و کاربرد ثانویه) به عبارت دیگر ریاضیات را یک پژوهش پیشینی و لازم برای علوم انسانی می‌دانیم. مقالات و کتب زیادی در رابطه با کاربرد ریاضیات و ارتباط آن با علوم انسانی نگاشته شده است و اصولاً پرداختن به این موضوع امری تکراری است در واقع دیگر هیچ کس منکر اهمیت و کاربرد ریاضیات در رفاه بشر و گسترش و پیشرفت علوم دیگر نیست.

با توجه به نقش پررنگ یونانیان در آغاز علوم ساختار یافته نگاه علی به این ارتباط را باید از اندیشمندان بزرگ یونان قبل و پس از میلاد مسیح آغاز می‌کنیم. افلاطون معتقد بود که فراگیران و طالبان فلسفه را باید از بین مستعدان هوش و استعداد ریاضی انتخاب کرد وی بر این باور بود که درک مباحث فلسفی تنها کار کسانی است که ذهن منظم و خلاق داشته باشند. در این راستا باید به این نکته‌ی مهم اشاره کنیم که افلاطون به فلسفه نگاهی اساسی و فراتر از سایر علوم داشت و معتقد بود که اداره دولت آرمانی باید به‌دست فیلسوفان انجام گیرد. برتراند راسل همان‌گونه که در مقدمه نیز به آن اشاره کردیم اصولاً فعالیت ریاضی را ناظر بر همه علوم و امور انسانی می‌داند و به واسطه‌ی این اعتقاد بود که مکتب منطق‌گرایی را در سرلوحه‌ی حرکت خویش به سمت کمال برگزید. کنت، کانت و دکارت نیز بر این باور بودند که ریاضیات از نگاه علی ریشه در تاریخ و فلسفه‌ی علوم دیگر دارد که این ارتباط را به ویژه می‌توان در رشته‌ی جامعه‌شناسی یافت. در کشورمان نیز برخی از پژوهشگران دینی با توجه به طرح تحول علوم انسانی به اهمیت و نقش ریاضیات در این علوم انسانی پی برده‌اند و (درست یا نادرست) در پی ایجاد ریاضیات اسلامی هستند. در این زمینه می‌توان به کتاب‌های «تحول در ریاضیات، لازمه‌ی تحول در علوم انسانی» اثر سید مرتضی حسینی الهاشمی و «آسیب شناسی کارکرد ریاضیات در علوم انسانی» اثر فؤاد صلواتی اشاره کرد. فارغ از نقدهای جدی و اساسی که به نظرات ایشان و همفکرانشان در اندیشکده علم ساجدالله وارد است، پذیرفتن نقش اساسی ریاضیات در علوم انسانی خود قدمی رو به جلو در طرح تحول علوم انسانی است، تحولی که جرعه‌های آن در غرب با کمک اندیشمندان و ریاضیدانانی همچون راسل، دکارت، هیلبرت و غیره در گذر از دوران سیاه قرون وسطی در عصر رنسانس زده شد و در حال تکامل است.

در بخش بعد به‌طور مختصر به برخی از مؤلفه‌های این ارتباط علی بین ریاضیات و علوم دیگر خواهیم پرداخت.

### ۳. لزوم پرداختن به ریاضیات در علوم انسانی

در این بخش به دلایل اهمیت و ضرورت پرداختن به ریاضیات به منظور ایجاد تحول مؤثر و بنیادین در علوم انسانی می‌پردازیم. جهت ایجاد تحول در علوم انسانی باید به مؤلفه‌های تربیتی، اجتماعی، فرهنگی، فکری، اخلاقی و دیگر ویژگی‌های این علوم توجه ویژه داشت. ریاضیات از جهات گوناگون می‌تواند باعث ثبات و تحول فکری در این زمینه‌ها باشد.

۱.۳. **مهارت تفکر.** تفکر، فرآیندی شناختی است که در درون ذهن یا فعالیت‌های مغز پدید می‌آید. دیویی تفکر را جریانی مشتمل بر دو مرحله‌ی شک به مسأله‌ای که با آن روبرو می‌شویم و حل مسأله و برطرف کردن شک و شبهه‌ها (حالات مختلف ممکن) می‌داند [۳]. بی‌شک ریاضیات بهترین علم برای تمرین این دو مرحله است برای داشتن تفکر متبحر در حل مسائل مختلفی که در زندگی روزمره و علوم انسانی با آن مواجه هستیم.

۲.۳. **مهارت حل مسأله.** آموزش مهارت حل مسأله بی‌شک مؤثرترین آموزش برای کمک به شکوفائی استعدادهای بالقوه افراد جامعه است. توانائی و مهارت حل مسأله در چهارچوب منطقی مشخص، ابزاری بسیار قدرتمند در جهت رشد فکری، به دست آوردن اعتماد به نفس و عزت نفس و خودباوری فرد است. در واقع مهارت حل مسأله فرآیندی شامل شناسائی، تعریف، مشخص کردن راه حل‌های رسیدن به جواب، دسته‌بندی راه‌حل‌ها، انتخاب بهترین راه‌حل، اجرای راه حل انتخاب شده و ارزیابی راه حل و مسأله است که در کلیه مسائل ریاضی در همه سطوح می‌توان این مراحل را بارها تمرین کرد و بی‌شک مؤثرترین ابزارها برای این مقصود است [۳].

۳.۳. **مهارت در تصمیم‌گیری.** تصمیم‌گیری به موقع و درست بر اساس چهارچوب مشخص و با شناخت عوامل درونی و بیرونی محیط فرد، برای نیل به اهداف فردی و اجتماعی از مهم‌ترین ویژگی‌های انسان متعالی است و در واقع کاربزمای افراد در مهارت تصمیم‌گیری، کلید موفقیت آن‌هاست. ریاضیات بهترین ابزارها در تمایز بین درست و نادرست است. بدون حواشی زائد می‌تواند حداکثر معنی مورد نظر را در حداقل الفاظ و بیش‌ترین محتوی را در کم‌ترین کلمات در اختیار فرد قرار دهد تا از پریشانی فکر برای تصمیم‌گیری، جلوگیری کند. با نگاهی تربیتی می‌توان گفت که ریاضیات یکی از مؤلفه‌های لازم برای تربیت یک انسان وارسته، آزاد و روشن‌فکر است که نظام فکری انسان را بر اساس فطرت آرایش کرده و مسیر حرکت او را به سوی مبدأ آفرینش هموار کرده و ذهن را برای برای ارتباط با خدا مهیا می‌کند [۳].

از دیگر دلایل پرداختن به ریاضیات برای تحول علوم انسانی می‌توان به مؤلفه‌های ریاضیات و واقعیت، درستی اندیشه با ریاضیات، تشخیص تعمیم‌های نادرست، تمایز قائل شدن در شبیه‌سازی‌های بی‌پایه، تفکیک کامل حالات ممکن برای یک مسأله، کمال و استواری رسوخ‌ناپذیر طبقه‌بندی‌ها، جنبه‌های اخلاقی روبرو شدن با مسائل، پایداری در حل مسائل، درست‌کاری و حق‌گویی، شکل‌دهی درست اسلوب تفکر و غیره اشاره کرد که به اندازه کافی در مقالات و مراجع مختلف به آنها پرداخته شده است. این مؤلفه‌ها به علاوه جنبه‌زیبائی‌شناختی ریاضیات را می‌توان در مسائل و ساختارهای مختلف ریاضی درک کرد به عنوان مثال زمانی که به درستی، استقلال و یا سازگاری اصل پنجم اقلیدس در ساختار هندسه‌ی اقلیدسی شبهه وارد می‌شود و از بطن این شبهه، هندسه نااقلیدسی سربرمی‌آورد با همان ابهت و صلابت هندسه‌ی اقلیدسی و به نوعی به خود بازمی‌گردد پس از رد بخشی از اصول خویش، برای خواننده‌ی آشنا با ریاضیات و ادبیات یادآور افسانه‌ی سیمرغ سروده‌ی افتخار ادبیات فارسی در شاهنامه است جایی که بخشی از وجود سیمرغ به آتش کشیده می‌شود و از دل این آتش، سیمرغ با همان ابهت و صلابت پدیدار می‌شود. و یا در برهان خلف زمانی که هدف اصلی نفی می‌شود برای رسیدن به همه چیز، یادآور گامبی شطرنج است که بخشی از بازی را فدای هدفی والاتر می‌کند، البته در ریاضیات در سطحی بالاتر و متعالی‌تر. البته که منظور ما از زیبائی ریاضیات آن‌چه که در بالا به آن‌ها اشاره کردیم نیست، به تعبیر ریاضی‌دان شهیر انگلیسی گادفری هارولد هاردی زیبائی مطالب ریاضی را باید در «عمق» و «جدی بودن» آن‌ها جستجو کرد، که هر چه مطالب به اصطلاح، مجرد و فارغ از جهان سه‌بعدی (که عامه مردم آن را با کلمه کاربردی می‌شناسند) باشند این جدیت و عمیق بودن بیشتر می‌شود و از دیدگاه علم ریاضی اغلب، مطالب ارزشمندتر. با توجه به جمیع موارد ذکر شده شکی باقی نمی‌ماند که آموزش ریاضی و گسترش تفکر ریاضی لازمه‌ی تحول در علوم انسانی است. با این نگاه، به جایگاه ریاضیات در جامعه حال حاضر ایران می‌پردازیم.

#### ۴. جایگاه ریاضیات در ایران حال حاضر

بررسی جایگاه ریاضیات در کشورمان را به طور مختصر در دو دسته‌ی تأثیرگذار انجام داده و در نهایت با توجه به جمیع موارد نتیجه‌گیری لازم در این بخش را ارائه می‌کنیم.

۱.۴. ریاضیات در نظام آموزش و پرورش. در سالیان اخیر تلاش زیادی به منظور تحول در متون ریاضی مقاطع مختلف تحصیلی قبل از دانشگاه صورت گرفته است. علی‌رغم تلاش برای تغییر در روش‌ها و محتوی منابع درسی مقاطع مختلف، اصرار به آموزش انبوهی از مفاهیم در قالب فرمول‌ها و تمرین‌ها باعث شده است که دانش‌آموزان بیشتر به دنبال به حافظه سپردن این حجم از مطالب باشند که بی‌شک تأثیرگذاری مورد انتظار از آموزش ریاضیات را به دنبال نخواهد داشت. نتیجه‌ی اولیه‌ی چنین رویکردی، سخت و غیرمنعطف جلوه دادن مفاهیم ریاضی از دیدگاه دانش‌آموزان است که این خود باعث به وجود آمدن ناهنجاری‌های بسیار مهم در نظام آموزشی قبل از دانشگاه شده است. کنکور ورود به دانشگاه مهم‌ترین آفت این نوع نگرش به علم و تحصیل است که به دلیل گردش مالی بسیار زیاد و غیرقابل چشم‌پوشی برای عده‌ای سودجو آسیب‌های بسیاری به نظام تعلیم و تربیت و نحوه نگرش دانش‌آموزان و خانواده‌هایشان به علم و دانش دارد. متأسفانه موفقیت و یا عدم موفقیت در کنکور از دیدگاه بعضی خانواده‌ها با آینده‌ی داوطلبان عجین شده است سوءاستفاده از این نگرش باعث دسته‌بندی شدن دانش‌آموزان در نظام آموزشی تحت عناوینی چون مدارس سمپاد، غیرانتفاعی (در انواع و اقسام آن)، نمونه مردمی، دولتی و غیره شده است که بی‌شک یکی از بزرگترین زخم‌های چرکین نظام آموزشی قبل از دانشگاه است که روزه‌روز این زخم عمیق‌تر می‌شود. با وجود این‌که در باب معضلات بیان شده پژوهش‌های زیادی انجام شده و مقالات زیادی به نگارش درآمده به دلایل مختلف تاکنون راه حل مناسبی برای این دست از معضلات، اندیشیده و اجرایی نشده است.

۲.۴. ریاضیات از دیدگاه حاکمیت و جایگاه آن در نظام آموزش عالی ایران. در سالیان اخیر (حدافل ۲۰ سال اخیر با شدت بیشتر) تقریباً تمام تأکید متولیان نظام آموزش عالی و مسولان عالی کشور بر آن دسته رشته‌های دانشگاهی بوده است که به نوعی بتواند مشکلات اقتصادی کشور را در سریع‌ترین زمان ممکن حل کرده و به اصطلاح زودبازده باشند. تعریف و ایجاد رشته‌های دانشگاهی جدید و گسترش رشته‌های به اصطلاح بازار پسند جهت حل مشکلات جامعه در صورتی ارزشمند و قابل توجیه است که فلسفه ایجاد دانشگاه‌ها به عنوان مکانی جهت تعلیم و تربیت انسان‌های متعالی مورد خدشه وارد نشود. آمار چندین سال اخیر متقاضیان ورود به دانشگاه‌ها نشان می‌دهد که بیش از نیمی از متقاضیان خواهان تحصیل در رشته‌های پزشکی و رشته‌های وابسته به این حوزه می‌باشند. در نگاه اول با توجه به وضعیت سرانه بهداشت و درمان در کشورمان این اقبال به سمت رشته‌های پزشکی مثبت به نظر می‌رسد اما با بررسی دقیق‌تر ابعاد این پدیده می‌توان زوایای پنهان و آسیب‌زای آن را بیشتر دید. اول این‌که متقاضیان ورود به رشته‌های پزشکی بیش از آن‌که بر اساس استعداد و علاقه به این رشته‌ها گرایش داشته باشند نگاه اقتصادی به منظور تأمین آینده شغلی، جایگاه اجتماعی و اقتصادی خود دارند. شکل‌گیری این نیاز و نگرش باعث تقویت مافیای کنکور در طی سالیان متمادی و وارد کردن ضربه‌ی اساسی به رسالت ایجاد دانشگاه‌ها در کشورمان شده است. نکته دوم این‌که اقبال به رشته‌های پزشکی به هر دلیل باعث عدم گرایش به رشته‌های علوم پایه و به ویژه ریاضیات شده است که با توجه به آن‌چه که در مورد اثرات مثبت ریاضی بر تفکر منطقی زندگی اجتماعی بشر ذکر شد بی‌شک این عدم گرایش تأثیرات خود را بر جامعه خواهد گذاشت. این درحالی است که جایگاه ریاضیات در دانشگاه‌های کشورهای پیشرو در علم صنعت نه تنها کمتر نشده است بلکه اهمیت بیشتری نیز پیدا کرده است. و مهم‌تر این‌که براساس اعتراف مسؤولان شورای عالی انقلاب فرهنگی، رشته‌های پزشکی سهم عده و طبقه‌ای خاص از جامعه است که این خود داعیه‌ی عدالت‌جویی نظام را زیر سؤال می‌برد.

#### ۵. نتایج و پیشنهادات

ادامه‌ی روند کنونی در نگاه و تصمیمات متولیان علم و فرهنگ و متقاضیان تحصیل در دانشگاه‌ها، نه تنها به لحاظ فکری و فرهنگی کشورمان را به مسیر درست هدایت نمی‌کند بلکه علم و فرهنگ را در آینده‌ای نه چندان دور به ورطه‌ی انحطاط می‌کشاند. استفاده ابزاری از علم در جهت ملاحظات سیاسی و اجتماعی حاکمان، یادآور رفتارهای قرون وسطائی است که قرن‌ها کشورهای اروپائی را درگیر خود کرده بود. بازگشت به خردگرایی و صرف هزینه برای آموزش صحیح در علوم پایه و

انتظار برای به ثمر نشستن این هزینه‌ها حداقل کاریست که باید برای بازگشت به مسیر مؤثر و صحیح آموزش از سوی متولیان آموزش و فرهنگ برداشته شود. تغییر نگرش نسبت به رشته‌ی ریاضیات و برنامه‌ریزی و سرمایه‌گذاری بلند مدت در این رشته، باعث بهبود تفکر منطقی در جامعه خواهد شد.

با توجه به کمبود نیروی انسانی در آموزش و پرورش استفاده از دانش‌آموختگان رشته‌ی ریاضی دانشگاه‌های کشور به صورت بورسیه، از طرفی باعث می‌شود که نیروی خیره در اختیار این سازمان قرار گیرند که بی‌شک از دانش‌آموختگان دانشگاه فرهنگیان در زمینه ساختار فکری مؤثرتر خواهند بود و از سوئی دیگر به جهت تضمین موقعیت شغلی پس از دوره‌ی تحصیل آسودگی خاطری را برای ایشان فراهم خواهد کرد که نتیجه‌ی آن تعلیم و تربیت نیروی متبحر برای ایجاد تحول بهتر در جامعه است.

برگزاری دوره‌های مؤثرتر برای آموزش فلسفه و تفکر ریاضی جهت اعتلای فکری معلمان آموزش و پرورش به ویژه در مقاطع ابتدائی یکی از اولویت‌دارترین موضوعات آموزش در نظام آموزش و پرورش است.

ایجاد دوره‌های آموزش فلسفه، تفکر، مبانی و منطق ریاضی و اضافه کردن واحدهای درسی آن به رشته‌های علوم انسانی در دانشگاه‌ها در تغییر نگرش فکری دانش‌آموختگان آن تأثیر به‌سزائی خواهد داشت. به عنوان مثال در سرفصل درسی مرتبط با رشته‌های حقوق و فقه که اصولاً با منطق، استنباط و نتیجه‌گیری سروکار دارند هیچ واحد درسی ریاضی و منطق ریاضی دیده نمی‌شود. در رشته‌ی روان‌شناسی نیز که دانش‌آموختگان آن تقریباً راجع به همه مسائل اظهار نظر می‌کنند حتی یک واحد درسی از ریاضیات و یا منطق ریاضی در برنامه‌ی درسی آن‌ها جایی ندارد. در بقیه رشته‌های علوم انسانی نیز وضع چندان بهتر نیست این در حالی است که در بعضی از دانشگاه‌های معتبر دنیا هم‌چون کمبریج گذراندن دوره‌ای از ریاضیات جز برنامه درسی ابتدایی همه رشته‌هاست.

## مراجع

۱. ج.انس، درآمدی بر افلاطون، مترجم ا.حقیری قزوینی، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۸.
۲. م.جبارزاده، ریاضیات سرمشق زندگی، چاپ اول، انتشارات سفیر اردهال، تهران، ۱۳۹۷.
۳. ح.درب‌اصفهانی، ا.اینالو، ع.خورشیدی، ف.نظری، مهارت‌های زندگی، چاپ اول، انتشارات یس‌طرون، تهران، ۱۳۸۹.
۴. م.کلاین، نقش ریاضیات در فرهنگ غرب، مترجم م.دانش، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۸۸.
۵. م.کنفورث، امپریسم و منطق، مترجم ش.شب‌تاب، انتشارات گام، تهران، ۱۳۵۸.
۶. ج.ویت، گردش در دنیای فلسفه، مترجم ر.بهار، انتشارات نشر قطره، ۱۳۸۷.

## تعیین روش کارا در برآورد پارامترهای مدل درآمد سینگ-مادالا

شهریار میرزائی<sup>۱\*</sup>، قدرت اله رحمتی<sup>۲</sup> و ایمان مخدوم<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.  
Email: sh\_mirzaee@pnu.ac.ir

<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.  
Email: gh\rahmati@pnu.ac.ir

<sup>۳</sup> گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.  
Email: makhdoom@pnu.ac.ir

چکیده. توزیع سینگ-مادالا مدلی مناسب جهت برازش به داده های درآمد می باشد. هدف این مقاله تخمین مناسب پارامترهای مکان و مقیاس توزیع درآمد سینگ-مادالا است. برای این منظور از روش های تخمینی مختلف، یعنی حداکثر درستنمایی (ML)، حداقل مربعات (LS) و روش گشتاورها (MM) استفاده می شود. عملکرد این روش های برآورد از طریق یک مطالعه شبیه سازی مونت کارلو تحت اندازه های نمونه و مقادیر مختلف پارامتر مقایسه می شود. در پایان، یک مجموعه داده واقعی برای نشان دادن عملکرد کاراترین روش در مدل سازی توزیع سینگ-مادالا به کار برده می شود.

واژه های کلیدی: توزیع سینگ-مادالا، روش درستنمایی ماکزیمم، روش گشتاوری، برآورد پارامترهای مدل. طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 60E05, 62E15.

### ۱. مقدمه

این توزیع توسط سینگ و مدالا در سال ۱۹۷۶ معرفی شد و به دلیل کاربردهای گسترده آن در زمینه های مختلف، به ویژه در قابلیت اطمینان، مدل سازی زمان شکست، طرح نمونه گیری پذیرش و اقتصاد توجه بیشتری را از سوی پژوهشگران به خود جلب کرد. توزیع سینگ-مادالا یکی از مناسب ترین توزیع هائی است که برای برازش داده های درآمدی توصیه شده است (مک دونالد و زو (۱۹۹۵) [۲]، کلیبر و کوتز (۲۰۰۳) [۱]، (سینگ و مادالا (۲۰۰۸) [۴] و پنت و هیدریک [۳] (۲۰۱۳)). این توزیع بسیار منعطف است و بسته به مقادیر خاصی از پارامترهای آن می تواند شکل های متنوعی به خود بگیرد. علاوه بر آن، تابع توزیع تجمعی این مدل شکل بسته ای دارد که تخمین و تحلیل آماری نتایج را تا حد زیادی تسهیل می بخشد.

متغیر تصادفی  $X$  دارای مدل سینگ-مادالا است هرگاه تابع توزیع تجمعی (cdf) آن به صورت

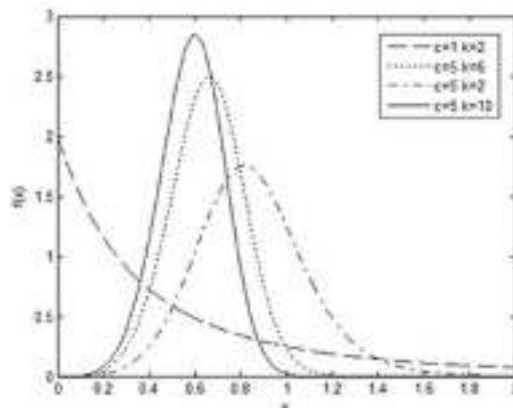
$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^c\right)^{-k}, \quad x > \mu, \quad c, k, \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty$$

و تابع چگای احتمال (pdf) آن به فرم

$$f(x) = \frac{kc}{\sigma} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{c-1} \left(1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^c\right)^{-(k+1)}, \quad x > \mu, \quad c, k, \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty$$

\* سخنران.

باشد که در آن  $\mu$  پارامتر مکان،  $\sigma$  پارامتر مقیاس،  $c$  و  $k$  پارامترهای شکل توزیع اند. و اغلب با نماد  $X \sim SM(\mu, \sigma, c, k)$  نمایش داده می شود. انعطاف توزیع به ازای مقادیر مختلف پارامترهای شکل توزیع در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. تابع چگالی احتمال توزیع سینگ-مادالا به ازای مقادیر مختلف پارامترهای شکل توزیع

## ۲. روشهای برآورد پارامترهای مدل

۲.۱. روش درستنمایی ماکزیمم. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از توزیع سینگ-مادالا باشد. برای برآورد پارامترهای مکان و مقیاس این توزیع از لگاریتم تابع درستنمایی استفاده می شود.

$$\ln(L) = n \ln(k) - n \ln(c) - n \ln(\sigma) + (c-1) \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - (k+1) \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^c\right)$$

با مشتق گیری از تابع  $\ln(L)$  نسبت به پارامترهای مکان و مقیاس توزیع و مساوی صفر قرار دادن این معادله می توان با استفاده از روش های عددی پارامترهای مورد نظر را برآورد نمود.

۲.۲. روش گشتاوری. در روش گشتاوری با برابر قرار دادن گشتاورهای نظری با گشتاورهای نمونه ای می توان برآوردهائی برای پارامترهای مدل ارائه نمود. با این شیوه در توزیع سینگ مادالا داریم:

$$\tilde{\mu} = \bar{x} - \frac{k\Gamma(k - \frac{1}{c})\Gamma(\frac{1}{c} + 1)\tilde{\sigma}}{\Gamma(k + 1)}$$

و

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{s^2 \Gamma^2(k + 1)}{k\Gamma(k - \frac{1}{c})\Gamma(2k + 1)\Gamma(k + 1) - k^2 \Gamma^2(k - \frac{1}{c})\Gamma^2(\frac{1}{c} + 1)}}$$

که در آن  $\bar{x}$  و  $s^2$  به ترتیب میانگین واریانس نمونه ای هستند.

۳.۲. روش حداقل مربعات. این روش با استفاده از مینیم کردن تابع

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \left[ F(X_{i:n}) - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

که در آن  $F(X_{i:n})$  تابع توزیع تجمعی،  $X_{i:n}$ ،  $i$ مین آماره مرتب از نمونه  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  و  $\frac{i}{n+1}$ ، امید ریاضی  $F(X_{i:n})$  است. در توزیع سینگ-مادالا معادله ۱ بصورت

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \left( 1 + \left( \frac{x_{i:n} - \mu}{\sigma} \right)^c \right)^{-k} - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

بیان می‌شود. با مینیمم کردن تابع ۲ نسبت به پارامترهای مقیاس و مکان به روش‌های عددی برآورد پارامترهای مورد نظر حاصل می‌شوند.

### ۳. شبیه سازی

ما در این قسمت یک مطالعه شبیه سازی را برای مقایسه عملکرد روش‌های  $ML$ ،  $ME$  و  $LS$  در برآورد پارامترهای مقیاس و مکان برای مدل سینگ-مادالا با معیار میانگین مربعات خطا  $MSE$  انجام می‌دهیم. همچنین معیار  $Def$  بصورت تلفیقی از دو معیار  $MSE$  بصورت

$$Def(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = MSE(\hat{\mu}) + MSE(\hat{\sigma})$$

تعریف شده است. مطالعه شبیه‌سازی برای اندازه نمونه‌های مختلف و نیز پارامترهای متفاوت شکل توزیع انجام می‌گیرد. بدون از دست دادن کلیت،  $\mu$  و  $\sigma$  به ترتیب ۰ و ۱ در نظر گرفته می‌شوند. نتایج شبیه سازی در جدول ۱ گزارش شده است. نتایج مطالعه شبیه سازی نشان می‌دهد که روش  $MLE$  در برآورد پارامترهای مدل می‌تواند ترجیح داده شود.

### ۴. تحلیل با داده های واقعی

داده‌های مورد بررسی مربوط به داده‌های درآمد ۱۴۸۷۲ خانوار اتریشی می‌باشد که در سال ۲۰۰۶ جمع آوری شده است. این داده‌ها در سایت مرکز آمار اتحادیه اروپا بخش درآمد و شرایط زندگی<sup>۱</sup> قابل دستیابی است. نتایج مربوطه به برازش توزیع سینگ

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{F}(X_i) - \frac{i}{n+1})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}(X_i) - \bar{\hat{F}}(X_i))^2}$$

مادالا به داده ها، برآورد پارامترهای مدل به روش  $ML$  و نیز مقدار آماره نیکوئی برازش

$$\tilde{F}(X_i) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{F}(X_i)}{n}$$

که در آن، در جدول ۲ آمده است.

مقدار آماره آماره نیکوئی برازش  $R^2 = 0.99$  نشان می‌دهد که توزیع یاد شده دارای عملکرد بالائی در برازش به داده های واقعی درآمد است.

### مراجع

1. Kleiber, C. and Kotz, S., 2003. *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences*. John Wiley Sons.
2. McDonald, J.B. and Xu, Y.J., 1995. A generalization of the beta distribution with applications. *Journal of Econometrics*, 66(1-2), pp.133-152.
3. Pant, M.D. and Headrick, T.C., 2013. A method for simulating Burr type III and type XII distributions through L-moments and l-correlations. *International Scholarly Research Notices*, 2013(1), p.191604.
4. Singh, S.K. and Maddala, G.S., 2008. *A function for size distribution of incomes. In Modeling income distributions and Lorenz curves* (pp. 27-35). New York, NY: Springer New York.

<sup>1</sup>European Union Statistics on Income and Living Conditions

جدول ۱. مقایسه روش‌های برآورد پارامتر

| اندازه نمونه | $(c, k)$       | روش برآورد | $MSE(\hat{\mu})$ | $MSE(\hat{\sigma})$ | $Def(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ |
|--------------|----------------|------------|------------------|---------------------|--------------------------------|
| ۲۰           | $c = ۵, k = ۶$ | ML         | ۰/۰۱۱۶           | ۰/۰۲۴۸              | ۰/۰۳۶۹                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۲۲۹           | ۰/۰۴۵۱              | ۰/۰۶۶۱                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۱۲۰           | ۰/۰۲۵۲              | ۰/۰۳۷۲                         |
|              | $c = ۵, k = ۲$ | ML         | ۰/۰۲۱۱           | ۰/۰۳۰۶              | ۰/۰۵۱۷                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۳۶۰           | ۰/۰۵۲۸              | ۰/۰۸۸۸                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۲۵۷           | ۰/۰۳۸۷              | ۰/۰۶۴۵                         |
|              | $c = ۴, k = ۸$ | ML         | ۰/۰۰۸۰           | ۰/۰۲۴۴              | ۰/۰۳۲۶                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۰۸۲           | ۰/۰۲۴۵              | ۰/۰۳۲۷                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۰۸۳           | ۰/۰۲۴۸              | ۰/۰۳۳۱                         |
| ۵۰           | $c = ۵, k = ۶$ | ML         | ۰/۰۰۵۰           | ۰/۰۰۹۸              | ۰/۰۱۴۸                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۰۷۷           | ۰/۰۱۵۸              | ۰/۰۲۳۶                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۰۵۱           | ۰/۰۱۰۰              | ۰/۰۱۵۱                         |
|              | $c = ۵, k = ۲$ | ML         | ۰/۰۰۸۰           | ۰/۰۱۱۸              | ۰/۰۱۹۷                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۱۲۳           | ۰/۰۱۷۸              | ۰/۰۳۰۱                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۱۱۰           | ۰/۰۱۶۷              | ۰/۰۲۷۷                         |
|              | $c = ۴, k = ۸$ | ML         | ۰/۰۰۲۴           | ۰/۰۰۵۰              | ۰/۰۰۷۵                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۰۳۴           | ۰/۰۰۵۱              | ۰/۰۰۸۴                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۰۳۶           | ۰/۰۱۰۲              | ۰/۰۱۳۸                         |
| ۱۰۰          | $c = ۵, k = ۶$ | ML         | ۰/۰۰۲۴           | ۰/۰۰۵۰              | ۰/۰۰۷۴                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۰۳۹           | ۰/۰۰۸۲              | ۰/۰۱۲۱                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۰۲۵           | ۰/۰۰۵۱              | ۰/۰۰۷۶                         |
|              | $c = ۵, k = ۲$ | ML         | ۰/۰۰۴۰           | ۰/۰۰۶۱              | ۰/۰۱۰۱                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۰۶۴           | ۰/۰۰۹۲              | ۰/۰۱۵۶                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۰۵۶           | ۰/۰۰۸۸              | ۰/۰۰۱۴۴                        |
|              | $c = ۴, k = ۸$ | ML         | ۰/۰۰۱۴           | ۰/۰۰۴۲              | ۰/۰۰۵۶                         |
|              |                | LS         | ۰/۰۰۲۵           | ۰/۰۰۷۴              | ۰/۰۱۰۰                         |
|              |                | MM         | ۰/۰۰۱۵           | ۰/۰۰۴۵              | ۰/۰۰۶۰                         |

جدول ۲. برآورد ML پارامترهای مدل سینگ-مادالا به داده های واقعی

| $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}$ | $\hat{c}$ | $\hat{k}$ | $R^2$ |
|-------------|----------------|-----------|-----------|-------|
| ۱/۳۷۲       | ۱/۲۵۳۱         | ۲/۳۱      | ۲/۳۵۶     | ۰/۹۹  |

## برخی خواص گراف های نادقیق

مصطفی نوری جویباری\*؛ عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

m\_njoybari@pnu.ac.ir

داود درویشی سلوکلاهی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

**چکیده:** با پیچیده تر شدن سیستم اطلاعاتی، در کاربرد عملی نظریه گراف، با انواع مختلفی از عدم قطعیت اغلب مواجه می شویم. در یک گراف نادقیق، نمی توان به طور کامل تعیین کرد که آیا دو رأس گراف به هم متصل هستند یا خیر. در این مقاله با معرفی گراف نادقیق خواص آنها را مانند همبندی، اویلری بودن و تطابق ها را بررسی می نماییم. علاوه بر آن الگوریتمی برای محاسبه شاخص های توپولوژیکی گراف های نادقیق ارائه می شود. **کلمات کلیدی:** گراف نادقیق، شاخص اویلر، شاخص همیلتون، عدم قطعیت.

### ۱ مقدمه

ما معمولاً برای موارد گوناگون در حالت نادقیق تصمیم می گیریم و ناچاریم بدون داده های کافی از نظرات اعتقادی که توسط کارشناسان ارزیابی می شود استفاده نماییم. برای مدلسازی منطقی چنین عدم قطعیتی، نظریه عدم قطعیت توسط ليو [۳] پایه گذاری شد. گراف های نادقیق به گراف هایی با یال های نامشخص اشاره دارد. برخی مسائل مانند مساله همبندی، مساله اویلر و ... قبلاً با استفاده از نظریه عدم قطعیت مورد مطالعه قرار گرفته اند. در نظریه شبکه و شیمی ریاضی از شاخص های توپولوژیکی برای توصیف کمی ساختار توپولوژیکی گراف زمینه استفاده شده است. منشا این زمینه تحقیقاتی به سال ۱۹۴۷ برمی گردد که شاخص وینر [۶] معرفی شد. بعد ها شاخص های دیگری برای گراف ها مانند شاخص سگد [۲] و شاخص زاگرب [۱] معرفی شد.

گراف های نادقیق به گراف های با عوامل نادقیق اشاره دارد که اولین بار توسط گائو [۴] در سال ۲۰۱۳ معرفی شد. در یک گراف کلاسیک، یال ها و رئوس قطعی هستند یعنی یا وجود دارند یا نه. اما در گراف نادقیق، برخی از یال ها با درجاتی در اندازه نادقیق حضور دارند. به عنوان مثال شبکه جاده حمل و نقل با وزن یال و عدم قطعیت یک گراف

نادقیق است که در آن وزن یال نشان دهنده زمان عادی سفر است و عدم قطعیت احتمال عدم وجود تراکم ترافیک در آن بخش جاده را مشخص می کند. گائو در [۴] در مورد همبندی گراف نادقیق بحث کرد. ژانگ [۷] در مورد قدرت اتصال دو راس در گراف نادقیق بحث کرد. همچنین ژانگ [۸] بررسی کرد که چقدر احتمال دارد گراف نادقیق اویلری<sup>۱</sup> باشد و یک شاخص اویلری از گراف نادقیق را معرفی کرد. رویسیدا [۵] عدد رنگی گراف نادقیق را بر اساس رنگ آمیزی برش  $\alpha$  مورد بحث قرار داد. موضوعات جالب دیگری مانند دورها، منظم بودن و قطر گراف نادقیق در آثار دیگر محققان مورد بررسی قرار گرفته است.

در بخش بعدی، ما برخی از تعاریف و مفاهیم لازم از گراف های نادقیق را ارائه داده ایم. در بخش سوم این مقاله نیز برخی شاخص های توپولوژیکی گراف نادقیق را مورد بررسی قرار داده ایم.

## ۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش با گراف های نادقیق آشنا خواهیم شد:

**تعریف.** قرار دهید  $\Gamma$  یک مجموعه ناتهی باشد و  $\mathcal{L}$  یک  $\sigma$  - جبر روی  $\Gamma$  باشد. هر عنصر  $\Lambda \in \mathcal{L}$  را یک رویداد گوئیم. برای هر  $\Lambda \in \mathcal{L}$ ،  $\mathcal{M}\{\Lambda\}$  را یک اندازه نادقیق گوئیم اگر در سه اصل زیر صدق کند:

- $\mathcal{M}\{\Omega\} = 1$
- برای هر  $\Lambda \in \mathcal{L}$  داشته باشیم  $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1$
- برای هر دنباله شمارا از وقوع ها  $\Lambda_i$  داشته باشیم:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}$$

سه تایی  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  را فضاي نادقیق گوئیم. یک متغیر نادقیق یک تابع اندازه پذیر از فضاي نادقیق به مجموعه اعداد حقیقی است. برای به دست آوردن یک اندازه نادقیق از رویداد ترکیبی، اصل چهارم به نام اصل ضرب توسط لیو به صورت زیر تعریف شد:

- فرض کنید برای  $k = 1, 2, \dots$  سه تایی  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  یک فضاي نادقیق باشد. اندازه ضرب نادقیق  $\mathcal{M}$  اندازه نادقیقی است که در شرط زیر صدق می کند:

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}$$

که در آن برای هر  $k = 1, 2, \dots$  مقدار  $\Lambda_k$  به طور دلخواه به ترتیب از بین رویدادهای  $\mathcal{L}_k$  انتخاب می شوند.

گراف کلاسیک  $G$  یک سه تایی مرتب  $(V(G), E(G), \psi_G)$  است که در آن  $V(G)$  مجموعه رئوس،  $E(G)$  مجموعه یال ها و  $\psi_G$  تابع وقوع که با هر یال  $G$  یک جفت نامرتب (نه لزوماً متمایز) رئوس مرتبط می کند. تعداد رئوس در گراف  $G$  را مرتبه  $G$  می نامند و تعداد یال های  $G$  را اندازه آن می گویند. به هر گراف متناهی ساده  $G$  با  $n$  راس، یک ماتریس  $n \times n$  به نام ماتریس مجاورت  $G$  نسبت داده می شود، که در آن به ازای  $i, j = 1, 2, \dots, n$  خواهیم داشت:  $a_{ij} = 1$  اگر یک یال بین راس  $v_i$  و  $v_j$  داشته باشیم و در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  خواهد بود. اگر بین هر دو راس متمایز گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گوییم گراف همبند<sup>۲</sup> است. همبندی در مجموعه رئوس گراف  $G$  یک رابطه هم ارزی است.

اگر اطلاعات ما از رئوس و یال ها کافی نباشد گراف نادقیق برای مدل سازی مفاهیم نادقیق پیشنهاد می شود. یعنی زمانی که هیچ اطلاعات مشاهده ای برای این رویداد وجود نداشته باشد که آیا دو راس مسیر توسط یک یال به هم متصل شده اند یا خیر. وقتی در توصیف روابط اشیاء ابهامی وجود دارد، طبیعی است که نیاز به تعریف گراف نادقیق داشته باشیم:

**تعریف.** گراف از مرتبه  $n$  را گراف نادقیق گوییم اگر دارای ماتریس مجاورت نادقیق زیر باشد:

$$A(G) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن برای هر  $i, j = 1, 2, \dots, n$  مقدار  $\alpha_{ij}$  نشان دهنده این است که یال های بین راس  $v_i$  و راس  $v_j$  دارای اندازه نادقیق  $\alpha_{ij}$  است. به عبارت دیگر، عدد  $\alpha_{ij}$  در ماتریس مجاورت نادقیق نشان می دهد که یال بین رئوس راس  $v_i$  و راس  $v_j$  با اندازه گیری نادقیق  $\alpha_{ij}$  وجود دارد و با اندازه گیری نادقیق  $1 - \alpha_{ij}$  وجود ندارد.

به منظور نشان دادن همبندی یک نمودار نادقیق، یک شاخص همبندی به صورت زیر تعریف می شود:

**تعریف.** شاخص همبندی یک گراف نادقیق، یک اندازه نادقیق است که گراف نادقیق آن همبند است.

**تعریف.** شاخص اوایلر یک گراف نادقیق، یک اندازه نادقیق است که گراف نادقیق آن اوایلر است.

### ۳ خواصی از گراف نادقیق

ابتدا مثالی از گراف نادقیق را در شکل یک ملاحظه می کنیم که برای یال ها مقادیر حقیقی تخصیص داده شده است. اگر  $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{A}$  و  $\mathcal{E}$  به ترتیب رئوس، یال ها، ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع گراف نادقیق باشد، برای گراف نادقیق  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$  قرار دهید  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n, 0 < \alpha_{ij} < 1\}$ . اگر  $|\mathcal{E}| = m$  باشد، آن گاه  $G$  شامل  $2^m$  تفهیم است.

**قضیه.** فرض کنید  $\mathcal{G}$  یک گراف نادقیق با مجموعه یال  $\mathcal{U}$  باشد.  $E(\mathcal{G}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m\}$  باشد. شاخص همبندی برابر است با:

$$\rho(\mathcal{G}) = \sup_{C(E(\mathcal{G}))=1} \min_{1 \leq i \leq m} \mathcal{M}\{\mathcal{E}_i \in B_i\}$$

که در آن به ازای هر  $B_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, m$  زیر مجموعه های  $\{0, 1\}$  می باشند.

**قضیه.** فرض کنید  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$  یک گراف نادقیق باشد. شاخص اوایلر  $\mathcal{G}$  برابر است با:

$$\mu(\mathcal{G}) = \sup_{g(\mathcal{X})=1} \min_{1 \leq i < j \leq n} \{\min_{x_{ij}=1} \alpha_{ij}, 1 - \max_{x_{ij}=0} \alpha_{ij}\}$$

مثال. اگر  $\mathcal{G}$  یک گراف نادقیق با مرتبه ۵ و اندازه ۱۰ و ماتریس مجاورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.3 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

با محاسبات قضیه قبل شاخص اوایلر این گراف برابر است با:  $\mu(\mathcal{G}) = 0.3$ .

## مراجع

- [1] T. Došlić, "Vertex-weighted Wiener polynomials for composite graphs," Ars Math. Comtemp. 1, pp. 66-80, 2008.
- [2] I. Gutman, "A formula for the wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles", Graph Theory Notes N.Y., 27, pp. 9-15, 1994.
- [3] B. Liu, "Theory and Practice of Uncertain Programming," 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [4] X. Gao, Y. Gao, "Connectedness index of uncertain graphs," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 21, No. 1, pp. 127-137, 2013.
- [5] I. Roysida, J. Peng, L. Chen, W. Widodo, "An uncertain chromatic number of an uncertain graph based on  $\alpha$ -cut coloring," Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol. 17, No. 1, pp. 103-123, 2018.
- [6] H. Wiener, "Structural determination of paraffin boiling points," J. Amer. Chem. Soc. 69, pp. 17-20, 1947.
- [7] B. Zhang, J. Peng, "Connectedness strength of two vertices in an uncertain graph," International Journal of Computer Mathematics, Vol. 90, No.2, pp. 246-257, 2013.
- [8] B. Zhang, J. Peng, "Euler index in uncertain graph," Applied Mathematics and Computation, Vol. 218, No. 20, pp. 10279-10288, 2012.

## فصل ۵

### هندسه و توپولوژی

## ابر رویه‌های زمان‌گون $H_2$ - سره در ۴ - فضا فرم‌های لورنتزی

فیروز پاشائی\* عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه کدپستی ۵۵۱۸۱-۸۳۱۱۱، مراغه، ایران  
 سارا حسین‌پور، دانشجوی دوره دکتری، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران  
 قربانعلی حقیقت‌دوست، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران  
 لیلا شهباز، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه کدپستی ۵۵۱۸۱-۸۳۱۱۱، مراغه، ایران

**چکیده:** میدان برداری خمیدگی اصلی  $H$  روی زیرمنیفلد  $M$  در فضا فرم، سره گفته می‌شود اگر در رابطه  $\Delta H = aH$  برای ثابت حقیقی  $a$  صدق کند. ثابت می‌کنیم که هر ابر رویه در فضای ریمانی با خمیدگی اصلی سره دارای خمیدگی میانگین ثابت است. همچنین به مطالعه ابر رویه‌های لورنتزی با دومین میدان برداری در فضا فرم‌های چهار بعدی لورنتزی می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که خمیدگی اسکالر چنین ابر رویه‌ای ثابت است. به علاوه، همانند یک نتیجه طبقه‌بندی شده، نشان می‌دهیم هر ابر رویه لورنتزی از فضا فرم‌های چهار بعدی با دومین میدان برداری خمیدگی میانگین سره،  $C$ -دوهارمونیک،  $C-1$  نوع یا  $C-2$  نوع پوچ است. همچنین، ثابت می‌کنیم هر ابر رویه لورنتزی  $H_2$ -سره با خمیدگی میانگین معمولی ثابت در فضا فرم چهار بعدی، ۱-مینیمال است.  
**کلمات کلیدی:** دوپایستار، عملگر خطی شده،  $L_k$ -دوهارمونیک،  $k$ -مینیمال

## ۱ مقدمه

بحث را با یادآوری شرط سره بودن  $\Delta H = aH$  آغاز می‌کنیم که  $\Delta$  عملگر لاپلاس و  $H$  خمیدگی میانگین ابر رویه است. هر ابر رویه  $H$ -سره است اگر در شرط سره بودن برای ثابت حقیقی  $a$  صدق کند. حالت تعمیم یافته این شرط با جاگذاری عملگر چنگ-یائو  $C$  به جای  $\Delta$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. عملگر  $C$  نشان دهنده عملگر خطی تولید شده از اولین وردش دومین خمیدگی میانگین است. در این بخش به مطالعه ابر رویه‌های  $H_2$ -سره زمان‌گون (یا لورنتزی) از فضا فرم لورنتزی چهار بعدی می‌پردازیم. از شبه‌فضای پنج بعدی  $\mathbb{E}_\xi^5$  به قسمی که  $\xi = 1, 2$  مجهز شده به ضرب

$$\langle v, w \rangle = - \sum_{i=1}^{\xi} v_i w_i + \sum_{i=\xi+1}^5 v_i w_i,$$

۱۳۴



برای هر بردار  $v = (v_1, \dots, v_5)$  و  $w = (w_1, \dots, w_5)$  در  $\mathbb{R}^5$  استفاده می‌کنیم. در حقیقت، با فضا فرم‌های لورنتزی ۴-بعدی به صورت زیر سروکار داریم:

$$\mathbb{M}_1^4(c) = \begin{cases} \mathbb{S}_1^4(r) & c = \frac{1}{r^2} \\ \mathbb{L}^4 = \mathbb{E}_1^4 & c = 0 \\ \mathbb{H}_1^4(-r) & c = -\frac{1}{r^2} \end{cases}$$

که برای  $r > 0$   $\mathbb{S}_1^4(c) = \{v \in \mathbb{E}_1^5 \mid \langle v, v \rangle = r^2\}$ ،  $\mathbb{H}_1^4(-r)$  و  $\frac{1}{r^2}$  و

$$\mathbb{H}_1^4(-r) = \{v \in \mathbb{E}_2^5 \mid \langle v, v \rangle = -r^2, v_1 > 0\},$$

نشان دهنده شبه‌هندلولوی چهار بعدی به شعاع  $r$  و خمیدگی  $-\frac{1}{r^2}$  است. در حالت متعارف،  $c = \pm 1$  و فضای چهار بعدی سیر،  $d\mathbb{S}^4 := \mathbb{S}_1^4(1)$  و فضای پاد-دسیتر چهار بعدی  $Ad\mathbb{S}^4 = \mathbb{H}_1^4(-1)$  به دست می‌آیند. همچنین، در حالت  $c = 0$ ، فضای چهاربعدی لورنتزی-مینکوفسکی  $\mathbb{L}^4 := \mathbb{E}_1^4$  حاصل می‌شود.

ابریه لورنتزی (زمان‌گون)  $M_1^3$  از فضا فرم لورنتزی متعارف (به عبارت دیگر  $\mathbb{M}_1^4(c)$  برای  $c = 0, \pm 1$ ) به صورت یک غوطه‌وری ایزومتریک  $x: M_1^3 \rightarrow \mathbb{M}_1^4(c)$  تعریف می‌شود. مجموعه همه میدان‌های برداری مماسی هموار روی  $M_1^3$  با نماد  $\mathcal{X}(M_1^3)$  نمایش داده می‌شود. نمادهای  $\nabla$  و  $\bar{\nabla}$  به ترتیب نشان دهنده التصاق‌های لوی-چویتا روی  $M_1^3$  و  $\mathbb{M}_1^4(c)$  هستند. همچنین  $\nabla^0$  نشان دهنده التصاق لوی-چویتا روی  $\mathbb{E}_v^5$  (برای  $v = 1, 2$ ) هستند. فرمول وینگارتن روی  $M_1^3$  به صورت زیر است:

$$\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + \langle SV, W \rangle n,$$

که  $V, W \in \mathcal{S}(M_1^3)$  و  $S$  عملگر شکل مرتبط با میدان بردار نرمال واحد  $n$  روی  $M_1^3$  است. همچنین، در حالت  $|c| = 1$ ،  $\mathbb{M}^4(c)$  یک ۴-هایپرکوادریک با میدان برداری قائم واحد  $x$  و فرمول گاوس

$$\nabla_V^0 W = \bar{\nabla}_V W - c \langle V, W \rangle x,$$

است.

به کمک متر لورنتز روی  $M_1^3$  القا شده از  $\mathbb{M}^4(c)$ ، می‌توانیم حالات ممکن بر پایه فضای مماسی از  $M_1^3$  را تعیین کنیم. برای جزئیات بیشتر، مراجع [۱، ۲، ۳] را ببینید. در حالت کلی، پایه  $\Omega := \{w_1, w_2, w_3\}$  از فضای سه بعدی لورنتزی خطی، متعامد گفته می‌شود اگر برای هر  $j \neq i$  شرایط زیر برقرار باشند:

$$\langle w_1, w_1 \rangle = -1, \quad \langle w_2, w_2 \rangle = \langle w_3, w_3 \rangle = 1, \quad \langle w_i, w_j \rangle = 0.$$

همچنین،  $\Omega$  شبه-متعامد نامیده می‌شود اگر برای هر  $i = 1, 2, 3$  داشته باشیم:

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 0, \quad \langle w_1, w_2 \rangle = -1, \quad \langle w_i, w_3 \rangle = \delta_i^3.$$

در حالت کلی،  $\delta$ ، همان دلتای کرونکر است.

بنا به پایه انتخاب شده روی  $M_1^3$ ، دومین فرم اساسی (عملگر شکل)  $S$  دارای چهار فرم ماتریسی است. هرگاه متر روی  $M_1^3$  دارای فرم قطری  $G_1 := \text{diag}[-1, 1, 1]$  باشد، آنگاه  $S$  به فرم یکی از روابط زیر خواهد بود:

$$D_1 = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3],$$

$$D_2 = \text{diag}\left[\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{array}\right], \lambda_3], \quad (\lambda_2 \neq 0).$$

در حالت ماتریس غیرقطری  $[1]$ ،  $G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، عملگر شکل به یکی از دو حالت زیر خواهد بود:

$$D_3 = \text{diag} \left[ \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda_1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda_2 \right],$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \lambda \end{bmatrix}.$$

هرگاه  $S = D_k$  باشد، گوئیم  $M_1^3$  یک  $D_k$ -ابرویه است.

**تعریف ۱.۱.** ابرویه غوطه‌ور شده ایزومتریکی  $\psi : M_1^3 \rightarrow \mathbb{M}_1^4(c)$  برای  $\psi : M_1^3 \rightarrow \mathbb{M}_1^4(c)$ ،  $c = \pm 1$  متناهی نامیده می‌شود اگر  $\psi$  دارای تجزیه‌ای به صورت  $\psi = \sum_{i=0}^m \psi_i$  برای عدد صحیح مثبت  $m$  باشد که در ویژگی  $C\psi_i = \gamma_i \psi_i$  برای اعداد حقیقی  $\gamma_i \in \mathbb{R}$  و نگاشت‌های برداری  $\psi_i : M_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_s^5$  که  $s = 1$  یا  $s = 2$  برای  $i = 1, 2, \dots, m$  صدق می‌کند و  $\psi_0$  یک بردار ثابت است.  $M^n$ ،  $C - m$  نوع نامیده می‌شود اگر همه  $\gamma_i$ ها دوبرو مجزا باشند. ابرویه  $C - m$  نوع پوچ نامیده می‌شود اگر برای حداقل یک  $i$ ،  $1 \leq i \leq m$  داشته باشیم  $\gamma_i = 0$ .

## ۲ نتایج

در این بخش به مطالعه ابرویه‌های زمان‌گون  $H_2$ -سره روی  $\mathbb{M}_1^4(c)$  می‌پردازیم.

**قضیه ۱.۲.** هر  $D_1$ -ابرویه  $H_2$ -سره  $\mathbb{M}_1^4(c)$  در یکی از شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف)  $C$ ،  $M_1^3$  دوهارمونیک است.

(ب)  $C - 1$ ،  $M_1^3$  نوع است.

(ج)  $C$ ،  $M_1^3$  پوچ-۲ نوع است.

**اثبات.** بنا به فرض،  $H_2$  سره است و این یعنی در شرط  $CH_2 = cH_2$  برای ثابت حقیقی  $c$  صدق می‌کند. اگر  $c = 0$  باشد، آنگاه  $M_1^3$  یک ابرویه  $C$ -دوهارمونیک است و این یعنی (الف) برقرار است. در حالت  $c \neq 0$ ، با در نظر گرفتن  $x_0 = x - x_1$  و  $x_1 = \frac{1}{c}Cx$  داریم

$$Cx_1 = \frac{1}{c}C^2x = \frac{6}{c}CH_2 = 6H_2 = Cx.$$

در نتیجه،  $M$  یا  $C - 1$  نوع یا  $C - 2$  نوع پوچ است که وابسته به  $x_0$ ، ثابت یا غیرثابت است. عکس به آسانی نتیجه می‌شود.  $\square$

**قضیه ۲.۲.** ابرویه‌های لورنتزی  $C$ -متناهی در فضای لورنتزی چهار بعدی نمی‌توانند  $C$ -دوهارمونیک باشند.

**اثبات.** فرض کنید  $x : M_1^3 \rightarrow \mathbb{M}_1^4(c)$  یک ابرویه لورن  $C - ۱۳۶$  نوع باشد. یک تجزیه به صورت زیر وجود دارد:

$$x = x_0 + x_1 + \dots + x_k, \quad (۱)$$

با  $Cx_i = \lambda_i x_i$  و  $Cx_0 = 0$  برای مقادیر ویژه متمایز ناصفر  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  از  $C$ . از رابطه (۱) داریم:

$$C^s x = \lambda_1^s x_1 + \dots + \lambda_k^s x_k, \quad (2)$$

برای  $s = 1, 2, 3$ .

حال، فرض کنید  $x$ ،  $C$  - دوهارمونیک باشد (به عبارت دیگر  $C^2 x = C^3 x = 0$ ). از رابطه (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 x_1 + \dots + \lambda_k^2 x_k = 0, \\ \lambda_1^3 x_1 + \dots + \lambda_k^3 x_k = 0, \end{cases}$$

بنا به این که  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  مقادیر ویژه دوبرو مجزا از  $C$  هستند، بردارهای  $x_1, \dots, x_k$  مستقل خطی هستند. در نتیجه،  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  که تناقض است.  $\square$

**گزاره ۳.۲.** هر  $D_1$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با سه خمیدگی اصلی متمایز دارای خمیدگی اسکالر ثابت است.

**قضیه ۴.۲.** هر  $D_1$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با خمیدگی میانگین ثابت و سه خمیدگی اصلی متمایز، ۱-مینیمال است.

**اثبات.** بنا به گزاره ۳.۲، دومین خمیدگی میانگین  $H_2$  ثابت است. ثابت می‌کنیم  $H_2 \equiv 0$ . فرض کنید روی یک همسایگی حول یک نقطه  $H_2 \neq 0$  باشد. شرط  $D_1$ -نوع بودن نتیجه می‌دهد  $H_3$  ثابت است. در نتیجه،  $M_1^3$  ایزوپارامتریک است زیرا  $H_1, H_2$  و  $H_3$  ثابت هستند. با استفاده از [۱]، نتیجه ۷.۲، می‌دانیم هر  $D_1$ -ابررویه ایزوپارامتریک ممکن است بیشتر از یک خمیدگی اصلی ناصفر نداشته باشد. پس یک تناقض با این فرض داریم که  $M$  دارای سه خمیدگی اصلی متمایز است. پس  $H_2 \equiv 0$ .  $\square$

**گزاره ۵.۲.** هر  $D_1$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با دو خمیدگی اصلی متمایز دارای خمیدگی اسکالر ثابت است.

**قضیه ۶.۲.** هر  $D_1$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با خمیدگی میانگین ثابت و حداکثر دو خمیدگی اصلی متمایز، ۱-مینیمال است.

**گزاره ۷.۲.** هر  $D_2$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با خمیدگی میانگین معمولی ثابت و انحنا اصلی حقیقی ثابت دارای خمیدگی‌های میانگین دوم و سوم ثابت است.

**قضیه ۸.۲.** هر  $D_2$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با خمیدگی میانگین معمولی ثابت و خمیدگی اصلی حقیقی ثابت، ۱-مینیمال و ۲-مینیمال است.

**گزاره ۹.۲.** هر  $D_3$ -ابررویه  $H_2$ -سره از  $M_1^4(c)$  با خمیدگی میانگین معمولی ثابت دارای دومین خمیدگی اصلی ثابت است.

## مراجع

- [1] M. A. Magid, "Lorentzian isoparametric hypersurfaces," Pacific J. Math, vol. 118, 165–197, 1985.
- [2] B. O'Neill, "Semi-Riemannian Geometry, Pure and Applied Mathematics", 103, Academic Press, Inc. New York, 1983.
- [3] A. Petrov, "Einstein Spaces, translated from the Russian: ۱۳۷ F. Kelleher", translation edited by J. Woodrow, Pergamon, Oxford, 1969.

## میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت در منیفلدهای ریمانی

مرتضی شریفی نجار\*، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، صندوق پستی ۴۳۱۱-۱۵۹۱۶۳، تهران، ایران

sharifinajjar@gmail.ir

بهزاد نجفی سقزچی، عضو هیات علمی گروه ریاضی محض دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی امیرکبیر، صندوق پستی ۴۳۱۱-۱۵۹۱۶۳، تهران، ایران

behzad.najafi@aut.ac.ir

### چکیده:

در این مقاله، ابتدا به معرفی میدان‌های برداری کیلینگ و بررسی خواص و ویژگی‌های آن‌ها پرداختیم و سپس حالت خاصی از این میدان‌ها یعنی میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت را مورد بحث و بررسی قرار دادیم. سپس به معرفی تبدیلات خاصی تحت عنوان تبدیلات کلیفورد-ولف پرداخته و ارتباط آن‌ها را با میدان‌های مذکور بررسی کردیم. در ادامه به جهت اهمیتی که مطالعه میدان‌های برداری کیلینگ روی فضاهای متقارن به منظور رده بندی این گونه فضاها دارند، به معرفی فضاهای متقارن پرداخته و طی یک قضیه نشان دادیم که گروه بنیادی اول فضاهای متقارن، آبلی است. در نهایت با معرفی تبدیلاتی موسوم به ترابریش در امتداد ژئودزیک‌ها و در نظر گرفتن عمل ایزوتروپی گروه لی  $G$  روی فضای متقارن  $M$  یک تجزیه برای جبر لی این گروه ارائه کردیم که این تجزیه منجر به بیان ارتباطی بین فضاهای متقارن و میدان‌های برداری کیلینگ گردید.

کلمات کلیدی: منیفلدهای ریمانی، میدان‌های برداری کیلینگ، تبدیلات کلیفورد-ولف، فضاهای متقارن

### ۱ مقدمه

در سال ۲۰۰۸ آقایان برستوفسکی<sup>۱</sup> و نیکورونوف<sup>۲</sup> پژوهشگران ریاضی روسی مباحثی را در زمینه میدان‌های برداری کیلینگ در فضاهای ریمانی، فضاهای موضعا متقارن و فضاهای همگن کلیفورد-ولف به منظور بررسی و رده بندی فضاهای همگن ارائه کردند که نمونه‌ای از این دستاوردها در [۱] و [۳] قابل ملاحظه است. در این مقاله، ابتدا به معرفی میدان‌های برداری کیلینگ پرداخته و سپس مفهوم تبدیلات کلیفورد-ولف و ارتباط آن‌ها با این میدان‌ها را ارائه می‌کنیم و در ادامه پس از معرفی اجمالی از فضاهای متقارن، به بیان ارتباط بین این فضاها با میدان‌های برداری کیلینگ می‌پردازیم. اهمیت و ضرورت مطالعه میدان‌های برداری کیلینگ، همانطور که در بالا بدان اشاره شد، در بررسی و رده بندی فضاهای همگن و فضاهای متقارن در حالات خاص خود را نشان می‌دهد. خصوصا اینکه میدان‌های برداری کیلینگ با طول ثابت نه تنها

در تحلیل خواص هندسی منیفلدهای ریمانی متقارن و همگن مؤثرند، بلکه در درک بهتر روابط بین تقارن، انحنا، و همگنی این منیفلدها نیز نقش مهمی دارند. این یافته‌ها به دانش موجود در زمینه هندسه دیفرانسیل کمک کرده و ابزارهای جدیدی برای مطالعه منیفلدهای ریمانی با ویژگی‌های خاص ارائه می‌دهند. از طرفی مبحث فضاهای متقارن ریمانی که برای اولین بار توسط کارتان در سال ۱۹۲۵ معرفی شد، یکی از زیباترین و مهمترین منیفلدهای ریمانی هستند و در حوزه‌های مختلف بین رشته‌ای نیز کاربرد فراوانی دارند که علاوه بر جنبه‌های خالص هندسی، ردپای فضاهای متقارن را می‌توان در کوانتوم، پردازش تصویر و مکانیک نیز یافت.

یکی از سؤالاتی که هنگام مطالعه هندسه ریمانی ممکن است به ذهن برسد، این است که اگر مشتق کواریان تانسور انحنا متحد با صفر باشد، چه روی می‌دهد؟ بدیهیست مثلاً در منیفلدهایی که تانسور انحنا ثابت باشد، این اتفاق خواهد افتاد. بنابراین، حداقل در وجود چنین فضاهایی شکی نیست.

در فضاهای ریمانی، با تانسور انحای ریمانی  $R$  صفر شدن مربع یک تانسور صفر بودن خود آن تانسور را نتیجه خواهد داد. بنابراین،  $\nabla \nabla \dots \nabla R = 0$  به طور دقیق معادل  $\nabla R = 0$  است. پیامد نکته اخیر، پایستگی شرط تقارن نسبت به تعمیم بوده و نشان می‌دهد که تقارن در فضاهای ریمانی یک مفهوم تفکیک ناپذیر است. چنین اهمیت ویژه‌ای از تقارن، نگاه ریاضیدانان بسیاری را به خود جلب کرده است که الی کارتان سرآمد آنهاست و نیز مطالعات کامل و پربار او درباره تقارن بر کسی پوشیده نیست.

## ۲ میدان‌های برداری کیلینگ و تبدیلات کلیفورد-ولف

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم  $(M, g)$  یک منیفلد ریمانی است. میدان برداری  $X \in \chi(M)$  را یک میدان برداری کیلینگ می‌نامیم هرگاه  $\mathcal{L}_X(g) = 0$ .

در این حالت گروه تک پارامتری  $X$  متشکل از ایزومتري‌های  $(M, g)$  است. یعنی اگر  $\{\phi_t\}$  گروه تک پارامتری  $X$  باشد، آنگاه  $\forall t, \phi_t^*(g) = g$ .

**مثال ۲.۲.** میدان برداری دوران‌های صفحه اقلیدسی دو بعدی  $(\mathbb{R}^2, g_0)$  یعنی  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  به این دلیل که دوران‌ها در  $\mathbb{R}^2$  حافظ طول هستند، لذا ایزومتري اند و  $X$  یک میدان برداری کیلینگ است. [۱]

**گزاره ۳.۲.** اگر  $(M, g)$  یک منیفلد ریمانی و  $\nabla$  التصاق لوی-چویتا و  $X$  یک میدان برداری روی  $M$  باشد،  $p \in M$ ،  $U \subset M$  یک همسایگی  $p$  و نیز  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$  گروه تک پارامتری وابسته به میدان برداری  $X$  باشد. آنگاه موارد زیر برقرارند:

الف. اگر  $X$  یک میدان برداری  $C^\infty$  روی  $M$  و  $f : M \rightarrow N$  یک ایزومتري و  $Y$  یک میدان برداری روی  $N$  با ضابطه  $p \in M, Y(f(p)) = df_p(X(p))$  باشد، آنگاه میدان  $Y$  کیلینگ است، اگر و تنها اگر  $X$  کیلینگ باشد.

ب.  $X$  کیلینگ است، اگر و تنها اگر  $\forall Y, Z \in \chi(M), \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$ .

ج. اگر  $X$  روی  $M$  کیلینگ باشد و  $q \in M$  و  $X(q) \neq 0$ ، آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی  $\{x_i\}_{i=0}^n$  در یک همسایگی از  $q$  وجود دارد به طوری که اگر  $X = \partial_n$  بخواهد کیلینگ باشد، آنگاه ضرایب  $g_{ij}$  در دستگاه مختصات به  $x_n$  بستگی ندارد. [۲]

**تعریف ۴.۲.** میدان برداری کیلینگ  $X$  را با طول ثابت می‌نامیم هرگاه  $g(X, X)$  مقداری ثابت باشد.

**لم ۵.۲.** فرض کنید  $X$  یک میدان برداری کیلینگ روی  $M$  ریمانی  $(M, g)$  باشد. آنگاه موارد زیر معادل‌اند :  
الف)  $X$  روی  $M$  با طول ثابت است.



(ب)  $\nabla_X X = 0$  روی  $M$ .

(ج) هر خم انتگرال میدان برداری  $X$ ، یک ژئودزی روی  $(M, g)$  است. [۲]

لم ۶.۲. فرض کنیم  $(M, g)$  یک منیفلد ریمانی همبند و  $G$  گروه لی همبند با جبر لی  $\mathfrak{g}$  باشد که بطور ایزومتري روی  $(M, g)$  عمل می‌کند  $(x \mapsto a(x), x \in M, a \in G)$ . فرض کنیم میدان برداری کیلینگ  $X \in \mathfrak{g}$  روی  $(M, g)$  با طول ثابت باشد آنگاه برای هر  $Y, Z \in \mathfrak{g}$  تساوی‌های زیر در هر نقطه از  $M$  برقرار هستند:

$$1) \quad g([Y, X], X) = 0$$

$$2) \quad g([Z, [Y, X]], X) + g([Y, X], [Z, X]) = 0$$

اگر  $G$  بصورت متعدی روی  $M$  عمل کند، آنگاه شرط (1) نتیجه می‌دهد که  $X$  با طول ثابت است. علاوه بر این، شرط (2) نیز ثابت بودن طول  $X$  را به شرط فشردن  $M$  و متعدی بودن عمل  $G$  تضمین می‌کند. [۲]

گزاره ۷.۲. فرض کنیم  $Z$  یک میدان برداری کیلینگ با طول ثابت و  $X, Y$  میدان‌های برداری دلخواه روی منیفلد ریمانی  $(M, g)$  باشند. آنگاه تساوی زیر روی  $M$  برقرار است:

$$g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = g(R(X, Z)Z, Y) = g(R(Z, Y)X, Z)$$

□

اثبات. [۱]

قضیه ۸.۲. برای هر میدان برداری کیلینگ با طول ثابت  $Z$  روی منیفلد ریمانی  $(M, g)$  داریم:

$$\nabla_Z(R(\cdot, Z)Z) \equiv 0$$

اثبات. کافیت نشان دهیم که برای هر دو میدان برداری  $X$  و  $Y$  در  $M$  عبارت  $g(\nabla_Z R(X, Z)Z, Y)$  برابر با صفر است. از گزاره (۷.۲) می‌دانیم:

$$g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = g(R(X, Z)Z, Y).$$

داریم:

$$Z.g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = g(\nabla_Z \nabla_X Z, \nabla_Y Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Z \nabla_Y Z)$$

$$= g(R(Y, Z)Z, \nabla_Z X) + g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y).$$

از طرفی دیگر :

$$Z.g(R(X, Z)Z, Y) =$$

$$g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) + g(R(\nabla_Z X, Z)Z, Y) + g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y)$$

$$= g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) + g(R(Y, Z)Z, \nabla_Z X) + g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y).$$

با ترکیب معادلات بالا، خواهیم داشت:

$$g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) = 0$$

□

در نتیجه حکم ثابت شده است.

تعریف ۹.۲. انتقال  $f : (M, g) \rightarrow (M, g)$  را یک تبدیل  $\varphi$ -ورد-ولف می‌نامیم، هرگاه  $f$  دو نقطه  $M$  را به اندازه یکسانی تغییر دهد. یعنی  $d(x, f(x))$  مستقل از  $x$  باشد.



مثال ۱۰.۲. در  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  انتقال‌ها تبدیل کلیفورد-ولف هستند. در واقع عکس این حکم نیز برقرار است. یعنی هر تبدیل کلیفورد-ولف  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  یک انتقال است. [۳]

گزاره ۱۱.۲. میدان برداری کیلینگ  $X$  از منیفلد ریمانی  $(M, g)$  دارای طول ثابت است اگر و فقط اگر هر خم انتگرال آن یک ژئودزیک  $(M, g)$  باشد. [۳]

مثال ۱۲.۲. فرض کنیم  $(M, g)$  یک منیفلد ریمانی است و گروه  $G \leq \text{Isom}(M, g)$  روی  $M$  بطور متعدی عمل کند. در این صورت اگر  $s \in G$  یک عضو مرکزی باشد، یعنی  $\forall a \in G, a.s = s.a$  در این صورت  $s$  یک تبدیل کلیفورد-ولف است. [۳]

نتیجه ۱۳.۲. هرگاه گروه لی  $G$  روی منیفلد ریمانی  $(M, g)$  بطور متعدی و با ایزومتري عمل کند و مرکز  $G$  یعنی  $Z$  گسسته نباشد، آنگاه هر زیر گروه تک پارامتری  $Z$  یک زیرگروه تک پارامتری از تبدیلات کلیفورد-ولف  $(M, g)$  است. [۳]

گزاره ۱۴.۲. فرض کنیم  $\phi_t$  زیر گروه تک پارامتری از ایزومتري‌های  $(M, g)$  است که با میدان برداری کیلینگ  $X$  تولید شده است و به ازای هر  $t$ ،  $\phi_t$  یک تبدیل کلیفورد-ولف است. در این صورت  $X$  با طول ثابت است.

اثبات. می‌دانیم که  $\forall x \in M, X(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(x)$  اگر قرار دهیم  $c(t) = \phi_t(x)$  در این صورت  $c$  یک خم هموار است که  $c'(0) = X(x), c(0) = x$  داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x, \phi_t(x))}{t} = \sqrt{g_x(X(x), X(x))}$$

اما بنا به فرض به ازای هر  $t \in \mathbb{R}$ ،  $\phi_t : M \rightarrow M$  یک تبدیل کلیفورد-ولف است. بنابراین  $d(x, \phi_t(x))$  مستقل از  $x$  و فقط تابعی از  $t$  است. قرار می‌دهیم  $\sigma(t) := d(x, \phi_t(x))$  توجه داریم که  $\sigma(0) = 0$  و

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x, \phi_t(x))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(0)}{t} = \sigma'(0)$$

□

بنابراین  $\forall x \in M, g_x(X(x), X(x)) = \sigma'(0)^2$  ثابت است. [۳]

## ۳ فضاهای متقارن و تبدیلات ترنسوکشن

در این بخش، به معرفی اجمالی از فضاهای متقارن و معرفی تبدیل ترنسوکشن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. منیفلد ریمانی  $(M, g)$  را متقارن می‌نامیم، هرگاه برای هر  $x \in M$  یک ایزومتري  $s_x : M \rightarrow M$  موجود باشد که  $s_x(x) = x$  و  $(ds_x)_x = -1_{T_x M}$  در این حالت  $s_x$  را تقارن در نقطه  $x$  می‌نامیم.

مثال ۲.۳.  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  یک فضای متقارن است. کافی است به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  تابع 
$$\begin{cases} s_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ y \mapsto -y + 2x \end{cases}$$
 را در نظر

بگیریم که یک نیم دور حول  $x$  است. [۴]

ملاحظه ۳.۳. در فضاهای متقارن  $(M, g)$  اگر به ازای  $x \in M$ ،  $s_x : M \rightarrow M$  تقارن در  $x$  باشد، آنگاه به ازای هر ژئودزی با سرعت واحد  $C = c(t)$  که  $c(0) = X$  داریم  $s_x(c(t)) = c(-t)$ ، بنابراین به  $s_x$  تقارن ژئودزیکی یا انعکاس ژئودزیکی در نقطه  $p$  نیز می‌گویند. [۴]

در اینجا این نکته لازم به ذکر است که در سال ۱۹۶۳ ا. فردنتال تمام تبدیلات کلیفورد-ولف فضاهای متقارن را شناسایی کرده است. [۵]

**تعریف ۴.۳.** ایزومتري  $\tau: M \rightarrow M$  را یک تبدیل ترابریش (ترنسوکشن)<sup>۳</sup> در امتداد ژئودزی  $\gamma$  می‌نامیم، هرگاه به اندازه هر میدان برداری موازی  $X$  در امتداد  $\gamma$  داشته باشیم:

$$(I) \quad \begin{cases} \tau_{*\gamma(t)}(X(t)) = X(t + t_0) \\ \tau(\gamma(t)) = \gamma(t + t_0) \end{cases}$$

$\tau$  را به شکل  $\tau_{t_0}$  نیز نمایش می‌دهیم.

**گزاره ۵.۳.** هرگاه  $M$  یک فضای متقارن باشد، آنگاه به ازای هر  $p, q \in M$  ایزومتري  $s_{pq}$  یک تبدیل ترابریش در امتداد هر ژئودزیک واصل  $p$  به  $q$  است. [۴]

**قضیه ۶.۳.** هرگاه  $M$  یک فضای متقارن باشد آنگاه  $\pi_1(M)$  (گروه بنیادی اول  $M$ ) آبلی است. [۴]  
بنابراین اگر  $\pi_1(M)$  آبلی نباشد، آنگاه روی  $M$  هیچ متر ریمانی وجود ندارد که آن را تبدیل به یک فضای متقارن کند؛ مانند  $\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ .

## ۴ فضاهای متقارن تحویل ناپذیر ایزوتروپی

**تعریف ۱.۴.** هرگاه  $G$  یک گروه لی و  $V$  فضای برداری حقیقی باشد، نمایش  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  را تحویل ناپذیر<sup>۴</sup> می‌نامیم هرگاه زیر فضای ناوردای غیر بدیهی نداشته باشد. یعنی اگر  $W \leq V$  یک زیرفضای ناوردای  $\rho$  باشد، آنگاه  $W = 0$  یا  $W = V$ . اگر نمایش  $\rho$  دارای حداقل یک زیرفضای ناوردای غیر بدیهی باشد، آنگاه آنرا تحویل پذیر می‌نامیم.

**تعریف ۲.۴.** فرض کنیم  $(M, g)$  یک فضای متقارن است و  $M = \frac{G}{K}$  و  $\rho: K \rightarrow GL(T_p M)$  نمایش ایزوتروپی باشد که در آن  $K = G_p$  زیرگروه پایاگر عمل  $G$  در نقطه  $p \in M$  است. هرگاه نمایش ایزوتروپی، یعنی  $\rho$  تحویل ناپذیر باشد، می‌گوییم فضای متقارن  $M$  یک فضای متقارن تحویل ناپذیر ایزوتروپی است.

فرض کنیم فضای متقارن  $M$  تحویل ناپذیر ایزوتروپی است. نقطه  $p \in M$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $M = \frac{G}{K}$  که  $K = G_p$  زیرگروه پایاگر  $p$  نسبت به عمل  $G$  روی  $M$  است. فرض می‌کنیم  $\mathfrak{g}$  جبر لی  $G$  است و اعضای  $\mathfrak{g}$  را به عنوان میدان برداری چپ پایا در نظر می‌گیریم. دو زیر فضای مهم را برای  $\mathfrak{g}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{K} := \{X \in \mathfrak{g} \mid X(p) = 0\}$$

$$\mathfrak{F} := \{X \in \mathfrak{g} \mid (\nabla_X)_p = 0\}$$

فرض کنیم  $X \in \mathfrak{g}$  را می‌توان به عنوان یک میدان برداری روی  $M$  نیز در نظر گرفت که شار موضعی آن عبارتست از:

$$\forall x \in M, \varphi_t(x) := \exp(tX).x$$

۱۴۲

<sup>۳</sup>(ترابریش، معادل فارسی Transvection است.)  
<sup>۴</sup>irreducible



این میدان برداری را نیز با  $X$  نمایش می‌دهیم. اگر  $X \in \mathfrak{K}$  آنگاه به ازای هر  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tX) \in K$ . بنابراین  $\varphi_t(p) = \exp(tX).p = p$  و در نتیجه  $\frac{d}{dt} \big|_{t=0} \varphi_t(p) = 0$ .  $X(p) = 0$  برعکس، اگر  $X(p) = 0$  آنگاه

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tX).p = p$$

یعنی  $\exp(tX) \in K$ . بنابراین  $\mathfrak{K}$  همان جبرلی زیرگروه پایاگر  $p \in M$  است. یعنی  $\mathfrak{K} = \text{Lie}(K) = T_e K$ . [۶]  
در واقع  $\mathfrak{g}$  جبرلی تبدیلات بی نهایت کوچک ترابریش‌ها است. برای ژئودزیک  $\gamma_\nu$  که از  $p$  با بردار سرعت  $v$  می‌گذرد، یک خانواده تک پارامتری از تبدیلات ترابریش‌ها مانند  $\{g_\nu(t)\}$  داریم که  $\gamma_\nu$  بر هر میدان برداری موازی در امتداد  $\gamma_\nu$  را انتقال می‌دهد [۶]. حال قرار می‌دهیم:  $V = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} g_\nu(t) \in \mathfrak{g}$  ادعا می‌کنیم مجموعه تمام میدان‌های برداری کیلینگ که به صورت بالا تعریف می‌شوند همان زیرفضای  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{K}$  را تشکیل می‌دهند. برای راحتی به میدان برداری  $V$  یک میدان برداری ترابریش می‌گوییم. در [۶] ثابت می‌شود هرگاه  $V$  یک میدان برداری ترابریش (ترانسوکشن) باشد آنگاه  $V \in \mathfrak{g}$  که در نهایت بدست خواهد آمد که  $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{g}$ .

گزاره ۳.۴.  $\mathfrak{K}$  یک زیر جبر لی  $\mathfrak{g}$  است. یعنی اگر  $V, W \in \mathfrak{K}$  آنگاه  $[V, W] \in \mathfrak{K}$

اثبات. اولاً اگر  $V$  و  $W$  میدان‌های برداری کیلینگ باشند، آنگاه  $\mathcal{L}_W(g) = \mathcal{L}_V(g) = 0$  حال با توجه به اینکه  $\mathcal{L}_{[V,W]}(g) = 0$  و  $\mathcal{L}_V \mathcal{L}_W(g) - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V(g) = 0$  نیز میدان برداری کیلینگ است. اگر فرض کنیم  $V = f^i \frac{\partial}{\partial X^i}$  و  $W = g^j \frac{\partial}{\partial X^j}$  نمایش‌های موضعی  $V$  و  $W$  در یک کارت حول  $p \in M$  باشند آنگاه  $V, W \in \mathfrak{K}$  معادل است با  $f^i(p) = g^j(p) = 0, i = 1, \dots, n$  از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} [V, W] &= \left( f^j \frac{\partial g^i}{\partial X^j} - g^j \frac{\partial f^i}{\partial X^j} \right) \frac{\partial}{\partial X^i} \\ \Rightarrow f^j \frac{\partial g^i}{\partial X^j} - g^j \frac{\partial f^i}{\partial X^j} (p) &= 0, \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

□

که از تساوی اخیر بدست می‌آید  $[V, W] \in \mathfrak{K}$

## مراجع

- [1] V.N. Berestovskii and Yu.G. Nikoronov, Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds. Siberian Mathematical journal, Vol. 49, pp.395-407, 2008.
- [2] V.N. Berestovskii and Yu.G. Nikoronov, Killing vector fields of constant length on locally symmetric Riemannian manifolds. Transformation Groups, Vol.13, pp.25-45, 2008
- [3] V.N. Berestovskii and Yu.G. Nikoronov, Clifford-Wolf homogeneous Riemannian manifolds, J.Differential Geom. Vol.82, Num.3, pp.467-500, 2009.
- [4] H.J. Eschenburg, Lecture notes on Symmetric Spaces, Augsburg university, 1997.
- [5] H. Freudenthal, Clifford-Wolf-Isometrien symmetrischer Räume, Math. Ann.150, pp.136-149 (German), 1963.
- [6] Yu.G. Nikoronov, Killing vector fields of constant length on compact homogeneous Riemannian manifolds.

## فصل ۶

### پوسترها

## بررسی داده‌های مربوط به افت و خیز دما با استفاده از تحلیل حذف شیب چندفرکتالی

معصومه بی‌باک\*، گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

m.bibak62@gmail.com

احمد نادری بنی، گروه فیزیک، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

(عضو هیأت علمی)

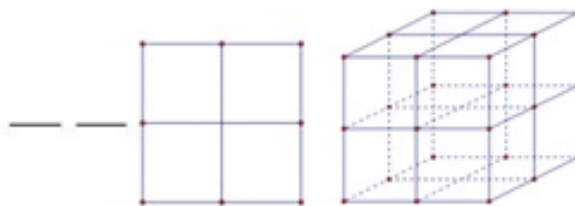
**چکیده:** مطالعه خواص پیچیده‌ی چندفرکتالی و ناوردامقیاسی سری‌های زمانی فیزیولوژیکی و پدیده‌های طبیعی مانند داده‌های هواشناسی و زلزله برای شناخت و پیش‌بینی رفتار این داده‌ها بسیار مورد توجه محققان است. یکی از این روش‌ها روش حذف شیب چندفرکتالی است که با استخراج پارامترهای چندفرکتالی و ناوردامقیاس و اندازه‌گیری همبستگی‌های بلندبرد داده‌ها، به بررسی منشاء رفتار این داده‌ها می‌پردازد. در این مقاله با بررسی همبستگی بلند برد در سری زمانی مربوط به افت و خیز دمای میانگین شبانه‌روزی در مدت یکسال با استفاده از آنالیز حذف شیب چندفرکتالی ارتباط معناداری بین پارامتر مقیاسی استخراج شده که بیانگر همبستگی بلندبرد داده‌ها می‌باشد، با میزان بارش سالیانه مشاهده شد به طوری که هرچه بارش سالیانه بیشتر باشد، داده‌های مربوط به افت و خیز دما همبسته‌تر است.

**کلمات کلیدی:** سری زمانی فیزیکی، همبستگی داده‌های فیزیکی، حذف شیب چندفرکتالی، ناوردامقیاس

### ۱ مقدمه

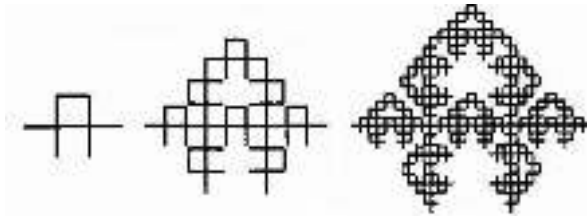
یک سری زمانی مجموعه‌ای است از مشاهدات که در زمان‌های متوالی اندازه‌گیری شده است. مثال‌های بارز آن در شاخه‌های مختلف از فیزیک تا علوم ریاضی، اقتصاد، هواشناسی و علوم مهندسی به چشم می‌خورد و در هر شاخه علمی، روش‌هایی برای تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی ابداع و بکارگرفته شده است [۵]. برخی از ابزارهای برآورد سری زمانی عبارتند از تابع همبستگی، چگالی احتمال، تشکیل سری فوریه در حوزه فرکانس، تبدیل پیوسته موجک، تبدیل سری زمانی کوتاه، تحلیل آشوبی و معرفی بعد همبستگی، تحلیل فرکتالی، تحلیل حذف شیب و تحلیل حذف شیب چندفرکتالی که روش آخر در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است [۱]. کمیتی که به طور سنتی در اندازه‌گیری همبستگی‌های سری‌های زمانی بکار می‌رود، طیف توانی است که محتوای فرکانس مربوطه سیگنال را اندازه‌گیری می‌نماید. مطالعه رکوردهای با طول بیشتر ۱۴۵، از آن دارد که سری‌ها از خود رفتار عکس فرکانسی نشان

می‌دهند. فرض اساسی در محاسبه طیف توانی و استفاده از آنالیز عکس فرکانسی پایدار بودن سیگنال مربوطه است در حالی که با اعمال این روش برای مطالعه سری‌های زمانی ناپایدار، نتایج گمراه‌کننده‌ای بدست آمده است [۶]. روش بکار گرفته شده در این مقاله برای بررسی همبستگی داده‌ها روش حذف شیب چندفرکتالی است که کاربرد آن به عنوان یک روش جدید، محاسبه دقیق پارامتر همبستگی برای سری‌های زمانی ناپایدار است [۴]. در سال‌های اخیر آنالیز حذف شیب چندفرکتالی به یکی از تکنیک‌های پرکاربرد برای بررسی خواص مقیاسی و برآورد همبستگی‌های بلندبرد در سری‌های زمانی ناپایدار تبدیل شده است. این روش در حوزه‌های مختلفی همچون علم ژنتیک، دینامیک قلب، بیماری‌های حرکتی، زمین‌شناسی، علوم اقتصادی و هواشناسی بطور موفقیت‌آمیز مورد استفاده قرار گرفته است [۱]. قبل از معرفی روش حذف شیب چندفرکتالی به عنوان روشی برای بررسی ساختار فرکتالی یک سری زمانی برای درک بهتر فرکتال ابتدا به مفهوم ابعاد و هندسه فرکتال اشاره می‌شود [۲]. بُعد فضایی خط، صفحه و حجم به ترتیب ۱، ۲ و ۳ است. یکی از تعاریفی که برای شناسایی کمیت بُعد بکار می‌رود به این صورت است که اگر طبق شکل ۱، طول یک پاره‌خط، طول ضلع یک مربع و یا طول ضلع یک مکعب را نصف کنیم، به ترتیب پاره‌خط به ۲، مربع به ۴ و مکعب به ۸ قسمت مشابه خود تبدیل می‌شود که طبیعتاً اندازه ثانویه هر کدام کوچک‌تر خواهد شد. مفهوم اعداد ۲، ۴ و ۸ که ابعاد اقلیدسی هستند می‌تواند در حالت کلی تعمیم داده شود و باعث درک مفهوم ابعاد دیگری بنام ابعاد کسری یا فرکتالی شود. رابطه تطبیق بُعدی در این حالت بصورت  $N(2) = 2^d$  است و مقدار آن همیشه عددی طبیعی



شکل ۱: بدست آوردن ابعاد اقلیدسی در اشکال هندسی از طریق تقسیم شکل به قسمت‌های مشابه

است.  $N(2)$  تعداد قسمت‌های مشابهی از یک المان است که در اثر تقسیم کردن المان اصلی به دو بخش مساوی بدست می‌آید. این شیوه تعریف بُعد برای ساختارهای فرکتالی هندسی و سپس ساختارهایی مثل سری‌های زمانی مختلف فیزیکی، فیزیولوژیکی و ... تعمیم داده شده است [۲]. برای فرکتال‌های ریاضی، یک ساختار از  $N(a)$  بخش یکسان به اندازه  $\frac{1}{a}$  تشکیل شده است. بُعد تعمیم یافته برای یک ساختار فرکتالی به صورت  $D_f = \frac{\log(N(a))}{\log(a)}$  تعریف می‌شود [۱]. با این تفاوت که  $D_f$  محدود به مقادیر صحیح نیست و می‌تواند مقادیر غیر صحیح نیز اختیار کند.  $D_f$  بعد همسانی نیز نامیده می‌شود. برای مثال در شکل ۲، ساختار فرکتال مندلبروت که از هشت خط به طول  $\frac{1}{3}$  تشکیل می‌شود، در مرحله بعد هر کدام از پاره‌خط‌ها دوباره با ساختار اولیه جایگزین می‌شوند و این کار برای مراحل بعدی ادامه می‌یابد تا بعد همسانی با رابطه‌ی  $D_f = \frac{\log(8)}{\log(3)} = 1.892$  محاسبه گردد. در این‌جا مشاهده می‌شود که بُعد فرکتال مندلبروت عددی غیر صحیح است و این یکی از خواص مهم فرکتال است. این ابعاد بین دو بعد اقلیدسی قرار می‌گیرند. با این تعریف، برای فرکتال مندلبروت بُعد فرکتالی از بُعد خط که یک است بیشتر است ولی چون فرکتال مندلبروت نتوانسته است کل صفحه را بپوشاند پس بُعدی بین ۱ و ۲ خواهد داشت. مبنایی که بعد فرکتالی یک سیستم را تعیین می‌کند (اعم از این‌که این شکل هندسی با ساختار فضایی خود شبیه باشد یا یک سری زمانی با همبستگی بلندبرد) رفتار سیستم به ازای تقسیم‌بندی‌های مختلف آن در بزرگ‌نمایی‌های مختلف است. در این مقاله هدف این است که رفتار پیچیده فرکتالی و ۱۴۶ گگی بلندبرد در داده‌های هواشناسی به عنوان یک سیستم پیچیده با استفاده از روش حذف شیب چندفرکتالی مورد بررسی و محاسبه قرار گیرد.



شکل ۲: فرکتال مندلبروت

## ۲ معرفی روش حذف شیب چند فرکتالی در تحلیل داده‌ها

فرض کنیم سری زمانی مورد بررسی با طول  $N$  بصورت  $x_1, x_2, \dots, x_N$  باشد. روش حذف شیب چند فرکتالی برای بررسی این سری زمانی شامل پنج مرحله است [۳-۵]. در مرحله اول، سری زمانی  $Y(i)$  با توجه به سری زمانی  $x_i$  بصورت  $Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x})$  تعریف می‌شود که  $\bar{X}$  میانگین  $N$  داده است. در مرحله دوم، سری  $Y(i)$  به  $N_s = \text{int}(\frac{N}{S})$  قسمت غیر همپوشان، با طول  $S$  تقسیم می‌شود. مقدار  $S$  نیز از ۱ تا  $N$  متغیر است. از آنجایی که ممکن است طول  $N$  مضرب درستی از مقیاس زمانی  $S$  نباشد و بخش کوچکی از انتهای سری زمانی  $Y(i)$  در این تقسیم‌بندی به حساب نیاید، لذا تقسیم‌بندی فوق یکبار دیگر از انتهای سری  $Y(i)$  به سمت ابتدای سری تکرار می‌شود. بدین ترتیب جمعاً  $2N$  قسمت با طول  $S$  بدست خواهد آمد. با توجه به فرض ناپایدار بودن سری زمانی لازم است روندهای محلی سری را حذف کنیم. لذا از روش حذف شیب استفاده کنیم، برای هر کدام از  $2N$  قسمت بدست آمده تابع خطای  $F^2(\nu, S)$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F^2(\nu, S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^s (Y_s[(\nu-1)S + i] - y_\nu(i))^2, \nu = 1, 2, \dots, N_s$$

$$F^2(\nu, S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^s (Y_s[N - (-\nu - N_s)S + i] - y_\nu(i))^2, \nu = N_{s+1}, \dots, 2N$$

در این جا  $y_\nu(i)$  یک تابع چند جمله‌ای مرتبه اول یا مراتب بالاتر می‌باشد. در مرحله سوم، روی مقادیر انحراف معیار در تمام بازه‌ی با طول  $S$  میانگین‌گیری شده و تابع افت و خیز بصورت  $F_q(S) = (\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F_2(\nu, S)]^{\frac{q}{2}})^{\frac{1}{q}}$  محاسبه می‌شود. در این جا  $q$  یک متغیر حقیقی است. در  $q = 0$  تابع  $F_q(S)$  واگرا می‌شود و به جای  $F_q(S)$  تابع  $F_0(S)$  به صورت  $F_0(S) = \exp(\frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F_2(\nu, S)])$  تعریف می‌گردد. در مرحله چهارم تابع  $h(q)$  که به نمای تعمیم‌یافته‌ی هارست معروف است با استفاده از رابطه مقیاسی  $F_q(S)$  به صورت  $F_q(S) = (\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F_2(\nu, S)]^{\frac{q}{2}})^{\frac{1}{q}}$  استخراج می‌شود.

## ۳ کاربرد روش حذف شیب چندفرکتالی در آنالیز داده های هواشناسی

در این مقاله از داده‌های مربوط به افت و خیز دمای میانگین شبانه روزی و همچنین میزان بارش سالیانه شهر کرمانشاه در ۴۶ سال گذشته استفاده کرده‌ایم. با استفاده از آن ۱۴۷ شیب چندفرکتالی، همبستگی داده‌های دما از طریق محاسبه‌ی پارامتر مقیاسی  $h(q)$  برای سال‌های مختلف انجام شد. از آنجایی که  $h(q)$  میزان همبستگی بلند برد افت

جدول ۱: نتایج مربوط به ارتباط بارش سالیانه با میزان همبستگی افت و خیز دما در هر سال

| ردیف | سال  | میزان بارش سالیانه (میلیمتر) | پارامتر همبستگی $h(q)$ |
|------|------|------------------------------|------------------------|
| ۱    | ۱۳۴۴ | ۲۴۱                          | ۰/۶۰                   |
| ۲    | ۱۳۵۰ | ۶۴۲                          | ۰/۷۸                   |
| ۳    | ۱۳۵۲ | ۲۹۰                          | ۰/۵۷                   |
| ۴    | ۱۳۶۲ | ۳۶۲                          | ۰/۶۴                   |
| ۵    | ۱۳۷۳ | ۷۰۲                          | ۰/۸۰                   |
| ۶    | ۱۳۸۰ | ۳۹۸                          | ۰/۶۶                   |
| ۷    | ۱۳۸۶ | ۳۷۶                          | ۰/۶۵                   |

و خیز دما در طول یک سال را نشان می دهد، مشاهده شد که همبستگی داده های دما در سال های مختلف، متفاوت است. با مقایسه ی این تفاوت ها، مشاهده گردید ارتباط معناداری بین رفتار دما در طول یک سال و میزان بارش در همان سال وجود دارد. بدین صورت که هر چه میزان بارش در طول یک سال زراعی نسبت به میانگین بلند مدت بیشتر باشد، افت و خیزهای دما در آن سال رفتار همبسته تری دارد و بالعکس. در جدول ۱، میزان بارش سالانه و مقدار پارامتر همبستگی برای ۷ سال متفاوت به طور نمونه آورده شده است.

## مراجع

- [1] Ivonov, et. all, "Levels of Complexity in Scale-Invariant Neural Signals," Chaos 11, No.3, pp. 641-652, 2001.
- [2] P. Jurica, "Multifractal analysis of all, "frontiers in physiology, vol. 6(27), 2015.
- [3] J. W. Kantelhart, et all, "Multifractal Detrended time series," Physica A, 316, 87-114, 2002.
- [4] P. Oswiecimka, P. Kwapien, and P. Drozd, "Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures," Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys, vol. 74, 2006.
- [5] L.Simin, W. Li and Z.Xingjia, "Comparative Study of Sliding Window Multifractal Detrended Fluctuation Analysis and Multifractal Moving Average Algorithm, " Journal of physics:Conference Series, 1345 (042086), 2019.
- [6] M. F. Shlesinger, "Fractal time and  $\frac{1}{f}$  noise in complex systems," Ann. N. Y. Acad. Sci. vol. 504, pp.214, 1987.
- [7] H. E. Stanly and et. all, "Effect of nonstationarities on detrended fluctuations analysis," Phys. Rev. Lett, vol 67, pp. 2388-2392, 1998.

# تقریب بالایی مخروط نرمال فرشه برای مسائل با قیود تعویضی هموار

زهرا جعفریانی<sup>۱</sup>، فارغ التحصیل دکتری تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور،

دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

zahra.jafarian1399@gmail.com

**چکیده:** در این مقاله به مسائل برنامه ریزی با قیود تعویضی می پردازیم که توابع آن متمایز و مشتق پذیر و پیوسته تعریف شده اند. نتایج اصلی تقریب بالایی از مخروط نرمال فرشه مجموعه  $S$  (مجموعه ای غیر تهی) در یک نقطه از اهمیت بیشتری برخوردار است. در ادامه به این مهم خواهیم پرداخت.

**کلمات کلیدی:** شرایط ایستایی، قیود تعویضی، قیود تعویضی هموار، مخروط نرمال

## ۱ مقدمه

فرض کنیم توابع هموار  $f, g_i, G_i$  ها و  $H_i$  ها توابع مشتق پذیر هستند که در آن  $I$  و  $J$  مجموعه های متناهی دلخواهی هستند. در این مقاله،  $MPSC$  ها را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} (\Delta) : \quad & \min \quad f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i \in I, \\ & G_j(x)H_j(x) = 0, \quad j \in J, \end{aligned}$$

می باشد، که این مسئله بهینه سازی یک مسئله بهینه سازی با قیود تعویضی می باشد. برخی از کاربردهای آن برای اولین بار در سال ۲۰۱۹ توسط مهلیتز<sup>۱</sup> معرفی شده است [۶] و در مورد صلاحیت قیدی و شرایط بهینگی آن به مطالعه پرداخته است. پس از آن، مطالعات گسترده ای، چه از نظر تئوری و چه از نظر کاربردی روی این مسائل انجام شد [۲، ۴، ۵، ۶]. در این مقاله، فرض می کنیم مجموعه موجه  $(\Delta)$  که با  $S$  نمایش داده می شود غیر تهی باشد.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i \in \{1, \dots, m\}, G_j H_j = 0, j \in \{1, \dots, p\}\}$$

و به ازای هر  $\hat{x} \in S$  قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 I^G(\hat{x}) &:= \{j \in \{1, \dots, p\} | G_j(\hat{x}) = 0, H_j(\hat{x}) \neq 0\}, \\
 I^H(\hat{x}) &:= \{j \in \{1, \dots, p\} | G_j(\hat{x}) \neq 0, H_j(\hat{x}) = 0\}, \\
 I^{GH}(\hat{x}) &:= \{j \in \{1, \dots, p\} | G_j(\hat{x}) = 0, H_j(\hat{x}) = 0\}, \\
 I^g(\hat{x}) &:= \{i \in \{1, \dots, m\} | g_i(\hat{x}) = 0\}.
 \end{aligned}$$

با توجه به [۴، قضیه ۶.۱۲] اگر  $x_0 \in S$  یک جواب بهینه برای  $(\Delta)$  باشد، آنگاه  $-\nabla f(x_0) \in N_F(S, x_0)$  که  $N_F(S, x_0)$  مخروط نرمال فرشه  $S$  در  $x_0$  می‌باشد. بنابراین تخمین بالای مخروط نرمال فرشه نسبت به  $(\nabla G_i(x_0), \nabla g_i(x_0))$  و  $H_i(x_0)$  برای شرط بهینگی برای مسئله  $(\Delta)$  لازم می‌باشد.

از آنجایی که تقریب‌های مناسب که مسائل برنامه‌ریزی با قیود تعویضی هموار و قیود تعویضی که به اختصار  $MPVC$  و  $MPSC$  در [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶] انجام شده است و تاکنون این کاربرد برای  $MPSC$ ها انجام نشده است، در این مقاله به این موضوع می‌پردازیم.

در بخش بعدی ما به دنبال یافتن برخی تقریب‌های بالایی مناسب برای مخروط نرمال فرشه و مجموعه‌های موجه مسائل بهینه‌سازی  $MPSC$ ها تحت صلاحیت‌های قیدی گویگنارد خواهیم بود و از این تقریب‌ها برای رسیدن به سه نوع شرط لازم برای مجموعه موجه  $(\Delta)$  استفاده می‌کنیم که تعاریف آنها به عنوان نقطه ایستایی ضعیف، نقطه ایستایی قوی و نقطه ایستایی مردوخویچ نامگذاری شده است. با توجه به تعاریف، بدیهی است که  $S$  -ایستایی از  $M$  -ایستایی و  $M$  -ایستایی از  $W$  -ایستایی قوی‌تر است.

برای معرفی صلاحیت قیدی که ما را به  $M$  -ایستایی برساند، مخروط برازنده<sup>۲</sup> زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{L}^{MPSC}(\hat{x}) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{ll} \langle \nabla g_i(\hat{x}), d \rangle \leq 0, & i \in I^g(\hat{x}), \\ \langle \nabla G_j(\hat{x}), d \rangle = 0, & j \in I^G(\hat{x}), \\ \langle \nabla H_j(\hat{x}), d \rangle = 0, & j \in I^H(\hat{x}), \\ \langle \nabla G_j(\hat{x}), d \rangle \langle \nabla H_j(\hat{x}), d \rangle = 0, & j \in I^{GH}(\hat{x}). \end{array} \right. \right\}.$$

**تعریف ۱.۱.** فرض کنیم  $\hat{x} \in S$  داده شده باشد. می‌گوییم  $MPSC - GCQ$  در  $\hat{x}$  برقرار است هرگاه

$$\mathcal{L}^{MPSC}(\hat{x}) \subseteq \overline{\text{con}}(\Gamma(M, \hat{x})).$$

**قضیه ۲.۱.** [۶] فرض کنیم  $\hat{x} \in S$  یک جواب از مسئله  $(\Delta)$  باشد و  $MPSC - GCQ$  در  $\hat{x}$  صدق کنند، در این صورت  $\hat{x}$  یک نقطه  $M$  -ایستا برای  $(\Delta)$  است.

**قضیه ۳.۱.** [۴] اگر  $\Omega$  متناهی باشد، هر مخروط  $(\Omega)$  بسته است.

**قضیه ۴.۱.** [۴] فرض کنید  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  مخروط‌های محدب، بسته و ناتهی در  $\mathbb{R}^n$  باشند، در این صورت

$$(\Omega_1 \cup \Omega_2)^- = \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad (\Omega_1 \cap \Omega_2)^- = cl(\Omega_1^- + \Omega_2^-)$$

**قضیه ۵.۱.** [۴] اگر  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تابع خطی باشد و داشته باشیم  $\phi(x) = \langle a_0, x \rangle$  برای هر  $a_0 \in \mathbb{R}^n$  و  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  یک مجموعه محدب باشد، آنگاه

$$(\phi^{-1}(cl(\Omega)))^- = \Omega^- a_0.$$

که در آن  $\phi^{-1}(cl(\Omega)) := \{x \in \mathbb{R}^n | \phi(x) \in cl(\Omega)\}$  و مخروط مماس فرشه که  $\Omega \neq \emptyset$  و  $x_0 \in \Omega$  به ترتیب دو تعریف زیر هستند.

$$\Gamma(\Omega, x_0) = \{\nu \in \mathbb{R}^n | \exists t_s \downarrow 0, \exists V_S \rightarrow \nu \text{ such that } x_0 + t_s \nu_s \in \Omega, \forall S \in N\}$$

$$N_F(\Omega, x_0) := (\Gamma(\Omega, \hat{x}))^-$$

<sup>۲</sup> Tailored cone

<sup>۳</sup> Bouligand tanger cone

## ۲ نتایج اصلی

به عنوان نقطه شروع این بخش، قضیه فنی زیر را بیان می‌کنیم که یک قانون کلیدی در این مقاله دارد.

**قضیه ۱.۲.** اگر  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  و  $B \in \mathbb{R}^{r \times q}$  دو ماتریس باشند و  $K := \{y \in \mathbb{R}^q \mid Ay \leq \circ_p, By = \circ_r\}$  آنگاه:

$$K^- = \{A^T \mu + B^T \eta \mid \eta \in \mathbb{R}^r, \mu \in \mathbb{R}_+^q\}.$$

**تعریف ۲.۲.** می‌گوئیم که  $(\Delta)$  معادل (صدق می‌کند)

شرایط محدودیت  $(GCQ)$  در  $\hat{x} \in S$  صدق می‌کند اگر

$$L := \left\{ w \in \mathbb{R}^n \mid \begin{cases} \langle w, \nabla g_j(\hat{x}) \rangle \leq \circ, & j \in J, \\ \langle w, \nabla G_i(\hat{x}) \rangle = \circ, & i \in I_G \\ \langle w, \nabla H_i(\hat{x}) \rangle = \circ, & i \in I_H \end{cases} \right\} \subseteq \overline{\text{cone}}(\Gamma(S, \hat{x})).$$

**قضیه ۳.۲.** فرض کنیم  $GCQ$  در  $\hat{x}$  باقی می‌ماند. پس

$$N_F(S, \hat{x}) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{|J_*|} \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{|I|} \left( \alpha_i \nabla G_i(\hat{x}) + \beta_i \nabla H_i(\hat{x}) \right) \mid \begin{cases} \lambda_j \geq \circ, & j \in J, \\ \alpha_i = \circ, & i \in I_H \cup I_{GH} \\ \beta_i = \circ, & i \in I_G \cup I_{GH} \end{cases} \right\}.$$

**قضیه ۴.۲.** فرض کنیم  $WGCQ$  در  $\hat{x}$  برقرار باشد. آنگاه

$$N_F(S, \hat{x}) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{|J_*|} \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{|I|} \left( \alpha_i \nabla G_i(\hat{x}) + \beta_i \nabla H_i(\hat{x}) \right) \mid \begin{cases} \lambda_j \geq \circ, & j \in J, \\ \alpha_i = \circ, & i \in I_H \\ \beta_i = \circ, & i \in I_G \end{cases} \right\}.$$

**قضیه ۵.۲.** اگر  $MPSC - GCQ$  در  $\hat{x}$  برقرار باشد، آنگاه

$$N_F(S, \hat{x}) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{|J_*|} \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{|I|} \left( \alpha_i \nabla G_i(\hat{x}) + \beta_i \nabla H_i(\hat{x}) \right) \mid \begin{cases} \lambda_j \geq \circ, & j \in J, \\ \alpha_i = \circ, & i \in I_H \\ \beta_i = \circ, & i \in I_G \\ \alpha_i \beta_i = \circ, & i \in I_{GH} \end{cases} \right\}.$$

□

**اثبات.** اثبات این قضیه را می‌توان در [۲] مشاهده کرد.

به عنوان کاربرد قضایای فوق شرط بهینگی لازم نوع  $KKT$  برای  $MPSC$  را به صورت زیر بیان می‌کنیم. توجه داشته باشید که این شرایط بهینگی در [۲، ۳، ۴] برای حالت هموار و در [۱] برای حالت ناهموار با استفاده از روش‌های دیگر ارائه شده است.

**قضیه ۶.۲.** فرض کنیم  $\hat{x}$  یک جواب بهینه  $(\Delta)$  باشد.

۱. اگر  $GCQ$  در  $\hat{x}$  برقرار باشد، اعداد  $\alpha_i$  و  $\lambda_j$  و  $\beta_i$  برای  $j \in J$  و  $i \in I$  موجودند که :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{|J_*|} \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{|I|} \left( \alpha_i \nabla G_i(\hat{x}) + \beta_i \nabla H_i(\hat{x}) \right) = \circ_n, \\ \lambda_j \geq \circ, \text{ for } j \in J, \\ \alpha_i = \circ, \text{ for } i \in I_H \cup I_{GH}, \\ \beta_i = \circ, \text{ for } i \in I_G \cup I_{GH}. \end{array} \right. \quad (۱)$$

۲. اگر  $WGCQ$  در  $\hat{x}$  برقرار باشد آنگاه اعداد  $\alpha_i$  و  $\lambda_j$  و  $\beta_i$  برای  $j \in J$  و  $i \in I$  موجودند که :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{|J_*|} \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{|I|} (\alpha_i \nabla G_i(\hat{x}) + \beta_i \nabla H_i(\hat{x})) = 0_n, \\ \lambda_j \geq 0, \quad \text{for } j \in J_*, \\ \alpha_i = 0, \quad \text{for } i \in I_H, \\ \beta_i = 0, \quad \text{for } i \in I_G. \end{array} \right. \quad (2)$$

۳. اگر  $MPSC - GCQ$  در  $\hat{x}$  برقرار باشد، آنگاه اعداد  $\alpha_i$  و  $\lambda_j$  و  $\beta_i$  برای  $j \in J$  و  $i \in I$  موجودند که :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{|J_*|} \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{|I|} (\alpha_i \nabla G_i(\hat{x}) + \beta_i \nabla H_i(\hat{x})) = 0_n, \\ \lambda_j \geq 0, \quad \text{for } j \in J_*, \\ \alpha_i = 0, \quad \text{for } i \in I_H, \\ \beta_i = 0, \quad \text{for } i \in I_G, \\ \alpha_i \beta_i = 0, \quad \text{for } i \in I_{GH}. \end{array} \right. \quad (3)$$

شایان ذکر است که شرط (۱)، (۲) و (۳) در [۱، ۲] با شرایط بهینگی در  $\hat{x}$  ارجاع شده است. تفاوت این سه نوع ایستایی در این است که مضارب  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  که در  $i \in I_{GH}$  در حالت  $M$ -ایستایی بسیار آزادتر از ایستایی قوی هستند و در ایستایی ضعیف به نسبت  $M$ -ایستایی آزادتر هستند. چندین مثال که مقایسه بین اینها می باشد را می توان در [۳، ۴] مشاهده کرد.

در این مقاله ما سه نوع شرط بهینگی *Gouignard* و همچنین شرایط بهینه، ضعیف، قوی و مردوخویج را برای مسائلی با بهینه سازی قیود تعویضی هموار شامل توابع متمایز پیوسته استخراج کردیم و نتایج اصلی تخمین بالای مخروط نرمال فرشه برای مجموعه های موجه، قیود تعویضی هموار در نظر گرفته متمرکز بود.

## مراجع

- [1] Aubin, J.P.: Optima and Equilibria; An Introduction to Nonlinear Analysis. Springer-Verlag, London (1998).
- [2] Clarke, F.H.: Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, Interscience (1983).
- [3] Jafariani, Z., Kanzi, N., Naderi Prizi, M.: The Frechet normal cone of optimization problems with switching constraints. Journal of Mathematical Extension **13**, 1-19 (2023).
- [4] Kanzi, N., Nobakhtian, S.: Optimality conditions for nonsmooth semi-infinite programming. Optimization **59**, 717-727 (2010).
- [5] Kanzow, C., Mehlitz, P., Steck, D.: Relaxation schemes for mathematical programmes with switching constraints. Optim. Meth. Soft. **182**, 1-36 (2019).
- [6] Mehlitz, P.: Stationarity conditions and constraint qualifications for mathematical programs with switching constraints. Math. Prog. **180**, 149-186 (2019).

## نقش هوش مصنوعی در تحول سیستم های آموزش الکترونیکی ریاضی

ساره حسینی سعیدی؛ عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

sareh-hasani@pnu.ac.ir

**چکیده:** هوش مصنوعی تأثیر فزاینده ای بر امر آموزش ریاضی می گذارد و متضمن فرصت ها و تهدیدهای متعدد است. لزوم بررسی ارتباط میان هوش مصنوعی و آموزش ریاضی بر کسی پوشیده نیست. ما هم کاربرست و هم تدریس هوش مصنوعی را در آموزش بررسی می کنیم. سراغ حقوق بشر، دموکراسی و حاکمیت قانون رفته ایم. هدفمان ارائه دیدگاهی کلی نگرانه است برای اطمینان از اینکه هوش مصنوعی باعث توانمندسازی آموزگاران و آموزندگان شود، نه اینکه آن ها را تحت سیطره خود درآورد. و دیگر اینکه تحولات و شیوه های آینده واقعا در راستای خیر عمومی باشد.

**کلمات کلیدی:** هوش مصنوعی - آموزش الکترونیکی

**مقدمه:** سیستم های هوش مصنوعی مدل هایی الگوریتمی اند که کارکردهای شناختی یا ادراکی ای را که قبلاً مختص تفکر، قضاوت و عقل ورزی انسان ها بود انجام می دهند. هوش مصنوعی به سیستم های ماشین مبنایی ارجاع دارد که، بر اساس اهداف تعریف شده توسط انسان، می توانند پیش بینی هایی کنند، پیشنهادهایی دهند یا تصمیماتی بگیرند که بر محیط های واقعی یا مجازی تأثیر بگذارد. سیستم های هوش مصنوعی با ما تعامل دارند و بر محیط ما تأثیر می گذارند، چه مستقیم، چه غیرمستقیم. این سیستم ها معمولاً در ظاهر عملکرد خودمختار دارند و می توانند با یادگیری شرایط، رفتارشان را اصلاح کنند. ما در حال گذر از جامعه صنعت - محور به جامعه اطلاعات - محور، یا به عبارت دیگر گذر از دنیای فیزیکی به دنیای مجازی هستیم. ورود به عصر اطلاعات و زندگی اثربخش در جامعه اطلاعات - محور، مستلزم شناخت ویژگی های آن است. یکی از نهادهای اجتماعی که در این عصر دستخوش تغییرات وسیع خواهد شد، نهاد آموزش و یادگیری در سطوح عمومی و عالی است. سیستم های آموزش عمومی، افراد را برای موقعیتشان در جامعه بوسیله پیشی جستن بر کارخانجات و ادارات از یک جامعه صنعتی آماده

می کند. در گذر به جامعه اطلاعاتی، نقش عمده بر دوش دانش‌آموختگان جامعه است و آموزش و یادگیری می‌باید براساس رویکردهای جدید تنظیم شود. پیش‌نیاز وارد شدن به این پهنه، گسترش سریع و وسیع آموزش الکترونیکی، از پایین‌ترین تا بالاترین سطح نظام آموزشی کشور می‌باشد.

یکی از دانشگاه‌های پیشگام در آموزش الکترونیکی دانشگاه «ام‌آی‌تی» است که در سال ۲۰۰۱ اعلام کرد قصد دارد، محتوای دروس بعضی کلاس‌های خود را به صورت آزمایشی روی اینترنت قرار دهد. جامعه علمی جهانی از این تصمیم بهت‌زده شد. مجریان این طرح، با هدف افزایش مهارت دانش‌آموختگان و برای تبادل اطلاعات و بهبود روش‌های تدریس در دانشگاه‌های سراسر جهان، طرح را اجرا کردند. اما برای اکثر مراکز آموزشی تعجب‌آور بود که دانشگاهی با چنین موقعیتی که معمولاً تمام فرصت‌های تحصیلی در آن، از سال قبل رزرو شده و بابت هر دانشجوی سالانه ۴۱ هزار دلار شهریه دریافت می‌کند، چه احتیاجی به انتشار مطالب کلاس‌های درسی خود بر روی اینترنت دارد.

«آن مارگویس» یکی از مدیران ارشد دوره‌های آموزش مجازی دانشگاه «ام‌آی‌تی» می‌گوید: هدف اصلی ما مبارزه با انحصار علم در سراسر جهان بوده است. درحال حاضر تنها کسانی که بتوانند مبالغ هنگفتی را هزینه کنند، به منابع علمی دسترسی کامل دارند و این وضعیت باید روزی اصلاح شود. خواندن این دروس منجر به گرفتن مدرک «ام‌آی‌تی» نمی‌شود، ولی برای افراد علاقه‌مند و طالب علم، بسیار مفید است. مطالب درسی که شامل امتحانات، جزوات آموزشی و منابع دیگر است، به صورت فایل‌های «پی‌دی‌اف» در سایت دانشگاه «ام‌آی‌تی» قرار گرفته‌اند. نکته جالب این‌که اجازه ترجمه مطالب به زبان‌های مختلف در سراسر جهان داده شده است. درسال گذشته براساس آمارهای منتشره، کانادایی‌ها با بیش از ۵/۳ میلیون مراجعه، بزرگ‌ترین جامعه مخاطبین دوره‌های «ام‌آی‌تی» بودند. دانشگاه «ام‌آی‌تی» طرح آموزش الکترونیکی خود را به نام «او.سی.دبلیو» از سال ۲۰۰۲ رسماً اجرا کرد. به هرحال این یکی از تجارب موفق دانشگاه «ام‌آی‌تی» بود که با استفاده از قابلیت‌های شبکه جهانی به دنیا عرضه می‌شود.

### ارتباطات میان هوش مصنوعی و آموزش ریاضی:

ارتباطات میان هوش مصنوعی و آموزش ریاضی به چهار دسته تقسیم شده اند: ۱- یادگیری با هوش مصنوعی  
۲- استفاده از هوش مصنوعی برای یادگیری دربارهٔ امر یادگیری ۳- یادگیری دربارهٔ هوش مصنوعی ۴- آماده سازی برای هوش مصنوعی

### هوش مصنوعی پشتیبان آموزنده :

طی سه دههٔ اخیر، بیشتر تحقیقات بر هوش مصنوعی پشتیبان آموزنده متمرکز بوده، که علی‌التعریف هدف آن خودکارسازی کارکردهای معلم ریاضی است، یعنی آموزندگان بتوانند مستقل از معلم یاد بگیرند، یا اینکه معلم خصوصی مصنوعی خود را داشته باشند. تنها بخش زیادی از این اقدامات بر پایهٔ رویکردی نسبتاً بدوی نسبت به امر آموزش است و معمولاً بر خودکارسازی همان شیوه‌های ضعیف آموزشی متمرکز است، نه نوآوری

آخرین مسئله‌ای باید در بستر هوش مصنوعی پشتیبان آموزنده اشاره کرد، بحث اعتماد است. اگر بناست ابزارهای هوش مصنوعی به صورت گسترده تری در کلاس‌های درس استفاده شوند، الزام است معلمان، آموزندگان، والدین و دیگر ذی‌نفعان اعتماد داشته باشند که این ابزارها مفیدند، یادگیری را ارتقا می‌دهند و آسیبی نمی‌رسانند. درواقع گفت وگوها پیرامون اعتماد ذی‌نفعان به ابزارهای هوش مصنوعی مخصوص کلاس درس تازه آغاز شده است. منتها خیلی اوقات بار مسئولیت به دوش ذی‌نفعان کلاس می‌افتد که به ابزارهای هوش مصنوعی پشتیبان آموزنده اعتماد کنند، نه تأمین‌کنندگان.

### هوش مصنوعی پشتیبان معلم ریاضی :

هوش مصنوعی از معلمان حین نمره دهی نوشتار آموزندگان پشتیبانی می کند، به این صورت که پیام واره و میانبر خودکار ارائه می دهد یعنی معلم است که نمره دهی می کند، هوش مصنوعی فقط پشتیبان این فرایند است. هوش مصنوعی برای ارزیابی سازنده تکالیف هم استفاده می شود، یعنی آموزندگان را راهنمایی می کند چگونه تکالیف اولیه، را قبل از ارائه برای ارزیابی نهایی، بهتر کنند. این موضوع به صورت مورد توجه افراد زیادی قرار گرفته است. گرچه هوش مصنوعی ممکن است باعث صرفه جویی در وقت معلمان شود هرچند برای همین هم شواهد کمی وجود دارد، اما مشخص نیست چه تأثیری بر کیفیت تدریس و یادگیری داشته باشد.

### هوش مصنوعی پشتیبان مؤسسات :

بسیاری از مؤسسات آموزش عالی، به خصوص در ایالت متحده، از نرم افزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی به ویژه های نرم افزارهای ارائه شده توسط شرکت های خصوصی برای پشتیبانی فرایندهای پذیرش استفاده می کنند.

### پیشینه آموزش الکترونیکی در ایران :

پیشینه آموزش الکترونیکی در ایران به زمان بهره گیری از رایانه های شخصی در میان اقشار مختلف فرهنگی- اجتماعی برمی گردد. دانشگاه بین المللی ایران که ترکیبی از امکانات موجود و بالقوه دانشگاهیان و فناوران ایرانی در خارج از کشور است با همکاری مراکز دانشگاهی ایران، ترکیبی را به وجود آوردند که پیش نیاز آموزش الکترونیکی در ایران در سطح دانشگاه فراهم گردد. در سال ۲۰۰۲ میلادی این دانشگاه نیروهای خود را ساماندهی کرد و در پی همایش آموزش مجازی این دانشگاه در اوت ۲۰۰۲، به عنوان اولین دانشگاه مجازی ایران ظاهر شد. پس از آن دانشگاه های مختلف مانند صنعتی شریف، اصفهان، شیراز، تهران، دانشگاه آزاد منطقه جنوب تهران، دانشگاه علوم حدیث، و دانشگاه اینترنتی ایران نیز طرح آموزش الکترونیکی را اجرا کردند.

### مزایای آموزش الکترونیکی:

آموزش الکترونیکی نسبت به آموزش های سنتی دارای مزایای عمده ای است. انعطاف پذیری و حذف تردد های بی مورد و پر هزینه برای شرکت در دوره های آموزشی، از مهمترین مزایای آموزش های الکترونیکی است. به طور کلی می توان مزایای آموزش الکترونیکی را در چند محور به شرح زیر برشمرد:

**(الف) شیوه ارائه دروس به دانشجو:** عدم وابستگی کلاس درس به زمان خاص جامعیت، فراگیری، پویایی، روزآمدی و رفع نیاز آموزشی در زمان دلخواه افزایش کیفیت ارائه دروس (به دلیل ارائه دروس به صورت چندرسانه ای) افزایش میزان اثربخشی و بازدهی آموزشی. (به دلیل حذف محدودیت های زمانی و مکانی)

**(ب) تعامل بین استاد و دانشجو:** عدم نیاز به حضور فیزیکی استاد و دانشجو در کلاس درس کاهش زمان و هزینه رفت و آمد برای دانشجویان پشتیبانی تعداد زیادی دانشجو در يك کلاس امکان ثبت فعالیت ها و پیشرفت دانشجویان توسط استاد امکان تهیه مدل های مختلف آموزش توسط استادان ارتباطات آسان و فراگیر آموزشی.

**(ج) دسترسی به منابع اطلاعاتی:** دسترسی پیوسته به کتابخانه مجازی جستجوی هوشمندانه انعطاف پذیری، دردسترس بودن، و سهولت دسترسی به منابع آموزشی افزایش حق انتخاب دانشجو در تعیین دوره های آموزشی تغییر محتوای تدریس. (از «محدود و انتخابی» به «نامحدود و متنوع»)

**(د) تغییر نگرش و دانش کاربران:** تغییر سطح سواد دانش آموختگان (از سواد کلاسیک به خلاقیت و تولید دانش) تغییر نگرش به آموزش و یادگیری (از فردی به اجتماعی) بر نگرش به فراگیران (از «ایجاد رقابت» به «همکاری و مشارکت») تغییر وظیفه فراگیران (از «ذخیره سازی اطلاعات و افزایش محفوظات» به «مدیریت اطلاعات و تولید دانش») افزایش سرعت درآموزش و یادگیری افزایش سطح علمی جامعه قابلیت تنظیم آهنگ یادگیری فراگیران محوریت کاربران.

ه) مدیریت: مدیریت آسان و کارآمد نظارت و کنترل دقیق بر نظام آموزشی و اطلاعات جمع‌آوری سریع بازخوردها و تجزیه و تحلیل آن‌ها کاهش هزینه و زمان فراهم‌نمودن فرصت‌های آموزشی یکسان برای عموم افزایش سرعت در توسعه و پیشرفت.

**باید چه چیزی درباره هوش مصنوعی آموخت؟** البته فقط تعداد خیلی کمی از کل یاد بگیرند که طراح یا توسعه دهنده هوش مصنوعی شوند و شمار خیلی هم چنین هدفی دارند، اما توصیه می‌شود تمام شهروندان امروزی در راه دستیابی به سطح مشخصی از سواد هوش مصنوعی تشویق و حمایت شوند. باید دانش و مهارت‌ها و ارزش‌های متمرکز بر توسعه، اجرا و به کارگیری فناوری‌های هوش مصنوعی را داشته باشند: شهروندان جهان باید درک کنند که هوش مصنوعی می‌تواند چه اثراتی داشته باشد، چه کارهایی از آن برمی‌آید و چه کارهایی بر نمی‌آید، چه زمانی مفید است و چه زمانی باید به کارگیری‌اش را زیر سؤال برد، و چگونه می‌توان هوش مصنوعی را به سوی مصلحت عموم سوق داد.

**هوش مصنوعی را کجا آموزش می‌دهند؟ چه کسی آموزش می‌دهد؟ و به چه کسانی آموزش می‌دهد؟** هوش مصنوعی را می‌توان در تمام مراحل تحصیل، از پیش دبستانی تا دانشگاه، آموزش داد و همین اتفاق هم می‌افتد هرچند تقریباً فقط در کشورهایی که زیرساخت اینترنت و برق مطمئن و قوی دارند. البته نباید از یاد برد که هوش مصنوعی بیشتر در تحصیلات دانشگاهی مورد توجه قرار می‌گیرد، چه به عنوان موضوعی اصلی و چه به عنوان ابزاری جهت پیشبرد کارایی‌های خاص. آخر اینکه تدریس هوش مصنوعی رفته رفته به تحصیلات ابتدایی نیز راه می‌یابد.

**هوش مصنوعی و آموزش حق تحصیل:** شیوه‌ای برای تضمین دسترسی تمام کودکان به تحصیل باکیفیت هوش مصنوعی را معمولاً معرفی می‌کنند، هرچند اینکه تحصیل باکیفیت تا چه باشد موضوع پیچیده‌ای است. درواقع آموزندگان امروزی برای اینکه حق تحصیل خود را برآورده سازند روزه ریز بیشتر به فناوری‌های دیجیتال متکی می‌شوند. این امر ممکن است آموزندگان را از حیث حقوق بشری، قانونی و اجتماعی‌شان در موضع آسیب‌پذیری قرار دهد.

**حق کرامت انسانی:** کشورهای عضو باید ترتیبی دهند تا چنانچه انجام کاری توسط ماشین‌ها، به جای انسان‌ها، متضمن خطر نقض کرامت انسانی باشد، این کارها منحصر به انسان‌ها باقی بماند... حق تصمیم به عدم تعامل با سیستم هوش مصنوعی در مواردی که این امر تأثیری منفی بر کرامت انسانی بگذارد.

**حق خودمختاری:** مبتنی بر پردازش خودکار است در شرایطی که این حق عدم متابعت از تصمیمی که صرفاً امر تأثیری قانونی یا تأثیرات قابل توجه دیگری بر افراد بگذارد. حق زیر سؤال بردن تصمیماتی که سیستم هوش مصنوعی گرفته یا متأثر از آن سیستم بوده و درخواست بازبینی این تصمیم توسط یک انسان. حق انتخاب آزادانه خروج از دست ورزی، نمایه سازی فردی و پیش بینی‌های مبتنی بر هوش مصنوعی حق مورد تبعیض قرار نگرفتن : در بحث آموزش، این یعنی فراهم آوردن شرایطی که تمام بچه‌ها بتوانند از به کارگیری فناوری‌های فایده ببرند، نه فقط اعضای گروه‌های اجتماعی اقتصادی‌ای که بضاعتش را دارند. با توجه به اینکه فناوری‌های آموزشی آوردن چنین شرایطی مانع اثر متیو فقط به صورت آنالین در دسترس اند، باید زیرساخت‌های قوی مبتنی بر هوش مصنوعی معمولاً اینترنت را به صورت گسترده در دسترس قرار داد، به خصوص در مناطق روستایی.

**حق حریم شخصی و حق صیانت از داده‌ها:** داده ۱۵۶ معرض هک و درز کردن هستند ضمناً حتی داده‌های درظاهر بی‌نام هم می‌تواند رفته رفته از حالت بی‌نامی خارج کردن. شود. به بیان دیگر، حذف عوامل شناساننده‌ای همچون نام کودک از داده‌ها امروزه دیگر چندان کارساز نیست.

**حق والدین:** به هر حال، جا دارد این مسئله در قانون آزموده شود که آیا حکومت و مدارس باید به امتناع کودک یا والدین از شرکت در فناوری های آموزشی همچون ابزارهای هوش مصنوعی در مواردی که این امتناع اثری منفی بر تحصیل کودک نداشته باشد احترام بگذارند یا نه. به ویژه اگر داده ها بر مبنای رضایت ضبط و پردازش شود، این رضایت از سوی والدین و کودک باید آزادانه داده شود و مدارس نباید آن را پیش فرض بگیرند.

معرفی هر فناوری ای در آموزش، مثلاً همین هوش مصنوعی، با خود بازیگرانی با اهداف و راه حلها و جبران منافع مختلف را وارد عرصه می کند. در نتیجه کودکان به لحاظ سیاسی از اظهار نظر محروم می شوند و به اطلاعات مربوطه دسترسی نمی یابند. آن وقت برای احقاق حقوق خود به سیستم های راهبری متکی می شوند که خودشان نفوذ و تأثیر چندانی بر آن ندارند. در نتیجه در تصمیم گیری پیرامون قوانین و سیاست هایی که بر حقوقشان تأثیر می گذارد حق اظهار نظری ندارند کودکان، که حق و حقوقی دارند، باید به راه حل هایی دسترسی داشته باشند که بتوانند حقوق خود را اعمال کنند یا بتوانند هنگام نقض حقوقشان دست به اقدامی بزنند.

#### راه حلها و جبران

معرفی هر فناوری ای در آموزش، مثلاً همین هوش مصنوعی، با خود بازیگرانی با اهداف و منافع مختلف را وارد عرصه می کند. در نتیجه کودکان به لحاظ سیاسی از اظهار نظر محروم می شوند و به اطلاعات مربوطه دسترسی نمی یابند. آن وقت برای احقاق حقوق خود به سیستم های راهبری متکی می شوند که خودشان نفوذ و تأثیر چندانی بر آن ندارند. در نتیجه در تصمیم گیری پیرامون قوانین و سیاست هایی که بر حقوقشان تأثیر می گذارد حق اظهار نظری ندارند کودکان، که حق و حقوقی دارند، باید به راه حل هایی دسترسی داشته باشند که بتوانند حقوق خود را اعمال کنند یا بتوانند هنگام نقض حقوقشان دست به اقدامی بزنند.

#### نتایج:

هدف از این مقاله کندوکاو ارتباطات متعدد میان هوش مصنوعی و آموزش بود. فناوری های هوش مصنوعی که در مدارس و دیگر محیط های آموزشی به کار گرفته می شود به وظایف آموزشی درستی می پردازد. ادگیری را به عنوان یک فعالیت اساساً انسانی و اجتماعی ارتقا می دهند یا هدفشان «افزایش بهره وری» یادگیری است که برای پشتیبانی معلمان طراحی شده اند هدف اصلی تحلیل نیازهای زمان مند، برانگیختن و مایه بخشی به مباحثات نقادانه بیشتر است: میان آموزندگان، آموزگاران، پژوهشگران عرصه هوش مصنوعی، سازندگان تجاری، سیاست گذاران و تمام ذی نفعان دیگر. نیازهای شناسایی شده مبتنی بر این ایده اولیه اند که هوش مصنوعی فی نفسه مشکل ساز نیست و آنچه به صورت بالقوه مشکل به وجود می آورد نحوه طراحی، تعلیم و کاربست هوش مصنوعی در محیط های آموزشی، افرادی که هوش مصنوعی برای آن ها به کار گرفته می شود و منفعت برندگان واقعی آن است.

#### مراجع

- ۱۵۷
- [۱] رشیدی، محمد مهدی. آموزش Online ره آورد نوین فنی برای بهبود کیفیت. سومین کنفرانس مدیران کیفیت ۱۷-۲۲، ۱۷، ۱۳۸۹. - فرهادی، ربابه. آموزش الکترونیکی پارادایم جدید عصر اطلاعات. فصلنامه علوم و فناوری اطلاعات (دوره ۲۱). (۱۳۸۴)



- [2] S Demi., O Popescu., M Velsen van., J Sewall., M. B McLaren., V Aleven, “ Exampleors tracing tutors:intelligent tutor ,” International Journal of Artificial Intelligence in Education vol ”, 3, pp. 549-557, Apr. 1988.
- [3] J.F. Fuller, E.F. Fuchs, and K.J. Roesler, “Influence of harmonics on power distribution system protection,” IEEE Trans. Power Delivery, vol. 26, pp. 69-224, 2016.
- [4] Koulouriotis and. M Rangoussi., A C, “on the use of computing methods in educational data and learning analytics ,”International Journal of Artificial intelligence. , vol. 30, pp. 371-430, Apr. 2020.
- [۵] M Cukurova and. K George., R Luckin<sup>۴</sup>, “al for school teacher.” cr press.boca raton, vol. „۳ Apr. .۲۰۲۲
-

## ویژگی فضاهای موضعاً $QHC$

فاطمه حیدری<sup>\*</sup>، دانشجوی دکتری، دانشگاه کاشان، صندوق پستی ۴۳۳-۸۷۱۳۵، کاشان، ایران

zahraheidari50@gmail.com

چکیده: هدف از این مقاله بیان مشخصات فضای  $QHC$  و معرفی فضای موضعاً  $QHC$  است. در انتها به بررسی نگاشت هایی می پردازیم که تحت آنها تصویر فضای موضعاً  $QHC$ ، موضعاً  $QHC$  خواهد بود. کلمات کلیدی: فضای  $QHC$ ، فضای موضعاً  $QHC$ ،  $\alpha$ -باز، پیش-باز

### ۱ مقدمه

فرض کنیم  $(X, \tau)$  فضای توپولوژیک باشد،  $A \subset X$  را زیرمجموعه  $QHC$  فضای  $(X, \tau)$  گوئیم، هرگاه به ازای هر پوشش باز  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  برای مجموعه  $A$  از عناصر  $\tau$ ، زیرمجموعه‌ی متناهی  $I_0$  از  $I$  موجود باشد به طوری که  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I_0} cl_\tau(U_\alpha)$ . در حالتی خاص که  $A = X$  گوئیم،  $(X, \tau)$  فضای  $QHC$  است. اگر  $(A, \tau_A)$  فضایی  $QHC$  باشد، گوئیم  $A$  زیر فضای  $QHC$  در  $(X, \tau)$  است. به راحتی دیده می شود که هر زیر فضای  $QHC$  از فضای توپولوژیک، زیرمجموعه  $QHC$  است. اما عکس این مطلب برقرار نیست [۴]. همچنین از تعریف برمی آید که هر فضای فشرده،  $QHC$  است، اما در [۶] (ص. ۱۲۷) و [۱] (ص. ۱۱۹-۱۲۰) با ذکر مثالی بیان شده است که عکس مطلب برقرار نیست.

تعریف ۱.۱.۱. زیرمجموعه‌ی  $A$  از فضای  $(X, \tau)$  را نیم-باز (متناظراً  $\alpha$ -باز، پیش-باز) هرگاه  $A \subseteq cl_\tau(int_\tau(A))$  (متناظراً  $(A \subseteq int_\tau(cl_\tau(A)))$ ،  $A \subseteq int_\tau(cl_\tau(int_\tau(A)))$ )

۲. زیرمجموعه‌ی  $A$  از فضای  $(X, \tau)$  را باز منظم (متناظراً بسته منظم) نامیم، هرگاه  $A = int_\tau(cl_\tau(A))$  (متناظراً  $A = cl_\tau(int_\tau(A))$ ). از آنجا که خانواده‌ی بازهای منظم فضا، نسبت به اشتراک متناهی بسته است، لذا تشکیل یک پایه برای توپولوژی درشت تر  $\tau_s$  بر  $X$  می دهد. فضای  $(X, \tau_s)$  را نیم منظم سازی فضای  $(X, \tau)$  می نامیم. خاصیت توپولوژیک  $P$  را نیم منظم گوئیم، اگر فضای  $(X, \tau)$  خاصیت  $P$  را داشته باشد اگر و تنها اگر  $(X, \tau_s)$  نیز این خاصیت را دارا باشد. توپولوژی  $\tau$  را نیم منظم نامیم، هرگاه  $\tau = \tau_s$ .

### ۲ ویژگی های فضای $QHC$ و موضعاً $QHC$

قضیه ۱.۲. در هر فضای توپولوژیک  $(X, \tau)$  حکم های زیر برقرارند:

۱. فضای توپولوژیک  $(X, \tau)$ ،  $QHC$  است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه سره بسته منظم آن زیرفضای  $QHC$  باشد.

۲. اجتماع تعداد متناهی زیرفضای  $QHC$  از یک فضا، زیرفضای  $QHC$  است.

۳. هر فضای منظم  $QHC$ ، فشرده است.

قضیه ۲.۲. ۱. فضای  $(X, \tau)$  هاسدورف فشرده است اگر و تنها اگر  $QHC$  و منظم باشد.

۲. هر زیرمجموعه  $QHC$  از فضای هاسدورف، بسته است.

اثبات. ۱. می دانیم هر فضای فشرده هاسدورف، منظم و هر فضای فشرده،  $QHC$  است.

برعکس، فرض کنیم  $\tau \in \{V_i \mid i \in I\}$  پوششی برای  $X$  باشد، بنابه فرض و اینکه  $X$  فضایی منظم است و به ازای هر  $i \in I$ ، باز  $U_i$  وجود خواهد داشت که  $cl_\tau(U_i) \subset V_i$ ، نتیجه می شود  $X$  فضایی فشرده است.

۲. فرض کنیم  $(X, \tau)$  هاسدورف و  $A \subset X$ ، زیرمجموعه  $QHC$  باشد به طوری که  $x \notin A$ ، بنا به هاسدورف بودن

فضا، برای هر  $a \in A$ ،  $V_a \in \tau$  چنان موجود است که  $a \in V_a$  و  $x \in cl_\tau(V_a)$ ، بنابراین  $A \subset \bigcup_{a \in A} V_a$  و بنابه فرض، زیرمجموعه متناهی  $A_0 \subset A$  وجود دارد که  $A \subset \bigcup_{a \in A_0} cl_\tau(V_a)$ ، لذا برای  $G = \bigcap_{a \in A_0} (X \setminus cl_\tau(V_a))$  می توان گفت  $cl_\tau(V_a) \subset X \setminus A$  و  $G \cap A = \emptyset$ ، در نتیجه  $A$  بسته است.

□

تعریف ۳.۲. فضای  $(X, \tau)$  را موضعاً  $QHC$  گوئیم، هرگاه هر نقطه  $x$ ، همسایگی باز از  $\tau$  دارد که زیرفضای  $QHC$  از  $(X, \tau)$  است. واضح است که هر فضای  $QHC$ ، موضعاً  $QHC$  است، اما بنابر [۵]، (مثال ۴.۱) عکس مطلب برقرار نیست.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم فضای توپولوژیک باشد. گزاره های زیر معادلند:

۱. فضای  $(X, \tau)$ ، موضعاً  $QHC$  است.

۲. هر نقطه  $x$ ، همسایگی باز از  $\tau$  دارد که زیرمجموعه  $QHC$  است.

۳. هر نقطه  $x \in X$ ، همسایگی باز  $U_x$  از  $\tau$  دارد به طوری که  $int_\tau cl_\tau(U_x)$  زیرفضای  $QHC$  (زیرمجموعه) است.

۴. برای هر نقطه  $x \in X$ ، مجموعه  $P_x \in PO(X, \tau)$  وجود دارد که  $x \in P_x$  و  $P_x$  زیرفضای (زیرمجموعه ی)  $QHC$  است.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم  $(X, \tau)$  فضای موضعاً  $QHC$  و  $A$  زیرمجموعه بسته و باز در فضای  $X$  باشد. در این صورت  $(A, \tau_A)$  موضعاً  $QHC$  است.

اثبات. فضای  $(X, \tau)$  موضعاً  $QHC$  است، پس برای هر  $x \in X$ ، همسایگی باز  $U_x$  از  $\tau$  وجود دارد که زیرمجموعه  $QHC$  است. از آنجاکه هم باز و هم بسته است، بنابه ۵.۲، می توان نوشت  $U_x \cap A$  زیرفضای  $QHC$  از  $(A, \tau_A)$  است. حال  $x \in U_x \cap A \in \tau_A$  و با استفاده از ۴.۲ (۲)، نتیجه می گیریم که  $(A, \tau_A)$  موضعاً  $QHC$  است. □

گزاره ۶.۲. فرض کنیم  $A, B \in PO(X, \tau)$  به طوری که  $B \subset A$ . در این صورت  $B$ ، زیرفضای  $QHC$  از  $(A, \tau_A)$  است اگر و تنها اگر  $B$ ، زیرفضای  $QHC$  از  $(X, \tau)$  باشد.

قضیه ۷.۲. فضای  $(X, \tau)$ ، موضعاً  $QHC$  است اگر و تنها اگر برای هر  $x \in X$ ،  $U_x \in PO(X, \tau)$  به گونه‌ای موجود باشد که  $x \in U_x$  و  $(U_x, \tau_{U_x})$  موضعاً  $QHC$  باشد.

اثبات. اگر  $(X, \tau)$ ، فضای موضعاً  $QHC$  باشد، آنگاه بنابه ۴.۲(۴) نتیجه حاصل می‌شود. برعکس، فرض کنیم  $x \in X$ ،  $x \in U_x \in PO(X, \tau)$  و  $(U_x, \tau_{U_x})$  موضعاً  $QHC$  باشد. بنابراین همسایگی باز  $x \in V_x$  از  $\tau_{U_x}$  موجود است به طوری که زیرفضای  $QHC$  از  $(V_x, \tau_{V_x})$  باشد. واضح است که  $V_x \in PO(X, \tau)$ ، لذا بنابه ۶.۲،  $(V_x, \tau_{V_x})$  زیرفضای  $QHC$  از  $(X, \tau)$  است و بنابراین با استفاده از ۴.۲(۴)،  $(X, \tau)$ ، موضعاً  $QHC$  است.  $\square$

### ۳ نتایج

تعریف ۱.۳. فرض کنیم  $f : X \rightarrow Y$  نگاشتی از فضای توپولوژیک  $X$  به فضای  $Y$  باشد.

۱. نگاشت  $f$  را نگاشت پیش باز می‌نامیم، هرگاه تصویر هر زیرمجموعه‌ی پیش-باز  $A$  از فضای  $X$ ، در فضای  $Y$  پیش-باز باشد.

۲. نگاشت  $f$  را  $\alpha$ -پیوسته گوئیم، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز  $V$  از فضای  $Y$ ،  $f^{-1}(V)$  در فضای  $X$ ،  $\alpha$ -باز باشد.

۳. نگاشت  $f$  را  $\alpha$ -ناپابرجا گوئیم، هرگاه تصویر وارون هر زیرمجموعه‌ی  $\alpha$ -باز از فضای  $Y$ ، زیرمجموعه‌ای  $\alpha$ -باز در فضای  $X$  باشد.

۴. نگاشت  $f$  را تقریباً پیوسته نامیم، هرگاه تصویر وارون هر باز منظم (بسته منظم) در فضای  $Y$ ، زیرمجموعه‌ی باز (بسته) در فضای  $X$  باشد.

گزاره ۲.۳. فرض کنیم  $f$  نگاشتی پوشا از فضای موضعاً  $QHC$ ،  $(X, \tau)$  به هر فضای  $(Y, \sigma)$  باشد. اگر  $(Y, \sigma)$  موضعاً  $QHC$  نباشد، آنگاه هیچکدام از شرایط زیر اتفاق نمی‌افتد:

۱.  $f$  باز و پیوسته باشد.

۲.  $f$  پیش-باز و پیوسته باشد.

۳.  $f$  پیش-باز و  $\alpha$ -ناپابرجا باشد.

گزاره ۳.۳. فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک و  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ .

۱. اگر  $f$  نگاشت  $\alpha$ -پیوسته (یا پیوسته و یا  $\alpha$ -ناپابرجا) و  $A \subseteq X$  زیرمجموعه‌ی  $QHC$  از  $(X, \tau)$  باشد، آنگاه  $f(A)$  زیرمجموعه‌ی  $QHC$  از  $(Y, \sigma)$  است.

۲. اگر  $f$  نگاشتی پوشا، پیوسته (یا  $\alpha$ -ناپابرجا) و  $(Y, \sigma)$  مای  $QHC$  باشد، آنگاه  $(Y, \sigma)$  زیرفضای  $QHC$  است.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم  $(X, \tau)$  فضای موضعاً  $QHC$  و  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  نگاشت پوشا، پیش-باز و  $\alpha$ -پیوسته باشد، آنگاه فضای  $(Y, \sigma)$ ، موضعاً  $QHC$  است.

اثبات. فرض کنیم  $y \in Y$  و برای  $x \in X$  خاصی، داشته باشیم  $f(x) = y$ . بنابه فرض و قضیه ۴.۲(۲)، همسایگی باز  $U_x$  از  $\tau$  وجود دارد که  $x \in U_x$  و زیرمجموعه‌ی  $QHC$  از  $(X, \tau)$  است. از آنجا که  $f$  پیش-باز و  $\alpha$ -پیوسته است، پس باتوجه به ۳.۳،  $f(U_x) \in PO(Y, \sigma)$ ، زیرمجموعه‌ی  $QHC$  از  $(Y, \sigma)$  است. در نتیجه با استفاده از ۴.۲(۳) فضای  $(Y, \sigma)$ ، موضعاً  $QHC$  است.  $\square$

قضیه ۵.۳. فرض کنیم  $(Y, \sigma)$  فضای نیم منظم و نگاشت  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  تقریباً پیوسته باشد. اگر  $S$  زیرمجموعه  $QHC$  از  $(X, \tau)$  باشد، آن گاه  $f(S)$  زیرمجموعه  $QHC$  در  $(Y, \sigma)$  است.

گزاره ۶.۳. فرض کنیم  $(Y, \sigma)$  فضایی نیم منظم و  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  نگاشتی تقریباً پیوسته و باز و یک به یک باشد. اگر  $(X, \tau)$  موضعاً  $QHC$  باشد، آن گاه  $(Y, \sigma)$  نیز موضعاً  $QHC$  است.

اثبات. فرض کنیم  $y \in Y$  و برای  $x \in X$ ، قرار می‌دهیم  $f(x) = y$ . طبق قضیه ۴.۲، همسایگی باز  $V_x$  از  $x$  در  $\tau$  وجود دارد که زیرمجموعه  $QHC$  است. باتوجه به فرض و قضیه ۵.۳،  $f(V_x)$  زیرمجموعه باز و  $QHC$  از است، بنابراین  $(Y, \sigma)$  موضعاً  $QHC$  است.  $\square$

نتیجه ۷.۳. فرض کنیم  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  نگاشتی  $\alpha$ -ناپابرجا و باز باشد. اگر  $(X, \tau)$  موضعاً  $QHC$  باشد، آن گاه  $(Y, \sigma)$  نیز موضعاً  $QHC$  است.

اثبات. با استفاده از گزاره ۳.۳، و روش اثبات گزاره ۶.۳ نتیجه حاصل می‌شود.  $\square$

## مراجع

- [1] L. Arhur Seen, J Arthur Seebach, "counterexample in Topology," Dover Publications.1995.
- [2] Z. Duszynski, "On quasi H-closed subspaces," Institute of Mathematics, 59, pp.187-197, 2010.
- [3] F. Ghahramani, R. J. Loy and Y. Zhang, "Generalized notions of amenability II," J. Funct. Anal, 254, pp. 1776-1810, 2008.
- [4] J. R. Porter and J. Thomas, "On H-closed and minimal Hausdorff spaces," Trans. Amer. Math. Soc. 138, pp.159-170, 1969.
- [5] T. Noiri, "On S-closed subspaces," Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 64, pp.157-162, 1978.
- [6] S. Willard, "General Topology", Addison Wesley, 1968.

## کاربرد الگوهای ریاضی در ساختار زمانی موسیقی

مریم درچه سیچانی\*؛ دبیر ریاضی متوسطه دوم، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی اصفهان  
صندوق پستی ۸۱۸۷۷۶۵۷۶۶، اصفهان، ایران  
maryamdorcheh@gmail.com

**چکیده:** شناخت ارزش زمانی نت‌های موسیقی و شناخت الگوهای آن، یکی از کاربردهای ریاضی در موسیقی به شمار می‌آید. ارزش زمانی هر نت، نصف نت قبل و دو برابر نت بعد از خود است که شباهت آن را به دنباله هندسی با قدر نسبت  $r = \frac{1}{2}$  نشان می‌دهد.

وقتی یک آلت موسیقی یک نت تولید می‌کند در واقع موج پیچیده‌ای تولید می‌کند که از هارمونیک‌های متعدد تشکیل شده است که هر کدام فرکانس و دامنه خاص خود را دارد. این هارمونیک‌ها مضرب صحیح فرکانس پایه هستند و می‌توان آن‌ها را با استفاده از معادلات ریاضی مانند سری فوریه توصیف کرد. بسیاری از الگوریتم‌های ریتمیک به صورت تابعی متناوب نمایش داده می‌شوند.  
**کلمات کلیدی:** هارمونیک، فرکانس، سری فوریه، ریتمیک، متناوب

### ۱ مقدمه

ارتباط بین نت‌ها و اصوات موسیقی از لحاظ شدت و بسامد با دانش ریاضی به حدی زیاد است که به راحتی می‌توان یک آهنگ را با روابط ریاضی مورد ارزیابی قرار داد. نت‌ها در موسیقی به فواصل زمانی مختلف تقسیم شده‌اند و همچنین ضرب‌آهنگ و کشش مختلفی پیدا می‌کنند که مطابق الگوهای ریاضی است با توجه به نظم و هماهنگی دقیق ارتعاشات و سرعت خاصی که شکل می‌گیرد با تحریک سلول‌های عصبی، احساس و معنایی را در مغز انسان تقویت یا تداعی می‌کنند.[۲].

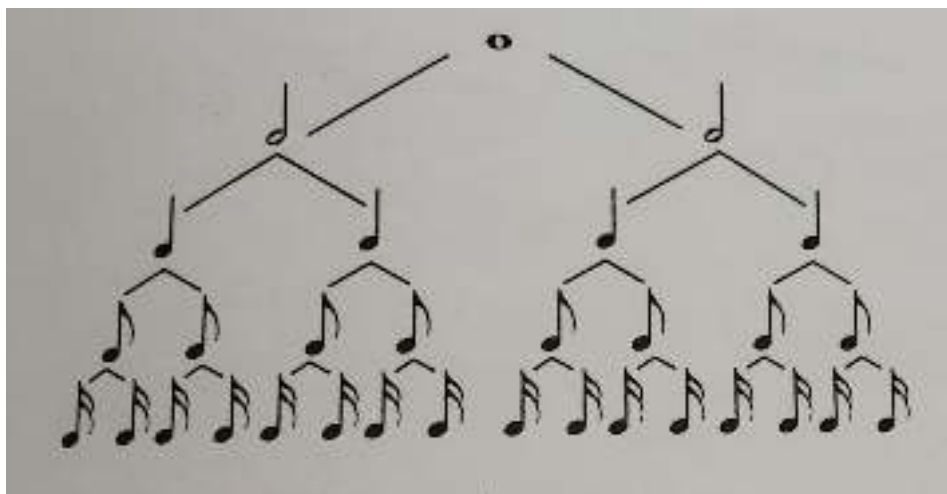
### ۲ دیدگاه بزرگان ریاضی و موسیقی

فیثاغورس<sup>۱</sup> (فیلسوف و ریاضی‌دان یونان باستان) با بررسی تارهای صوتی به کاربرد ریاضی در تشکیل نت‌های موسیقی پی برد. بتهوون<sup>۲</sup> (آهنگساز بزرگ آلمانی) با اینکه بیشتر عمرش ناشنوا بود، با نبوغ خود الگوهای ریاضی که پشت نت‌های موسیقی مخفی است، را می‌شناخت و توانست آثار ماندگاری خلق کند.

این سخن جیمز سیلوستر<sup>۳</sup> (استاد ریاضیات آکادمی نظامی در وولویچ) را به خاطر بسپاریم: شاید نباید موسیقی را به ریاضی احساسات تشبیه کنیم بلکه باید ریاضیات را به عنوان موسیقی خرد بشناسیم.

### ۳ بررسی الگوی نت‌ها

به تصویری که ساختار زمانی نت‌های موسیقی را نشان می‌دهد، دقت کنید.



شکل ۱: ساختار زمانی نت‌های موسیقی

ارزش زمانی نت گرد (O) برابر ۴ ضرب است و ارزش نت سفید (d)، برابر با ۲ ضرب یعنی نصف نت گرد است. نت سیاه در ردیف بعد ارزش ۱ دارد و به همین ترتیب ارزش نت‌ها در ردیف‌های بعد نصف می‌شود. این الگوی درختی در ریاضی همانند یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $r = \frac{1}{2}$  است و همچنین جمع زمانی هر ردیف در این الگو برابر همان عدد ۴ است. گاهی نت‌ها به صورت گروهی روی خطوط حامل قرار می‌گیرند تا یک ریتم به وجود آید:



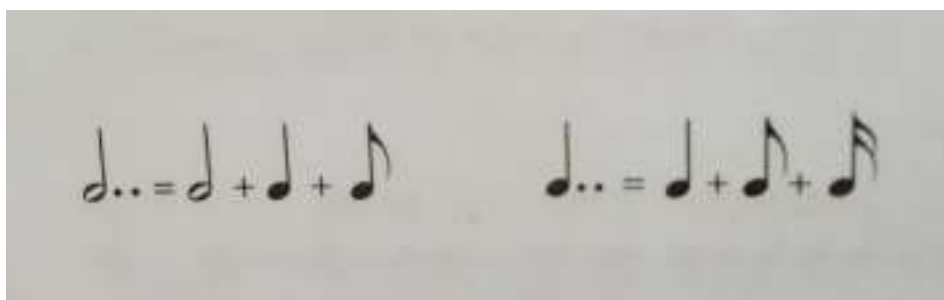
شکل ۲: نت‌ها به صورت گروهی  $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

در موسیقی از کنار هم قرار گرفتن ارزش‌های زمانی متفاوت یا یکسان (سفید، سیاه، چنگ و...) ریتم به وجود می‌آید [۱]. به الگوی ریتمیک زیر توجه کنید. در هر میزان جمع نت‌ها یکسان و برابر با ۲ است.



شکل ۳: الگوی ریتمیک

میزان‌نما (کسر میزان) متشکل از دو عدد است که بدون خط کسری روی یکدیگر نوشته می‌شوند. عدد بالایی نمایانگر تعداد نت‌ها و عدد پایینی نمایانگر شکل نت در هر میزان است. الگوی ریتمیک در شکل ۳، با میزان‌نمای  $\frac{2}{4}$  (دو چهار) نمایانگر دو نت در هر میزان است که هر نت، یک سیاه یا معادل یک سیاه است [۱]. هر گاه سمت راست نت یا سکوتی، دو نقطه قرار دهیم، نقطه اول نصف ارزش زمانی آن نت و نقطه دوم یک چهارم ارزش زمانی آن نت را به آن اضافه می‌کند [۲].



این ارزش زمانی به صورت سری هندسی زیر نمایش داده می‌شود:

$$k \sum_{i=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

که در آن  $k$  ارزش زمانی نت اصلی است [۴].

همچنین بسیاری از الگوهای ریتمیک را می‌توان به صورت تابعی متناوب نوشت که در فواصل یکسان تکرار می‌شود. هر تابع متناوب که دارای شرایط موسوم به شرایط دیرلیکه باشد، را می‌توان با مجموع وزن‌دار هارمونیک‌های سینوسی نمایش داد. منظور از وزن همان ضریب تابع سینوسی است:

$$\sin(wt + dA)$$

در این فرمول: فاز:  $d$  فرکانس:  $w$  ضریب یا وزن:  $A$   
به مجموعه این ضرایب، ضرایب فوریه گویند. هر مجموعه از ضرایب فوریه تابع یکتایی را مشخص می‌کند.

## ۴ نتایج

در سری فوریه، یک فرکانس پایه وجود دارد که هارمونیک اصلی خوانده می‌شود و فرکانس‌های سینوسی دیگر مضارب صحیحی از این فرکانس پایه خواهند بود. بنابراین فرکانس‌های موجود در یک تابع متناوب، گسسته و همگی مضرب صحیحی از فرکانس پایه هستند که طیف فرکانسی گسسته نامیده می‌شوند. پس اگر دو ساز را به صدا درآوریم، با دو تابع متناوب روبه‌رو می‌شویم که طبق نظریه سری فوریه می‌توان آن‌ها را بسط داد. دقیقاً فرکانس پایه و فرکانس هارمونیک‌های بعدی در هر دو صوت حاصل برابری و وزن متناظر در دو صوت برابر نیستند. همین باعث می‌شود سیگنال‌های زمانی که از دو صوت ثبت می‌کنیم، متفاوت و قابل تشخیص باشند [۱].

در حقیقت، ریاضی نقش اساسی در هماهنگی و زیبایی نت‌های موسیقی دارد و یک ریاضیدان می‌تواند موسیقی را تفکر و تحلیل کند.

## مراجع

- [۱] باتروث، آنا. مترجم: ورزنده، رامین. هارمونی کاربردی. نشر چشمه، ص ۵۲-۶، ۱۳۹۰.
- [۲] جعفری نژاد، کیوان؛ حزین، سروین. مبانی موسیقی. تهران، ص ۶۲-۱۰، ۱۳۹۴.
- [۳] زاده محمدی، علی؛ پولادی، فرزانه. موسیقی، عصب و روان. تهران، ص ۷۵-۱۸، ۱۳۹۱.
- [۴] کرمان، مریم؛ ایرانی، محمد. دنباله‌ها. انتشارات نظری، ص ۴۷-۱، ۱۳۹۲.

## تحلیل مقایسه‌ای روش‌های رتبه‌بندی اعداد خاکستری در فرآیندهای تصمیم‌گیری تحت عدم قطعیت

داود درویشی سلوکلابی\*، دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

d\_darvishi@pnu.ac.ir

صافیه کر، دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

safiehkor30@yahoo.com

**چکیده:** در دنیای واقعی، بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری با عدم قطعیت‌های قابل توجه مواجه هستند. نظریه سیستم‌های خاکستری، یکی از راه‌حل‌های مؤثر برای مقابله با این عدم قطعیت‌ها است که از اعداد خاکستری استفاده می‌کند. اعداد خاکستری می‌توانند اطلاعات ناقص و نادقیق را در قالب بازه‌ها نشان دهند. این مقاله به مقایسه چندین روش مختلف برای رتبه‌بندی اعداد خاکستری در فرآیندهای تصمیم‌گیری می‌پردازد. روش‌های مورد بحث شامل روش‌های مور، ایشیوچی و تاناکا، هوانگ و وانگ و روش‌های دیگر است. نتایج نشان می‌دهد که برخی از روش‌ها در مواردی که هسته اعداد خاکستری مشابه است، عملکرد بهتری دارند، در حالی که دیگر روش‌ها ممکن است برای مقایسه اعداد در شرایط متفاوت مناسب‌تر باشند. تحلیل نهایی بیانگر این است که روش "هسته و درجه خاکستری" می‌تواند کمبودهای بسیاری از روش‌های دیگر را رفع کند و تصمیم‌گیری‌های بهتری را ارائه دهد.

**کلمات کلیدی:** اعداد خاکستری، رتبه‌بندی اعداد، تصمیم‌گیری، عدم قطعیت، نظریه سیستم‌های خاکستری

### ۱ مقدمه

تصمیم‌گیری در محیط‌های عدم قطعیت یکی از چالش‌های اصلی در بسیاری از زمینه‌ها مانند مهندسی، اقتصاد، مدیریت و علوم اجتماعی است. اطلاعاتی که برای تصمیم‌گیری لازم است، اغلب ناقص یا نادقیق است و این موضوع باعث ایجاد پیچیدگی‌های فراوان در فرآیند انتخاب بهترین گزینه‌ها می‌شود. یکی از ابزارهای مفید برای مقابله با این مشکل، نظریه سیستم‌های خاکستری است که توسط دنگ (۱۹۸۲) معرفی شد. در این نظریه، از اعداد خاکستری برای نمایش اطلاعاتی استفاده می‌شود که تنها بخشی از آن‌ها شناخته شده و بخشی دیگر نامشخص است. این مقاله به بررسی و مقایسه چندین روش برای رتبه‌بندی اعداد خاکستری می‌پردازد که می‌تواند به تصمیم‌گیری بهتر در شرایط عدم قطعیت کمک کند.

## ۲ تعریف سیستم‌های خاکستری و اعداد خاکستری

سیستم‌های خاکستری برای تحلیل اطلاعات ناقص و غیر دقیق توسعه یافته‌اند. اعداد خاکستری به عنوان واحدهای اصلی این سیستم‌ها شناخته می‌شوند که مقدار دقیق آن‌ها مشخص نیست، اما حداقل و حداکثر مقادیر آن‌ها تعیین شده است. این اعداد به سه دسته قابل تقسیم هستند: اعداد سیاه (عدم اطلاعات)، اعداد سفید (اطلاعات کامل) و اعداد خاکستری (ترکیبی از اطلاعات ناقص و کامل).

## ۳ روش‌شناسی

در این بخش به بررسی روش‌های مختلف رتبه‌بندی اعداد خاکستری پرداخته می‌شود.

### ۱.۳ روش مور (Moore)

یکی از روش‌های قدیمی برای مقایسه اعداد خاکستری، روش مور است. این روش بر اساس مرزهای بالایی و پایینی اعداد خاکستری کار می‌کند. اگر  $\otimes x$  و  $\otimes y$  دو عدد خاکستری باشند، آنگاه مقایسه به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\otimes x < \otimes y \text{ iff } \underline{x} < \underline{y}. \quad (1)$$

$$\otimes x \subseteq \otimes y \text{ iff } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ and } \bar{x} \leq \bar{y}. \quad (2)$$

تعریف دوم به عنوان مجموعه خاصیت زیرمجموعه بودن از بازه‌ها مشهور است. مور همچنین تساوی بازه‌ها را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\otimes x = \otimes y \text{ iff } \underline{x} = \underline{y} \text{ and } \bar{x} = \bar{y}.$$

این روش به دلیل سادگی محاسباتی محبوب است، اما در بسیاری از موارد، به ویژه هنگامی که بازه‌ها همپوشانی دارند، نمی‌تواند نتیجه دقیقی ارائه دهد.

### ۲.۳ روش ایشیبوچی و تاناکا (Ishibuchi & Tanaka)

ایشیبوچی و تاناکا برخی تعاریف بهبود یافته روابط ترتیب بازه در مقایسه با آنچه مور تعریف کرده بود پیشنهاد دادند. در این تعاریف آن‌ها نه تنها از کران بالا و پایین بازه‌ها استفاده کردند بلکه در این روش تزهسته و شعاع اعداد خاکستری برای رتبه‌بندی استفاده می‌کند. تعاریف به صورت زیر خواهند بود:

**تعریف ۱.** اگر  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  دو عدد خاکستری بازه‌ای باشند، آنگاه رابطه ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes x \leq_{LR} \otimes y \text{ iff } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ and } \bar{x} \leq \bar{y}.$$

**تعریف ۲.** رابطه ترتیب  $\leq_{CW}$  بین دو عدد خاکستری  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes x \leq_{CW} \otimes y \text{ iff } x_C \leq y_C \text{ and } x_W \geq y_W.$$

**تعریف ۳.** رابطه ترتیب  $\leq_{CW}^*$  بین دو عدد خاکستری بازه‌ای  $\otimes x \in [x, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [y, \bar{y}]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes x \leq_{CW}^* \otimes y \text{ iff } x_C \leq y_C \text{ and } x_W \leq y_W.$$

**تعریف ۴.** برای به حداکثر رساندن مسائل، رابطه ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes x \leq_{LC} \otimes y \text{ iff } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ and } x_C \leq y_C$$

**تعریف ۵.** برای به حداقل رساندن مسائل، رابطه ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes x \leq_{RC} \otimes y \text{ iff } \bar{x} \leq \bar{y} \text{ and } x_C \leq y_C$$

این روش در مواردی که هسته‌های اعداد مشابه باشند، عملکرد مناسبی دارد، اما در مواردی که تفاوت شعاع‌ها زیاد باشد، ممکن است ناکارآمد باشد.

### ۳.۳ روش هوانگ و وانگ (Hu & Wang)

یک مدل تغییر یافته روابط ترتیب برای بازه‌ها توسط هو و وانگ پیشنهاد شد.

**تعریف ۶.** برای هر دو عدد خاکستری بازه‌ای  $\otimes x \in [x, \bar{x}] = (x_C, x_W)$  و  $\otimes y \in [y, \bar{y}] = (y_C, y_W)$  داریم:

$$\otimes x \leq \otimes y \text{ iff } \begin{cases} x_C < y_C & \text{هرگاه } x_C \neq y_C \\ x_W \geq y_W & \text{هرگاه } x_C = y_C \end{cases}$$

مرکز و شعاع بازه‌ها به عنوان مقدار مورد انتظار و عدم قطعیت پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. هو و وانگ در تعاریف ترتیب از عملگرهایی چون بارتابی، پادتقارنی، قیاسی و... را معرفی کرده است.

### ۴.۳ روش هسته و درجه خاکستری (Kernel and Degree of Greyness)

روش "هسته و درجه خاکستری" یکی از جدیدترین و کارآمدترین روش‌ها برای رتبه‌بندی اعداد خاکستری است که به وسیله Liu و Xie (۲۰۰۹) معرفی شده است. این روش با استفاده از دو مفهوم هسته و درجه خاکستری برای مقایسه و رتبه‌بندی اعداد خاکستری استفاده می‌شود.

اگر دو عدد خاکستری  $\otimes G_1 = [\underline{a}_1, \bar{a}_1]$  و  $\otimes G_2 = [\underline{a}_2, \bar{a}_2]$  با فرض  $\underline{a}_1 < \bar{a}_1$  و  $\underline{a}_2 < \bar{a}_2$  مفروض باشند،  $\hat{\otimes} G_1 = \frac{\underline{a}_1 + \bar{a}_1}{2}$  و  $\hat{\otimes} G_2 = \frac{\underline{a}_2 + \bar{a}_2}{2}$  به ترتیب هسته اعداد خاکستری  $\otimes G_1$  و  $\otimes G_2$  همچنین  $g^\circ(\otimes G_1)$  و  $g^\circ(\otimes G_2)$  به ترتیب درجه خاکستری اعداد خاکستری  $\otimes G_1$  و  $\otimes G_2$  باشند، آنگاه

الف) اگر  $\hat{\otimes} G_1 < \hat{\otimes} G_2$  آنگاه  $\otimes G_1 <_G \otimes G_2$

ب) اگر  $\hat{\otimes} G_1 < \hat{\otimes} G_2$  آنگاه

۱) اگر  $g^\circ(\otimes G_1) = g^\circ(\otimes G_2)$  آنگاه  $\otimes G_1 =_G \otimes G_2$

۲) اگر  $g^\circ(\otimes G_1) < g^\circ(\otimes G_2)$  آنگاه  $\otimes G_1 >_G \otimes G_2$

۳) اگر  $g^\circ(\otimes G_1) > g^\circ(\otimes G_2)$  آنگاه  $\otimes G_1 <_G \otimes G_2$

این روش به دلیل سادگی و دقت بالا در مقایسه اعداد <sup>۱۶۹</sup> تری، به ویژه زمانی که هسته‌های اعداد مشابه هستند، از مزیت بالایی برخوردار است.



## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله، روش‌های مختلف رتبه‌بندی اعداد خاکستری بررسی و مقایسه شدند. هر یک از این روش‌ها دارای مزایا و معایب خاص خود هستند و انتخاب روش مناسب به شرایط خاص هر مسئله بستگی دارد. نتایج نشان داد که در شرایطی که اطلاعات به صورت ناقص و نادقیق هستند، استفاده از روش‌هایی که هسته و درجه خاکستری را در نظر می‌گیرند، می‌تواند بهترین عملکرد را ارائه دهد. این روش‌ها به تصمیم‌گیرندگان کمک می‌کند تا با دقت بیشتری گزینه‌ها را ارزیابی کرده و بهینه‌ترین تصمیم را بگیرند.

## مراجع

- [1] D. Darvishi, J. Forrest, and S. Liu, "A comparative analysis of grey ranking approaches," Grey Systems: Theory and Application, vol. 9, no. 4, pp. 472-487, 2019.
- [2] N. Xie, and S. Liu, "Novel methods on comparing grey numbers," Applied Mathematical Modelling, vo. 34, no. 2, pp. 415-423, 2010.
- [3] R.E. Moore, "Methods and applications of interval analysis," SIAM, 1979.
- [4] B.Q. Hu, and S. Wang, "A novel approach in uncertain programming," Journal of Industrial and Management Optimization, vol. 2, no. 4, pp. 351-371, 2006.

# تدریس ریاضی با رویکرد طرز فکر رشد: کلیدهای موفقیت در کلاس درس

داود درویشی سلوکلاهی\*، دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

d\_darvishi@pnu.ac.ir

صافیه کر، دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

safiehkor30@yahoo.com

**چکیده:** این مقاله به بررسی روش‌های تدریس ریاضی با هدف پرورش “طرز فکر رشد” در دانش‌آموزان می‌پردازد. “طرز فکر رشد” به این معناست که افراد می‌توانند با تلاش و یادگیری، توانایی‌ها و هوش خود را افزایش دهند. هدف این مقاله معرفی و بررسی استراتژی‌هایی است که معلمان می‌توانند برای تقویت این طرز فکر در کلاس‌های ریاضی استفاده کنند. با استفاده از مثال‌های عملی و راهکارهای آموزشی، نشان داده شده است که چگونه می‌توان انگیزه و عملکرد دانش‌آموزان را افزایش داد.

**کلمات کلیدی:** تدریس ریاضی، طرز فکر رشد، کارول دوئک، آموزش، یادگیری

## ۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، مفهوم “طرز فکر رشد” که توسط روان‌شناس کارول دوئک معرفی شده، به طور گسترده‌ای در حوزه آموزش مورد توجه قرار گرفته است. این طرز فکر بر این اساس استوار است که هوش و توانایی‌ها قابل تغییر و بهبود هستند و با تلاش و تمرین می‌توان به موفقیت‌های بیشتری دست یافت. در زمینه آموزش ریاضی، این مفهوم به ویژه اهمیت دارد زیرا بسیاری از دانش‌آموزان باور دارند که موفقیت در ریاضی به استعداد ذاتی بستگی دارد و نمی‌توان آن را با تلاش تغییر داد. این مقاله به بررسی روش‌های تدریس ریاضی با تأکید بر طرز فکر رشد و ارائه راهکارهایی برای تقویت این طرز فکر در دانش‌آموزان پرداخته است.

## ۲ مفهوم طرز فکر رشد

طرز فکر رشد به این معناست که افراد باور دارند که توانایی‌هایشان از طریق تلاش، آموزش، و تجربه می‌تواند بهبود یابد. برخلاف “طرز فکر ثابت” که معتقد است هوش ۱۷۱ عدددها ثابت هستند، طرز فکر رشد تأکید دارد که تلاش

و یادگیری مداوم می‌تواند منجر به پیشرفت و موفقیت شود. این طرز فکر می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا به جای ترس از شکست، به چالش‌ها با اعتماد به نفس بیشتری برخورد کنند و از اشتباهات به عنوان فرصتی برای یادگیری استفاده کنند.

### ۳. روش‌های تدریس ریاضی با طرز فکر رشد

#### ۱. تغییر نگرش نسبت به شکست

یکی از مهم‌ترین جنبه‌های طرز فکر رشد این است که اشتباهات و شکست‌ها به عنوان فرصت‌هایی برای یادگیری دیده شوند. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز نتواند یک مسئله پیچیده را حل کند، به جای این که معلم به او بگوید "تو در ریاضی خوب نیستی"، بهتر است به او بگوید: "این مسئله واقعا چالش برانگیز است. بیایید با هم آن را بررسی کنیم و ببینیم کجا می‌توانیم بهبود پیدا کنیم." این نوع بازخورد به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا اشتباهات را به عنوان بخشی از فرآیند یادگیری ببینند و انگیزه خود را برای ادامه تلاش حفظ کنند.

#### ۲. تشویق به تلاش به جای استعداد

معلمان می‌توانند با تحسین تلاش و پشتکار دانش‌آموزان به جای استعداد ذاتی، طرز فکر رشد را تقویت کنند. به عنوان مثال، به جای گفتن "تو واقعا باهوش هستی"، معلم می‌تواند بگوید: "من از تلاش تو در حل این مسئله بسیار تحت تأثیر قرار گرفتم. ادامه بده و سعی کن روش‌های مختلفی برای حل مسائل پیدا کنی." این نوع تشویق به دانش‌آموزان یاد می‌دهد که موفقیت نتیجه تلاش و تمرین است، نه فقط استعداد طبیعی.

#### ۳. استفاده از بازخورد سازنده

بازخورد سازنده و مثبت نقش مهمی در پرورش طرز فکر رشد دارد. به عنوان مثال، به جای این که به دانش‌آموزان بگوییم "این اشتباه است"، بهتر است بگوییم: "این روش جواب نمی‌دهد، اما بیایید ببینیم چگونه می‌توانیم از این اشتباه یاد بگیریم و به راه‌حل بهتری برسیم." این نوع بازخورد به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا از اشتباهات خود یاد بگیرند و به تلاش ادامه دهند.

#### ۴. طراحی فعالیت‌های چالشی

فعالیت‌های چالشی و پروژه‌های گروهی می‌توانند به تقویت طرز فکر رشد کمک کنند. معلمان می‌توانند مسائل و پروژه‌هایی طراحی کنند که به دانش‌آموزان فرصت دهند تا به صورت گروهی به حل مسائل بپردازند و از یکدیگر یاد بگیرند. این فعالیت‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در مواجهه با چالش‌ها و مشکلات، اعتماد به نفس خود را حفظ کنند و به یادگیری ادامه دهند.

#### ۵. مدل‌سازی رفتار مثبت

معلمان باید رفتار مثبت و طرز فکر رشد را از خود نشان دهند. برای مثال، معلمان می‌توانند به دانش‌آموزان نشان دهند که چگونه خودشان از اشتباهات خود یاد می‌گیرند و به بهبود می‌پردازند. این رفتار می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا طرز فکر مشابهی را در خود توسعه دهند و به جای ترس از شکست، به یادگیری و تلاش ادامه دهند.



## ۴ مثال‌های عملی

### مثال ۱: حل مسئله ریاضی

فرض کنید دانش‌آموزی در حل یک مسئله پیچیده مانند معادلات غیرخطی مشکل دارد. معلم می‌تواند با استفاده از روش‌های تدریس طرز فکر رشد، به او کمک کند تا به صورت مرحله به مرحله به حل مسئله بپردازد و از هر مرحله به عنوان فرصتی برای یادگیری استفاده کند. به عنوان مثال، معلم می‌تواند به دانش‌آموز بگوید: "بیایید این مسئله را مرحله به مرحله حل کنیم و ببینیم در هر مرحله چه چیزی یاد می‌گیریم."

### مثال ۲: پروژه‌های گروهی

در یک فعالیت گروهی، معلمان می‌توانند به دانش‌آموزان پروژه‌ای را بدهند که نیاز به همکاری و تفکر گروهی دارد. برای مثال، می‌توانند از دانش‌آموزان بخواهند که یک پروژه تحقیقاتی درباره کاربردهای ریاضی در زندگی واقعی انجام دهند. این نوع پروژه‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا از یکدیگر یاد بگیرند و به چالش‌ها به صورت گروهی پاسخ دهند.

## ۵ نتیجه‌گیری

استفاده از طرز فکر رشد در تدریس ریاضی می‌تواند تأثیرات مثبت زیادی بر روی عملکرد و انگیزه دانش‌آموزان داشته باشد. با استفاده از استراتژی‌های مناسب مانند تغییر نگرش نسبت به شکست، تشویق به تلاش، استفاده از بازخورد سازنده، طراحی فعالیت‌های چالشی و مدل‌سازی رفتار مثبت، معلمان می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا به جای تمرکز بر استعداد ذاتی، بر روی یادگیری و تلاش تمرکز کنند. این رویکرد به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا اعتماد به نفس بیشتری پیدا کنند و به موفقیت‌های بیشتری دست یابند.

## مراجع

- [1] C. Dweck, "Mindset: The New Psychology of Success," Random House, 2006.
- [2] J. Boaler, "Mathematical Mindsets: Unleashing Students," Potential through Creative Math, Inspiring Messages, and Innovative Teaching, Jossey-Bass, 2015.
- [3] L.S., Blackwell, K.H. Trzesniewski, and C.S. Dweck, "Implicit theories of intelligence and achievement across the school years," Child Development, vol. 78, no. 1, pp. 246-263, 2007.
- [4] D.S. Yeager, D. S., and C.S. Dweck, "Mindsets that promote resilience: When students believe that personal characteristics can be developed," Personality and Social Psychology Bulletin, vol. 39, no. 6, pp. 746-754, 2012.
- [5] K. Haimovitz, and C.S. Dweck, "The origins of children's growth and fixed mindsets: New research and a new proposal," Developmental Review, vol. 39, pp. 16-۱۷۳.

## مقایسه برنامه ریزی خطی خاکستری و روش تصمیم گیری چند شاخصه بهترین-بدترین معیار

داود درویشی سلوکلابی، عضو هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶ تهران، ایران

d\_darvishi@pnu.ac.ir

فاطمه اکبری هاشجین، کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶ تهران، ایران

akbarifatima99@yahoo.com

**چکیده:** تصمیم گیری چند معیاره ابزاری است که هنگام اتخاذ تصمیم گیری های پیچیده و در شرایطی که چندین معیار ارزیابی برای انتخاب مطلوب ترین گزینه دارد، استفاده می شود. داده های خاکستری به عنوان پایه ای برای بسیاری از روش های تصمیم گیری چند معیاره به کار برده شده است. این مقاله روش برنامه ریزی خطی خاکستری و روش تصمیم گیری چند معیاره بهترین-بدترین معیار خاکستری را از نظر معیارهای تصمیم گیری و رتبه بندی آنها مقایسه می کند. یافته های مطالعه نشان می دهد که روش بهترین-بدترین معیار خاکستری به محاسبات ریاضی بیشتری نسبت به برنامه ریزی خطی خاکستری نیاز دارد.

**کلمات کلیدی:** برنامه ریزی خطی خاکستری، روش بهترین-بدترین معیار، اعداد خاکستری، عدم قطعیت، تصمیم گیری چند معیاره.

### ۱ مقدمه

اخیرا پژوهشگران روش های جدیدی را به منظور استفاده از تصمیم گیری چند معیاره برای تصمیم گیری های پیچیده معرفی کرده اند. در میان تکنیک ها، روش جدید بهترین-بدترین معیار به دلیل توانایی آن در تعیین وزن معیارها تنها با استفاده دو بردار توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. پژوهشگران روش بهترین-بدترین معیار را به عنوان یک تکنیک ساختار یافته برای تجزیه و تحلیل تصمیمات پیچیده با استفاده از ریاضیات و روانشناسی پیشنهاد کردند. این روش به تصمیم گیرندگان امکان انتخاب بهترین و بدترین معیار را می دهد [۲]. با این حال اگر قضاوت های تصمیم گیرندگان نامطمئن باشد، نتایج ارائه شده را نمی توان دقیق تلقی کرد.

یکی از روش های ممکن برای غلبه بر عدم قطعیت جمع آوری نظرات تصمیم گیرندگان بر اساس متغیرهای زبانی خاکستری است [۳]. زیرا داده ها ماهیت خاکستری خود را در طول فرآیند تصمیم گیری حفظ می کنند. برخی از روش ها و تکنیک ها برای مواجهه با عدم قطعیت تصمیم گیرندگان عبارتند از برنامه ریزی خاکستری، فرآیند تحلیل

سلسله مراتبی خاکستری، تکنیک خاکستری برای ترتیب اولویت براساس راه حل شباهت ایده آل و تکنیک خاکستری بهترین-بدترین معیار [۱]. در این مقاله تاثیر استفاده از معیارهای وزنی برنامه ریزی خطی خاکستری و روش بهترین-بدترین معیار در رتبه بندی گزینه های تصمیم گیری تولید شده مقایسه شده است و به دنبال این سوال خواهیم بود که کدام روش بدون این که تاثیری بر گزینه های تصمیم گیری نهایی بگذارد، بهتر است؟ در طی دهه های گذشته تصمیم گیری چندمعیاره رشد چشم گیری برای حل تصمیمات پیچیده در حوزه های مختلف تجربه کرده است و کاربردش به ویژه با توسعه روش های جدید و بهبود روش های قدیمی به طرز چشم گیری افزایش یافته است. یکی از روش های توسعه یافته، برنامه ریزی خطی خاکستری است که از برنامه ریزی خطی گرفته شده است و روشی است که برای حل و فصل تصمیمات کمی استفاده می شود. این مدل براساس استفاده از یک تابع خطی استوار است که با محدودیت های مختلف به حداقل یا حداکثر می رسد. برنامه ریزی خطی خاکستری را به عنوان یک روش جدید برای حل مسائل از طریق سفید کردن اعداد خاکستری با استفاده از تئوری استاندارد روش برنامه ریزی خطی معمولی توسعه داده اند. برنامه ریزی خطی خاکستری یک مدل تجزیه و تحلیل سیستم های خاکستری برای تصمیم گیری در صورت عدم قطعیت است. به عنوان توسعه روش برنامه ریزی خطی، مساله برنامه ریزی خطی خاکستری با مساله برنامه ریزی خطی معمولی متفاوت است و ضرایب تابع هدف و ضرایب محدودیت های آن به جای اعداد قطعی اعداد خاکستری است.

روش بهترین-بدترین معیار روش جدیدی است که به تصمیم گیری چند معیاره اضافه شده است و برای حل مسائل مربوط به تصمیم گیری چند معیاره ایجاد شده است. همچنین روش بهترین-بدترین معیار می تواند از متغیرهای خاکستری به عنوان داده ورودی برای پوشش عدم قطعیت استفاده می کند. در روش بهترین-بدترین معیار معیارهای کمتری نسبت به روش تحلیل سلسله مراتبی نیاز دارد و همچنین می تواند به عنوان یک رویکرد قوی برای تصمیم گیری چندمعیاره و تعیین وزن معیارهای مورد استفاده در نظر گرفته شود. روش بهترین-بدترین معیار برای حل مسائل عدم قطعیت مرتبط با داده های ناشناخته و ناقص پیشنهاد شده است و از یک مدل خطی استفاده می کند که قادر به ارائه وزن بهینه برای مسائل تصمیم گیری چند معیاره است. روش بهترین-بدترین معیار می تواند وزن معیارها را با اعداد خاکستری تعریف کند و با استفاده از نیازهای متخصصان یک جواب مشخص ارائه دهد.

## ۲ اصطلاحات و مفاهیم پایه ای

در این بخش به بیان چند مفهوم اساسی در سیستم خاکستری خواهیم پرداخت.  
**تعریف ۱:** عدد خاکستری بازه ای عددی است که کران بالا و پایین آن مشخص است، اما مکان آن بین کران بالا و پایین نامشخص است. در حقیقت، عدد خاکستری عددی غیرقطعی است که مقدار ممکن خود را از یک بازه یا مجموعه ای از اعداد اتخاذ می کند.

$$\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}] = \{t \mid \underline{x} \leq t \leq \bar{x}\} \quad , \quad \underline{x} < \bar{x}$$

که در آن  $\otimes x$  عدد خاکستری،  $t$  اطلاعات،  $\underline{x}$  و  $\bar{x}$  کران پایین و کران بالای اطلاعات می باشد.

**تعریف ۲:** فرض کنید  $\otimes x_1 \in [\underline{x}_1, \bar{x}_1]$  و  $\otimes x_2 \in [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$  دو عدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$۱) \otimes x_1 + \otimes x_2 = [\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2]$$

$$۲) \otimes x_1 - \otimes x_2 = \otimes x_1 + (-\otimes x_2) = [\underline{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_1 - \underline{x}_2]$$

$$۳) \otimes x_1 \times \otimes x_2 = [\min \{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2\}, \max \{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2\}]$$

$$۴) \frac{\otimes x_1}{\otimes x_2} = \otimes x_1 \times \otimes x_2^{-1} = \left[ \min \left\{ \frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \right\}, \max \left\{ \frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \right\} \right] \quad \circ \notin [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$$

### ۳ برنامه ریزی خطی خاکستری

اعداد خاکستری ابزاری موثر نظریه سیستم خاکستری هستند. زیرا عدد خاکستری عددی نامشخص و نامعین است که دامنه احتمالی آن شناخته شده است، اما فاقد یک موقعیت مشخص (جایگاه تعریف شده) در کران‌های خود است، بنابراین عدد خاکستری که به عنوان کمیت معرفی می‌شود می‌تواند به صورت ریاضی به شکل  $A \in [a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$  بیان می‌شود که  $R$  مجموعه اعداد حقیقی است. اگر  $a = b$  باشد،  $A$  را یک عدد مشخص و سفید می‌نامند و اگر  $A \in (-\infty, +\infty)$ ، آنگاه  $A$  را یک عدد سیاه می‌نامند. بر اساس تعریف عدد خاکستری مراحل روش برنامه‌ریزی خطی خاکستری به صورت زیر بیان می‌شود:

مرحله اول:  $w(A)$  عدد سفید با بالاترین احتمال که نماینده مقدار  $A[a, b]$  است در نظر بگیرید. روش تعیین  $w(A)$  به عنوان سفید سازی عدد  $A$  شناخته می‌شود و معمولاً به صورت  $w(A) = (1-t)a + tb$  تعریف می‌شود که  $t \in [0, 1]$ . این مقدار به عنوان سفید سازی با وزن برابر شناخته می‌شود و زمانی که توزیع  $A$  ناشناخته است، مقدار  $t = \frac{1}{2}$  در نظر می‌گیرند که منجر به این نتیجه می‌شود:  $w(A) = \frac{(a+b)}{2}$

مرحله دوم: از فرم کلی برنامه‌ریزی خطی خاکستری به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\max(\min) Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n \quad \text{ماکزیمم و مینیمم کردن عبارت خطی}$$

$$\text{با توجه به محدودیت ها به فرم} \quad s.t. a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq (\geq) b_i$$

که در آن  $x_j \geq 0$ ،  $i = 1, \dots, m$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$ ،  $C_j$ ،  $a_{ij}$  و  $b_i$  اعداد خاکستری هستند.

مرحله سوم: مقادیر متغیرهای تصمیم‌گیری را در جواب بهینه به عددهای خاکستری با درجه مطلوب تبدیل کنید.  $A[a, b]$  عدد خاکستری دارای  $ROG = x$  در صورتی که  $x \in R$  پس اگر  $b - a = x$ ، آنگاه  $ROG(A) = x$ ، بنابراین برای عدد سفید  $A$  داریم:  $ROG(A) = 0$ . هرچه ارزش  $ROG$  انتخاب شده کمتر باشد جواب بهینه مساله معتبرتر است.

توجه داشته باشید اگر  $w(A) = y$  و  $ROG(A) = x$  باشند، آنگاه عدد خاکستری  $A \in [a, b]$  را می‌توان به سادگی با سیستم معادلات زیر تعیین کرد:

$$w(A) = y \quad b - a = x$$

برای مثال اگر  $w(A) = 4$  و  $ROG(A) = 2$ ، آنگاه  $a + b = 8$  و  $b - a = 2$  که این منجر می‌شود که  $a = 3$  و  $b = 5$  است.

### ۴ روش تصمیم‌گیری چندمعیاره بهترین-بدترین معیار

روش بهترین-بدترین در سال ۲۰۱۵ توسط رضایی ارائه شده است [۴]. در این روش بهترین و بدترین شاخصه توسط تصمیم‌گیرنده مشخص شده و مقایسه زوجی بین هر یک از این دو معیار (بهترین و بدترین) و دیگر شاخصه‌ها صورت می‌گیرد. سپس یک مسئله ماکسی مین برای مشخص کردن وزن شاخص‌های مختلف فرموله و ایجاد می‌گردد. همچنین در این روش، یک فرمول برای محاسبه نرخ ناسازگاری برای بررسی اعتبار مقایسات در نظر گرفته شده است. از جمله ویژگی‌های برجسته این روش نسبت به سایر روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره این است که نیاز به داده‌های مقایسه‌ای کمتر داشته و همچنین این روش منجر به مقایسه‌ای استوارتر می‌شود، بدین معنی که جواب‌های قابل اطمینان‌تری می‌دهد. برای انجام این تکنیک نیاز به مراحل ۱۷۶ زیر می‌باشد:

۱. مجموعه ای از معیارهای تصمیم‌گیری را تعیین نمایید.
  ۲. بهترین و بدترین معیار را تعیین نمایید. بهترین می‌تواند مطلوب‌ترین یا مهم‌ترین معیار باشد.
  ۳. مقایسه‌های زوجی بین بهترین معیار با سایر معیارها را انجام دهید (ارجحیت‌ها تعیین شود).
  ۴. مقایسه‌های زوجی بین سایر معیارها نسبت به بدترین معیار را انجام دهید.
- بهینه‌ترین اوزان را پیدا کنید (از طریق روش‌های بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی خطی).

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

روش‌های مختلفی برای مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره در محیط‌های عدم قطعیت وجود دارد. مسائل عدم قطعیت استفاده از اعداد خاکستری را به دنبال دارند. در این مقاله دو روش برنامه‌ریزی خطی خاکستری و روش بهترین-بدترین معیار را از نظر وزن‌های معیارهای تصمیم‌گیری و رتبه‌بندی آنها مقایسه کردیم. یافته‌ها نشان می‌دهد که روش بهترین-بدترین معیار نسبت به روش برنامه‌ریزی خطی خاکستری نیازمند محاسبات ریاضی بیشتری بوده که براساس روش ساده سازی کلاسیک برنامه ریزی خطی است.

## مراجع

- [1] A. Mahmoudi, X. Mi, H. Liao, M. R. Feylizadeh, and Z. Turskis, "Grey best-worst method for multiple experts multiple criteria decision making under uncertainty", *Informatica*, vol. 31, pp. 331–357, 2020.
- [2] H. Badri Ahmadi, S. Kusi-Sarpong, and J. Rezaei, "Assessing the social sustainability of supply chains using best worst method," *Resources, Conservation and Recycling*, vol. 126, pp. 99–106, 2017.
- [3] H. F. Maghrabie, Y. Beauregard, and A. Schiffauerova, "Grey based Multi-Criteria Decision Analysis approach: addressing uncertainty at complex decision problems", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 146, pp. 366–379, 2019.
- [4] J. Rezaei, "Best-Worst multi- criteria decision-making method", *Omega*, vol. 53, pp. 49–57, 2015.



## روش تکراری هومیر با تابع وزن برای محاسبه معکوس ماتریس

فرزاد راه‌پیمایی<sup>۱</sup>, \*

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران.

Email: rahpeyma\_۸۳@yahoo.com

چکیده. در این مقاله یک روش جدید برای محاسبه معکوس ماتریس معرفی می‌کنیم که از روش تکراری هومیر و تابع وزن استفاده می‌کند. پایداری روش جدید را بررسی کرده و نقاط ثابت رابطه تکراری حاصل را تحلیل می‌کنیم. سرانجام با استفاده از یک مثال عددی کارایی روش جدید برای محاسبه معکوس ماتریس را مشخص کرده و نتایج حاصل از آن را با برخی روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** معادله ماتریسی، روش‌های تکراری، پایداری، نتایج عددی. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]:** 15A24, 65F10, 03C45.

### ۱. مقدمه

محاسبه تقریبی معکوس ماتریس کاربردهای زیادی در فیزیک، آمار، مهندسی و برنامه‌ریزی خطی دارد و روش‌های تکراری مختلفی برای یافتن معکوس ماتریس ارائه شده است [۴]. فرض کنید  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  و  $F: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  باشد. محاسبه معکوس ماتریس  $A$  با حل معادله ماتریسی زیر معادل است

$$(1) \quad F(X) = X^{-1} - A = 0.$$

برای حل معادله ماتریسی (۱) روش‌های تکراری زیادی ارائه شده است. نیوتن و همکارش روش تکراری زیر را معرفی کردند [۴]

$$(2) \quad X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن  $I$  ماتریس همانی است. همگرایی روش تک‌ا.بی (۲) از مرتبه ۲ می‌باشد [۴]. همچنین روش بدون حافظه چبی شف برای محاسبه  $A^{-1}$  به صورت زیر است که مرتبه همگرایی آن ۳ می‌باشد [۱]

$$(3) \quad X_{k+1} = 3X_k - 3X_kAX_k + X_kAX_kAX_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

روش‌های تکراری دیگری نیز برای محاسبه تقریبی معکوس ماتریس وجود دارد اما پایداری بسیاری از آن‌ها بررسی نشده است. در سال ۲۰۰۶ صابری نجفی و همکارش یک روش تکراری مرتبه دوم و در سال ۲۰۱۰ لی یک روش تکراری مرتبه سوم برای محاسبه تقریبی معکوس ماتریس معرفی کردند. رضوی و همکارانش نیز در سال ۲۰۱۴ توانستند با یک روش تکراری معکوس ماتریس‌های مختلط را به صورت تقریبی به دست آورند. روش‌های تکراری مختلفی نیز برای محاسبه معکوس ماتریس مور-پنروز ارائه شده است. در سال‌های اخیر نیز روش‌های سریع برای محاسبه معکوس تقریبی ماتریس مورد توجه پژوهشگران مختلف قرار گرفته است. در این مقاله یک روش تکراری از خانواده‌های پارامتری بدون حافظه برای محاسبه تقریبی معکوس یک ماتریس نامنفرد معرفی می‌کنیم که مبتنی بر روش هومیر می‌باشد. اکنون تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک عملگر کسری برای آن باشد. در ادامه برخی از مفاهیم اصلی را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.** [۲]  $x_0 \in \mathbb{R}$  را نقطه ثابت عملگر کسری  $R$  می‌نامیم هرگاه  $R(x_0) = x_0$  باشد.

**تعریف ۲.۱.** [۲]  $x_0 \in \mathbb{R}$  را نقطه ثابت غیرعادی می‌نامیم هرگاه  $R(x_0) = x_0$  و  $f(x_0) \neq 0$  باشد.

**تعریف ۳.۱.** [۲]  $x_0 \in \mathbb{R}$  را نقطه بحرانی عملگر  $R$  می‌نامیم هرگاه  $R'(x_0) = 0$  باشد. علاوه بر این، اگر  $f(x_0) = 0$  باشد آن‌گاه  $x_0$  نقطه بحرانی آزاد نامیده می‌شود.

**ملاحظه ۴.۱.** [۲] نقطه ثابت  $x_0 \in \mathbb{R}$  به یکی از حالت‌های زیر می‌باشد:

- (الف) اگر  $|R'(x_0)| < 1$  باشد آن‌گاه  $x_0$  را نقطه ثابت جاذب می‌نامیم.
- (ب) اگر  $|R'(x_0)| > 1$  باشد آن‌گاه  $x_0$  را نقطه ثابت دافع می‌نامیم.
- (پ) اگر  $|R'(x_0)| = 0$  باشد آن‌گاه  $x_0$  را نقطه ثابت فوق جاذب می‌نامیم.
- (ت) اگر  $|R'(x_0)| = 1$  باشد آن‌گاه  $x_0$  را نقطه ثابت سهموی می‌نامیم.

**تعریف ۵.۱.** [۶] خطای تقریب وارون ماتریس  $A$  با دنباله  $X_k$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$e_k = X_k - A^{-1}.$$

## ۲. روش هومیر با تابع وزن

روش تکراری بدون حافظه هومیر برای حل معادله ماتریسی  $F(X) = X^{-1} - A = 0$  به صورت زیر می‌باشد [۵]

$$(۴) \quad X_{k+1} = -\frac{1}{2}X_k \left( -7I + AX_k \left( 9I + AX_k(-5I + AX_k) \right) \right).$$

همگرایی دنباله تولید شده با روش هومیر به وارون ماتریس  $A$  از مرتبه ۳ می‌باشد. اکنون روش تکراری دوگامی زیر را در نظر می‌گیریم

$$(۵) \quad \begin{cases} Y_k = X_k - \frac{F(X_k)}{F'(X_k)}, \\ X_{k+1} = X_k - G(u_k) \frac{F(X_k)}{F'(Y_k)}, \end{cases}$$

که در آن  $u_k = \frac{F'(Y_k)}{F'(X_k)}$  و  $G$  تابع وزن می باشد که در شرایط زیر صدق می کند

$$(۶) \quad G(1) = 1, \quad G'(1) = \frac{1}{2}.$$

این شرایط برای تابع وزن  $G$  همگرایی مرتبه سوم روش تکراری (۵) را تضمین می کند. توابع وزن زیادی وجود دارند که در شرایط (۶) صدق می کنند. دو مورد از این توابع وزن به صورت زیر هستند.

(1) تابع وزن اول:

$$(۷) \quad G_1(u_k) = 1 + \frac{1}{2}(u_k - 1) + \gamma(u_k - 1)^2.$$

(2) تابع وزن دوم:

$$(۸) \quad G_2(u_k) = \frac{\gamma + u_k + (3\gamma + 1)u_k^2}{2(1 + 2\gamma)u_k}$$

با استفاده از  $G(u_k)$ ، روش تکراری هومیر با تابع وزن (HW) برای محاسبه تقریبی معکوس ماتریس  $A$  به صورت زیر خواهد بود

$$(۹) \quad \begin{aligned} X_{k+1} = & \frac{X_k(7I - AX_k(9I + AX_k(-5I + AX_k)))}{2(1 + 2\gamma)} \\ & + \gamma \frac{23I - AX_k(51I + AX_k(-56I + AX_k(32I + AX_k(-9I + AX_k))))}{2(1 + 2\gamma)}. \end{aligned}$$

**قضیه ۱.۲.** [۲] فرض کنید  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  یک ماتریس نامنفرد و  $X_0$  تقریب اولیه برای وارون ماتریس  $A$  باشد که در شرط  $\|I - AX_0\| < 1$  صدق می کند. اگر  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$  باشد آنگاه همگرایی دنباله  $\{X_k\}$  تولید شده با (۹) به  $A^{-1}$  از مرتبه ۳ خواهد بود. همچنین

$$\|e_{k+1}\| \leq \|A^2\| \|e_k\|^3.$$

### ۳. پایداری

فرض کنید  $R_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک عملگر کسری باشد. با استفاده از تابع  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$  برای (۹) عملگر کسری زیر به دست می آید

$$(۱۰) \quad R_\gamma(x) = \frac{x(-7 + 9x - 5x^2 + x^3 + \gamma(-23 + 51x - 56x^2 + 32x^3 - 9x^4 + x^5))}{2(1 + 2\gamma)}.$$

عملگر کسری  $R_\gamma$  به ازای  $\gamma = -\frac{1}{2}$  تعریف نشده است.<sup>۱۸۰</sup>

**قضیه ۱.۳.** [۲] عملگر کسری  $R_\gamma(x)$  در (۱۰) را در نظر بگیرید.

(1) اگر  $\gamma \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [0, \infty)$  باشد آنگاه  $x = 0$  نقطه ثابت غیرعادی است.

(2) اگر  $\gamma \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$  باشد آنگاه  $x = 0$  و ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای

$$p(x) = \gamma x^4 - 8\gamma x^3 + (1 + 24\gamma)x^2 + (-4 - 32\gamma)x + 5 + 19\gamma,$$

نقاط ثابت غیرعادی هستند. در یک حالت خاص اگر  $\gamma = -\frac{1}{3}$  باشد آنگاه نقاط ثابت غیرعادی عبارتند از:

$$2, 2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}.$$

(3) اگر  $\gamma \in (-\frac{1}{3}, 0)$  باشد آنگاه ریشه مضاعف  $x = 0$  و دو ریشه حقیقی چندجمله‌ای  $p(x)$  نقاط ثابت غیرعادی می‌باشند. در یک حالت خاص اگر  $\gamma = -\frac{5}{19}$  باشد آنگاه نقاط ثابت غیرعادی عبارتند از:

$$0, 0, 0, 4.$$

**قضیه ۲.۳. [۲]** عملگر کسری  $R_\gamma(x)$  و نقطه غیرعادی  $x = 0$  را در نظر بگیرید.

(1) اگر  $\gamma \in (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{19})$  باشد آنگاه  $x = 0$  نقطه ثابت جاذب است.

(2) اگر  $\gamma = -\frac{7}{23}$  باشد آنگاه  $x = 0$  نقطه ثابت فوق جاذب می‌باشد.

(3) اگر  $\gamma = -\frac{1}{3}$  یا  $\gamma = -\frac{5}{19}$  باشد آنگاه  $x = 0$  نقطه ثابت سهموی است.

**قضیه ۳.۳. [۲]** فرض کنید  $\gamma \neq -\frac{1}{2}$  و  $x = 1$  نقطه بحرانی عملگر کسری  $R_\gamma(x)$  باشد. اگر  $\gamma = \frac{1}{2}$  باشد آنگاه هیچ نقطه بحرانی آزاد وجود ندارد. همچنین

(1) اگر  $\gamma \in (-\infty, c^*) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$  باشد آنگاه فقط یک نقطه بحرانی آزاد وجود دارد که ریشه

حقیقی چندجمله‌ای  $q(x) = 6\gamma x^3 - 33\gamma x^2 + (4 + 56\gamma)x - 7 - 23\gamma$  است.  $c^*$  نیز تنها ریشه حقیقی چندجمله‌ای  $r(x) = 2470x^3 + 795x^2 - 423x + 128$  است و مقدار آن  $-0.683408$  می‌باشد.

(2) اگر  $\gamma \in (c^*, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$  باشد آنگاه سه نقطه بحرانی آزاد وجود دارد که ریشه‌های چندجمله‌ای

$q(x)$  هستند. در یک حالت خاص اگر  $\gamma = c^*$  باشد آنگاه نقاط بحرانی آزاد عبارتند از:

$$0.316537 \quad 2.59173 \quad 2.59173.$$

#### ۴. نتایج عددی

در این بخش نتایج حاصل از روش هومیر با تابع وزن (HW) برای محاسبه وارون ماتریس نامنفرد  $A$  را با نتایج حاصل از روش‌های نیوتن (N) و چبی شف (CH) مقایسه می‌کنیم. همه محاسبات را با نرم‌افزار متلب  $a = 2017$  روی لپ‌تاپ سه هسته‌ای با ۴ گیگابایت حافظه انجام می‌دهیم. شرط توقف همه الگوریتم‌های برقراری حداقل یکی از شرایط زیر می‌باشد

$$\|X_{k+1} - X_k\| < 10^{-6}, \quad \|I - AX_{k+1}\| < 10^{-6}.$$

ماتریس نامنفرد  $A$  با اندازه  $500 \times 500$  را به صورت تصادفی تولید کرده و از مقدار اولیه  $X_0 = \frac{A^T}{\|A\|}$  استفاده می‌کنیم. برای تعیین مرتبه همگرایی از شاخص مرتبه همگرایی محاسباتی (COC) استفاده می‌کنیم

که به صورت زیر محاسبه می شود [۳]

$$COC = \frac{\ln \left( \frac{\|F(X_{k+1})\|}{\|F(X_k)\|} \right)}{\ln \left( \frac{\|F(X_k)\|}{\|F(X_{k-1})\|} \right)}.$$

جدول ۱. نتایج عددی حاصل برای محاسبه معکوس ماتریس

| روش | $\gamma$ | COC    | تعداد تکرارها | زمان     |
|-----|----------|--------|---------------|----------|
| N   | —        | 2.0000 | 42            | 3.275433 |
| CH  | —        | 3.0000 | 27            | 2.409281 |
| HW  | 0.25     | 1.3494 | 21            | 2.5544   |
| HW  | 0.40     | 2.0336 | 20            | 2.7980   |
| HW  | 0.5      | 4.0855 | 18            | 2.1600   |
| HW  | —4       | 1.8401 | 17            | 2.2214   |
| HW  | —0.38    | 1.457  | 26            | 3.4440   |
| HW  | 3        | 2.1790 | 18            | 2.3306   |
| HW  | —0.2     | 2.8349 | 40            | 5.268755 |
| HW  | —0.6     | 2.8349 | 40            | 5.286839 |

## مراجع

1. S. Amat, J. A. Ezquerro, and M. A. Hernandez-Veron, *Approximation of inverse operators by a new family of high-order iterative methods*, Numerical Linear Algebra with Applications, **21** (2014), 629–644.
2. A. Cordero, E. Segura, J. R. Torregrosa, and M. P. Vassileva, *Inverse matrix estimations by iterative methods with weight functions and their stability analysis*, Applied Mathematics Letters, **155** (2024), 109122.
3. E. K. Dehdezi, and S. Karimi, *A general and efficient iterative method for computing the approximate inverse and Moore-Penrose inverse of sparse matrices based on the Schultz iterative method with applications*, Linear Multilinear Algebra, **71**(12) (2023), 1905–1921.
4. N. J. Higham, *Functions of Matrices: Theory and Computation*, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2008.
5. H. H. H. Homeier, *On Newton-type methods with cubic convergence*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **176** (2005), 425–432.
6. L. O. Jay, *A note of Q-order of convergence*, BIT, **41** (2001), 422–429.

## روش براورد اسپلاین در رگرسیون ناپارامتری با استفاده از روش اسپلاین بریده شده

قدرت اله رحمتی\*، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

gh.rahmati@pnu.ac.ir

شهریار میرزایی، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

sh\_mirzaee@pnu.ac.ir

**چکیده:** در تحلیل رگرسیون هنگامیکه شکل منحنی رگرسیون معلوم باشد از روش رگرسیون پارامتری استفاده می شود. اما اگر شکل منحنی رگرسیون نامعلوم باشد روش رگرسیون ناپارامتری بکار می رود. یکی از روش های های رگرسیون ناپارامتری، استفاده از روش اسپلاین بریده شده می باشد. در این مقاله برای مقایسه رگرسیون پارامتری و رگرسیون ناپارامتری اسپلاین بریده شده یک مثال کاربردی ارائه شده و از معیار MSE برای مقایسه این دو روش استفاده شده است.

**کلمات کلیدی:** رگرسیون پارامتری، رگرسیون ناپارامتری، روش اسپلاین، روش اسپلاین بریده شده، معیار MSE

### ۱ مقدمه

در تحلیل رگرسیون سه رویکرد رگرسیون پارامتری، ناپارامتری و نیمه پارامتری وجود دارد. وقتی شکل منحنی رگرسیون معلوم باشد از رگرسیون پارامتری استفاده می شود. در این حالت رگرسیون ممکن است خطی، درجه دو، درجه سه و یا چند جمله ای از درجه  $k$  باشد. هنگامیکه شکل منحنی رگرسیون نامعلوم باشد رویکرد رگرسیون ناپارامتری استفاده می شود. اما اگر قسمتی از شکل منحنی معلوم و قسمتی نامعلوم باشد روش رگرسیون نیمه پارامتری بکار می رود. در رگرسیون ناپارامتری روش هایی از قبیل اسپلاین، کرنل، سری های فوریه و موجک وجود دارند.

رگرسیون ناپارامتری بدلیل استفاده از داده ها برای تعیین شکل منحنی رگرسیون بدون ذهنیت محقق، دارای انعطاف پذیری بالایی می باشد. در چنین حالاتی متغیر پاسخ ممکن است با یکی از متغیرها رابطه خطی داشته ولی الگوی رابطه با متغیر دیگر نامعلوم باشد. در این وضعیت واهبا (۱۹۹۰) استفاده از رویکرد رگرسیون نیمه پارامتری را پیشنهاد داده است. محققین دیگری از قبیل یوبانک (۱۹۸۸)، دیانا و همکاران (۲۰۱۴)، وبوو و همکاران (۲۰۱۲) برآوردگر هموار اسپلاین جزئی را برای برآورد منحنی رگرسیون نیمه پارامتری استفاده کرده اند. در حالیکه هاردل (۱۹۹۰) و چانگ (۲۰۱۴) از روش کرنل برای برآورد منحنی رگر ۱۸۳ نیمه پارامتری استفاده کرده اند.

## ۲ رگرسیون ناپارامتری

رگرسیون ناپارامتری یک روش آماری برای برآورد الگوی رابطه بین متغیرهای پیشگو و متغیرهای پاسخ است. هنگامیکه هیچ اطلاعاتی درباره شکل تابع رگرسیون وجود نداشته و رابطه بین متغیرهای پیشگو و متغیرهای پاسخ نامعلوم باشد. براساس  $n$  مشاهده مستقل طبق هاردل (۱۹۹۰) مدل رگرسیون ناپارامتری با بیش از یک متغیر پیشگو بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$y_i = \sum_{j=1}^q f_j(t_{ij}) + \epsilon_i \quad (1)$$

که در آن  $y_i$  متغیر پاسخ  $i$  امین مشاهده و  $f_j(t_{ij})$ ، تابع رگرسیون ناپارامتری  $i$  امین مشاهده روی  $j$  امین متغیر پیشگو و  $\epsilon_i$  متغیر خطای مستقل دارای میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  می باشند.

روش اسپلاین بریده شده یکی از روش های رگرسیون ناپارامتری است که اغلب مورد استفاده قرار می گیرد. اسپلاین بریده چندجمله ای تکه ای که قطعه قطعه شده و دارای خاصیت پیوستگی است. یک مزیت رویکرد اسپلاین بریده شده در رگرسیون ناپارامتری تمایل به پیدا کردن تابع رگرسیون بر اساس داده ها می باشد.  $f(t_i)$  بوسیله تابع اسپلاین بریده تقریب زده می شود. برای این کار می توان آن را بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$f(t_{i1})(u_i, v_i) = \sum_{k=1}^m \beta_m(u_i, v_i) t_{i1}^k + \sum_{h=1}^r \delta_{h+m}(u_i, v_i) (t_{i1} - k_h)_+^m \quad (2)$$

اگر متغیر پیشگو در رگرسیون ناپارامتری بیش از یکی باشد، داده ها بصورت  $(y_i, t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iq})$  و مدل رگرسیون ناپارامتری بصورت زیر بیان می شود.

$$y_i = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^m \beta_{jk} X_{ij}^k + \sum_{j=1}^q \sum_{h=1}^r \alpha_{j(m+h)} (X_{ij} - k_{hj})_+^m + \epsilon_i \quad (3)$$

$X_{ji}$ ،  $j$  امین متغیر پیشگو و  $k_{hj}$ ،  $h$  امین گره ی  $j$  امین متغیر پیشگو،  $\beta_{jk}$   $k$  امین پارامتر در  $j$  امین متغیر پیشگو و  $\alpha_{j(m+h)}$  پارامترهای تابع اسپلاین بریده شده می باشند.

مدل منحنی رگرسیون ناپارامتری اسپلاین بریده شده را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\underline{f}(t) = T(\underline{k}(\underline{\theta})) \quad (4)$$

که در آن

$$\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix} \quad T(\underline{k}) = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^m & (t_1 - k_1)_+^m & \cdots & (t_1 - k_r)_+^m \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^m & (t_2 - k_1)_+^m & \cdots & (t_2 - k_r)_+^m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^m & (t_n - k_1)_+^m & \cdots & (t_n - k_r)_+^m \end{bmatrix}$$



براساس رابطه ی (۳) ،  $f(t_i)$  یک تابع اسپلاین بریده شده مرتبه  $m$  با نقاط گره  $k_1, k_2, \dots, k_h$  و  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  . برآورد منحنی رگرسیون ناپارامتری با استفاده از روش حداقل مربعات ( $OLS$ ) انجام می شود. در برآورد  $OLS$  ، مجموع مربعات خطای زیر مینیمم می شود.

$$\epsilon_i = y_i - f(t_i) \quad (5)$$

اگر رابطه (۵) به حالت ماتریسی نوشته شود به فرم زیر است.

$$\underline{\epsilon} = \underline{y} - \underline{f}(t) \quad (6)$$

برای بدست آوردن پارامترها به روش  $OLS$  داریم:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} &= (\underline{y} - \underline{f}(t))^T (\underline{y} - \underline{f}(t)) \\ &= (\underline{y} - T(\underline{k})\underline{\theta})^T (\underline{y} - T(\underline{k})\underline{\theta}) \\ &= (\underline{y}^T - T(\underline{k})^T \underline{\theta}^T) (\underline{y} - T(\underline{k})\underline{\theta}) \end{aligned} \quad (7)$$

با مینیمم کردن رابطه (۷) برآورد پارامتر  $\theta$  بصورت زیر خواهد بود.

$$\hat{\underline{\theta}} = [T(\underline{k})^T T(\underline{k})]^{-1} [T(\underline{k})^T \underline{Y}] \quad (8)$$

### ۳ مثال کاربردی

به منظور مقایسه دو روش رگرسیون ناپارامتری اسپلاین بریده شده با روش رگرسیون پارامتری داده های بررسی یارانه کود کشاورزی براساس مقاله ی وایدیاس و همکاران (۲۰۲۱) در نظر گرفته شده است. در این داده  $y$  ، متغیر پاسخ و میزان شجاعت مامور ترویج و متغیرهای پیشگو  $X_1$  ، فرهنگ ملی کشاورز  $X_2$  پاداش ملی برای مامور ترویج و  $X_3$  میزان نقش مدیریت را نشان می دهند. با اجرای رگرسیون پارامتری نتایج مربوط به برآورد تابع رگرسیون بصورت زیر بدست آمده است.

$$\hat{y}_i = 0.00969 + 0.2454X_1 + 0.1819X_2 + 0.3005X_3 \quad (9)$$

همچنین با انجام رگرسیون ناپارامتری اسپلاین بریده شده نتایج در جدول زیر ارایه شده است.

| ضرایب        | پارامتر  | ضرایب      | پارامتر |
|--------------|----------|------------|---------|
| $\beta_0$    | ۰.۰۴۷۵   | $\alpha_1$ | ۰.۰۵۱۲  |
| $\beta_{11}$ | ۰.۲۱۸۲   | $\alpha_2$ | ۰.۰۲۳۲  |
| $\beta_{12}$ | ۱۸۵ ۱۶۸۷ | $\alpha_3$ | ۰.۱۳۴۵  |
| $\beta_{13}$ | ۰.۲۶۱۵   |            |         |

$$\hat{f}(t_i) = 0.0475 + 0.2185t_{1i} + 0.1687t_{2i} + 0.2615t_{3i} + 0.0512(t_{1i} - 0.4671)_+ + 0.0232(t_{2i} - 0.4881)_+ + 0.1345(t_{3i} - 0.4951)_+ \quad (۱۰)$$

برای مقایسه ی دو مدل از معیار  $MSE$  و  $R^2$  استفاده شده و نتایج در جدول زیر ارایه شده است.

| $R^2$  | $MSE$  | Model              |
|--------|--------|--------------------|
| ۰.۸۲۶۹ | ۰.۵۵۱۹ | رگرسیون پارامتری   |
| ۰.۸۷۶۵ | ۰.۳۹۹۵ | رگرسیون ناپارامتری |

## ۴ بحث و نتیجه گیری

برای داده های ارایه شده ، مدل رگرسیون ناپارامتری مناسب است. براساس مدل برآورد منحنی رگرسیون بر اساس معیار  $MSE$  و  $R^2$  انتخاب شده است. با توجه به اطلاعات بدست آمده مقدار  $MSE$  مدل رگرسیون ناپارامتری کمتر از مدل رگرسیون پارامتری است. همچنین مقدار  $R^2$  بدست آمده مدل رگرسیون ناپارامتری نیز بیشتر از مدل رگرسیون پارامتری می باشد.

## مراجع

- [1] I.N. Budiantara, Sunanar and Zsoejoet(1997), Weighted Spline Estimator, Bulletin of the International Statistical ,333-334.
- [2] M. Y. Cheng , R. L.Paige(2010), Variance Reduction for kernel Estimator in Clustered/Longitudinal Data Analysis, Journal of Statistical Planing and Inference,140,1389-1397.
- [3] R. Diana, L.n. Budiantara(2014). Statistical Modelling for Unemployment Rate Smoothing Spline in Semi-parametric Multivariable Regression Model with Bayesian Approach, Model Assisted Statistics and Applications,9 , 159-166
- [4] R.L. Eubank(1998), Spline Smoothnh and Noparametric Regression , Mercel Dekker , New York.
- [5] Fernandes A A R Hutahayan B Nurjannsh 2019 Comparison of Curve Estimation of the Smoothing Spline Nonparametrics Function.
- [6] W.Hardel(1990),Applied Nonparametric Regression ,Cambridge University Press, New York.
- [7] Gujarati DN (2003) Basic Econometrics (Fourth Edi)New York McGrae-Hill.
- [8] Pramoedyo H (2013) Statistika Inferensia Malany Danar Wijaya.
- [9] D A Widvastuti(2021) Spline Estimation Method in Nonparametric Regression Using Truncated Spline An-

## کاربرد سیستم آشوب در هواشناسی با تاکید بر مدل سازی در ابرهای همرفتی

ایرج رضانی\*، مربی، گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

irajramezani1351@pnu.ac.ir

قاسم احمدی، استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

g.ahmadi@pnu.ac.ir

**چکیده:** یک تغییر کوچک در پدیده های فیزیکی هوا باعث تغییرات گسترده ای در آن می شود که نشان دهنده ی حساسیت به شرایط اولیه می باشد. در این تحقیق مروری با استفاده از روش های ریاضی معادلات مدل را برای ابرهای همرفتی ارائه داده ایم. با مشخص کردن معادلات تکانه، پیوستگی و ترمودینامیکی با استفاده از روش های عددی ضمن حل معادلات پریشیده، میدان های سرعت، فشار و دما را به دست می آوریم. سپس، با معرفی فرآیندهای میکروفیزیکی ابر و با استفاده از طرح واره کسلر خواص میکروفیزیکی ابر گرم را بررسی می کنیم.

**کلمات کلیدی:** آشوب، بستر، شبیه سازی، شناوری.

### ۱ مقدمه

به طور کلی سیستم های هواشناسی به علت برهمکنش های پیچیده بین تعداد زیادی از متغیرها مانند دما، فشار، رطوبت و باد، آشوبناک هستند. بی ثباتی ذاتی جو و حساسیت به شرایط اولیه، پیش بینی هوا را به یک کار چالش برانگیز تبدیل می کند. در هواشناسی، سیستم های آشفته را با استفاده از معادلات دیفرانسیل که فعل و انفعالات پیچیده و غیرخطی درون جو را به تصویر می کشد، به صورت ریاضی می توان توصیف کرد. یکی از معروف ترین مدل های ریاضی که آشفتگی را در هواشناسی نشان می دهد، سیستم لورنز است که توسط ادوارد لورنز در سال ۱۹۶۳ توسعه یافت. در این تحقیق مروری یکی از سیستم های آشوبناک جوی یعنی ابرهای همرفتی بر اساس معادلات مدل ابر و روش های عددی مورد بررسی قرار می گیرد. اما محدودیت هایی که توسط سرعت کامپیوترها تحمیل می شود کار مدل سازی را سخت می کند. زیرا محدوده ی مقیاس هایی که می بایست در نظر گرفته شوند قسمت کوچکی از مقیاس هزاران برهمکنش میکروفیزیکی مابین ذرات آب متراکم شده هستند که تشکیل و رشد بارش و تخلیه آب ابر را هدایت می کنند. در انتها قسمت بزرگی از گردش هایی که در ابر اتفاق می افتد در هوای صاف و خارج از ابرهاست. همانطور که شبیه سازی جزئیات گردش های ابر در یک جو یکپارچه عملی نیست، مدل های ابر در مناطق محدودی که نیازمند استفاده از شرایط مرزی ساختگی در همه جهات است قابل اجرا هستند.

### ۲ معادلات پایه مناسب برای مدل های ابر

مدل های طراحی شده، حرکت های ابرهایی را که معمولاً محدود به منطقه کوچکی در مقایسه با شعاع زمین هستند، شبیه سازی می کنند. برای این کار مناسب است که از یک سیستم مختصات کارتیزین محلی استفاده کرد (سیستم مختصات کروی در

۱۸۷

\* سخنران

مدل‌های جهانی به کار می‌رود). پارامتر کوریولیس به علت تغییرات بسیار کوچک در این منطقه ثابت در نظر گرفته می‌شود. در جریان‌هایی که عدد ماخ آن کوچک است، تقریب غیرکشسان مناسب است. معادله‌ی آب ایستایی در مدل‌های جهانی و منطقه‌ای به کار می‌رود و بدیهی است که در اینجا کاربردی ندارد. شکل غیرکشسان معادلات تکانه در نمادگذاری تانسوری به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\bar{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_i u_j) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \bar{\rho} B \delta_{i3} - \varepsilon_{ijk} f_j \bar{\rho} u_k + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \vartheta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1)$$

چگالی میانگین که با ارتفاع تغییر می‌کند و مولفه‌های سرعت با جهت‌های شرق سو  $x_1$  و شمال سو  $x_2$  و پایین سو  $x_3$  به ترتیب با  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  مشخص می‌کنیم. بوسیله روش نمادگذاری تانسوری همه شاخص‌های دیگر با  $i$  جمع زده می‌شوند. شناوری با  $B$  و وشکسانی جنبشی با  $\vartheta$  مشخص می‌شود. پارامتر کوریولیس  $f$  را به صورت:  $f_i = (0, 2\omega \cos \varphi, 2\omega \sin \varphi)$  می‌نویسیم. معادله پیوستگی غیرکشسان

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_j) = 0 \quad (2)$$

و معادله ترمودینامیکی در یک معادله پایستار برای آنتروپی عبارت است:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_j \theta_e) + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \kappa \frac{\partial \theta_e}{\partial x_j} + S_{\theta_e} \quad (3)$$

جملات پخش مولکولی را حذف و همه‌ی متغیرهای شبه پایستار مانند نسبت آمیختگی آب کلی و محتوی آب متراکم شده معادلاتشان مانند معادله (۳) می‌باشد و کمیت‌هایی مثل شناوری و نسبت آمیختگی اشباع بایستی از متغیرهای شبه پایستاری مثل دمای پتانسیل و آب کلی که به طور صریح پیش‌بینی می‌شوند؛ تشخیص داده می‌شوند. وقتی یک جریان به طور خالص تلاطمی می‌شود همه مقیاس‌های حرکت در سطح مولکولی ارائه و معرفی می‌شوند. در مقایسه با جریان یکنواخت پایدار، اطلاعات لازم برای توصیف یک جریان تلاطم بسیار جزئی‌تر و بیشتر است. جای امیدواری است که پیچک‌های کوچک، از قوانین آماری معینی پیروی کنند. تاثیر حرکت‌های مولکولی روی مقیاس‌های بزرگ در جمله‌هایی از متغیرهای مقیاس بزرگ دیده می‌شود. در گام اولیه میدان سرعت کلی به دو مولفه که با  $\bar{u}$  و  $\bar{u}'$  معرفی می‌شوند، تقسیم می‌شود پس:  $u = \bar{u} + u'$  که  $u$  متغیر وابسته و علامت پیرین انحراف از جریان قابل تفکیک است. اگر یک متوسط‌گیری روی مقیاس طول و زمان جریان تفکیک‌پذیر انجام شود؛ داریم:  $\bar{u}' = 0$

فرض می‌کنیم مدل‌ها به صورت صریح سیر تکامل کمیت‌های بزرگ مقیاس را که تغییر هم می‌کنند، پیش‌بینی می‌کنند. بوسیله مولفه‌های پریم‌دار (آشفته‌گی) معادلات برای متغیرهای تفکیک‌پذیر به دست می‌آیند. با جایگزینی معادله سرعت در دسته معادلات (۱) تا (۳) و متوسط‌گیری از مجموعه معادلات خواهیم داشت:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{\rho} \bar{B} \delta_{i3} - \varepsilon_{ijk} f_j \bar{\rho} \bar{u}_k = \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \vartheta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0 \quad (5)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{\theta}_e}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{\theta}_e) + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \kappa \left( \frac{\partial \bar{\theta}_e}{\partial x_j} - \overline{u'_j \theta'_e} \right) + \overline{S_{\theta_e}} \quad (6)$$

در این معادلات برای متغیرهای شبه پایستاری مثل آب کلی مانند معادله (۶) اقدام می‌شود. بعضی از جملات در این معادلات نسبت به جملات دیگر کوچک هستند و قابل صرف نظر کردن می‌باشند. ساده‌ترین نوع بستار در یک نسبت مستقیم بین پخش مولکولی و جملات همبستگی پیچک‌ها از معادلات (۴) و (۶) در سال ۱۸۷۷ بوسیله Boussinesq پیشنهاد شد. راه دیگر محاسبه اثرات شناوری محاسبه تحولات وابسته به زمان یک اندازه ۱۸۸۱ مت‌های مقیاس زیر شبکه و استفاده از این اندازه در ضرایب آمیختگی است.

### ۳ معرفی فرایندهای میکروفیزیکی ابر گرم (طرح واره kessler)

چگالش بخار آب روی قطره‌های کوچک ابر و دوباره تبخیر شدن آنها به حالت‌های ترمودینامیکی هوا وابسته است. فرایندهای مسئول تشکیل بارش، پایین آمدن و دوباره تبخیر شدن، یخ زدن و تصعید، همچنین وارد کردن همه عوامل فیزیکی روی مقیاس‌های به مراتب کوچک به‌طور صریح مدل‌سازی شده‌اند، اما به آسانی نمی‌تواند به حالت‌های قابل تفکیک نسبت داده شود. بنابراین در نمونه‌ای از مقیاس زیر شبکه حرکت‌ها، این فرایندها باید دوباره در جملاتی از متغیرهایی که به‌طور صریح در مدل‌های عددی انتگرال‌گیری می‌شوند، بررسی شوند. فرایندهایی مثل به هم آمیختگی اتفاقی و مکانیزیم Bergeron-Findeisen، توزیع مجدد جرم آب متراکم شده در میان ذرات با اندازه‌های مختلف بوسیله به هم آمیختگی و شکست قطره‌ها در فاز مایع و نوع بزرگی از فاز یخ و فرآیند فاز آمیخته، مسئولیت تشکیل باران را دارند.

طرحواره توسعه‌یافته توسط Kessler شاید آسانترین معرفی برای خواص میکروفیزیکی ابرهای گرم در همه جوانب است. مهم‌ترین فرضی که کار را راحت می‌کند این است که در ابر یخ وجود ندارد و توزیع جمعیت ذرات آب دونمایی می‌باشد که عبارت است از یک جمعیت کوچک از قطره‌های ابر که سرعت نهایی‌شان در حدود دقیقه است که با سرعت هوای قائم نمونه مقایسه می‌شود و یک توزیع از قطرات باران که از توزیع نمایی Marshall-Palmer تبعیت می‌کند. فقط دو متغیر، نسبت آمیختگی از قطره‌های ابر و نسبت آمیختگی تام از بارش، پیش‌بینی می‌شوند. محدودیت‌های ذاتی در هر کدام از فرضیات وجود دارد. فرضی که یخ وجود ندارد در معرفی ابرهای همرفتی کم عمق در منطقه حاره و عرض‌های میانی در فصل‌های گرم، استفاده می‌شود. فرض توزیع دونمایی از اندازه قطرات آب در مشاهدات و تایید نظریه‌ها قابل توجه است. ابتدا متغیرهای  $L_R$  و  $L_C$  را معرفی می‌کنیم که به ترتیب نسبت‌های آمیختگی آب ابر و آب باران هستند. معادلات پایستار برای هر کدام به‌صورت زیر است:

$$\frac{dL_C}{dt} = S - A - C + D_{L_C} \quad (V)$$

$$\frac{dL_R}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} V L_R) + A + C - E + D_{L_R} \quad (A)$$

که  $S$  چشمه آب ابر در مدت چگالش،  $A$  فرآیند به هم آمیختگی اتفاقی است که آب ابر را به آب باران تبدیل می‌کند،  $C$  یک نسبت خالص در آب ابر است که بوسیله آب باران جاروب می‌شود،  $E$  تبخیر آب باران و  $v$  سرعت متوسط نهایی وزن‌دار شدن توده از آب باران است (اینجا مثبت تعریف شده).  $D_{LR}$  و  $D_{LC}$  به ترتیب انتشار تلاطمی از آب ابر و آب باران هستند. تقریب غیرالاستیک در اینجا استفاده می‌شود. در معادلات (V) و (A) مشتقات زمانی تام به تغییرات زیرین حرکت هوا، وابسته است. به این دسته معادلات یک معادله پایستگی برای نسبت آمیختگی بخار آب اضافه می‌شود:

$$\frac{dr}{dt} = -S + E + D_r \quad (9)$$

که  $D_r$  انتشار تلاطمی بخار آب است. با ترکیب این معادله به دو معادله قبلی یک برتری ایجاد می‌شود که آن هم پیش‌بینی کمیت  $r_n$  (محتوی آب کل) و  $r_c$  که تعیین می‌شوند:

$$r_n = r + L_C + L_R, \quad r_c = r + L_C \quad (10)$$

معادلات پیش‌بینی برای  $r_n$  و  $r_c$  از ترکیب معادلات (V) و (A) و (9) به‌دست می‌آیند:

$$\frac{dr_c}{dt} = E - A - C + D_{r_c} \quad (11)$$

$$\frac{dr_n}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} V L_R) + A + D_{r_c} + D_{L_R} \quad (12)$$

که  $D_{r_c}$  انتشار تلاطمی از  $r_c$  است. اینها با روابط تشخیصی تکمیل می‌شوند:

$$r = \min(r^*, r_c), \quad L_C = \min\left(\frac{189}{v}, r_c - r^*\right), \quad L_R = r_n - r_c \quad (13)$$

که  $r^*$  آمیختگی اشباع است. برتری معادلات (۱۱) تا (۱۳) در این است که کمیت‌های  $r_c$  و  $r_n$  را وارد کرده که همیشه در هوای غیراشباع غیرصفر هستند. بنابراین ابرهای سراسری به آرامی مرزهای محور باران را تغییر می‌دهند. از طرف دیگر برآوردهای تفاضل متناهی از همرفت و جملات انتشار در زمان‌ها و مکان‌های معین معادله (۱۲)  $r_n$  را کوچکتر از صفر پیش‌بینی می‌کند. که البته این غیرفیزیکی است. جهت تصحیح این اتفاق، بهترین روش انتگرال‌گیری معادله (۱۲) در یک مد شبه لاگرانژی است. به‌علاوه ممکن است بعضی اوقات  $r_c$  از  $r_n$  بزرگتر شود که در اینصورت  $L_R$  منفی می‌شود. این اتفاق زمانی می‌افتد که بیشتر آب باران روی یک گام زمانی قابل دسترس، تبخیر می‌شود. اگر نگران اضافه شدن یک کمیت وابسته به آنتالپی در معادلات ترمودینامیکی باشیم،  $r_c$  قبل از مقدار  $r_n$  آورده می‌شود.

## ۴ نتیجه‌گیری

در این مطالعه مروری معادلات پیش‌بینی در ابرهای همرفتی مورد بررسی قرار گرفت. به‌طور عادی، وقتی یک سیستم را با شرایط اولیه با تغییرات کوچک راه‌اندازی می‌کنیم، نتایجی با تغییرات کوچک نیز به‌دست می‌آیند. اما هوا این‌گونه نیست. یک تغییر کوچک (به‌عنوان مثال، بال زدن یک پروانه در آمریکای جنوبی) می‌تواند باعث تغییرات گسترده در هوا شود (مثل شکل‌گیری یک طوفان در آتلانتیک). این حساسیت به شرایط اولیه به این معناست که در سیستم‌های آشوبی، داشتن پیش‌بینی‌های مطمئن غیرممکن است، زیرا که هیچگاه نمی‌توان به‌طور دقیق و با اطمینان اعداد اعشار نامتناهی یک سیستم را محاسبه کرد و اگر حتی به اندازه‌ای ناچیز خطا داشته باشیم، بعد از گذر زمان کافی، هیچ ایده‌ای از کاری که سیستم می‌کند نخواهیم داشت. پیش‌بینی وضع هوا چند چالش زیرکانه را با خود به همراه دارد که ما هیچگاه قادر به حل تمامی آنها نخواهیم بود. علت فقط پیچیدگی نیست، دانشمندان معمولاً با مشکلات پیچیده به آسانی روبرو می‌شوند، علت چیزی بسیار بنیادی‌تر است. چیزی که در اواسط قرن بیستم کشف شد: این حقیقت که ما در یک جهان آشوبی (Chaotic) زندگی می‌کنیم که در زمینه‌های بسیاری، غیرقابل پیش‌بینی است. اما در اعماق این آشوب، الگوهای شگفت‌آوری پنهان شده است که اگر بتوانیم آنها را کامل درک کنیم می‌توانند منجر به اکتشافات بزرگ‌تری شوند.

## مراجع

- [1] Chen, Y., Normalizing and classifying shape indexes of cities by ideas from fractals. Chaos Solitons Fractals: 7-15. 2022.
- [2] Feldman, D. P., Chaos and Fractals: An Elementary Introduction. Oxford University Press. 2012.
- [3] Kerry, A. E., Atmospheric Convection. Oxford University Press. :280-324. 1994.
- [4] Kautz, R. Chaos: The Science of Predictable Random Motion. Oxford University Press. 2011.
- [5] Randall, D. A. , An Introduction to Atmospheric Modelling. AT604. Course outline. Department of Atmospheric science, Colorado state university. 2005

## معرفی استعاره‌های ریاضی

زهره سادات حسینی\*؛ دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

zahra.sadat.hosseini2001math@gmail.com

نرگس یافتیان، دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

yaftian@sru.ac.ir

**چکیده:** استعاره‌های ریاضی ابزارهای مؤثری برای درک مفاهیم پیچیده و انتزاعی هستند. این استعاره‌ها به انتقال مفاهیم از دنیای ریاضیات به زبان روزمره کمک می‌کنند و به ما اجازه می‌دهند تا ایده‌های دشوار را با زبانی ملموس‌تر بیان کنیم. استعاره‌های ریاضی نه تنها به تجزیه و تحلیل مفاهیم کمک می‌کنند، بلکه در فرایند یاددهی-یادگیری نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. آن‌ها می‌توانند به عینیت بخشیدن به ایده‌های انتزاعی و کاربردی‌تر کردن آن‌ها در زندگی روزمره کمک کنند. این مقاله مروری قصد دارد تا به معرفی استعاره‌های ریاضی پرداخته و مثال‌هایی از انواع آن‌ها را مطرح کند تا اهمیت این استعاره‌ها را در فرایند آموزش نمایان سازد. آشنایی با استعاره‌های ریاضی به معلمان این کمک را می‌کند تا این استعاره‌ها را به‌صورت آگاهانه و در موقعیت‌های آموزشی مناسب به کار برده و در نتیجه سطح یادگیری را در دانش‌آموزان افزایش دهند.

**کلمات کلیدی:** ریاضی، استعاره‌ها، استعاره‌های ریاضی

### ۱ مقدمه

استعاره در لغت به معنای به عاریت خواستن یا به عاریت گرفتن است و موضوعی مفهومی است که به طور قابل توجهی در عینیت بخشیدن به ایده‌های انتزاعی و ترکیب احساسات و اندیشه کمک می‌کند [۲]. استعاره‌ها در آموزش می‌توانند به عنوان پلی بین حوزه‌های شناختی و عاطفی در فرایند یاددهی-یادگیری عمل کنند [۷]. به‌ویژه در ریاضیات، آن‌ها می‌توانند نمادهای انتزاعی ریاضی را به مفاهیم مرتبط‌تر تبدیل کنند و درک آن‌ها را آسان‌تر سازند [۸].

### ۲ استعاره‌های ریاضی

در فرایند آموزش، ما معلمان آگاهانه و ناآگاهانه در کلاس‌های درس به‌وفور از استعاره‌های ریاضی استفاده می‌کنیم. برای مثال وقتی در تدریس ریاضی می‌گوییم «تابع یک ۱۹۱ رعه است»، دانش‌آموز با شناخت مجموعه و ویژگی‌های

آن از قبیل اعضاء مجموعه، مجموعه مرجع، زیرمجموعه و ... می‌تواند این مفاهیم را به مفهوم تابع انتقال داده و تفسیر کند و در نتیجه درک بهتری از مفهوم جدید به دست آورد [۱]. در این مثال در واقع از یک استعاره ریاضی استفاده کرده‌ایم. صاحب نظران استعاره ریاضی را نگاهی از حوزه مبدا به حوزه مقصد تعریف کرده‌اند. در این تعریف، حوزه مبدا، تجربیات ریاضی و غیرریاضی و حوزه مقصد، مفاهیم انتزاعی ریاضی هستند [۱۱]. این عمل معمولاً برای توصیف یک بازنمایی با فهم دشوار به کمک یک بازنمایی ساده‌تر برای درک و فهم آن انجام می‌شود [۸]. برای مثال، در استعاره «تابع یک مجموعه است»، حوزه مبدا، مجموعه و حوزه مقصد، تابع است (شکل ۱).



شکل ۱: ارتباط بین حوزه مبدا و مقصد

استعاره‌های ریاضی به عنوان ابزارهای شناختی عمل می‌کنند که درک و توسعه مفاهیم ریاضی را تسهیل کرده و سطح یادگیری را ارتقا می‌دهند [۵]. آن‌ها همچنین، بر باورهای دانش‌آموزان تاثیر دارند و به آن‌ها کمک می‌کند تا مفاهیم پیچیده را درک کنند [۵، ۹]. برای مثال، استفاده از استعاره «ریاضیات یک زبان است» توسط معلم، می‌تواند سبب شود تا دانش‌آموزان باور کنند ریاضیات مانند زبانی است که دارای قواعد و ساختارهای خاص خود است. این موضوع به آنان کمک می‌کند تا متون ریاضی را تحلیل کرده و به درک عمیق‌تری از مفاهیم و ارتباطات درون آن دست یابند [۴، ۱۰]. استعاره‌ها همچنین می‌توانند در گفتمان‌های آموزشی به عنوان ابزار آموزشی آگاهانه برای ملموس‌تر شدن مفاهیم انتزاعی عمل کنند [۶]. مثلاً استعاره‌های مرتبط با حرکت، مانند «به سمت بالا بروید» یا «به سمت پایین بیایید»، با تداعی تغییرات در مقادیر ریاضی و «کشیدن نمودار تابع به سمت بالا» به معنای افزایش مقادیر تابع، سبب می‌شود تا دانش‌آموزان مفاهیم انتزاعی را از طریق تصورات حرکتی ملموس بشناسند [۹]. برخی از استعاره‌ها نیز، به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مفاهیم دشوارتر را به کمک سیستم‌های بصری، بهتر درک کنند [۸]. به عنوان نمونه، استفاده از نمودارها به عنوان نمایشی بصری از داده‌ها و روابط بین آن‌ها در تدریس ریاضی، می‌تواند به یادگیری بهتر و درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی (مانند دامنه و برد توابع)، کمک کند [۹]. از سوی دیگر، برخی مفاهیم ریاضی مانند صفحه مختلط (Complex Plane) و مثلث‌های کروی (Spherical Triangle)، استعاره‌هایی هستند که به کمک تصورات بصری، درک مفاهیم پیچیده را آسان‌تر می‌کنند [۱۰]:

- استعاره صفحه مختلط، اشاره به یک سیستم دو بعدی است که در آن، اعداد مختلط به عنوان نقاط یا بردارها نمایش داده می‌شوند. استعاره صفحه مختلط، اشاره به یک سیستم دو بعدی دارد که در آن اعداد مختلط به عنوان نقاط یا بردارها نمایش داده می‌شوند. هر عدد مختلط به شکل  $a+bi = z$  نوشته می‌شود، که در آن  $a$  قسمت حقیقی و  $b$  قسمت موهومی است. در این صفحه، محور افقی به قسمت حقیقی  $a$  و محور عمودی به قسمت موهومی  $b$  اختصاص دارد. این ساختار به ما اجازه می‌دهد تا اعداد مختلط را به صورت بصری درک کنیم و عملیات‌های ریاضی روی اعداد مختلط، مانند جمع و ضرب را راحت‌تر تجسم کرده و به صورت هندسی در نظر بگیریم. به عنوان مثال، جمع اعداد مختلط به معنای انتقال نقاط در صفحه و ضرب اعداد مختلط معادل چرخش و تغییر اندازه (مقیاس) [۱۹۲] صفحه است. این استعاره در زمینه‌های مختلفی کاربرد دارد، زیرا بسیاری از پدیده‌ها را می‌توان با استفاده از اعداد مختلط و صفحه مختلط مدل‌سازی کرد.





- [5] I. Falani, Y. Supriyati, J. Marzal, D. Iriani, and G. M. Simatupang, "Metaphor Studies Investigation in Mathematics Education: A Systematic review," Indonesian Journal of Mathematics Education, vol. 6, no. 1, pp. 40–62, 2023.
- [6] J. Goschler, "Metaphors in educational texts: A case study on history and chemistry teaching material," Yearbook of the German Cognitive Linguistics Association, vol. 7, no. 1, pp. 79–92, 2019.
- [7] T. Horzum, and G. Yildirim, "High school students' metaphors about geometry," Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, vol. 1, no. 40, pp. 357-374, 2016.
- [8] O. Khatin-Zadeh, Z. Eskandari, and D. Farsani. "The roles of mathematical metaphors and gestures in the understanding of abstract mathematical concepts," Journal of Humanistic Mathematics, vol. 13, no. 1, pp. 36–53, 2023.
- [9] O. Khatin-Zadeh, D. Farsani, j. Hu, F. Marmolejo-Ramos, "The role of perceptual and action effector strength of graphs and bases of mathematical metaphors in the metaphorical processing of mathematical concepts," Front Psychol, vol. 14, 2023.
- [10] D. Pimm, "Mathematical metaphor," For the Learning of Mathematics, vol. 8, pp. 30-34, 1988.
- [11] J. B. Pradhan, "Mathematical ideas in cultural artefacts: A metaphor for teaching of school mathematics," International Journal of Scientific and Research Publications, vol. 8, no. 9, pp.335-341, 2018.

## بررسی تاثیر روش حل مسئله در مباحث اعداد اول و شمارنده ها روی یادگیری معنادار دانش آموزان پایه هفتم شهرستان چابهار

حسینعلی ساده\*؛ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

hosseinalisadeh.m.t@gmail.com

پرستو هیئتیان نایینی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

parastoo.heiatiannaeni@pnu.ac.ir

**چکیده:** پژوهش حاضر به « بررسی تاثیر روش حل مسئله در مباحث اعداد اول و شمارنده ها روی یادگیری معنادار دانش آموزان پایه هفتم شهرستان چابهار» پرداخت. پژوهش از نظر هدف کاربردی و از نظر روش، شبه آزمایشی از نوع پیش آزمون و پس آزمون با گروه کنترل بود و کلیه ی دانش آموزان پسر پایه هفتم شهرستان چابهار جامعه آماری این پژوهش بودند که ۲ کلاس با تعداد ۲۵ دانش آموز در هر کلاس (یکی از این کلاسها به صورت تصادفی به عنوان گروه گواه و دیگری به عنوان گروه آزمایش انتخاب شد). برای گروه آزمایش ۴ جلسه تدریس به آن ها داده شد ولی گروه گواه به روش سنتی آموزش دیدند و در مرحله پس آزمون مجدداً میزان یادگیری از دانش آموزان پایه هفتم سنجیده شد و بعد از برگزاری پیش آزمون نتایج بر اساس امتیاز دهی برای سئوالات استخراج گردید و توسط نرم افزار آماری تجزیه و تحلیل گردید. نتایج بدست آمده نشان داد که روش ارائه حل مسئله روی یادگیری معنادار دانش آموزان پایه هفتم شهرستان چابهار در موضوع شمارنده ها و اعداد اول تأثیر دارد، به عبارتی دانش آموزانی که به روش حل مسئله آموزش دیده بودند، یادگیری بالاتری نسبت به گروه کنترل داشتند..

**کلمات کلیدی:** اعداد اول، روش حل مسئله، پایه هفتم، ریاضی، شهرستان چابهار.

## ۱ مقدمه

تدریس، فعالیت آموزشی است که نتیجه آن یادگیری میباشد و نتایج آن تغییراتی است که پس از هر آموزش و تدریس در شناخت، عواطف و مهارتهای حرکتی آموزش گیرنده ایجاد میشود و یک راهبرد مقابله کلی حل مسئله میباشد که سازگاری، انطباق و رقابت را تسهیل میبخشد. حل مسئله به مثابه عالیترین شکل یادگیری قلمداد میشود و نیز شامل فرایندی است که طی آن یادگیرنده از راه ترکیب قواعد از قبل آموخته شده به یادگیری جدید میرسد. هنگامی که دانش آموز از دوره تحصیلی وارد دوره تحصیلی ج ۱۹۵ میشود، باید به دانش آموز کمک کرد تا به مرور زمان با

۱۹۹

جدول ۳ و ۱ آمار توصیفی ( معیارهای تمرکز میانگین و میانه و معیارهای پراکندگی انحراف معیار، کمترین و بیشترین داده) یادگیری معنادار را در گروه آزمایش و گواه ارائه میدهد.



## ۴ آمار استنباطی

روش مورد استفاده در این پژوهش جهت آزمون فرض پژوهش، تحلیل واریانس چندمتغیره می باشد. جهت بررسی ادعای مطرح شده در مورد توزیع داده های یک متغیر کمی آزمون کلموگراف- اسمیرنوف مورد استفاده قرار می گیرد.

همانطور که از یافته های جدول ۵ استنباط می شود، از آنجا که سطح معنیداری به دست آمده در آزمون (K-S) در همه متغیرهای پژوهش به تفکیک گروه، بیش از مقدار ملاک 0/05 می باشد، در نتیجه می توان گفت که توزیع متغیرهای مورد بررسی در نمونه آماری داری توزیع نرمال می باشد. برای بررسی پیش فرض همگنی ماتریس واریانس - کوواریانس مولفه های متغیرها در گروه های مورد پژوهش نیز، از آزمون باکس استفاده شد.

جدول ۶ نشان میدهد مقدار سطح معناداری (0/05 < p) می باشد که گویای آن است شرط همگنی ماتریس واریانس - کوواریانس به خوبی در هر دو گروه رعایت شده است (2/993 = F, 0/05 < p).

## ۵ آزمون فرضیه پژوهش

فرضیه: روش ارائه حل مسئله روی یادگیری معنادار دانشآموزان پایه هفتم شهرستان چابهار در موضوع شمارنده ها و اعداد اول تاثیر معناداری دارد.

براساس جدول ۷، بین دو گروه آزمایش و گواه، در متغیر یادگیری معنادار دانشآموزان به شرح زیر تفاوت معنادار وجود دارد: بین دو گروه آزمایش و گواه در میزان یادگیری معنادار دانشآموزان تفاوت معنادار وجود دارد. (0/05 < p, 11/341 = F(1, 48)). به این صورت که میزان ۱۹۷ درصد معنادار دانشآموزان در گروه آزمایش به طور معناداری بیشتر از گروه گواه می باشد. متغیر گروه ۱۹ درصد واریانس یادگیری معنادار دانشآموزان را تبیین می کند.



## ۶ نتایج

در این تحقیق میزان یادگیری معنادار دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان چابهار در موضوع شمارنده ها و اعداد اول به روش ارائه حل مسئله بررسی شده است. میتوان نتیجه گرفت که آموزش به روش تدریس حل مسئله، می تواند سبب بهبود و پیشرفت سطح درک دانش‌آموزان گردد و با این چارچوب می توان در برنامه ای دراز مدت، وحدت بین نظریه و عمل آموزشی ایجاد کرد.

## مراجع

[۱] ز. ظفری، الف. قدسی و م. صاحب الزمانی (۱۴۰۱)، اثربخشی الگوی آموزش مبتنی بر رویکرد حل مسأله بر درگیری تحصیلی دانشجویان پزشکی دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم پزشکی تهران. فصلنامه علوم پزشکی دانشگاه آزاد اسلامی تهران، شماره ۱۶۶-۱۷۴، ۳۲، ۱۴۰۱.

[۲] نیلی، محمدرضا، زارعی، محمدحسین، و موسوی، ستاره. (۱۳۹۴). بررسی تاثیر نوآوری تدریس به شیوه حل مساله بر آمادگی خودکارآمدی فراگیران. مهارت آموزی، ۳(۱۲)، ۲۱-۸.

[3] F. AlperAy, A. Karakaya and K. Yilmaz, "Relations between self-leadership and critical thinking skills" Proccedia - Social Behav, Vol. 207, pp. 29 – 41, Agst2015.

[4] Aaron C, Morrish B, Kovithavongs MC, Aaron S, Crocket J, Morrish D, et al(1998). Assessment of exam performance after change to problem-based learning: Differential effects by question type. Teach Learn Med 1998; 102; 86-91.

## کاربرد باریکه‌های نور تولید شده توسط توابع خاص ریاضی

حسام‌الدین سعادت<sup>\*</sup>

عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
fazelsaadati@pnu.ac.ir

### چکیده:

از کاربردهای مهم باریکه‌های نور ساختار یافته می‌توان در دام اندازی نوری، انبرک‌های نوری، ارتباطات نوری، اطلاعات کوانتومی، و انتقال اطلاعات با حجم بالا اشاره کرد. اساس تولید این نوع باریکه‌ها، استفاده از توابع خاص متعامد ریاضی می‌باشد. در این مقاله، باریکه‌های نور ساختاریافته و چند مورد از کاربردهای آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تکانه زاویه‌ای مداری؛ توابع خاص ریاضی؛ معادله هلمهولتز؛ نور ساختاریافته.

### ۱ مقدمه

اثر مکانیکی نور از زمان تشریح ستاره‌های دنباله‌دار توسط کپلر مورد توجه دانشمندان علم فیزیک قرار گرفته است. وی در مشاهدات خود متوجه شد که دنباله ستاره‌های دنباله‌دار همیشه از خورشید دور می‌شوند. و به واسطه همین مشاهده ایده سفر به ماه را به وسیله نور مطرح کرد [۱]. امروزه این ایده وی در انتقال میکروذرات و نانوذرات به صورت تجربی مورد بررسی قرار گرفته است. در این بین، ظهور لیزر و استفاده از نور ساختار یافته نیز باعث ایجاد مفاهیم و کاربردهای نوین نیروهای اپتیکی شده است. خواص منحصر بفرد نور ساختار یافته به وفور در بسیاری از شاخه‌های علمی و تکنولوژیکی به کار برده می‌شوند و هنوز هم بسیاری از کاربردهای جدید آن در آزمایشگاه‌ها در حال توسعه می‌باشند.

### ۲ نور ساختاریافته

معادلات ماکسول یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند که وابستگی زمانی دو میدان الکتریکی و مغناطیسی امواج الکترومغناطیسی را توصیف می‌کنند. با استفاده از این معادلات می‌توان تمامی پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی را توصیف کرد که منجر به معادله موج [۱۹۹،



$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

می‌شود. با فرض  $E(r, t) = e^{-i\omega t} E(r)$ ، به عنوان جوابی از معادله موج ۱، که در آن عدد حقیقی مثبت  $\omega$ ، فرکانس موج و  $r$  بردار مکان است، خواهیم داشت

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0, \quad (2)$$

که در آن  $k = \frac{\omega}{c}$ ، عدد موج است. این معادله، به معادله هلمهولتز (Helmholtz equation) معروف است. بنابراین انتشار یک میدان اپتیکی به وسیله معادله هلمهولتز سه بعدی توصیف می‌شود. حل معادله هلمهولتز در دستگاه‌های مختصات مختلف منجر به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دومی می‌شود که جواب آنها به صورت ترکیب خطی از توابع خاص متعامد ریاضی می‌باشد. به عنوان مثال، حل این معادله در دستگاه مختصات استوانه‌ای، بیضوی و سهموی به ترتیب منجر به باریکه‌های بسل، متئو و سهموی می‌شود. [۲]

### ۳ کاربردهای نور ساختار یافته

در این بخش به چند مورد از کاربردهای مهم نور ساختار یافته اشاره می‌شود.

#### ۱.۳ کاربرد نور ساختار یافته در انبرک‌های نوری و دستکاری نوری

انبرک‌های نوری، دستکاری اپتیکی، یا تله‌گذاری اپتیکی یک رده از تکنیک‌هایی هستند که در گستره وسیعی از کاربردها مانند ترمودینامیک نظری و زیست پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ایده اصلی آنها به این صورت است که باریکه نور لیزر کانونی شده مقداری از تکانه خود را به ذرات کوچک انتقال داده و بر آنها نیرو اعمال می‌کند و این ویژگی از تکنیک‌های منحصربفرد مهندسی اجسام در اندازه‌های میکرو و نانو، اعم از کره‌های پلاستیکی ساده تا سلول‌های بیولوژیکی بسیار پیچیده، بدون هر گونه برخورد فیزیکی در مقیاس‌هایی که به راحتی با هیچ تکنیک دیگری قابل انجام نیستند، می‌باشد [۳].

اوایل سال ۱۹۷۰ بود که آقای اشکین نشان داد که باریکه نور لیزر کانونی شده دارای شدت بوده و میکروذرات با جرم‌های بسیار کم را می‌توان به وسیله فشار تابشی آن، سرعت داده و تله‌گذاری کرد. وی اولین بار در سال ۱۹۸۶ در آزمایشگاه مشاهده کرد که ریزکره‌های از جنس لاتکس در طول محور انتشار باریکه مرتب شده و در جهت انتشار باریکه حرکت می‌کنند که این کار هدایت اپتیکی (Optical guiding) نامیده می‌شود. سپس با اضافه کردن یک باریکه دوم با همان قدرت اپتیکی، توانستند کره‌ها را در طول محور باریکه‌ها در مدتی که در ناحیه روشن بین دو باریکه قرار داشتند، به حالت سکون نگه دارند.

این کار که یک باریکه نور لیزر کانونی شده می‌تواند نه تنها به یک ذره سرعت ببخشد بلکه می‌تواند آن را به صورت سه بعدی و بدون نیاز به هر نیروی دیگری نگه دارد، منجر به مفهومی شد که اوایل به "تله‌گذاری اپتیکی نیروی گرادیان تک باریکه" معروف بود، امروزه "انبرک نوری" نامیده می‌شود [۴]. مزیت اجرای این نوع تله‌گذاری اپتیکی این است که می‌توان آن را با یک میکروسکوپ آزمایشگاهی انجام داد و این یکی از دلایل محبوبیت آن در آزمایشگاه‌های بیولوژیکی است که نیازمند اندازه‌گیری  $2^\circ$  می بسیار کوچک هستند. دستاورد مهم دیگر آن، اولین تله‌گذاری اپتیکی تک اتم‌ها بود که آقای چو و همکارانش [۵] با استفاده از ترکیب بسیار هوشمندانه یک دام‌انداز



اپتیک با یک تکنیک خنک‌کنندگی مناسب برای اتم‌ها به دست آورده بودند که منجر به دریافت جایزه نوبل سال ۱۹۹۷ برای توسعه تکنیک‌های خنک‌سازی و به دام‌اندازی اتم‌ها با استفاده از نور لیزر شده بود.

### ۲.۳ کاربرد نور ساختار یافته در نظریه اطلاعات کوانتومی

نور از دیرباز در خدمت سیستم‌های کوانتومی بوده است. علم اطلاعات کوانتومی پیشرفت چشمگیری در زمینه‌های مختلف مانند رمزنگاری (Cryptography)، محاسبات (Computations) و اندازه‌گیری (Metrology) داشته است. انتقال اطلاعات یکی از مهمترین کاربردهای نور ساختار یافته است. به وضوح، هر تصویر نوری را می‌توان به عنوان نور ساختار یافته حامل اطلاعات آنالوگی در نظر گرفت، ولی مهمتر از آن امکان استفاده از نور ساختار یافته برای رمزگذاری داده‌های دیجیتالی است که با بهره‌گیری از درجات آزادی فضایی و قطبش نور تحقق می‌یابد. به عنوان مثال، اطلاعات باینری را می‌توان به راحتی توسط دو حالت ممکن قطبش دایره‌ای نور کدگذاری کرد [۶]. قطبش نور دارای دو حالت متعامد افقی و عمودی است که می‌توان از آن در کدگذاری یک بیت اطلاعات در یک سیستم کوانتومی بهره برد (افقی صفر و عمودی یک را نشان می‌دهد). این ویژگی، این اجازه را می‌دهد که سیستم به صورت برهم‌نهی حالت‌های بیت متعامد باشد و با استفاده از آن برای نمایش کیوبیت بهره جست. سیستم‌های کیوبیتی فیزیکی متنوعی در تلاش برای سایر کاربردهای امکانپذیر اطلاعات کوانتومی مانند یون‌های تله‌گذاری شده سرد (Cold trapped ions) و نقاط کوانتومی (Quantum dots) هستند. با این حال، نور قطبیده به طور خاص برای اثبات اصول تحقیقات مناسب است برای این که تولید، دستکاری و آشکارسازی آن نسبتاً ساده، سریع و ارزان می‌باشد.

حدود یک دهه تا ظهور اولین مطالعات مکانیک کوانتوم بر روی باریکه حامل تکانه زاویه‌ای مداری طول کشید. گروه زایلینگر آزمایشی بر روی درهم‌تنیدگی باریکه‌های حامل تکانه زاویه‌ای مداری داشتند [۷]. اصل برهم‌نهی اولین امتیاز عمده دنیای کوانتومی بر دنیای کلاسیک در پردازش اطلاعات است. یکی دیگر از مزایای دنیای کوانتومی درهم‌تنیدگی است که در آن اجزای جداگانه یک سیستم کوانتومی چند مولفه‌ای (چند جزئی) دارای خواص مستقل نیستند. یک حالت درهم‌تنیده یک سیستم دو مولفه‌ای را نمی‌توان به عنوان یک محصول ساده از حالت‌های سیستم‌های جداگانه دانست. اگر دو جزء درهم‌تنیده یک سیستم به طور فضایی از هم جدا شوند، نتایج اندازه‌گیری در یکی از سیستم‌ها با نتایج اندازه‌گیری در سیستم دیگر به هم مرتبط خواهد بود.

باریکه‌های لاگر-گوسی دارای بسیاری از حالت‌های تکانه زاویه‌ای مداری متعامد هستند. با این که در تجربه تعداد مدهای این باریکه‌های حامل تکانه زاویه‌ای مداری قابل تشخیص تقریباً به ۱۰ مورد محدود است، با وجود این محدودیت، باز هم افزایش قابل توجهی در ظرفیت داده وجود دارد. همچنین سیستم‌های کوانتومی از ابعاد بالا به بهبود سطح امنیت در رمزنگاری کوانتومی با وجود نویز [۸] معروف هستند.

### ۳.۳ کاربرد نور ساختار یافته در ارتباطات اپتیک

افزایش روزافزون تقاضای ظرفیت انتقال اطلاعات در سیستم‌های انتقال نوری باعث افزایش تحقیقات برای گسترش پایدار ظرفیت انتقال شده است. روش‌های مختلفی تا به امروز برای افزایش ظرفیت انتقال پیشنهاد شده است. برای رویارویی با این بحران در آینده نه فقط استفاده کامل از ابعاد فیزیکی معروف مانند فرکانس یا طول موج، دامنه، فاز، قطبش و زمان بسیار مطلوب می‌باشد، بلکه باید از درجات آزادی دیگری مانند ساختار فضایی نور نیز بهره‌مند شد. ظرفیت یا پهنای باند یک رسانه انتقال داده معمولاً  $2 \times 10^9$  باند مورد نیاز یک فرستنده بیشتر است که باید بین کاربران مختلف به اشتراک گذاشته شود. برای این کار در سال‌های اخیر از تکنیک مالتی‌پلکسینگ (Multiplexing)

بسیار استفاده می‌شود. تکنیک مالتی‌پلکسی‌نگ این امکان را به وجود می‌آورد که به طور همزمان چند سیگنال مختلف از یک خط عبور داده شود و از ظرفیت رسانه به صورت بهینه استفاده شود. تکنیک‌های مالتی‌پلکسی‌نگ عبارتند از: مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم طول موج (WDM)، مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم فرکانس متعامد (OFDM)، مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم زمان اپتیکی (OTDM)، مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم قطبش (PDM) و مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم فضا (SDM). در بین تکنیک‌های تسهیم‌سازی، تکنیک مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم فضای با بهره‌گیری از بعد ساختار فضایی عرضی باریکه‌های نوری، بسیار مورد توجه قرار دارد. فیبرهای چند حالتی و چند هسته‌ای موفقیت‌های زیادی در تکنیک مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم فضا برای افزایش کارایی ظرفیت انتقال اپتیکی در فیبر به دست آورده‌اند.

تکنیک مالتی‌پلکسی‌نگ تقسیم فضا با تمرکز بر روی ساختار فازی فضایی باریکه‌های نوری، که به تکانه زاویه‌ای مداری چندگانه نیز معروف است، در بهبود ظرفیت انتقال در ارتباطات فضای آزاد و ارتباطات اپتیکی در فیبر نوری کارایی خود را نشان داده است. تقریباً در تمام این تکنیک‌ها از تکانه زاویه‌ای مداری صحیح استفاده شده است. یک ویژگی متمایز تکانه زاویه‌ای مداری، بیکران بودن و متعامد بودن ذاتی مقادیر بارهای توپولوژیکی هست. از اینرو با تسهیم باریکه‌های حامل تکانه زاویه‌ای مداری حامل داده می‌توان ظرفیت انتقال را افزایش داد.

## ۴ مراجع

## مراجع

- [1] P. Polimenoa, A. Magazzub, M. Antonia, F. Pattia, R. Saijaa, C.D.E. Boschid, M.G. Donatoa, P.G. Gucciardia, P.H. Jonese, G. Volpeb, and O.M. Maragoa, "Optical tweezers and their applications". *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 218: 131-150, 2018.
- [2] W. Miller, "Symmetry and Separation of Variables". Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977.
- [3] M. Woerdemann, "Structured Light Fields: Applications in Optical Trapping, Manipulation, and Organisation", Ph.D. dissertation, University of Münster, Germany, 2012.
- [4] A. Ashkin, J. Dziedzic, J. Bjorkholm, and S. Chu, "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles". *Optics Letter*, 11:288-290, 1986.
- [5] S. Chu, J. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. C. ۲۰۲۲ "Experimental observation of optically trapped atoms". *Physical Review Letters*, 57:314-317, 1986.

- [6] H. Rubinsztein-Dunlop, A. Forbes, M.V. Berry, M.R. Dennis, D.L. Andrews, M. Mansuripur, et al., "Roadmap on structured light". *Journal of Optics*, 19: 013001, 2017.
- [8] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, "Entanglement of the orbital angular momentum states of photons". *Nature (London)*, 412: 313–316, 2001.
- [8] H. Bechmann-Pasquinucci, and A. Peres, "Quantum cryptography with 3-state systems". *Physical Review Letters*, 85(15): 3313-3316, 2000.

## چشم انداز تعمیم یافته و معکوس نامساوی لونر- هینز

موسی شامحمدی\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

m.shamohammadi@pnu.ac.ir

### چکیده:

در ابتدا، چشم انداز تعمیم یافته‌ی چند متغیره از نگاشت‌های منظم عملگری را معرفی و به ارتباط آن با نامساوی لونر- هینز و نامساوی های عملگری می پردازیم. در پایان به ارتباط بین نگاشت‌های خطی کاملاً مثبت و اثر جزیی یک عملگر با چشم انداز تعمیم یافته‌ی چندمتغیره می پردازیم. همچنین چند نامساوی مرتبط با آن‌ها نیز ارائه خواهد شد.

کلمات کلیدی: چشم انداز تعمیم یافته، نامساوی لونر- هینز

### ۱ مقدمه

افروس<sup>۱</sup> [۱] تابع چشم انداز شامل دو عملگر جابجایی را بررسی و ثابت کرد که چشم انداز هر تابع محدب عملگری، محدب عملگری است. به طور کلی چشم انداز ناجابجایی تابع یک متغیره  $f$  در [۲] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{P}_f(A, B) = B^{1/2} f\left(B^{-1/2} A B^{-1/2}\right) B^{1/2}$$

و چشم انداز دو متغیره ( وابسته به  $f$  و  $h$  ) به صورت زیر تعمیم داده شده است:

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A, B) = h(B)^{1/2} f\left(h(B)^{-1/2} A h(B)^{-1/2}\right) h(B)^{1/2}$$

که در آن  $A$  عملگر هرمیتی و  $B$  عملگر مثبت اکید روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  با طیف در بازه‌ی بسته  $\mathbb{I}$  شامل ۰ است. به راحتی می توان ملاحظه کرد که

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A, B) = \mathcal{P}_f(A, h(B)).$$

برای هر تابع  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ، ترانهاد  $\tilde{f}$  از تابع  $f$  به صورت زیر تعریف می شود: [۵]

$$\tilde{f}(x) = x f(x^{-1}). \quad x > 0.$$

Author Corresponding\*

بدیهی است که ترانهاد  $\tilde{f}$  از یک تابع یکنوای عملگری  $f$  روی  $(0, \infty)$  نیز یکنوای عملگری می‌باشد. به‌طور مشابه، ترانهاد  $\tilde{f}$  از یک تابع محدب عملگری روی  $(0, \infty)$  خود نیز محدب عملگری است. توجه داشته باشید که  $f$  تابع ضربی نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $t, s > 0$  داشته باشیم:

$$f(ts) = f(t)f(s).$$

علاوه براین، اگر  $f$  تابع ضربی باشد، آنگاه برای هر  $\lambda > 0$  و  $A \in B(\mathcal{H})^+$  داریم:

$$f(\lambda A) = f(\lambda)f(A).$$

در این مقاله معکوس نامساوی لونر- هاینز برای چشم‌انداز توابع ضربی و یکنوای عملگری اثبات می‌شود.

**لم ۱.** فرض کنیم  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  تابع پیوسته و  $\tilde{f}$  ترانهاد  $f$  باشد. در این صورت برای عملگرهای  $A, B \in B(\mathcal{H})^+$  داریم:

$$\mathcal{P}_{\tilde{f}}(A, B) = \mathcal{P}_f(B, A).$$

## ۲ چشم‌انداز

**لم ۲.** فرض کنیم  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ضربی باشد و  $A, B \in B(\mathcal{H})^+$ . در این صورت

$$(i) \text{ برای هر } \lambda, \mu > 0, \mathcal{P}_f(A + \lambda, B + \mu) = f(\lambda)\mathcal{P}_f\left(\frac{A}{\lambda} + 1, B + \mu\right),$$

$$(ii) \text{ برای هر } \lambda, \mu > 0, \mathcal{P}_f(A + \lambda, B + \mu) = \tilde{f}(\mu)\mathcal{P}_f\left(A + \lambda, \frac{B}{\mu} + 1\right).$$

**قضیه ۱. [۴]** فرض کنیم  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  یک تابع عملگری خطی و ضربی غیرثابت باشد و  $A, B, C, D \in B(\mathcal{H})^+$  در این صورت عبارات زیر هم‌ارز هستند:

$$(i) \quad A \leq B \text{ و } C \leq D$$

$$(ii) \text{ برای هر } \lambda, \mu > 0, \mathcal{P}_f(A + \lambda, C + \mu) \leq \mathcal{P}_f(B + \lambda, D + \mu)$$

$$(iii) \text{ برای هر } s, t > 0, \mathcal{P}_f(sA + 1, tC + 1) \leq \mathcal{P}_f(sB + 1, tD + 1)$$

## ۳ چشم‌انداز تعمیم یافته و نامساوی لونر- هاینز

یادآوری می‌کنیم که برای تابع پیوسته‌ی حقیقی  $h > 0$  چشم‌انداز تعمیم یافته‌ی دو متغیره (وابسته به  $f$  و  $h$ )، با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A, B) = h(B)^{1/2} f(h(B)^{-1/2} A h(B)^{-1/2}) h(B)^{1/2}$$

که در آن  $A$  عملگر هرمیتی و  $B$  عملگر وارون‌پذیر مثبت روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  با طیف در بازه‌ی بسته می‌باشند. در این بخش، معکوس نامساوی لونر- هاینز از دید<sup>۲۵</sup> چشم‌انداز تعمیم یافته‌ی توابع ضربی و یکنوای عملگری را به‌دست می‌آوریم [۴].



**قضیه ۲.** اگر  $A \leq B$ ،  $C \leq D$  و  $f$  و  $h$  توابع یکنوای عملگری باشند، آنگاه

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A, C) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(B, D).$$

**تعریف ۱.** فرض کنیم  $F : \mathcal{D}_+^n \rightarrow B(\mathcal{H})$  یک نگاشت منظم باشد. چشم‌انداز تعمیم یافته  $\mathcal{P}_{F\Delta h}$  (وابسته به  $F$  و  $h$ ) یک نگاشت تعریف شده با دامنه‌ی  $\mathcal{D}_+^{n+1}$  برای عملگرهای مثبت اکید  $A_1, \dots, A_n$  و  $B$  روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{F\Delta h}(A_1, \dots, A_n, B) \\ = h(B)^{1/2} F \left( h(B)^{-1/2} A_1 h(B)^{-1/2}, \dots, h(B)^{-1/2} A_n h(B)^{-1/2} \right) h(B)^{1/2} \\ = h(B)^{1/2} \dots h(B)^{1/2}. \end{aligned}$$

**لم ۳.** فرض کنیم  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  و  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  توابع ضربی و عملگرهای  $A$  و  $B$  متعلق به  $B(\mathcal{H})^+$  باشند. در این صورت

$$(i) \text{ برای هر } \lambda, \mu > 0, \mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \lambda, B + \mu) = \tilde{f}(h(\mu)) \mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \lambda, \frac{B}{\mu} + 1),$$

$$(ii) \text{ برای هر } \lambda, \mu > 0, \mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \lambda, B + \mu) = f(\lambda) \mathcal{P}_{f\Delta h}(\frac{A}{\lambda} + 1, B + \mu).$$

**قضیه ۳.** فرض کنیم  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  و  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  توابع ضربی و یکنوای عملگری غیرثابت باشند و  $A, B, C, D \in B(\mathcal{H})^+$ . در این صورت عبارات زیر هم‌ارز هستند:

$$(i) \quad A \leq B \text{ و } C \leq D$$

$$(ii) \text{ برای هر } \lambda, \mu > 0, \mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \lambda, C + \mu) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(B + \lambda, D + \mu)$$

$$(iii) \text{ برای هر } s, t > 0, \mathcal{P}_{f\Delta h}(sA + 1, tC + 1) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(sB + 1, tD + 1)$$

**اثبات.** با استفاده از قضیه ۲، هم‌ارزی‌های  $(i) \Leftarrow (ii)$  و  $(ii) \Leftarrow (iii)$  به‌دست می‌آیند.

$(i) \Leftarrow (ii)$  : با توجه به قسمت  $(ii)$  و قسمت  $(i)$  از لم ۳ داریم:

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \lambda, \frac{C}{\mu} + 1) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(B + \lambda, \frac{D}{\mu} + 1).$$

در نامساوی فوق هرگاه  $\mu \rightarrow \infty$ ، نامساوی  $\mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \lambda, 1) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(B + \lambda, 1)$  به‌دست می‌آید. از این‌رو داریم:

$$h(1)f(h(1)^{-1}(A + \lambda)) \leq h(1)f(h(1)^{-1}(B + \lambda)).$$

که از آن نامساوی  $\tilde{f}(h(1))f(A + \lambda) \leq \tilde{f}(h(1))f(B + \lambda)$  به‌دست می‌آید. از آنجایی که برای هر  $\lambda > 0$  داریم:  $\tilde{f}(h(1)) > 0$ ، در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(A + \lambda) \leq f(B + \lambda).$$

بنابراین  $A \leq B$  به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر، با استفاده از قسمت  $(ii)$  و قسمت  $(iii)$  : لم ۳ مشاهده می‌کنیم که

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(\frac{A}{\lambda} + 1, C + \mu) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(\frac{B}{\lambda} + 1, D + \mu).$$

هرگاه  $\lambda \rightarrow \infty$ ، برای هر  $\mu > 0$  نامساوی  $\tilde{f}(h(C + \mu)) \leq \tilde{f}(h(D + \mu))$  را به دست می آوریم. ملاحظه می کنیم که  $\tilde{f} \circ h$  یکنوازی عملگری بوده و همچنین مستلزم این است که  $C \leq D$ .  
(iii)  $\Leftarrow$  (ii) : با توجه به قسمت (iii) و لم ۳ داریم:

$$f(s)\tilde{f}(h(t))\mathcal{P}_{f\Delta h}(A + \frac{1}{s}, C + \frac{1}{t}) \leq f(s)\tilde{f}(h(t))\mathcal{P}_{f\Delta h}(B + \frac{1}{s}, D + \frac{1}{t}).$$

با در نظر گرفتن  $\lambda = \frac{1}{s}$  و  $\mu = \frac{1}{t}$  و تقسیم هردو طرف به  $f(s)\tilde{f}(h(t)) > 0$ ، قسمت (ii) استنتاج می شود.  $\square$

**قضیه ۴.** [۳] فرض کنیم  $\Phi: B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$  نگاشت خطی کاملاً مثبت بین عملگرهای روی فضای هیلبرت با بعد متناهی و  $F: D_+^n \rightarrow B(\mathcal{H})$  نگاشت منظم و مقعر باشد. اگر نگاشت  $\mathcal{P}_F$ ،  $-(n+1)$  یکنوا باشد و  $h$  مقعر باشد به طوری که  $h(0) = 0$ ، آنگاه

$$\mathcal{P}_{F\Delta h}(\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_n), \Phi(B)) \geq \Phi(\mathcal{P}_{F\Delta h}(A_1, \dots, A_n, B)). \quad (1)$$

**نتیجه ۱.** فرض کنیم  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  یک سیستم دوقسمتی از فضاهای هیلبرت با بعد متناهی  $\mathcal{H}_1$  و  $\mathcal{H}_2$  باشد. اگر  $F: D_+^n \rightarrow B(\mathcal{K})$  نگاشت منظم و محدب و  $h$  حافظ اثر جزئی روی  $\mathcal{H}_1$  باشد، آنگاه برای عملگرهای  $(A_1, \dots, A_n, B)$  متعلق به  $D_+^{n+1}$  داریم:

$$\mathcal{P}_{F\Delta h}(\text{Tr}_2 A_1, \dots, \text{Tr}_2 A_n, \text{Tr}_2 B) \leq \text{Tr}_2 \mathcal{P}_{F\Delta h}(A_1, \dots, A_n, B).$$

## مراجع

- [1] Effros E. G., *A matrix convexity approach to some celebrated quantum inequalities*. Proc. Natl. Acad. Sci. U S A, vol. 4, pp. 1006–1008, 2009.
- [2] Effros E. G. and Hansen F., *Non-commutative perspectives*. Ann. Funct. Anal., vol. 2, pp. 74–79, 2014.
- [3] Nikoufar I. and Shamohammadi M., *Generalized perspective of functions of several variables*. Mathematical Communications., vol. 23, pp. 1–8, 2018.
- [4] Nikoufar I. and Shamohammadi M., *The converse of Loewner–Heinz inequality via perspective*. Linear and Multilinear Algebra., vol. 66, 243–249, 2018.
- [5] Uchiyama M. and Yamazaki T., *A converse of Loewner–Heinz inequality and applications to operator means*. J. Math. Anal. Appl., vol 413, pp. 422–429, 2014.

# تحلیل عددی معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری زمانی کلاین گوردون دوبعدی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی

سید محمود ضابط‌زاده\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷ تهران، ایران،

zabetzadeh@pnu.ac.ir

**چکیده:** در این تحقیق یک روش عددی برای مدل با مشتقات کسری زمانی کلاین گوردون دوبعدی ارائه خواهد شد. لذا بدون گسسته سازی زمانی و با استفاده از روش بدون شبکه کانسای سراسری (زمانی- مکانی) جواب‌های عددی معادله در نقاط میدانی سه بعدی به یکباره به دست می‌آید. برای تقریب مشتق کسری کاپوتو موجود در معادله از روش تقریبی انتگرال گیری گاوس ژاکوبی استفاده می‌شود. نهایتاً روش پیشنهادی توسط مثال عددی آزموده می‌شود. **کلمات کلیدی:** معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری زمانی کلاین گوردون، مشتق کسری کاپوتو، روش کانسای مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی، تقریب انتگرالی گاوس ژاکوبی.

## ۱ مقدمه و معرفی مدل

در دهه‌های اخیر فرمول‌بندی بسیاری از فرآیندهای طبیعی غیرعادی و نامتعارف توسط حسابان کسری بسیار دقیق‌تر انجام پذیرفته و این امر باعث علاقه‌مندی روز افزون محققان به بررسی و گسترش مدل‌های با مشتقات کسری شده است. یک نمونه از این مدل‌ها که بسیار مورد توجه قرار گرفته، معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری زمانی کلاین گوردون دوبعدی می‌باشد که به صورت زیر معرفی می‌شود [۱]:

$$\begin{aligned} u_{tt} + {}^C_0 D_t^\gamma u &= c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن،  $\Omega$  یک دامنه بسته و کردان‌دار در  $\mathbf{R}^2$  با مرز  $\partial\Omega$ ،  $c$  سرعت انتشار موج،  $\Delta$  به عملگر لاپلاس دوبعدی اشاره داشته و  ${}^C_0 D_t^\gamma u$  مشتق کسری کاپوتو بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^C_0 D_t^\gamma u(x, y, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

از آنجایی که یافتن جواب تحلیلی برای اغلب معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری دشوار و یا غیرممکن است؛ به دست آوردن جواب عددی برای آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. در این تحقیق با استفاده از روش بدون شبکه کانسای سراسری مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی جواب‌های تقریبی مناسب برای مدل بیان شده ارائه می‌کنیم.

## ۲ روش بدون شبکه کانسای زمانی - مکانی سراسری

روش کانسا یکی از معروفترین روش‌های بدون شبکه می‌باشد. این روش مبتنی بر فرم قوی معادلات حاکم بر مسئله و برای اولین بار توسط کانسا ارائه شد [۲]. از سوی دیگر میرز ایده نقاط زمانی - مکانی نامتقارن را برای روش کانسا پیشنهاد داد [۳]. در اینجا این فرآیند را برای حل معادله (۱) (بدون گسسته سازی زمانی) به کار خواهیم گرفت. لذا، دامنه سه بعدی  $\Omega_{new} = \Omega \times [0, T]$  به عنوان دامنه جدید زمانی - مکانی در نظر گرفته می‌شود. اکنون یک مجموعه از نقاط پراکنده زمانی - مکانی  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N = \{(x_i, y_i, t_i)\}_{i=1}^N \in \overline{\Omega_{new}}$  را به عنوان دامنه گسسته شده مسئله یا مجموعه نقاط میدانی انتخاب می‌کنیم. همچنین فرض می‌شود مجموعه نقاط میدانی  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  قابل تفکیک به سه مجموعه مجزا باشد، یکی  $\chi_{t_0} = \{(x_i, y_i, 0) | (x_i, y_i) \in \Omega\}_{i=0}^{N_{t_0}}$  مجموعه نقاط اولیه،  $\chi_B = \{(x_i, y_i, t_i) | (x_i, y_i) \in \partial\Omega, 0 < t_i \leq T\}_{i=1}^{N_B}$  مجموعه نقاط مرزی و بقیه نقاط  $\chi_I = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N_I}$  مجموعه نقاط درونی؛ به طوری که  $N_I + N_B + 2N_{t_0} = N$ . اکنون تابع مجهول  $v \in \Omega_{new}$  را به صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی به مرکز نقاط میدانی می‌نویسیم:

$$u(\mathbf{x}) \approx \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (2)$$

که در آن،  $c_j$  ضرایب مجهول بوده و باید محاسبه شود و  $\varphi_j(r)$  توابع پایه‌ای شعاعی سه بعدی به مرکز نقاط میدانی  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^N$  می‌باشد و تنها متغیر آن  $r$  به صورت  $r = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + \epsilon^2(t - t_j)^2}$  تعریف می‌شود. با قرار دادن ترکیب خطی (۲) در معادله (۱) و به ازای نقاط درونی  $\mathbf{x}_i \in \chi_I$ ،  $i = 1, \dots, N_I$  به دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=1}^N [\varphi_{j,t}(\mathbf{x}_i) + {}^C D_t^\gamma \varphi_j(\mathbf{x}_i) - c^2 \Delta \varphi_j(\mathbf{x}_i)] c_j = F(\mathbf{x}_i) \quad , i = 1, \dots, N_I. \quad (3)$$

اکنون برای محاسبه مشتق کسری کاپوتوی توابع  $({}^C D_t^\gamma \varphi_j(\mathbf{x}_i))$  از تقریب انتگرال گیری گاوس ژاکوبی استفاده کنیم.

### ۱.۲ تقریب مشتق کسری کاپوتو توسط انتگرال گیری گاوس ژاکوبی

برای محاسبه انتگرال  $\int_{-1}^1 (1-z)^\alpha (1+z)^\beta f(z) dz$  که در آن، تابع  $f$  به اندازه کافی هموار و نامنفرد بر  $[-1, 1]$  می‌باشد، فرمول انتگرال گیری عددی گاوس ژاکوبی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\int_{-1}^1 (1-z)^\alpha (1+z)^\beta f(z) dz \approx \sum_{k=1}^n w_k \cdot f(z_k),$$

که در آن،  $z_k$  ها ریشه‌های ساده چند جمله‌ای ژاکوبی  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  بوده و  $w_k$  ضرایب (وزن‌ها) می‌باشند. به علاوه، این روش انتگرال گیری برای چند جمله‌ای‌های تا درجه  $2n-1$  دقیق است. اکنون با توجه به تعریف مشتق کسری کاپوتوی مرتبه  $0 < \gamma < 1$ ، برای تابع پایه‌ای شعاعی  $\varphi$  در فضای  $\mathbb{R}^3$  داریم:

$$\begin{aligned} ({}^C D_t^\gamma \varphi)(x, y, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \eta^{-\gamma} \frac{\partial \varphi(\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \epsilon^2(\tau-t_j)^2})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t-\eta} d\eta, \end{aligned}$$

که در آن  $\eta = t - \tau$  حال با استفاده از تغییر متغیر  $\eta = \frac{t}{2}(1 + \xi)$  به دست می آوریم:

$$({}_0^C D_t^\gamma \varphi)(x, y, t) = \frac{(\frac{t}{2})^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{-1}^1 (1+\xi)^{-\gamma} \frac{\partial \varphi(\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \epsilon^2(\tau-t_j)^2})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t-\frac{t}{2}(1+\xi)} d\xi,$$

که انتگرال حاصل  $(\int_{-1}^1 (1+\xi)^{-\gamma} f(\xi) d\xi)$  دارای ساختار انتگرال گیری گاوس ژاکوبی به ازای  $\alpha = 0$  و  $\beta = -\gamma$  می باشد و به کمک تقریب انتگرال گاوس ژاکوبی قابل محاسبه است. یعنی داریم:

$$({}_0^C D_t^\gamma \varphi)(x, y, t) \approx \frac{(\frac{t}{2})^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{k=1}^n w_k f(x, y, \xi_k),$$

با توجه به این که:

$$f(x, y, \xi) = \frac{\partial \varphi(\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \epsilon^2(\tau-t_j)^2})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t-\frac{t}{2}(1+\xi)}.$$

از سوی دیگر، برای اعمال شرایط اولیه و مرزی دیریکله مسئله، ترکیب خطی (۲) را به ازای نقاط اولیه و مرزی در شرایط (۱) جایگزین می کنیم. بنابراین به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N c_j \varphi(x_i, y_i, 0) &= 0, \quad i = 1, \dots, N_{t_0}, \\ \sum_{j=1}^N c_j \varphi_t(x_i, y_i, 0) &= h(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, N_{t_0}, \\ \sum_{j=1}^N c_j \varphi(x_i, y_i, t_i) &= g(x_i, y_i, t_i), \quad i = 1, \dots, N_B. \end{aligned} \quad (4)$$

با الحاق معادلات (۳) و (۴) دستگاه خطی مربعی  $N \times N$  به دست می آید. کلیه جواب های تقریبی معادله با حل یک دستگاه نتیجه خواهد شد.

### ۳ نتایج عددی

در این بخش با ارائه یک مثال، فرایند پیشنهادی در بخش قبل را می آزماییم. در اینجا از دو نوع تابع پایه ای شعاعی زیر استفاده می کنیم:

$$R_1(r) = (r^2 + c^2)^{2.5}, \quad R_2(r) = e^{-c^2 r^2},$$

که توابع  $R_1$  و  $R_2$  به ترتیب، توابع چندربعی تعمیم یافته<sup>۱</sup> و گاوسی<sup>۲</sup> نامیده می شوند. پارامتر  $c$  موجود در این توابع را پارامتر شکل می نامند. این عدد حقیقی تأثیر به سزایی در دقت جواب های عددی به دست آمده داشته و انتخاب بهینه آن اهمیت زیادی دارد. در این تحقیق از روش آزمون و خطا برای تعیین بهترین پارامتر شکل استفاده می کنیم. همچنین در محاسبه انتگرال های عددی به روش گاوس ژاکوبی از  $n = 5$  استفاده می شود. خطای جواب های عددی به دست آمده نیز توسط دو معیار خطای زیر سنجیده می شود:

$$\varepsilon_\infty = \|u(\mathbf{x}) - \hat{u}(\mathbf{x})\|_\infty, \quad RMSE = \frac{1}{\sqrt{N}} \|u(\mathbf{x}) - \hat{u}(\mathbf{x})\|_2,$$

<sup>۱</sup>Generalized MultiQuadratics(GMQ)

<sup>۲</sup>Gaussian(G)

که در آن،  $u(\mathbf{x})$  و  $\hat{u}(\mathbf{x})$  به ترتیب نشان دهنده جواب واقعی و جواب محاسباتی می باشند.  
مثال: معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری زمانی کلاین گوردون زیر را در نظر می گیریم:

$$u_{tt} + {}^C D_{\gamma}^t u = \Delta u(\mathbf{x}, t) + (2 + \frac{2}{\Gamma(3-\gamma)} t^{2-\gamma} + \frac{\pi^2}{2} t^2) \cos \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y, (x, y) \in [0, 1]^2, 0 < t \leq 1.$$

جواب واقعی مسئله  $u(x, y, t) = t^2 \cos \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y$  می باشد. شرایط مرزی و اولیه نیز از جواب واقعی مسئله استخراج می شود. با اجرای فرآیند پیشنهادی، خطای محاسباتی جواب های عددی با در نظر گرفتن دو مجموعه نقاط میدانی یکنواخت و غیریکنواخت در جدول های زیر گزارش شده است.

جدول ۱: خطای جواب های محاسبه شده به ازای  $N = 8000$  و توابع مختلف RBFs با توزیع یکنواخت نقاط میدانی.

| $R_2(r)$<br>$RMSE$      | $R_2(r)$<br>$\varepsilon_{\infty}$ | $R_1(r)$<br>$RMSE$      | $R_1(r)$<br>$\varepsilon_{\infty}$ | $\gamma$       |
|-------------------------|------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|----------------|
| $4.4866 \times 10^{-5}$ | $1.7471 \times 10^{-4}$            | $2.9793 \times 10^{-4}$ | $1.0553 \times 10^{-3}$            | $\gamma = 0.1$ |
| $4.4702 \times 10^{-5}$ | $1.3749 \times 10^{-4}$            | $2.6823 \times 10^{-4}$ | $1.0433 \times 10^{-3}$            | $\gamma = 0.5$ |
| $2.4253 \times 10^{-5}$ | $9.5315 \times 10^{-5}$            | $2.0335 \times 10^{-5}$ | $8.7668 \times 10^{-4}$            | $\gamma = 0.9$ |

جدول ۲: خطای جواب های محاسبه شده به ازای  $N = 8299$  و توابع مختلف RBFs با توزیع غیریکنواخت نقاط میدانی.

| $R_2(r)$<br>$RMSE$      | $R_2(r)$<br>$\varepsilon_{\infty}$ | $R_1(r)$<br>$RMSE$      | $R_1(r)$<br>$\varepsilon_{\infty}$ | $\gamma$       |
|-------------------------|------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|----------------|
| $6.2598 \times 10^{-5}$ | $3.8332 \times 10^{-4}$            | $1.4154 \times 10^{-4}$ | $8.4569 \times 10^{-4}$            | $\gamma = 0.1$ |
| $8.3380 \times 10^{-6}$ | $3.7416 \times 10^{-5}$            | $4.0490 \times 10^{-5}$ | $2.4072 \times 10^{-4}$            | $\gamma = 0.5$ |
| $4.5180 \times 10^{-6}$ | $2.6030 \times 10^{-5}$            | $1.5931 \times 10^{-5}$ | $6.8026 \times 10^{-5}$            | $\gamma = 0.9$ |

## مراجع

- [1] M. Saffarian and A. Mohebbi, "Numerical solution of two and three dimensional time fractional damped non-linear Klein–Gordon equation using ADI spectral element method", Applied Mathematics and Computation, 405, p.126182, 2021.
- [2] E.J. Kansa, "Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics - I", Comput. Math. Applic., 19(8/9), 127–145, 1990.
- [3] B. E. Myers, D. De. Iaca, D. Posa and L. De. Cesare, "Time Radial Basis functions", Computers and Mathematics with Applications 43, 539-549, 2002.

## محاسبه دیمتل فازی با تکنیک ضریب همبستگی دو بعدی و شواهد نفی شده در تحلیل مدیریت ریسک

مجید فروزان \*، عضو هیأت علمی گروه مدیریت، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

majidforuzan@pnu.ac.ir

علیرضا پاک گوهر، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

a\_pakgohar@pnu.ac.ir

**چکیده:** یکی از ویژگی‌های دیمتل این است که تجربه و دانش کارشناسان باید به طور کامل در نظر گرفته شود. با این حال، در کاربردهای عملی، به دلیل تفاوت در تجربیات تاریخی و نظرات ذهنی کارشناسان، عدم قطعیت‌های زیادی در فرآیند ارزیابی وجود دارد. برای حل این مشکل، یک روش دیمتل شواهدی فازی بهبود یافته بر اساس ضریب همبستگی دو بعدی و نفی تخصیص احتمال پایه در این مقاله پیشنهاد شده است. روش جدید از ضریب همبستگی دو بعدی برای محاسبه همبستگی بین ارزیابی‌های مختلف کارشناسان در جهت‌های افقی و عمودی استفاده می‌کند تا یک همبستگی کلی به دست آید و آن را به اعتبار کلان و وزن کارشناسان تبدیل می‌کند. سپس، برای ساخت نفی تخصیص احتمال پایه بر اساس ارزیابی‌های فازی، از اندازه‌گیری عدم قطعیت کل و نفی نفی تخصیص احتمال پایه در چارچوب نظریه شواهد برای مقابله با عدم قطعیت ارزیابی استفاده می‌شود و سپس ارزیابی‌ها وزن‌دهی و ترکیب می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** دیمتل، نفی تخصیص احتمال پایه، ضریب همبستگی دو بعدی، دیمتل فازی،

### ۱ مقدمه

روش دیمتل یک تکنیک مدل‌سازی ساختاری است که برای تحلیل روابط علت و معلولی بین اجزای یک سیستم استفاده می‌شود. این روش توسط فونتلا و گابوس در سال ۱۹۷۱ معرفی شد و به طور گسترده‌ای برای حل مسائل پیچیده جهانی در زمینه‌های علمی، سیاسی و اقتصادی به کار گرفته شده است [۱، ۲].

روش‌های مختلفی برای اجرای تکنیک دیمتل (روش تحلیل و تصمیم‌گیری با استفاده از تکنیک‌های تحلیل شبکه) وجود دارد که هر یک به نوعی به بهبود دقت و کارایی این روش کمک می‌کنند. در اینجا به برخی از این روش‌ها و تکنیک‌ها اشاره می‌شود [۲، ۳]:

۱. دیمتل کلاسیک : این روش به طور سنتی برای تحلیل روابط بین عوامل مختلف استفاده می شود. در این روش، کارشناسان به ارزیابی تأثیرات متقابل بین عوامل می پردازند و سپس با استفاده از ماتریس تأثیر و تأثیرپذیری، روابط بین عوامل را تحلیل می کنند.
۲. دیمتل مبتنی بر AHP : در این روش، از تکنیک تحلیل سلسله مراتبی (AHP) برای تعیین وزن عوامل استفاده می شود. این ترکیب به محققان این امکان را می دهد که به طور دقیق تری اولویت بندی عوامل را انجام دهند و تأثیرات متقابل آن ها را تحلیل کنند.
۳. دیمتل فازی : در این روش، عدم قطعیت های موجود در ارزیابی های کارشناسان با استفاده از منطق فازی مدیریت می شود. این تکنیک به ویژه در شرایطی که نظرات کارشناسان متفاوت است، به بهبود دقت نتایج کمک می کند.
۴. دیمتل مبتنی بر نظریه شواهد (Dempster-Shafer): این روش از نظریه شواهد برای ترکیب نظرات کارشناسان استفاده می کند. با استفاده از این تکنیک، می توان عدم قطعیت های موجود در ارزیابی ها را به طور مؤثرتری مدیریت کرد و نتایج دقیق تری به دست آورد.
۵. دیمتل ترکیبی : در این روش، دیمتل با سایر تکنیک های تصمیم گیری چندمعیاره مانند TOPSIS یا VIKOR ترکیب می شود. این ترکیب به محققان این امکان را می دهد که از مزایای هر دو روش بهره برداری کنند و نتایج بهتری به دست آورند.
۶. دیمتل مبتنی بر شبکه های عصبی : در این روش، از شبکه های عصبی برای تحلیل و پیش بینی روابط بین عوامل استفاده می شود. این تکنیک می تواند به شناسایی الگوهای پیچیده و روابط غیرخطی کمک کند.
۷. دیمتل با استفاده از الگوریتم های ژنتیک : این روش از الگوریتم های ژنتیک برای بهینه سازی وزن ها و روابط بین عوامل استفاده می کند. این تکنیک می تواند به بهبود دقت و کارایی تحلیل ها کمک کند.
۸. دیمتل با استفاده از تحلیل خوشه ای : در این روش، از تحلیل خوشه ای برای گروه بندی عوامل مشابه استفاده می شود. این تکنیک می تواند به شناسایی الگوهای مشترک و روابط بین عوامل کمک کند.

## ۲ روش کار مدل همبستگی دوگانه دیمتل

- ضریب همبستگی دو بعدی روش سنتی آزمایشگاه ارزیابی و تصمیم گیری دیمتل را با ارائه روشی جامع تر و دقیق تر برای ارزیابی روابط و تأثیرات بین عوامل یا معیارهای مختلف بهبود می بخشد. در اینجا چند نکته کلیدی در مورد بهبود روش دیمتل با استفاده از DCC-2 آورده شده است [۳]:
۱. اندازه گیری همبستگی افقی و عمودی: DCC-2 امکان ارزیابی همبستگی ها در ابعاد افقی و عمودی را فراهم می کند. این بدان معناست که می تواند روابط بین ارزیابی های مختلف کارشناسان (افقی) و همچنین روابط بین خود معیارها (عمودی) را ثبت کند. این دیدگاه دوگانه به درک چگونگی تأثیرگذاری ارزیابی های مختلف بر یکدیگر و چگونگی ارتباط آنها با کل سیستم کمک می کند.
  ۲. مدیریت تفاوت های ارزیابی کارشناسان: روش های سنتی دیمتل ممکن است با تغییرات در نظرات کارشناسان به دلیل ماهیت ذهنی آنها مشکل داشته باشند. DCC-2 ۲۱۳ ثله را با کمیسازی همبستگی بین ارزیابی های مختلف کارشناسان حل می کند که به تعادل تأثیر نظرات مختلف کمک می کند.

این منجر به نمایشی قابل اعتمادتر و دقیقتر از ارزیابی های کلی می شود.

۳. بهبود ارزیابی اعتبار: با محاسبه یک ضریب همبستگی کلی،  $2-DCC$  -۲ میتواند ارزیابیهای کارشناسان را به یک نمره اعتبار کلان تبدیل کند. این نمره نشاندهنده قابلیت اطمینان ورودی هر کارشناس بر اساس همبستگیهای مشاهده شده است و امکان رویکرد وزنی برای ادغام نظرات کارشناسان را فراهم میکند. این اعتبار نتایج حاصل از تحلیل دیمتل را افزایش میدهد.

۴. مدیریت بهبود یافته عدم قطعیت: ادغام  $2-DCC$  با نفی تخصیص احتمال پایه (BPA) امکان مدیریت بهتر عدم قطعیت در ارزیابی های کارشناسان را فراهم میکند. با کمی سازی عدم قطعیت و تضادها در ارزیابی ها، این روش میتواند چارچوبی قویتر برای تصمیمگیری فراهم کند، به ویژه در سناریوهای پیچیده که اطلاعات ناقص یا مبهم هستند.

۵. محاسبه جامع ماتریس تأثیر: روش بهبود یافته محاسبه یک ماتریس تأثیر جامع را که وابستگیهای بین عوامل را دقیقتر منعکس میکند، تسهیل میکند. این ماتریس برای شناسایی مهمترین عوامل در یک سیستم که هدف اصلی روش دیمتل است، حیاتی است.

## ۱.۲ مراحل اصلی روش دیمتل با استفاده از $2-DCC$ :

مراحل اصلی روش دیمتل با استفاده از  $2-DCC$  به شرح زیر است

جمع آوری داده ها: ابتدا نظرات کارشناسان در مورد روابط بین عوامل مختلف جمع آوری می شود. این نظرات معمولاً به صورت ماتریس ارزیابی می شوند.

در این روش مراحل زیر انجام می شود:

- تعیین عوامل: ابتدا عوامل یا متغیرهایی که می خواهیم بررسی کنیم را شناسایی می نماییم.
- نظرسنجی از کارشناسان: از کارشناسان بخواهید تا نظرات خود را در مورد روابط بین این عوامل ارائه دهند. این نظرات معمولاً به صورت مقیاس عددی (مثلاً ۰ تا ۴) جمع آوری می شوند.

محاسبه ضریب همبستگی دو بعدی  $2-DCC$

برای محاسبه همبستگی بین ارزیابی های مختلف کارشناسان در دو بعد (افقی و عمودی) استفاده می شود. این ضریب به ما کمک می کند تا ارتباطات بین ارزیابی های مختلف را بهتر درک کنیم و وزن های کارشناسان را بر اساس اعتبار ارزیابی هایشان تعیین کنیم.

ساختاردهی به ماتریس ارزیابی: با استفاده از  $2-DCC$ ، ماتریس ارزیابی به یک ماتریس نهایی تبدیل می شود که در آن وزن های کارشناسان لحاظ شده است.

برای ایجاد ماتریس مقایسه ابتدا بر اساس نظرات کارشناسان، یک ماتریس مقایسه ( $A$ ) ایجاد می کنیم که در آن هر عنصر  $a_{ij}$  نشان دهنده تأثیر عامل  $i$  بر عامل  $j$  است.

محاسبه ماتریس تأثیرات: با استفاده از ماتریس نهایی، ماتریس تأثیرات کلی بین عوامل محاسبه می شود. این ماتریس نشان دهنده میزان تأثیر هر عامل بر دیگر عوامل است.

برای محاسبه  $2-DCC$  از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$2 - DCC = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \bar{a}_i)(a_{ji} - \bar{a}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{ij} - \bar{a}_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_{ji} - \bar{a}_j)^2}} \quad (1)$$

که در آن:  $\bar{a}_i$  و  $\bar{a}_j$  میانگین‌های ردیف و ستون ماتریس  $A$  هستند.

در نهایت، با استفاده از ماتریس تأثیرات، می توان اهمیت و اولویت هر عامل را در سیستم مشخص کرد.  
- محاسبه وزن‌ها: با استفاده از  $2-DCC$  وزن‌های کارشناسان را محاسبه می شود. این وزن‌ها می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند:  $w_i = \frac{2-DCC_i}{\sum_{j=1}^m 2-DCC_j}$  که در آن  $w_i$  وزن کارشناس  $i$  و  $m$  تعداد کارشناسان است.  
در نهایت برای ساخت ماتریس، با استفاده از وزن‌های محاسبه شده، ماتریس تأثیرات کلی ( $T$ ) را به صورت زیر محاسبه می کنیم:  $T = W \cdot A$  که در آن  $W$  ماتریس وزن‌های کارشناسان و  $A$  ماتریس ارزیابی است.

### ۳ نتایج

استفاده از ضریب همبستگی دو بعدی ( $2-DCC$ ) به محققان این امکان را می‌دهد که روابط و تأثیرات بین عوامل مختلف را به طور دقیق‌تری ارزیابی کنند. این روش به‌ویژه در شرایطی که نظرات کارشناسان متفاوت است، به تعادل و اعتبار نتایج کمک می‌کند. ترکیب  $2-DCC$  با نفی تخصیص احتمال پایه (BPA) به محققان کمک می‌کند تا عدم قطعیت‌های موجود در ارزیابی‌های کارشناسان را بهتر مدیریت کنند. این امر به کاهش تضادها و افزایش دقت در نتایج نهایی منجر می‌شود. این روش به محققان اجازه می‌دهد تا ماتریس تأثیر جامع‌تری را محاسبه کنند که روابط بین عوامل را به‌طور دقیق‌تری نشان می‌دهد. این ماتریس برای شناسایی عوامل کلیدی و اولویت‌بندی آن‌ها در فرآیند تصمیم‌گیری بسیار مهم است.

### مراجع

- [1] Alinezhad, A., Khalili, J. (2019). DEMATEL Method. In: New Methods and Applications in Multiple Attribute Decision Making (MADM). International Series in Operations Research & Management Science, vol 277. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15009-9\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15009-9_15)
- [2] Falatoonitoosi, E., Maxwell Scientific Organization, Leman, Z., Sorooshian, S., & Salimi, M. (2013). Decision-Making trial and Evaluation laboratory. In Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology (Vol. 5, Issue 13, pp. 3476–3480) . <https://maxwellsci.com/print/rjaset/v5-3476-3480.pdf>
- [3] Liu, Y., Tang, Y., Yang, Z. et al. Improved fuzzy evidential DEMATEL method based on two-dimensional correlation coefficient and negation evidence. Soft Comput 27, 11177–11192 (2023). <https://doi.org/10.1007/s00500-023-08748-y>



## تأثیرات آموزش به روش یادگیری معکوس بر تفکر خلاق و اضطراب ریاضی

مریم فضل الهی \*

گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران.

Email: m\_fazlolahi@pnu.ac.ir

چکیده. پژوهش حاضر مروری بر فن‌آوری یادگیری معکوس می‌کند و باهدف تحلیل ویژگی‌های اصلی آن، اثربخشی راهبرد یادگیری معکوس بر تفکر خلاق و اضطراب ریاضی فراگیران را تعیین می‌نماید. این مطالعه نشان می‌دهد که تأثیر متقابل بین آموزش معکوس، تفکر خلاق و اضطراب ریاضی، رابطه پیچیده‌ای را نشان می‌دهد که در آن روش‌های تدریس نوآورانه می‌تواند مشارکت و خلاقیت دانش‌آموز را افزایش دهد و درعین حال به‌طور بالقوه برخی از اضطراب‌های مرتبط با ریاضیات را کاهش دهد.

واژه‌های کلیدی: یادگیری معکوس، تفکر خلاق، اضطراب ریاضی .  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 97D40, 97B99, 97C40.

### ۱. مقدمه

ریاضیات، نقش مهمی در پیشبرد توسعه افراد و جامعه ایفا می‌کند. عملکرد فراگیران و بررسی یادگیری ریاضیات آن‌ها در رشته‌های علوم، تکنولوژی، مهندسی و ریاضی (STEM) ضروری و موردتوجه برنامه ریزان درسی است لذا بازبینی و بهبود فرآیند یاددهی و یادگیری ریاضی، موضوعی بااهمیت می‌باشد. نظام آموزشی امروز، در موقعیتی به فعالیت‌های خود ادامه می‌دهند که تغییرات سریع علم و فناوری بر تمام جنبه‌های زندگی انسان سایه افکنده و بر آن تأثیر گذاشته است. دیگر نمی‌توان با طرز تلقی گذشته به فراگیران و تربیت آن‌ها نگریست. اگر قرار است فراگیران خوب تربیت شوند و شهروندان مفید، مبتکر و خلاق باشند، باید تحولی در نظام تعلیم و تربیت به‌ویژه روش‌های آموزشی به وجود آورد. برنامه‌های محل‌های آموزشی باید تأکید خود را بر روش‌هایی متمرکز کنند که فراگیران بجای ذخیره‌سازی اطلاعات، خلاقیت خود را از طریق نظم فکری پرورش دهند، زیرا در فرآیند اندیشه منظم است که تحول در ساختار اندیشه ایجاد می‌شود و خلاقیت رشد می‌کند [۱]. بهترین روش آموزش ریاضیات این است که فراگیرنده مطالب را جذب و هضم کرده در ساخته‌ای ذهنی خود جای دهد. بر اثر ناتوانی در فهم ریاضیات است که فراگیرنده از این علم می‌ترسد. اگر معلم با اصول و مبانی هدف‌های آموزش و پرورش، ویژگی‌های فراگیران و نیاز آنان، روش‌ها و فنون تدریس و سایر مهارت‌های آموزشی آشنایی نداشته باشد، هرگز قادر نخواهد بود، زمینه شکوفایی استعداد شاگردانش را فراهم کند و آنان را برای زندگی در جامعه متحول امروز آماده سازد. بحث پیرامون روش تدریس ریاضیات، همواره مطرح بوده و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است.

### ۲. روش یادگیری معکوس

روش تدریس فعال یکی از روش‌های تدریس است که هدف اصلی در این روش این است که فراگیران در فرآیند آموزش پرجنب‌وجوش باشند. سه اصل آموزش این روش عبارت است از: یادگیری فعال، بهترین انگیزه و تسلسل مراحل. از معایب

\* سخنران.

این روش، وقتگیر بودن آن است که با به‌کارگیری روش یادگیری معکوس، باعث کاهش نواقص و افزایش مزایای روش فعال خواهد شد.

یادگیری معکوس انقلابی در حوزه آموزش است که توسط معلمان آمریکایی، جان برگمن و آرون سمز [۳] در سال ۲۰۱۲ ابداع شد. آن‌ها یادگیری معکوس را به‌عنوان محیطی تعریف می‌کنند که در آن هر کاری که به‌طور سنتی در کلاس انجام می‌شد اکنون در خانه انجام می‌شود و هر آنچه که به‌طور سنتی به‌عنوان تکلیف انجام می‌شد اکنون در کلاس انجام می‌شود.

تعریفی که برگمن، اورمایر و ویلی [۴] برای کلاس یادگیری ارائه می‌کنند، فرآیند جایگزینی آموزش مستقیم با فیلم و در نتیجه ایجاد انگیزه در فراگیران برای تمرکز بر فعالیت‌های یادگیری اصلی آن‌ها با معلمان خود در کلاس است. این روش به‌عنوان یک مدل آموزشی توصیف می‌شود که در آن مطالب سخنرانی که معمولاً در کلاس ارائه می‌شود، قبل از زمان کلاس به‌صورت آنلاین به فراگیران داده می‌شود. یادگیری معکوس رویکردی است که سخنرانی‌های درون کلاس را با فعالیت‌های عملی مشترک جایگزین می‌کند و این نیاز را دارد که فراگیران مطالب درسی را در زمان خود مرور کنند.

برگمن و سمز معتقدند که یادگیری معکوس یک تمرین آموزشی است که سخنرانی را از کل فضای یادگیری به فضای یادگیری فردی انتقال می‌دهد و فضای یادگیری باقیمانده را به یک محیط یادگیری پویا و تعاملی تبدیل می‌کند. علاوه بر این، تأثیرات کاربرد یادگیری معکوس به‌جای یادگیری سنتی بر جنبه‌های روان‌شناختی فراگیران مهم است. تحقیقات مختلف نشان داده است که الگوی یادگیری معکوس روشی مؤثر در زمینه آموزش است. بارزترین مزیت یادگیری معکوس، شاید ظرفیت افزایش زمان سپری‌شده برای رابطه چهره به چهره بین معلمان و فراگیران باشد. در مدل یادگیری معکوس، معلمان روش تدریس و یادگیری را تغییر می‌دهند، به این معنی که آنچه به‌طور سنتی در مدرسه انجام می‌شود، در خانه انجام می‌شود. فراگیران در خانه از طریق فیلم‌هایی که توسط معلمشان ارائه شده است یاد می‌گیرند و کلاس موقعیتی است که فرصت بیشتری برای تعامل و حل مشکلات دارد. توکر [۹] معتقد است که مدل یادگیری معکوس با تأثیرگذاری بر مشارکت، انگیزه و بهبود عملکرد تحصیلی، یادگیری فراگیران را تقویت می‌کند.

فراگیران می‌توانند در هر زمان و هر مکانی که بخواهند به ویدئوهای سخنرانی دسترسی داشته باشند. حقیقی و همکاران [۵] در مطالعه خود ثابت کردند که فراگیرانی که در یادگیری معکوس شرکت می‌کنند، بیشتر درگیر مطالب و دروس بودند و از یادگیری در این نوع کلاس لذت می‌بردند.

مزایایی که روش یادگیری معکوس برای تدریس به ارمغان می‌آورد به شرح زیر است: این روش با ریتم‌های یادگیری انعطاف‌پذیر است زیرا توضیحات نظری را می‌توان در هر زمان و مکانی مورد استفاده قرارداد. خودارزیابی با ارائه بازخورد در مورد پیشرفت و کیفیت کار را در فراگیران امکان‌پذیر می‌سازد که موجب می‌شود فراگیران مسئولیت یادگیری خود را بپذیرند. علاقه و انگیزه فراگیران برای یادگیری را افزایش می‌دهد. خلاقیت و تفکر انتقادی را در فراگیران پرورش می‌دهد. کارگروهی مشارکتی را توسعه می‌دهد [۷]. فراگیر در مشاهده تعداد دفعاتی که نیاز دارد ویدئوها را مشاهده نماید تا به درک مفهوم موردنظر برسد، آزاد است. فراگیران به یادگیرندگان مستقل تبدیل می‌شوند. اعتمادبه‌نفس فراگیران افزایش می‌یابد و ترس و استرس ناشی از عدم یادگیری، کاهش می‌یابد.

در رویکرد تدریس سنتی، معلمان در کلاس درس می‌دهند و فراگیران تمرین‌ها، بحث‌ها و تکالیف را کامل می‌کنند. یادگیری معکوس مدل متفاوتی است که از فراگیران می‌خواهد قبل از کلاس فیلم‌های درسی را تماشا کنند و کتاب‌های درسی را مطالعه کنند و در طول کلاس بحث، تمرین و تکالیف را انجام دهند. می‌توان انتظار داشت که یادگیری بیشتری انجام می‌شود. نگرش فراگیران با توجه به بهبود وضعیت یادگیری نسبت به ریاضیات بهبود می‌یابد. نقش معلم در این روش، هدایت یادگیری، تطبیق رویکردهای تدریس با نیازها و تهیه سناریوهای مختلف یادگیری است.

### ۳. اضطراب ریاضی

پیشرفت ریاضی فراگیران تحت تأثیر عوامل زیادی از جمله سن، جنسیت، سطح رشد، هوش، علایق و نیازها، محیط و معلمان، نگرش نسبت به ریاضیات، احساس خودکارآمدی، اضطراب، انگیزه، دانش از قبل موجود فراگیران است. اگرچه عوامل زیادی با پیشرفت ریاضی فراگیران مرتبط هستند، اضطراب ریاضی توجه بسیاری از محققان را به دلیل ارتباط آن با پیشرفت ریاضی به خود جلب کرده است. اضطراب ریاضی را این‌گونه تعریف می‌کنند: «موقعیتی که افراد در طول مدرسه یا زندگی روزمره تجربه می‌کنند، زمانی که قرار است یک مسئله ریاضی را حل کنند، با اعداد محاسباتی انجام دهند که باعث بروز استرس عاطفی یا نگرانی می‌شود» [۲]. به همین ترتیب، اضطراب ریاضی «به‌عنوان احساس تنش، دلهره یا ترس که در عملکرد ریاضی اختلال ایجاد می‌کند، تعریف می‌شود. اولین ابزار سیستماتیک برای ارزیابی اضطراب ریاضی، مقیاس

رتبه‌بندی اضطراب ریاضی بود که توسط ریچاردسون و سوین [۸] منتشر شد. در این آزمون، شرکت‌کنندگان خود را بر اساس سطح اضطرابی که در موقعیت‌های مختلف روزمره احساس می‌کنند، ارزیابی می‌کنند، مانند تلاش برای تنظیم مجدد صورتحساب رستوران زمانی که فکر می‌کنند هزینه بیش از حد دریافت کرده‌اند یا در آزمون ریاضی شرکت می‌کنند. احساس اضطراب تا حدودی می‌تواند تأثیر مثبتی بر عملکرد ریاضی فراگیران داشته باشد. با این حال، میزان بیش از حد اضطراب پس از یک نقطه مطلوب خاص، عملکرد ریاضی فراگیران را تضعیف می‌کند یا حتی باعث می‌شود فراگیران از مشاغل دانشگاهی یا حرفه‌ای که نیاز به ریاضیات دارند اجتناب کنند. بنابراین، برای ایجاد رفتارهای مثبت در فراگیران در درس ریاضی چه از نظر شناختی و چه از نظر عاطفی، باید اضطراب را در سطوح مطلوب نگه داشت. این به این دلیل است که میزان مطلوب اضطراب می‌تواند به افراد کمک کند تا احساس مطلوب کنند، تصمیم بگیرند، برای این تصمیمات انرژی تولید کنند و عملکرد خود را با استفاده از این انرژی افزایش دهند. تحقیقات قبلی نشان داده است که اضطراب ریاضی با سطح آمادگی فراگیران و پیشرفت آن‌ها مرتبط است. علاوه بر این، مشخص شده است که عواملی مانند جنسیت، مدرسه‌ای که فراگیران در آن تحصیل می‌کنند، سطح کلاس، رفتارهای معلم، تجربیات قبلی مدرسه و سوابق آموزشی والدین باعث ایجاد تفاوت معنادار بین اضطراب ریاضی دانش آموزان می‌شود. بکدمیر همچنین نشان داد که فراگیران با سطوح پایین اضطراب در ریاضیات در مقایسه با فراگیران با اضطراب عادی، زیاد یا خیلی زیاد، پیشرفت بهتری دارند [۲]. بنابراین، از معلمان انتظار می‌رود که سطوح و علل اضطراب ریاضی را که فراگیران احساس می‌کنند، تعیین کنند و اقدامات احتیاطی برای کاهش سطح اضطراب آن‌ها انجام دهند. می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش سطح اضطراب فراگیران نسبت به ریاضیات، پیشرفت ریاضی آن‌ها کاهش می‌یابد یا با کاهش سطح اضطراب، پیشرفت ریاضی آن‌ها افزایش می‌یابد. با این حال، این همبستگی را می‌توان برعکس تفسیر کرد و نشان داد که افزایش پیشرفت ریاضی می‌تواند اضطراب ریاضی فراگیران را کاهش دهد یا کاهش عملکرد ریاضی می‌تواند اضطراب ریاضی را افزایش دهد. بنابراین، می‌توان گفت که همبستگی بین اضطراب ریاضی و پیشرفت ماهیتی متقابل یا چرخه‌ای دارد.

به‌منظور افزایش پیشرفت ریاضی فراگیران از معلمان انتظار می‌رود اقداماتی را برای کاهش اضطراب ریاضی فراگیران انجام دهند. بنابراین معلمان ریاضی باید از سطوح اضطراب فراگیران خود، آگاه باشند و راهبردهای آموزشی متفاوتی را متناسب با نیازها و مهارت‌های آن‌ها انتخاب نمایند تا اضطراب ریاضی آن‌ها را به سطوح مطلوب کاهش دهند. برای این منظور، معلمان ریاضی ابتدا باید از رابطه منفی بین اضطراب ریاضی و پیشرفت آگاه باشند و با نگرش‌های صمیمانه و مراقبتی به فراگیران خود نزدیک شوند تا به آن‌ها کمک کنند بر اضطراب ریاضی خود غلبه کنند. از سوی دیگر، با توجه به ماهیت متقابل همبستگی بین این دو مورد، پیشرفت ریاضی فراگیران باید بهبود یابد تا از اضطراب ریاضی آن‌ها کاسته شود. بنابراین، به‌منظور بهبود پیشرفت ریاضی فراگیران، معلمان باید فراگیران خود را در درس ریاضی مشارکت دهند، از روش‌ها و تکنیک‌های آموزشی متفاوت استفاده کنند و فراگیران را تشویق کنند که باور کنند می‌توانند در درس ریاضی به موفقیت برسند. بنابراین سطح اضطراب خود را در سطح مطلوب نگه می‌دارند.

اضطراب ریاضی با به خطر انداختن فعالیت‌های مداوم در حافظه فعال، پردازش شناختی را مختل می‌کند. اگرچه علل اضطراب ریاضی مشخص نشده است، برخی از سبک‌های تدریس به‌عنوان عوامل خطر دخیل هستند. علاوه بر این، موارد اضطراب ریاضی ما عمدتاً بر اضطراب امتحان ریاضی متمرکز شده است که تنها یک بعد از اضطراب ریاضی است.

#### ۴. تفکر خلاق

یکی از اصول ماهیت علم این است که محصول خلاقیت و تخیل انسان است. ایده‌های علمی و پیشرفت‌های عمده‌ای مانند نظریه‌ها، قوانین، فرضیه‌ها، مدل‌ها، معادلات و سایر بازنمایی‌های بصری محصول استدلال، تخیل و تفکر خلاق دانشمندان است. خلاقیت به توانایی استفاده از تخیل برای تولید ایده‌های جدید، راه‌حل‌های بدیع، سؤالات نوآورانه و فرضیه‌های اکتشافی اشاره دارد. مطالعه خلاقیت سابقه طولانی دارد. بررسی تجربی خلاقیت در اواخر قرن بیستم آغاز شد [۱۰]. خلاقیت یکی از حوزه‌های اصلی آموزش علوم در نظر گرفته می‌شود. آموزش خلاقیت مستلزم طراحی آموزشی است که فرصت‌هایی را برای فراگیران فراهم کند تا خلاقیت آن‌ها ظاهر شود. چنین آموزشی به فراگیران کمک می‌کند تا نقش خلاقیت و تخیل را در انجام علم و تولید دانش علمی درک کنند، به‌ویژه زمانی که آموزش به‌صراحت بر نحوه استفاده دانشمندان از خلاقیت و تخیل در کار خود و نقش خلاقیت در انجام فرآیندها یا عمل‌های علمی خاص تمرکز دارد. مانند طراحی آزمایش‌ها، پیش‌بینی، نمایش داده‌ها و تجزیه و تحلیل داده‌ها. هنگامی که خلاقیت به‌کانون توجه تبدیل می‌شود، نگرش فراگیران نسبت به علم بهبود می‌یابد،

که به نوبه خود نقش اساسی در ترویج یادگیری علم ایفا می‌کند. هنگام در نظر گرفتن آموزش برای خلاقیت باید دو ادعا را در نظر گرفت: خلاقیت را می‌توان پرورش داد و همه دانش آموزان پتانسیل خلاق شدن را دارند. پرورش خلاقیت باید بر فرآیندی که برای ایجاد آن محصول استفاده می‌شود نیز تمرکز کند. در آموزش برای خلاقیت، روش‌های تدریس و محیط یادگیری باید در نظر گرفته شود. روش‌های تدریس که می‌توانند عملکرد خلاق فراگیران را افزایش دهند، باید سه ویژگی اصلی را داشته باشند: روانی، انعطاف‌پذیری و اصالت. برخی از روش‌های تدریس فرصت‌های یادگیری را برای فراگیران فراهم می‌کنند تا سه ویژگی خلاقیت را تمرین کنند. علاوه بر این، تکالیف با طراحی خوب می‌توانند به عنوان وسیله‌ای برای تقویت مهارت‌های تفکر خلاق فراگیران عمل کنند [۶]. فکر کردن به جایگزینی برای ابزارهای تجربی با استفاده از مواد روزمره می‌تواند تفکر خلاق را تقویت کند. علاوه بر این، تولید خلاق ایده‌ها نیازمند ذهن کنج‌گاو و تخیلی است. تکنیک‌های آموزشی وجود دارد که تخیل فراگیران را تقویت می‌کند. پرورش خلاقیت مستلزم محیطی است که در آن فراگیران انگیزه ایجاد ایده‌های خلاقانه داشته باشند و از اشتباه کردن نترسند. تصورات نادرست مدرسان در مورد خلاقیت و باورها در مورد ماهیت علم نقش اساسی در منصرف کردن آن‌ها از تدریس برای خلاقیت دارد. توصیه می‌کنیم برنامه‌ها و کارگاه‌های توسعه حرفه‌ای برای مدرسان طراحی شود تا نحوه آماده‌سازی فعالیت‌ها و استفاده از تکنیک‌های آموزشی که خلاقیت فراگیران را تقویت می‌کند، تسهیل کند. چنین فعالیت‌هایی باید به مدرسان کمک کند تا دانش، باورها و مهارت‌های لازم را برای طراحی فعالیت‌های آموزشی-خلاقیت بر اساس برنامه درسی و اجرای این طرح‌ها در کلاس‌های درس خود به دست آورند. تمرکز این برنامه‌ها باید بر کمک به مدرسان برای اتخاذ و تطبیق فعالیت‌های کلاس درس باشد که به فراگیران در تولید ایده، آزمایش ایده و یا توسعه ایده کمک می‌کند. در مورد مانع محدودیت زمانی، ما از تکنیک یادگیری معکوس می‌توانیم استفاده کنیم.

## ۵. نتیجه‌گیری

با آموزش صحیح و مؤثر فراگیران، آن‌ها می‌توانند به طور قابل‌توجهی به رشد و شکوفایی جامعه کمک کنند و سیستم آموزشی نیاز به روش‌های تدریس نوآورانه دارد که با تغییرات اجتماعی همسو باشد. روش یادگیری معکوس با اجازه دادن به فراگیران برای کشف مفاهیم مستقل قبل از کلاس، آن‌ها آماده می‌شوند تا در بحث‌ها و فعالیت‌های حل مسئله مشارکتی شرکت کنند که برای پرورش خلاقیت ضروری است. همچنین برخی از جنبه‌های اضطراب ریاضی را کاهش می‌دهد.

## مراجع

۱. ح. شعبانی، ح. مقامی، آ. تاثیر روش آموزش مسئله محور بر افزایش خلاقیت و پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پایه سوم راهنمایی شهر دلیجان، دانش و پژوهش در علوم تربیتی (۱۳۸۴)، .
2. Ashcraft, *Math Anxiety: Personal, Educational and Cognitive Consequences*, Current Directions in Psychological Science, **11** (2002), 181-185.
3. J. Bergmann, and A. Sams, *Flipp Your Classroom: Reach Every student in Every Class Every Day*, Eugene, Or: International Society for technology in Education, **10** (2012).
4. J. Bergmann, J. Overmyer, and B. Wilie, *The Flipped Class: Maths Vs. Reality-THE DaILY RIFF-Be Smarter*, About Education, **5** (2015).
5. H. Haghighi, M. Jafarigohar, H. Khoshsiman, and F. Vahdany. *Impact of flipped classroom on EFL learners, appropriate use of refusal: Achievement, participation, perception*, Computer Assisted Language Learning, **32** (2019) 261-293.
6. Kukliansky, I., Shosberger, I. , and Eshach, H. *Science teachers' voice on homework: Beliefs, attitudes, and behaviors*, International Journal of Science and Mathematics Education, **12** (2014).
7. F. Oromena, and M. Mosimege, *Effect of flipped classroom learning approach on mathematics achievement and interest among secondary school students*, Education and Information Technologies, **3** 2023.
8. F.C. Richardson, and R.M. Suinn, *The Mathematics Anxiety Rating Scle*, Journal of Counseling Psychology, **19** (1972) 551-554.
9. B. Tucker, *The Flipped Classroom*, Education Next, **12** (2012), 80-83.
10. Yager, S., Dogan, O., Hacieminoglu, E. , Yager, R. *The role of student and teacher creativity in aiding current reform efforts in science and technology education*, National Forum of Applied Educational Research Journal, **25** (2012) 1-24.

## تصحیح AIC اصلاح شده

مسعود فضلعلی پور ، عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
 mesud.fq@pnu.ac.ir

سیمین منصوری بروجنی ، عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
 s\_mansouri@pnu.ac.ir

**چکیده:** تصحیح استاندارد معیار اطلاعات اکائیک ( $AIC_c$ )، پیش‌بینی‌کننده‌های یکسانی را برای آموزش و تأیید فرض می‌کند و بنابراین خطای پیش‌بینی را برای پیش‌بینی‌کننده‌های تصادفی کم برآورد می‌کند. در این مقاله یک تصحیح شده برای مدل‌های رگرسیون که ترکیبی از پیش‌بینی‌کننده‌های تصادفی و ثابت است، ارائه می‌دهیم که معایب قبلی را نداشته باشد. **کلمات کلیدی:** انتخاب مدل، معیار اطلاعات اکائیک ( $AIC$ )،  $AIC_c$ ، تحلیل کوواریانس (ANCOVA). تصحیح AIC اصلاح شده.

### ۱. مقدمه

معیار اطلاعات ( $AIC$ ) یکی از معیارهای شناخته شده، برای انتخاب مدل‌های برازش داده شده می‌باشد. هورویت و تسای (۱۹۸۹) نشان دادند که علت این تمایل بیش از حد برازش در تقریب مجانبی است که برای استخراج  $AIC$  استفاده می‌شود. برای به دست آوردن تصحیح اریبی از  $AIC$ ، هورویت و تسای (۱۹۸۹) واگرایی کلبک-لیبلر را دقیقاً برای توزیع‌های نرمال، با این فرض که خانواده مدل‌های کاندید شامل مدل واقعی است، ارزیابی کردند. معیار حاصل  $AIC_c$  اغلب از رقبای خود بهتر عمل می‌کند (مک کواری و تسای، ۱۹۹۸) و به یک معیار استاندارد توصیه شده توسط بسیاری از محققین (به عنوان مثال، برنهام و اندرسون، ۲۰۰۲، ص ۶۶) تبدیل شده است. با این حال، فرضی که همیشه در به دست آوردن  $AIC_c$  مورد تأکید قرار نمی‌گیرد این است که مقادیر پیش‌بینی‌کننده در نمونه‌های آموزشی و اعتبارسنجی یکسان هستند. این فرض را فرض "Same-X" می‌نامند و در مقابل، بسیاری از کاربردهای انتخاب مدل تحت فرض "Random-X" قرار می‌گیرند. اگرچه تمایز Same-X و Random-X برای مدتی ناشناخته بود ولی تعمیم معیارهای انتخاب مدل استاندارد به Random-X مبحث جدیدتری است. در این مقاله، یک معیار اطلاعات جدید ارائه می‌دهیم که یک برآورد از معیار مبتنی بر کلبک-لیبلر (KL) برای مدل‌های رگرسیون است که حاوی ترکیبی دلخواه از پیش‌بینی‌کننده‌های Same-X و Random-X است. چنین مدل‌هایی شامل مدل تحلیل کوواریانس (ANCOVA) است.

در Same-X، معیار اطلاعات برابر با  $AIC_c$  است. تحت Random-X، معیار اطلاعات به معیار جدیدی منتهی می‌شود که آن را  $AIC_r$  می‌نامیم. ما از همان مدل عددی (هورویت و تسای، ۱۹۸۹) استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که  $AIC_c$  واقعاً برای Random-X مغرضانه است و احتمال بیشتری دارد که مدل‌هایی با تعداد بیش از اندازه متغیر مستقل، را نسبت به  $AIC_r$  انتخاب کند. این مقاله مکمل مقاله تیان و همکاران (۲۰۲۰) است، که چندین معیار انتخاب مدل را تحت

Random-X استخراج می کنند. تنها تفاوت بین RAIC با AICr این است که AICr عرض از مبدا را در نظر می گیرد. یک واقعیت قابل توجه این است که فوجیکوشی (۱۹۸۵) معیاری را برای انتخاب متغیرهای X در تحلیل همبستگی کانونی به دست آورد. این معیار معادل انتخاب بر اساس تفاوت های AICr است که در این مقاله به دست آمده است.

## ۲. AIC تصحیح شده برای Random-X

اگر مسئله پیش بینی y بر اساس x را در نظر بگیریم و فرض کنیم توزیع شرطی y به شرط x  $p(y|x)$  باشد، که در آن x و y به ترتیب بیانگر متغیرهای مستقل و پاسخ هستند. اگر، توزیع واقعی را با  $p(y|x)$  و توزیع کنترل را با  $q(y|x;\phi)$  نشان دهیم، بطوری که  $\phi$  نشان دهنده پارامترهای مدل است. (در این جا، x، y و  $\phi$  می توانند چند متغیره باشند). با استدلال های واگرایی کلبک-لیبلر (KL) به یک معیار انتخاب مدل بر اساس مقدار مورد انتظار  $-2\log q(y|x;\phi)$  میشود (آکائیک (۱۹۷۴)، هورویچ و تسای (۱۹۸۹) و مک کواری و تسای (۱۹۹۸)).

برای برآورد واگرایی KL، فرض کنید  $\phi^*$  برآوردی از  $\phi$  حاصل از نمونه آموزشی  $(x_*, y_*)$  و  $(x_0, y_0)$  نشان دهنده نمونه اعتبار سنجی باشند. هر دو نمونه از توزیع واقعی انتخاب شده اند، اما  $y_*$  و  $y_0$  به شرط  $(x_*, x_0)$  مستقل هستند یعنی  $p(y_*, y_0 | x_*, x_0) = p(y_* | x_*, x_0) \cdot p(y_0 | x_*, x_0)$ . بنابراین، فرض می کنیم

$$\Delta(X_0, X_*, y_*) = -2E_{y_0|x_0, x_*, y_*} [\log q(y_0 | x_0, \phi_*)] \quad (1)$$

بطوریکه  $E_{y_0|x_0, x_*, y_*}[\cdot]$  نشان دهنده مقدار مورد انتظار  $p(y_0 | x_0, x_*, y_*)$  است. برای توزیع های نرمال،  $q(y|x;\phi)$  را می توان از مدل زیراستخراج کرد.

$$y_{N \times 1} = X_{N \times M} \beta_{M \times 1} + \varepsilon_{N \times 1} \quad (2)$$

که در آن N حجم نمونه، M تعداد متغیرهای مستقل،  $\beta$  حاوی ضرایب رگرسیون،  $\varepsilon$  یک بردار تصادفی است، و بعد هر عبارت در زیر آن نشان داده شده است. عناصر  $\varepsilon$  متغیرهای تصادفی نرمال مستقل و با توزیع یکسان با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند. فرض کنید  $\beta^*$  و  $\sigma_*^2$  برآورد حداکثر درستمایی  $\beta$  و  $\sigma^2$  هستند که از نمونه  $(x_*, y_*)$  به دست آمده اند. پس:

$$\Delta(X_0, X_*, y_*) = N \log 2\pi + N \log \sigma_*^2 + \frac{E_{y_0|x_0, x_*, y_*} [\|y_0 - X_0 \beta_*\|^2]}{\sigma_*^2} \quad (3)$$

که در آن از استقلال شرطی  $(\beta_*, \sigma_*^2, y_0)$  به شرط  $(x_0, x_*, y_*)$  استفاده شده است. بطوریکه  $X_*$  و  $X_0$  هر دو به ابعاد  $N \times M$  و  $y_*$  و  $y_0$  به ابعاد  $N \times 1$  هستند.

فرض کنید که خانواده مدل های انتخابی شامل مدل واقعی است. بنابراین،  $y_0 = X_0 \beta + \varepsilon_0$ ، که در آن  $\varepsilon_0$  هم توزیع  $\varepsilon$  و مستقل از  $\varepsilon$  است، و

$$\begin{aligned} E_{y_0|x_0, x_*, y_*} [\|y_0 - X_0 \beta_*\|^2] &= E_{y_0|x_0, x_*, y_*} [\|X_0 \beta + \varepsilon_0 - X_0 \beta_*\|^2] \\ &= E_{y_0|x_0, x_*, y_*} [\|\varepsilon_0\|^2 + \|X_0 (\beta_* - \beta)\|^2] = N\sigma^2 + \|X_0 (\beta_* - \beta)\|^2 \end{aligned}$$

با توجه به آکائیک، از رابطه (۳) نسبت به  $p(y_* | x_*)$  امید ریاضی گرفته می شود. از تئوری رگرسیون استاندارد (سبر و لی (۲۰۰۳) قضیه ۳-۵) داریم:

$$\beta_* - \beta \sim N(0, \sigma^2 (X_*^T X_*)^{-1}) \quad (4)$$

و از این رو

$$E_{y_*|x_0, x_*} [\|X_0 (\beta_* - \beta)\|^2] = \sigma^2 \text{tr}[X_0 (X_*^T X_*)^{-1} X_0^T] \quad (5)$$

هم چنین با استفاده از نظریه رگرسیون استاندارد:

$$(6)$$

$$N \frac{\sigma_*^2}{\sigma^2} \sim \chi_{N-M}^2$$

بنابراین:

(۷)

$$E_{Y_*|X_*} \left[ \frac{1}{\sigma_*^2} \right] = \left( \frac{N}{N-M-2} \right) \frac{1}{\sigma^2}$$

که با ترکیب این دو نتیجه می‌گیریم:

$$E_{Y_*|X_*, X_0} [\Delta(X_0, X_*, Y_*)] = N \log 2\pi + N E_{Y_*|X_*} [\log \sigma_*^2] + \frac{N}{N-M-2} [N + \text{tr}(X_0(X_*^T X_*) X_0^T)] \quad (۸)$$

به طور کلی، متغیرهای مستقل ممکن است شامل متغیرهای تصادفی و ثابت باشند. بر این اساس،  $X_0$  به صورت

$$X_0 = [F | R_0] \quad (۹)$$

که در آن  $F$  ثابت و یک ماتریس  $N \times M_F$  و  $R_0$  یک ماتریس تصادفی  $N \times M_R$  با  $M = M_F + M_R$  است. ردیف‌های  $R_0$  تحقق مستقل از یک توزیع نرمال چند متغیره هستند. دقیقاً یک ستون از  $F$  بردار یکی از آنهایی است که مربوط به مقطع است، بنابراین  $1 \leq M_F \leq M$  است. ماتریس طراحی حاصل (۹) شامل مدل تحلیل کوواریانس (ANCOVA) است. به همین ترتیب، تعریف کنید

(۱۰)

$$X_* = [F | R_*]$$

که در آن  $R_*$  هم توزیع  $R_0$  در نظر گرفته شده است اما مستقل از  $R_0$  است.  $F$  در (۹) و (۱۰) یکسان است.

لم ۱. اگر  $X_0$  و  $X_*$  مانند روابط (۹) و (۱۰) تعریف شوند. پس

$$E_{R_0, R_*} [\text{tr}(X_0(X_*^T X_*) X_0^T)] = M_F + \frac{M_R(N + M_F)}{N - M - 1} \quad (۱۱)$$

که در آن  $M_R = M - M_F$  و  $1 \leq M_F \leq M$ .

**قضیه ۱.** یک برآورد ناریب رابطه (۸) تحت شرایط (۹) و (۱۰) به صورت زیر است.

$$AIC_m(Y|X) = N \log 2\pi + N \log \sigma_*^2 + \frac{N(N + M_F)}{N - M - 2} \left[ 1 + \frac{M_R}{N - M - 1} \right] \quad (۱۲)$$

جایی که  $m$  ترکیبی از متغیرهای مستقل Random-X و Same-X می‌باشد.

**قضیه ۲.** یک برآورد ناریب رابطه (۸) تحت Fixed-X یا Same-X به صورت زیر است.

$$AIC_c(Y|X) = N \log 2\pi + N \log \sigma_*^2 + \frac{N(N + M_F)}{N - M - 2} \quad (۱۳)$$

**تعریف Random-X** به این معنی است که  $X_0$  و  $X_*$  همانند روابط (۹) و (۱۰) با  $M_F = 1$  تعریف شده‌اند، به طوری که در آن  $F$  یک بردار  $N$  بعدی از یک‌ها برای محاسبه عرض از مبدا است.

این تعریف از Random-X با تعریف تیشیران و توس (۲۰۲۰) در یک عرض از مبدا متفاوت است. ما یک عرض از مبدا در Random-X قرار می‌دهیم تا عبارت (۸) به میانگین  $X_0$  و  $X_*$  بستگی نداشته باشد. Random-X با  $M_F = 1$  و  $M_R = M - 1$  در قضیه ۱ مطابقت دارد.

**قضیه ۳.** یک برآورد ناریب از رابطه (۸) تحت Random-X به صورت زیر خواهد بود.

$$AICr(Y|X) = N \log 2\pi + N \log \sigma_*^2 + \frac{N(N + 1)}{N - M - 2} \left[ 1 + \frac{M - 1}{N - M - 1} \right] \quad (۱۴)$$

به طوری که "r" نشان دهنده تصادفی بودن متغیرهای مستقل است. بنابراین تفاوت بین  $AICr$  و  $AICc$  به صورت زیر است:

$$AICr(Y|X) - AICc(Y|X) = \frac{(M - 1)(M + 2)}{(N - M - 1)(N - M - 2)} \quad (۱۵)$$

### ۳. شبه سازی عددی

بر اساس هورویچ و تسای (۱۹۸۹)، معیارهای انتخاب برآوردهای مدل (۲) را با استفاده از مقادیر اولیه  $N=10$  و  $\sigma^2=1$ ،  $\beta=(1,2,3,0,0,0,0)^T$  مقایسه می‌کنیم. مدل‌های کاندید حداکثر دارای هفت متغیر مستقل هستند، بنابراین  $X$  یک ماتریس  $N \times 7$  است. مدل‌های کاندید به‌طور متوالی ارزیابی می‌شوند به طوری که  $m$ -امین مدل از اولین  $m$  ستون  $X$  استفاده می‌کند.

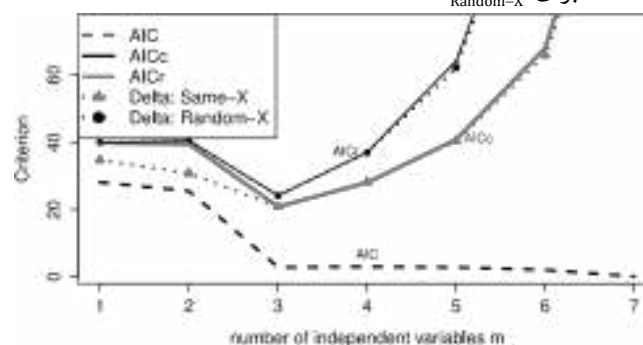
بر خلاف هورویچ و تسای (۱۹۸۹)، به جای ۱۰۰ (برای دقت بیشتر) از ۱۰ هزار نمونه استفاده می‌کنیم و ستون اول  $X$  بردار یک متناظر با عرض از مبدا است. برای Random- $X$ ، ما ۱۰ هزارنمونه از  $X_0$  تولید می‌کنیم، و ۱۰ هزار نمونه مستقل دیگر از  $X_*$ ، به طوری که هر سطر از  $M-1$  ستون آخر، متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نرمال هستند. برآورد  $\Delta$  به صورت زیر است:

$$\hat{\Delta}_{\text{Random-X}}(X_0, X_*, y_*) = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} \left( N \log(\sigma_*^{(k)})^2 + \frac{\|y_0^{(k)} - X_0^{(k)} \beta_*^{(k)}\|^2}{(\sigma_*^{(k)})^2} \right)$$

که در آن اندیس ( $k$ ) نشان‌دهنده تخمین به دست آمده از  $k$ -امین تحقق است. برای Same- $X$ ، ۱۰ هزار نمونه از  $X_*$  به همین روش تولید می‌شود و  $X_0$  برابر با  $X_*$  می‌باشد. برآورد نمونه‌ای  $\Delta$  به صورت زیر است:

$$\hat{\Delta}_{\text{Same-X}}(X_0, X_*, y_*) = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} \left( N \log(\sigma_*^{(k)})^2 + \frac{N \sigma^2}{(\sigma_*^{(k)})^2} + \frac{\|X_*^{(k)} (\beta_*^{(k)} - \beta)\|^2}{(\sigma_*^{(k)})^2} \right)$$

عباراتی مانند  $X_0 \beta_*$  و  $X_* \beta_*$  تنها با استفاده از  $m$  ستون اول مدل کاندید ارزیابی می‌شوند. مقادیر متوسط AIC، AICc، AICr،  $\hat{\Delta}_{\text{Same-X}}$  و  $\hat{\Delta}_{\text{Random-X}}$  در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود، AIC یک برآوردگر نارایب منفی از  $\hat{\Delta}_{\text{Random-X}}$  است، در حالی که AICc اریبی کمتری دارد. با این وجود، AICc هنوز نسبت به  $\hat{\Delta}_{\text{Random-X}}$  اریبی منفی دارد. این اریبی در شکل ۱ در هورویچ و تسای (۱۹۸۹) نیز مشهود است. برای  $m \geq 3$ ، AICc یک برآورد نارایب از  $\hat{\Delta}_{\text{Same-X}}$  است. این نتایج تایید می‌کنند که AICc یک برآورد نارایب از معیار اطلاعات برای  $\hat{\Delta}_{\text{Same-X}}$  است، ولی در مقابل، AICr یک برآورد نارایب از معیار اطلاعات برای  $\hat{\Delta}_{\text{Random-X}}$  است.



شکل ۱. معیارهای انتخاب و واگرایی کلبک-لیبلر در بیش از ۱۰ هزار نمونه از مدل رگرسیون (۲)  $M=7$ ،  $N=10$ . با توجه به جدول مشاهده می‌شود که، AIC احتمال زیادی برای انتخاب مدل‌های بیش برآزش دارد (یعنی ۶۷ درصد برای  $m > 3$ ). در مقابل، AICc مدل‌های بیش برآزش را ۳ درصد از مواقع انتخاب می‌کند، در حالی که AICr مدل‌های بیش برآزش را انتخاب نمی‌کند، و تایید می‌کند که AICr کم تر از AICc مدل‌های بیش برآزش را انتخاب می‌کند.

| m | AIC    | AICc | AICr |
|---|--------|------|------|
| 1 | 0.00   | 0.00 | 0.01 |
| 2 | 0.00   | 0.00 | 0.01 |
| 3 | 0.32   | 0.97 | 0.98 |
| 4 | 0.1223 | 0.03 | 0.00 |

|   |      |      |      |
|---|------|------|------|
| 5 | 0.09 | 0.00 | 0.00 |
| 6 | 0.14 | 0.00 | 0.00 |
| 7 | 0.34 | 0.00 | 0.00 |

جدول ۱. احتمال انتخاب یک مدل کاندید از مرتبه  $m$  زمانی که مرتبه حقیقی  $m=3$  است. احتمالات از ۱۰ هزار شبیه سازی تخمین زده می شوند.

مراجع

- [1] Akaike, H., 1974. A new look at the statistical model identification. IEEE Trans. Autom. Control 19, 716–723.
- [2] Bedrick, E.J., Tsai, C.-L., 1994. Model selection for multivariate regression in small samples. Biometrics 50 (1), 226–231, URL <http://www.jstor.org/stable/2533213>.
- [3] Brockwell, P.J., Davis, R.A., 2002. Introduction to Time Series and Forecasting. Springer.
- [4] Burnham, K.P., Anderson, D.R., 2002. Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach, second ed. Springer.
- [5] DelSole, T., Tippet, M.K., 2020. A selection criterion for canonical correlation analysis, covariance structure, and graphical models. Stat (submitted for publication).
- [6] Fujikoshi, Y., 1985. Selection of variables in discriminant analysis and canonical correlation analysis. In: Krishnaiah, P.R. (Ed.), Multivariate Analysis VI: Proceedings of the Sixth International Symposium on Multivariate Analysis. Elsevier, pp. 219–236.
- [7] Hurvich, C.M., Tsai, C.-L., 1989. Regression and time series model selection in small samples. Biometrika 76 (2), 297–307.
- [8] Mardia, K.V., Kent, J.T., Bibby, J.M., 1979. Multivariate Analysis. Academic Press.
- [9] McQuarrie, A.D.R., Tsai, C.-L., 1998. Regression and Time Series Model Selection. World Scientific Publishing.
- [10] Muirhead, R.J., 2009. Aspects of Multivariate Statistical Theory. John Wiley & Sons.
- [11] Rosset, S., Tibshirani, R.J., 2020. From fixed- $x$  to random- $x$  regression: Bias–variance decompositions, covariance penalties, and prediction error estimation. [8] J. Amer. Statist. Assoc. 115 (529), 138–151, URL <https://doi.org/10.1080/01621459.2018.1424632>.
- [12] Seber, G.A.F., Lee, A.J., 2003. Linear Regression Analysis. Wiley–Interscience.
- [13] Tian, S., Hurvich, C., Simonoff, J., 2020. Selection of regression models under linear restrictions for fixed and random designs. ArXiv e-prints:2009.10029.

## افزایش پایداری روش حذف نویز تصاویر رنگی با بهره‌گیری از تحلیل بردارهای ویژه و میانگین وزنی

رضا قاسمی نجف آبادی \* عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

r.ghasemi۶۲@pnu.ac.ir

**چکیده:** هموارسازی تصاویر رنگی همواره با چالش‌هایی همراه است، زیرا باید به درستی بین نویز و ساختارهای اصلی تفاوت قائل شد و نویز را به شکلی مناسب هموار کرد. علاوه بر این، این فرایند باید همبستگی بین کانال‌های رنگ تصویر را نیز در نظر بگیرد. در این مقاله، روشی نوآورانه برای حذف نویز از تصاویر رنگی ارائه شده است که در آن هر پیکسل تصویر بر اساس تحلیل بردار ویژه‌ای از ماتریس داده‌ای که از مقادیر رنگی همسایگی پیکسل ساخته شده، پردازش می‌شود. این تحلیل سه هدف دارد: (۱) مدیریت همبستگی محلی بین کانال‌های رنگ تصویر، (۲) تشخیص بین نواحی صاف و لبه‌دار یا بافت‌دار، و (۳) تعیین میزان لازم برای هموارسازی. مقایسه این روش با روش‌های کلاسیک و جدید نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی رقابتی بوده و بهبودهای چشمگیری ارائه می‌کند.

**کلمات کلیدی:** حذف نویز، بردار ویژه، بوت استرپ وزنی.

### ۱ مقدمه

حذف نویز از تصاویر یکی از موضوعات پرکاربرد و پژوهشی در حوزه‌های بینایی کامپیوتر و پردازش تصویر دیجیتال است. فرآیند حذف نویز (یا فیلتر کردن) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، چرا که نویز می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای بر کیفیت بصری تصاویر و کارایی بسیاری از عملیات پردازش تصویر تأثیر بگذارد. در سال‌های اخیر، استفاده از تصاویر رنگی در سیستم‌های بینایی کامپیوتر مورد توجه قرار گرفته و حذف نویز از این تصاویر به یکی از موضوعات تحقیقاتی برجسته تبدیل شده است.

یکی از رایج‌ترین منابع نویز در تصویربرداری دیجیتال، نویز حرارتی است که به نقص در حسگر (CCD)<sup>۱</sup> مربوط می‌شود. این نوع نویز به عنوان نویز گوسی سفید جمع‌شونده مدل‌سازی می‌شود و می‌توان آن را با افزودن مقادیر تصادفی از یک توزیع گوسی با میانگین صفر به هر کانال تصویر شبیه‌سازی کرد؛ انحراف معیار  $\sigma$  این توزیع شدت نویز را تعیین می‌کند [۱۱]. روش‌های متعددی برای کاهش نویز گوسی از تصاویر رنگی معرفی شده است که اهداف زیر را دنبال می‌کنند [۲، ۳]:

- (۱) نواحی هموار تصاویر باید تا حد ممکن صاف باشند تا نویز به طور کامل حذف شود.
  - (۲) لبه‌ها و جزئیات باید تا حد امکان حفظ شوند و از محو شدن یا تیز شدن بیش از حد جلوگیری شود.
  - (۳) بافت تصویر نباید از دست برود و نباید با نویز اشتباه گرفته شود.
  - (۴) در فرآیند حذف نویز، هیچ‌گونه تغییر رنگی که با رنگ‌های اصلی تصویر متفاوت باشد نباید ایجاد شود.
- در ابتدا، روش‌های خطی برای حذف نویز گوسی به کار گرفته می‌شدند. این روش‌ها، مانند فیلتر میانگین حسابی (AMF) [۱]، به دلیل استفاده از خاصیت میانگین صفر نویز، توانایی کاهش نویز را داشتند، اما به طور قابل توجهی لبه‌ها و بافت‌ها را محو می‌کردند [۱۰]. به همین دلیل، روش‌های غیرخطی متعددی توسعه یافتند که هدف آن‌ها شناسایی لبه‌ها و جزئیات تصویر و کاهش هموارسازی در این نواحی نسبت به سایر بخش‌ها بود [۴].
- در زمینه پردازش تصاویر رنگی، هدف چهارم اهمیت ویژه‌ای دارد. به خوبی شناخته شده است که اگر همبستگی بین کانال‌های رنگی در نظر گرفته نشود، ممکن است مصنوعات رنگی در فرآیند حذف نویز ظاهر شوند [۷]. این امر بیان می‌کند که استفاده از روش‌های پردازش خاکستری برای هر کانال رنگی به صورت جداگانه در پردازش تصاویر رنگی مناسب نیست. یک راه‌حل رایج برای این مشکل، رویکرد برداری است که تصاویر را به عنوان میدان‌های برداری پردازش می‌کند [۵]. با این حال، قابلیت حذف نویز روش‌های برداری در برخی موارد ممکن است نسبت به روش‌های مؤلفه‌ای ضعیف‌تر باشد. به عنوان مثال، در مورد فیلتر مدین برداری (VMF) [۹] در مقایسه با فیلتر میانه مؤلفه‌ای یا روش‌های میانه مقاوم برداری [۸]. این مسئله نشان می‌دهد که توسعه روش‌های جایگزین همچنان حائز اهمیت است. برای نمونه، در مطالعه [۱۲] روشی متفاوت برای مدیریت همبستگی بین کانال‌ها پیشنهاد شده که بر اساس تحلیل تفاوت‌های مشاهده‌شده بین جفت‌های رنگی است، و روش [۶] از محدودیت‌های نسبت رنگ برای مدل‌سازی همبستگی استفاده می‌کند.
- ساختار مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲ جزئیات روش پیشنهادی ارائه شده است؛ بخش ۳ نتایج تجربی و مقایسه سیستماتیک با سایر روش‌های پیشرفته را ارائه می‌دهد که نشان می‌دهد روش پیشنهادی به طور قابل توجهی عملکرد بهتری نسبت به روش‌های محلی مشابه دارد و با روش‌های غیرمحلی نیز قابل رقابت است؛ و در نهایت، نتیجه‌گیری‌ها در بخش ۴ ارائه می‌شود.

## ۲ حذف نویز تصویر رنگی بر اساس تحلیل بردارهای ویژه

در این مقاله به توسعه یک روش مؤثر برای حذف نویز، با استفاده از ویژگی‌های استخراج‌شده از تحلیل بردارهای ویژه می‌پردازیم. در این رویکرد: (۱) بردارهای ویژه به عنوان ترکیب‌های خطی متعامد از متغیرهای اصلی استخراج می‌شوند؛ و (۲) این ترکیب‌های خطی به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که واریانس نمونه داده‌های اصلی را به حداکثر برسانند. به عبارت دیگر، اولین بردار ویژه یا همان مؤلفه اصلی، در جهتی قرار می‌گیرد که حداکثر واریانس نمونه در فضای متغیرهای اصلی را توصیف می‌کند. سپس، بردار ویژه دوم که به عنوان دومین مؤلفه اصلی شناخته می‌شود، در جهتی متعامد با بردار اول قرار می‌گیرد و واریانس باقیمانده را بهینه می‌کند. این فرآیند به همین ترتیب ادامه می‌یابد. در تصاویر رنگی، لبه‌ها، بافت‌ها و جزئیات تصویر به عنوان تغییرات همبسته در مقادیر RGB مشاهده می‌شوند. از سوی دیگر، نویز گوسی که معمولاً در کانال‌های تصویر به صورت مستقل فرض می‌شود، تغییرات غیرهمبسته ایجاد می‌کند. بنابراین، با توجه به توضیحات فوق، تغییرات  $2 \times 2$  تا ناشی از لبه‌ها و جزئیات تصویر می‌توانند فقط با یکی از بردارهای ویژه  $V^i$  مرتبط باشند؛ چراکه در غیر این صورت، متغیرهای جدید همبسته می‌شدند. این روش نه تنها به

شناسایی دقیق تغییرات ناشی از لبه‌ها و جزئیات تصویر کمک می‌کند، بلکه امکان کاهش نویز بدون تأثیر بر کیفیت اصلی تصویر را فراهم می‌کند.

به دلیل ویژگی بیشینه‌سازی واریانس نمونه، می‌توانیم متغیر جدید  $U^i$  را که با بردار ویژه‌ای مرتبط است و تغییرات همبسته ناشی از لبه‌ها یا جزئیات تصویر را توضیح می‌دهد، به عنوان متغیری شناسایی کنیم که شرایط  $\sigma(U^i) \gg \sigma(U^j)$  و  $\sigma(U^i) \gg \sigma(U^k)$  را برآورده می‌کند. در اینجا  $\sigma$  نشان‌دهنده انحراف استاندارد نمونه است.

در چنین حالتی، از آنجا که داده‌های مرتبط با  $U^i$  شامل اطلاعات مهمی از لبه‌ها و جزئیات تصویر هستند و همچنین با نویز همراهاند، نباید این متغیر بیش از حد هموار شود. در مقابل،  $U^k$  و  $U^j$  که عمدتاً نویز را منعکس می‌کنند و اطلاعات خاصی از تصویر در خود ندارند، می‌توانند با اطمینان هموار شوند. در نواحی صاف تصویر، که تنها تغییرات غیرهمبسته ناشی از نویز مشاهده می‌شود، انتظار می‌رود واریانس‌های  $U^i$ ،  $U^j$  و  $U^k$  مشابه باشند، یعنی  $\sigma(U^i) \approx \sigma(U^j) \approx \sigma(U^k)$ ، که نشان‌دهنده این است که می‌توان هر سه متغیر را بدون مشکل هموار کرد.

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، هدف ما اعمال یک عملیات میانگین‌گیری وزنی برای هموارسازی مستقل هر مؤلفه است. برای هموار کردن هر مؤلفه از یک پیکسل که با بردار  $U_0 = (U_0^1, U_0^2, U_0^3)$  نمایش داده می‌شود، عملیات طبق رابطه زیر اعمال می‌گردد:

$$\hat{U}_0^i = \frac{\sum_{p=0}^{N^2-1} W_p^i U_p^i}{\sum_{p=0}^{N^2-1} W_p^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

در اینجا  $i$  به کانال رنگی و  $p$  به شماره پیکسل در پنجره همسایگی اطراف یک پیکسل اشاره دارد. بر اساس توضیحات فوق، وزن‌های  $W_p^i$  باید به گونه‌ای محاسبه شوند که مؤلفه  $U_0^i$  در زمانی که  $A(U_i) \gg A(U_j)$  و  $A(U_i) \gg A(U_k)$  است، کمتر هموار شود و در غیر این صورت، بیشتر هموار شود. برای این منظور، انحراف استاندارد نرمال شده  $A_n$  برای یک متغیر  $U_i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_n(U^i) = \frac{\sigma(U^i)}{\sum_{j=1}^3 \sigma(U^j)}. \quad (2)$$

برای انجام میانگین‌گیری به صورت مناسب، وزن‌های  $W_p^i$  باید با استفاده از یک تابع کاهشی بر روی  $|U_p^i - U_0^i|$  محاسبه شوند، به طوری که تنها مقادیر  $U_p^i$  که به  $U_0^i$  نزدیک هستند، وزن‌های بالایی دریافت کنند. برای این منظور، ما از عبارت زیر که بر اساس تابع نمایی است استفاده می‌کنیم، اما هر تابع کاهشی دیگری نیز می‌تواند به جای آن به کار رود:

$$W_p^i = \exp\left(-\frac{(U_p^i - U_0^i)^2 \sigma_n(U^i)}{D}\right) \quad (3)$$

در اینجا  $D > 0$  یک پارامتر فیلتر است که توانایی هموارسازی کلی روش را تنظیم می‌کند. مشخص است که مقادیر بزرگ‌تر  $D$  باعث می‌شود که مقادیر  $W_p^i$  به ۱ نزدیک‌تر شوند و در نتیجه توانایی هموارسازی بیشتر شود. برعکس، برای مقادیر کوچک‌تر  $D$ ، توانایی هموارسازی کاهش می‌یابد. توجه داشته باشید که مقدار ارائه شده توسط  $\sigma_n(U^i)$  نیز با توانایی هموارسازی مرتبط است: برای  $^{227}$ ، پایین  $\sigma_n(U^i)$  توانایی هموارسازی افزایش می‌یابد، در حالی که برای مقادیر بالاتر  $\sigma_n(U^i)$  هموارسازی کمتری انجام می‌شود. در نتیجه، رفتار مورد نظر به دست می‌آید.

### ۳ نتایج تجربی و مقایسه‌ها

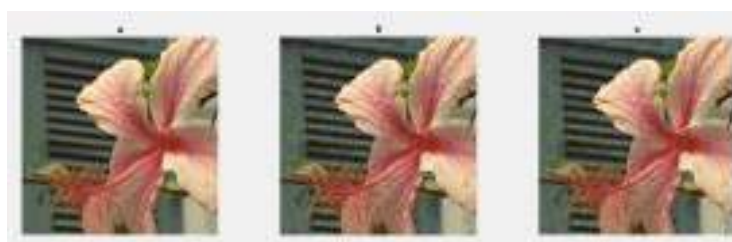
در بخش تجربی، از تصویر آزمایشی "Flower" استفاده کرده‌ایم. بخش‌هایی از تصویر اصلی را با اندازه‌های کوچک و محتوای بافت و جزئیات مختلف استخراج کرده‌ایم تا روش‌ها را در برابر تنوع فرکانس‌های فضایی مختلف آزمایش کنیم و همچنین بتوانیم تفاوت‌های عملکرد میان تنظیمات پارامتری مختلف و روش‌های فیلترسازی را بهتر ارزیابی کنیم. این تصویر با استفاده از مدل کلاسیک نویز گوسی آلوده شده است. هر کانال تصویر رنگی به‌طور مستقل با انحراف معیار متغیر  $\sigma$  از توزیع گوسی، که نمایانگر شدت نویز است، نویزی شده‌اند.

برای ارزیابی عملکرد فرآیند فیلترسازی، از دو معیار مختلف استفاده می‌کنیم که هر کدام از آن‌ها از یک دیدگاه متفاوت به ارزیابی می‌پردازند: میانگین خطای مطلق (MAE) برای اندازه‌گیری توانایی حفظ جزئیات و نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) برای ارزیابی توانایی کاهش نویز مورد استفاده قرار گرفته است.

| PSNR    | MAE    | image Noisy |
|---------|--------|-------------|
| ۶۴.۲۶   | ۹۹.۸   | Proposed-۳۰ |
| ۶۹.۲۶   | ۰۹.۹   | CRF-۳۰      |
| ۴۱.۲۵   | ۲۰.۱۰  | FWD-۳۰      |
| ۷۰.۲۸   | ۱۱.۷   | Proposed-۲۰ |
| ۵۰۱۵.۲۵ | ۱۱۰۶.۵ | CRF-۲۰      |
| ۹۵.۲۷   | ۶۲.۷   | FWD-۲۰      |
| ۷۲.۳۲   | ۵۰.۴   | Proposed-۱۰ |
| ۴۸.۳۲   | ۶۴.۴   | CRF-۱۰      |
| ۹۷.۳۱   | ۷۸.۴   | FWD-۱۰      |

جدول ۱: MAE و PSNR برای تصاویر با نویز مختلف

نتایج تجربی در جداول ۱ ارائه شده‌اند. در این جدول روش پیشنهادی با دو روش CRF و FWD تحت نویزهای ۳۰، ۲۰ و ۱۰ درصد مقایسه شده‌اند که نتایج حاصل عملکرد مناسب روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.



۲۲۸

شکل ۱: a تصویر اصلی، تصویر b با نویز ۲۰ درصد و c تصویر فیلتر شده است.

## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش محلی برای کاهش نویز گاوسی از تصاویر رنگی معرفی کردیم که بر پایه تحلیل ویژه بردارهای نمونه‌های رنگی در هر همسایگی پیکسل استوار است. روش پیشنهادی از یک فرآیند محلی استفاده می‌کند تا به‌طور مناسب همبستگی میان کانال‌های رنگی تصویر را پردازش کرده و مجموعه‌ای از ضرایب وزن را محاسبه کند که برای هموارسازی هر پیکسل در تصویر به‌کار می‌روند. این روش در کاهش نویز تصاویر رنگی به‌خوبی عمل می‌کند، زیرا قادر است نویز تصویر را کاهش دهد در حالی که لبه‌ها، بافت‌ها و سایر جزئیات تصویر را بدون معرفی آثار رنگی حفظ کند. نتایج تجربی نشان داده است که روش پیشنهادی قادر به ارائه عملکرد بالایی است که از نظر کمی و بصری با روش‌های پیشرفته اخیر رقابت می‌کند. روش پیشنهادی به‌طور واضح از سایر روش‌های محلی بهتر عمل می‌کند و با روش‌های غیرمحلی نیز رقابت‌پذیر است.

## مراجع

- [1] Buades, A., Coll, B., Morel, J.M.: A review of image denoising algorithms, with a new one, *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(2), 490-530 (2005).
- [2] Buades, A., et al.: Non-local means denoising, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011.
- [3] Dabov, K., et al.: Image denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering, *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007.
- [4] Elad, M., et al.: Efficient color image denoising techniques, *Journal of Computational Imaging*, 2023.
- [5] Guo, Q., et al.: Color image denoising based on vector field analysis, *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019.
- [6] Li, W., et al.: Color ratio constraints for noise reduction in correlated channels, *IEEE Transactions on Multimedia*, 2022.
- [7] Lukac, R., Plataniotis, K.N.: A taxonomy of color image filtering and enhancement solutions, *Advances in Imaging and Electron Physics*, 140, 187-264 (2006).
- [8] Morillas, S., Gregori, V., Domingo, J., and Sapena, A.: Fuzzy peer groups for color image filtering, *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(11), 3232-3242 (2006).
- [9] Morillas, S., Gregori, V., Sapena, A.: Vector median filter for impulsive noise suppression, *IEEE Signal Processing Letters*, 18(6), 407-410 (2011).
- [10] Tomasi, C., Manduchi, R.: Bilateral filtering for gray and color images, *Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision*, 839-846 (1998).
- [11] Zhang, H., et al.: A Gaussian noise reduction method and advanced denoising algorithms, *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017.



[12] Zhang, Y., et al.: Correlation-based denoising for color image sequences, *IEEE Access*, 2020.

## طراحی سوالات دوگزینه ای و تاثیر آن بر ارتقای یادگیری ریاضی

راضیه قلی پور\*، دبیر ریاضی، استان فارس، منطقه درودزن،

Gholipour.razieh@gmail.com

دکتر ریاضی.

**چکیده:** یکی از اهداف مهم برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای توسعه‌ی توانایی‌های استدلالی، قدرت درک و فهم و پرورش مهارت‌های ذهنی در دانش‌آموزان است. سنجش پلی بین تدریس و یادگیری است. علاوه بر ارزشیابی حین تدریس، بعد از تدریس هم نیازمند این هستیم عملکرد دانش‌آموزان سنجیده شود. این مقاله بر نقش طراحی سوالات دوگزینه‌ای در بهبود فرایند یاددهی-یادگیری دانش‌آموزان متمرکز است. در این راستا با توجه به هدف، نمونه‌ای از سوالات دوگزینه‌ای از کتاب ریاضی پایه هفتم آورده شده‌است که تاثیر آن بر ارتقای یادگیری ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** سوالات دوگزینه‌ای، حیطه‌ی شناختی بلوم، سنجش برای یادگیری، یادگیری عمیق ریاضی.

### ۱ مقدمه

سوالات دوگزینه‌ای گزاره‌ها یا جملات خبری هستند که از معلومات و دانش ساخته می‌شوند و دانش‌آموز با توجه به آموخته‌هایش تعیین می‌کند که کدام جمله صحیح یا غلط است. سوالات دوگزینه‌ای امکان نمونه‌گیری گسترده‌ای از دانش را فراهم می‌آورند. طراحی آسان و نمره‌دهی آن‌ها عینی و سریع است و نظر شخصی مصحح هیچ دخالتی در آن ندارد. بیشترین کاربرد سوال‌های دوگزینه‌ای در سنجش برای یادگیری و تشخیص و اطمینان از حصول یادگیری در دانش‌آموزان است [۲،۳].

گاهی در طراحی سوالات دوگزینه‌ای تنها انتخاب یک گزینه مورد نظر است و دانش‌آموز را به ارائه پاسخ تصادفی و تقلب ترغیب می‌کند. دانش‌آموز به راحتی از روی شانس و یا تقلب به آن پاسخ می‌دهد. بنابراین ترکیبی از عوامل زیر یعنی داشتن مقداری دانش، قدرت حدس زدن پاسخ و طراحی ضعیف سوالات که سرخ‌هایی برای انتخاب درست ارائه می‌دهند، باعث کسب نمره غیر واقعی می‌شود. اکنون یک پرسش مطرح می‌شود. سوالات دوگزینه‌ای را چگونه طراحی کنیم که باعث بهبود فرایند یاددهی و یادگیری شود و دانش‌آموز از روی شانس به آن پاسخ ندهد و سنجش واقعی صورت گیرد؟.

## ۲ حیطه شناختی بلوم

حیطه‌ی شناختی شامل اهدافی می‌شود که محتوای مربوط به آن‌ها جنبه نظری داشته و یادگیری آن‌ها مستلزم فعالیت‌های ذهنی و عقلانی است به طور کلی حیطه‌ی شناختی به یادگیری مطلب و کسب شناخت و معرفت درباره آن‌ها مربوط می‌شود. نتایج حاصل از آموزش‌های شناختی به مهارت‌های ذهنی از قبیل دانستن، به‌خاطر سپردن، فهمیدن، توانایی کاربرد آموخته‌ها، تجزیه و تحلیل، ترکیب و خلق منتهی می‌گردد. سلسله مراتب آموختنی‌های حیطه‌ی شناختی از آسان به مشکل پیروی می‌کند و دامنه‌ی آن از یادگیری سطحی تا درک بسیار عمیق از مطالب متغیر است. حیطه شناختی در شش سطح تنظیم شده‌است و هر سطح بالاتر مستلزم کسب مهارت‌های شناختی سطح یا سطوح پایین‌تر است. بنجامین بلوم در سال ۱۹۵۶ با معرفی این شش سطح، طبقه‌بندی حیطه شناختی بلوم را به جهانیان عرضه کرد [۳].

## ۳ چارچوب طراحی سوالات دو گزینه‌ای

در کتاب ریاضی پایه‌ی هفتم به کلیه‌ی سطوح شناختی توجه شده‌است. در ادامه دو نمونه از سوالات دوگزینه‌ای ریاضی پایه‌ی هفتم را، مورد بررسی قرار می‌دهیم. دانش‌آموز برای حل این سوالات باید مقادیر چپ و راست تساوی را محاسبه کند بلافاصله عددها را با هم مقایسه کرده تا درستی یا نادرستی تساوی را تشخیص دهد. سپس مولف از دانش‌آموز می‌خواهد در صورت نادرستی عبارت، دلیل منطقی برای اصلاح سوال ارائه کند. با توجه به متفاوت بودن میزان توجه هر قسمت از کتاب درسی به سطوح مختلف حیطه‌ی شناختی و یکی نبودن سطح علمی دانش‌آموزان، دبیران بایستی جهت رسیدن به اهداف آموزشی مطلوب به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان توجه ویژه‌ای داشته باشند. این سوال‌ها فرصت خود سنجی، ارائه‌ی باز خوردهای فردی و دقیق را برای هر دانش‌آموز ایجاد می‌کند. بعد از حل این سوال‌ها دانش‌آموز می‌تواند با استفاده از دانش و مهارت خود درستی یا نادرستی مسائل را تشخیص دهد و فرصتی برای دانش‌آموز فراهم می‌کند تا آنچه را می‌داند در موقعیت‌های جدید با مفاهیم جدید به‌کار گیرند و مشارکت فعال آنان را در بردارد. دانش‌آموز نادرست بودن عبارت را درک کرده و می‌تواند استدلال مناسبی برای نادرست بودن عبارت مطرح کند و سوالی طرح کند که درست باشد و با علاقه پیگیر مسائل بعدی باشد.

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت امکان موارد نادرست را اصلاح کنید.

|                                  |                                |                                 |                                 |
|----------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $4^2 = 64$                       | $5^2 = 5 \times 2$             | $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ | $9^2 = 18$                      |
| $(\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{81}$ | $\frac{3^2}{5} = \frac{9}{25}$ | $5^2 = 25$                      | $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{4}$ |

۱- کدام درست و کدام نادرست است؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$(3+2)^2 = 2^2 + 3^2$$

$$2 + 2^2 = 6$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 > \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2^2 + 3^2 + 5^2 = 1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 1$$

$$4^2 < (-2)^2$$

شکل ۲: تمرین صفحه ۸۹.

## ۴ نتایج

اگر در طراحی سوالات دوگزینه‌ای دقت و وقت بیشتری صرف شود، و دانش‌آموز برای درست یا نادرست بودن پاسخ داده‌شده استدلال منطقی داشته‌باشد، این سوالات می‌توانند حیطه‌های بالای یادگیری را بسنجند و در این صورت سنجش با آموزش ادغام می‌شود و دانش‌آموز از یادگیری سطحی به یادگیری عمیق دست می‌یابد. سوالاتی که با توجه به سطوح حیطه‌ی شناختی طراحی می‌شوند موجب یادگیری پایدار و طولانی‌تر می‌شوند. اهمیت دادن به این سطوح در کتاب‌های درسی خصوصاً کتاب‌های ریاضی و طراحی سوالاتی به این صورت باید به‌شدت مورد توجه قرار گیرد تا دانش‌آموزان در طول دوران تحصیل به جای حفظ کردن طوطی وار مطالب به فهم جامع و کامل و کاربردی از مطالب و محتوای آموزشی برسند.

## مراجع

- [۱] اصلاح‌پذیر، بهمن؛ ایران‌منش، علی؛ بیژن‌زاده، محمد حسن؛ داودی، خسرو؛ رستگار، آرش؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهرانی، احمد؛ عالمیان وحید؛ نائینی سید محمد کاظم؛ عباسی، محمد ثابت؛ سیدصالحی، محمدرضا؛ صدر، میرشهرام میرجعفر. ریاضی پایه هفتم دوره اول متوسطه، سازمان پژوهی و برنامه ریزی آموزشی، تهران؛ شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۴۰۰.
- [۲] صفوی، امان الله، کلیات روش‌ها و فنون تدریس، نشر معاصر، تهران، (۱۳۹۰).
- [۳] علم‌الهدایی، سید حسن، روان‌شناسی یادگیری ریاضی مجله رشد آموزش ریاضی، سال چهاردهم، شماره ۵۵، ص ۱۴ تا ۱۹، دفتر انتشارات کمک آموزشی، وزارت آموزش و پرورش (۱۳۷۸).
- [۴] نادعلی پور، حسن و تائب جولا، افسانه. سنجش تکوینی آمیخته، آوای نور:وزیری (۱۴۰۲).

## ریاضیات غیررسمی در خدمت جامعه و مدرسه

پویا کریمی\* دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران  
ابوالفضل رفیع پور، دانشیار بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر،  
صندوق پستی: ۱۴۱۱۱-۷۶۱۶۹، کرمان، ایران

**چکیده:** ریاضیات غیررسمی، به عنوان یک ابزار قدرتمند در تحلیل و فهم مسائل اجتماعی، نقشی اساسی در توسعه جوامع ایفا می‌کند. ریاضیات غیررسمی، نوعی از دانش ریاضی است که در بستر تجربیات روزمره کسب و به کار گرفته می‌شود و به ما کمک می‌کند تا به تصمیمات بهتری دست یابیم. علاوه بر این، ریاضیات غیررسمی در حوزه‌های مختلفی نظیر اقتصاد، روانشناسی و جامعه‌شناسی کاربرد دارد و به شناسایی الگوهای رفتاری و پیشبینی روندهای اجتماعی کمک می‌کند. با استفاده از مدل‌های ریاضی غیررسمی، می‌توان مشکلات پیچیده‌ای مانند نابرابری‌های اجتماعی و اقتصادی را بهتر درک کرد و با ایجاد راهکارهای مناسبی به حل آن‌ها پرداخت. به این ترتیب، ریاضیات غیررسمی نه تنها ابزار تحلیل و پیشبینی است، بلکه به عنوان پایه‌ای برای ارتقای کیفیت زندگی و بهبود ساختار اجتماعی به شمار می‌آید. رشد و توسعه جوامع مدرن به شدت وابسته به توانایی ما در بهره‌گیری از این نوع ریاضیات است. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که مطالعه ریاضیات غیررسمی می‌تواند به طور قابل توجهی کیفیت آموزش و یادگیری ریاضی در بین همه اقشار جامعه بهبود یابد. این نوع ریاضی، با ایجاد پیوند بین مفاهیم انتزاعی ریاضی و تجربیات ملموس دانش‌آموزان، به آن‌ها کمک می‌کند تا درک عمیق‌تر و کاربردی‌تر از این مفاهیم به دست آورند.

**کلمات کلیدی:** ریاضیات غیررسمی، تعامل اجتماعی، آموزش ریاضی، معلمان ریاضی

## ۱ مقدمه

بین روش حل مسائل ریاضی با استفاده از الگوریتم آموخته‌شده در مدرسه و روش حل آن‌ها در زمینه‌های آشنای خارج از مدرسه تفاوت احتمالی وجود دارد. رید و لیو<sup>[۹]</sup> نشان داده‌اند افرادی که به مدرسه نرفته‌اند، اغلب یکسری مسائلی را با راه‌های متفاوت از افرادی که به مدرسه رفته‌اند، حل می‌کنند. با بررسی دنیای ریاضیات غیررسمی، بینش‌های ارزشمندی در این موارد به دست می‌آوریم؛ اول اینکه روش‌های متنوعی که افراد از مفاهیم ریاضی در زندگی روزمره خود استفاده می‌کنند<sup>[۲]</sup>، دوم اینکه اثربخشی روش‌های یادگیری غیررسمی در توسعه مهارت‌های ریاضی<sup>[۳]</sup>، سوم اینکه پتانسیل ادغام ریاضیات غیررسمی در آموزش رسمی، برای تجربه‌ی یادگیری جامع‌تر و چهارم نحوه یادگیری و

\*Corresponding Author: Pouya.karimi1380@gmail.com

<sup>1</sup>Reed & Lave

استفاده افراد از ریاضی، که می‌تواند به معلمان در توسعه روش‌های تدریس مؤثرتر کمک کند. پژوهش «ریاضیات خیابانی» در زمانی صورت گرفت که روانشناسان شناختی بر روی این ایده متمرکز بودند که چگونه طرحواره‌های یک فرد در برخی از حوزه‌های دانش می‌تواند یادگیری فرد را در حوزه دیگری از دانش، تسهیل نماید. این پژوهش با نشان دادن اینکه کودکان می‌توانند مسائل مرتبط به ریاضی دنیای واقعی را بدون استفاده از رویه‌های محاسباتی استاندارد، حل نمایند؛ مدل آموزشی ریاضی سنتی را زیر سوال برد. در مدل آموزشی ریاضی سنتی، معلمان باید قبل از حل مسئله، نحوه انجام عملیات ریاضی را به کودکان آموزش دهند. با بررسی پیشینه، یافته‌های تحقیقاتی و پیامدهای مطالعه ریاضیات غیررسمی، این مقاله به دنبال روشن کردن اهمیت آن برای مربیان و ریاضیدانان در جهت پرورش درک عمیق‌تر از دانش ریاضی و کاربرد آن در دنیای واقعی است. همچنین با توجه به اینکه آموزشگران ریاضی متعددی این پژوهش را روی قشر متوسط و ضعیف جامعه خود اجرا کردند، در اینجا سوالی که به ذهن متبادر می‌شود این است که پیامدهای ریاضیات غیررسمی برای جامعه و آموزش ریاضی مدرسه‌ای چیست؟

## ۲ پیشینه پژوهش

شواهدی وجود دارد که روش‌های غیررسمی آموخته‌شده در خارج از مدرسه اغلب بسیار موثر هستند. به عنوان مثال گای و کول<sup>۲</sup> [۴] نشان دادند که تاجران تحصیل‌نکرده کیپل مقادیر برنج را بسیار بهتر از آمریکایی‌های تحصیل‌کرده، تخمین می‌زنند. بنابراین کاملاً محتمل به نظر می‌رسد که کودکان ممکن است با رویه‌های آموخته‌شده در مدرسه مشکل داشته باشند و به طور همزمان قادر باشند، مسائل ریاضی را با همان رویه‌ها به روش‌های موثرتر دیگری که توسط خودشان ابداع شده، حل نمایند. یک راه برای آزمایش این ایده، نگاه کردن به کودکانی است که باید محاسبات مکرر و کاملاً پیچیده‌ای را در خارج از مدرسه انجام دهند. معمولاً این کودکان که از قشر ضعیف و در بازارهای خیابانی اجناس خود را می‌فروشند، یکی از این گروه‌ها هستند. مطالعه ریاضیات غیررسمی به بررسی فرآیندهای شناختی می‌پردازد که زیربنای این مهارت‌ها است. این موضوع نحوه توسعه این توانایی‌ها توسط افراد از طریق تجربیات روزمره و روش‌های یادگیری غیررسمی مانند مشاهده، آزمون و خطا و تعامل اجتماعی را بررسی می‌کند [۵]. نقش تعاملات اجتماعی در یادگیری ارزشمند است که برای درک بهتر آن ابتدا نظریه یادگیری اجتماعی را مرور می‌کنیم؛ این نظریه بر این باور است که یادگیری از طریق مشاهده و تعامل با دیگران صورت می‌گیرد [۶]. افراد با مشاهده رفتار و پیامدهای آن در دیگران، الگوهای رفتاری را می‌آموزند و آن‌ها را در رفتار خود به کار می‌گیرند [۶]. نظریه یادگیری اجتماعی، مبنای نظری قوی برای طراحی و اجرای برنامه‌های آموزشی مبتنی بر مشاهده و الگوبرداری در حوزه ریاضیات ارائه می‌کند. این نظریه، بویژه در آموزش ریاضیات غیررسمی، می‌تواند بسیار مفید باشد. مطالعه ریاضیات غیررسمی، نمونه‌ای بارز از یادگیری اجتماعی در آموزش ریاضی است. در این نوع یادگیری، دانش‌آموزان با مشاهده و الگوبرداری از رفتار افراد در محیط‌های روزمره، مفاهیم ریاضی را می‌آموزند [۲]. یادگیری ریاضی اغلب در چارچوب تعاملات اجتماعی با افراد دیگر، مانند اعضای خانواده، همسالان و مربیان، انجام می‌شود [۷]. در فرهنگ ایرانی اسلامی، آموزش و پرورش و برابری اجتماعی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است و در این راستا، توجه به مهارت‌های کاربردی و یادگیری عمومی از اهمیت بالایی برخوردار است. ریاضیات غیررسمی به عنوان یکی از این مهارت‌ها، در طول تاریخ نقشی مهم در زندگی ایرانیان ایفا کرده و با آموزه‌ها و ارزش‌های اسلامی نیز همخوانی دارد؛ به طور مثال: ایرانیان از دیرباز در محاسبات ذهنی مهارت داشته‌اند. این مهارت در بسیاری از مشاغل سنتی مانند تجارت، حسابداری و معاملات روزمره مورد استفاده ۲۳۵ ی‌گیرد و همچنین ایرانیان در اندازه‌گیری طول، مساحت



و حجم مهارت دارند[۱]. همین امر باعث گسترش یادگیری در سطح عموم و همه قشرهای جامعه شده و باعث شده تا ریاضیات غیررسمی بر جامعه نیز تاثیرگذار باشد.

### ۳ روش

روش تحقیق مورد استفاده در این پژوهش، رویکرد کتابخانه‌ای و توصیفی است. این روش شامل بررسی جامع ادبیات موجود، از جمله کتاب‌ها، مجلات دانشگاهی، مجموعه مقالات کنفرانس و سایر اسناد مربوطه، برای جمع‌آوری اطلاعات در مورد موضوع اهمیت ریاضیات غیررسمی و نقش آن در آموزش ریاضی است. ماهیت توصیفی این تحقیق امکان جمع‌آوری و ارائه داده‌ها را به گونه‌ای فراهم می‌کند که نمای کلی از وضعیت فعلی دانش در این رابطه ارائه دهد. این به شناسایی موضوعات کلیدی، مانند مزایا و اهمیت ریاضیات غیررسمی در آموزش، فرآیندهای شناختی درگیر در یادگیری ریاضیات خارج از محیط‌های رسمی، و استراتژی‌هایی برای گنجاندن یادگیری غیررسمی در تدریس در کلاس کمک می‌کند.

### ۴ یافته‌ها

تحقیقات در مورد ریاضیات غیررسمی یافته‌های متعددی را به دست آورده است که برای مربیان و سیاستگذاران آموزشی حائز اهمیت است. این یافته‌ها نشان می‌دهد که دانش‌آموزان از مهارت‌های ریاضی پیچیده‌ای در زمینه‌های غیررسمی استفاده می‌کنند. مطالعات نشان داده است که دانش‌آموزان، حتی آن‌هایی که در مدرسه با مشکل مواجه هستند، می‌توانند در هنگام انجام فعالیت‌های روزمره مانند خرید، آشپزی یا بازی، از مهارت‌های ریاضی پیچیده‌ای مانند محاسبات ذهنی، برآورد و تفکر فضایی استفاده کنند[۲]. روش‌های یادگیری غیررسمی می‌توانند مؤثر باشند. دانش‌آموزان در زمینه‌های غیررسمی از روش‌های مختلفی برای یادگیری ریاضیات استفاده می‌کنند، مانند مشاهده، آزمون و خطا و تعامل اجتماعی. این روش‌ها می‌توانند به اندازه روش‌های آموزش رسمی مؤثر باشند[۳]. زمینه یادگیری برای درک ریاضی مهم است؛ درک ریاضی اغلب در زمینه فعالیت‌های خاص و تجربیات دنیای واقعی نهفته است. این بدان معناست که آموزش ریاضی باید با تجربیات واقعی دانش‌آموزان مرتبط باشد تا اثر خود را بر یادگیری آنها بگذارد.

یافته‌های مربوط به ریاضیات غیررسمی پیامدهای مهمی برای جامعه کشور و آموزش ریاضی مدرسه‌ای دارد. این یافته‌ها نشان می‌دهد اول اینکه معلمان باید از تنوع روش‌های یادگیری ریاضی مورد استفاده توسط دانش‌آموزان آگاه باشند؛ دوم، آموزش ریاضی باید با تجربیات دنیای واقعی دانش‌آموزان مرتبط باشد؛ سوم اینکه آنها باید فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم کنند تا از مهارت‌های ریاضی خود در زمینه‌های معنادار برای آن‌ها استفاده کنند و این دانش آموزان که گاهی از قشر ضعیف هستند و فرصت آموزش ندارند اما مهارت محاسباتی خوبی کسب می‌کنند.

### ۵ بحث و نتیجه‌گیری

ریاضیات غیررسمی در جامعه‌ای با قشرهای متفاوت به عنوان یک مهارت زندگی حیاتی عمل می‌کند که به افراد کمک می‌کند تا با محدودیت‌های اقتصادی و آموزشی روبرو شوند و در پی حل آن‌ها باشند. در این جامعه‌ها، افراد از طریق تجربیات روزمره و تعاملات اجتماعی، مهارت‌های ریاضی را به طور غیررسمی فرا می‌گیرند. این مهارت‌ها



شامل محاسبات ذهنی، برآورد و حل مسائل روزمره می‌باشد که برای معاملات تجاری، مدیریت بودجه خانگی و حتی در صنایع دستی و دستفروشی حیاتی هستند. تحقیقاتی مانند آنچه توسط نونز، کاراھر و اشلیمن در دهه ۱۹۸۰ انجام شده، نشان داده است که دستفروشان برزیلی، با وجود آموزش رسمی محدود، تسلط قابل توجهی بر روی محاسبات روزمره دارند [۸]. این تسلط به ریاضیات غیررسمی به آن‌ها کمک می‌کند تا در اقتصاد خیابانی فعال باشند و از طریق این فعالیت‌ها، خود و خانواده‌شان را حمایت کنند. معلمان ریاضی می‌توانند از یافته‌های این مقاله در مواردی همچون: ایجاد ارتباط با تجربیات دانش‌آموزان، استفاده از روش‌های یادگیری غیررسمی، تأکید بر درک عمیق به جای حفظ کردن و همکاری بیشتر با خانواده‌ها و جامعه استفاده کنند. مطالعه ریاضیات غیررسمی در نظام آموزشی، دریچه‌ای نو به سوی درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی، تعامل اجتماعی و افزایش انگیزه دانش‌آموزان می‌گشاید. بنابراین، ریاضیات غیررسمی در جامعه‌ها با اقشار ضعیف به عنوان یک ابزار برای بهبود زندگی روزمره و حل مسائل اقتصادی و اجتماعی عمل می‌کند و به عنوان یک راه برای ارتقاء مهارت‌های ریاضی و حل مسئله بدون نیاز به آموزش رسمی، شناخته می‌شود. این مهارت‌ها به افراد کمک می‌کند تا با شرایط سخت زندگی‌شان بهتر مواجه شوند و از آن‌ها برای بهبود وضعیت اقتصادی و اجتماعی خود استفاده کنند.

## مراجع

[۱] زروانی، مجتبی و مهربانی، امین. (۱۳۹۷). مشاغل و پایگاه‌های درآمدی ایرانیان زرتشتی در دوران قاجاری. پژوهشنامه تاریخ اسلام؛ ۱ (۳۲): ۷۲-۴۹.

- [2] Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). Street mathematics and school mathematics. Cambridge University Press .
- [3] Lave, J. (1988). Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge University Press .
- [4] Gay, J. & Cole, M. (1976). The New Mathematics and an Old Culture: A Study of Learning among the Kpelle of Liberia. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- [5] Wertsch, J. V. (1991). Sociocultural approaches to cognition. Cambridge University Press.
- [6] Bandura, A., & Walters, R. H. (1977). Social learning theory: prentice-hall Englewood cliffs, NJ.
- [7] Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge University Press.
- [8] Nunes, T., Carraher, D. W., and Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. British Journal of Developmental Psychology, 3(2): 1-29.
- [9] Reed, H. J. & Lave, J. (1981). Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition. In R. W. Casson (ed.), Language, Culture and Cognition: Anthropological Perspectives. New York: Macmillan.

## یک معیار جدید استوار برای تفکیک پذیری سری های زمانی

مهدی کلانتری\*؛ عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

kalantarimahdi@pnu.ac.ir

**چکیده:** یکی از روش های تجزیه ی سری زمانی به مولفه های تشکیل دهنده ی آن، روش تحلیل مجموعه ی مقادیر تکین (SSA) است. در این روش، برای اندازه گیری میزان تفکیک پذیری مولفه های سری زمانی از معیار همبستگی وزنی استفاده می شود؛ ولی این معیار نسبت به داده های دورافتاده استوار نبوده و تحت تاثیر مقادیر بزرگ قرار می گیرد. در این مقاله، یک معیار تفکیک پذیری جدید بر اساس نرم  $L_1$  معرفی خواهیم کرد که نسبت به داده های دورافتاده استوار است.

**کلمات کلیدی:** سری های زمانی، تحلیل مجموعه ی مقادیر تکین، تفکیک پذیری، نرم  $L_1$ .

### ۱ مقدمه

تحلیل مجموعه ی مقادیر تکین<sup>۱</sup> (SSA) یک روش قدرتمند ناپارامتری در تجزیه و تحلیل سری های زمانی است که در رشته های مختلفی نظیر ژئوفیزیک، شیمی، علوم مهندسی، پزشکی، هواشناسی، زمین شناسی و زیست شناسی کاربرد دارد. یکی از کاربردهای این روش، تجزیه ی<sup>۲</sup> سری زمانی به مولفه های تشکیل دهنده ی آن مثل روند<sup>۳</sup>، مولفه های دوره ای با دوره ی تناوب های مختلف و نوفه<sup>۴</sup> است. برای اندازه گیری میزان تفکیک پذیری<sup>۵</sup> مولفه های سری زمانی از معیار همبستگی وزنی<sup>۶</sup> استفاده می شود [۱]. ولی این معیار نسبت به داده های دورافتاده<sup>۷</sup> استوار<sup>۸</sup> نیست [۲]. به عبارت دیگر، مقدار همبستگی وزنی تحت تاثیر داده های دورافتاده قرار گرفته و افزایش (و یا کاهش) نامتعارف می یابد و در نتیجه نمی توان قضاوت درستی در مورد کیفیت تفکیک شدن مولفه های سری زمانی انجام داد. در این مقاله، یک معیار تفکیک پذیری جدید بر اساس نرم  $L_1$  معرفی خواهیم کرد که نسبت به داده های دورافتاده استوار است. این معیار جدید، در مقایسه با همبستگی وزنی، کمتر تحت تاثیر داده های دورافتاده قرار می گیرد؛ در نتیجه می توان قضاوت بهتری در مورد تفکیک پذیری مولفه های سری زمانی در حضور داده های دورافتاده داشت.

\*Corresponding Author

<sup>1</sup>Singular Spectrum Analysis

<sup>2</sup>Decomposition

<sup>3</sup>Trend

<sup>4</sup>Noise

<sup>5</sup>Separability

<sup>6</sup>Weighted Correlation

<sup>7</sup>Outliers

<sup>8</sup>Robust

## ۲ همبستگی وزنی

اولین گام در روش SSA، تبدیل سری زمانی  $\{y_1, \dots, y_N\}$  به یک ماتریس هنکل<sup>۹</sup> است. برای این منظور، ابتدا عددی بین ۱ و  $N$  (تعداد مشاهدات سری زمانی) انتخاب کرده و با  $L$  نشان می‌دهیم  $(1 < L < N)$ . عدد  $L$  را طول پنجره<sup>۱۰</sup> می‌نامند. سپس  $i$ امین بردار  $L$ -تاخیری<sup>۱۱</sup> را به صورت  $x_i = (y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+L-1})^T$  تعریف می‌کنیم، به طوری که  $i = 1, 2, \dots, K$  و  $K = N - L + 1$ . حال اگر  $K$  بردار  $L$ -تاخیری را به صورت ستونی در کنار هم قرار دهیم، ماتریسی ساخته می‌شود که ماتریس مسیر<sup>۱۲</sup> نامیده شده و با  $X$  نشان داده می‌شود (رابطه‌ی (۱)). این ماتریس که از  $L$  سطر و  $K$  ستون تشکیل شده است، دارای ویژگی هنکلی است؛ بدین معنی که درایه‌های واقع در هر قطر فرعی آن با هم برابرند.

$$X = [x_1 | \dots | x_K] = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_K \\ y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{K+1} \\ y_3 & y_4 & y_5 & \dots & y_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & y_{L+2} & \dots & y_N \end{pmatrix}. \quad (1)$$

در دومین گام از روش SSA، با استفاده از تجزیه‌ی مقدار تکین<sup>۱۳</sup> ماتریس مسیر  $X$ ، سری زمانی به مولفه‌های تشکیل دهنده‌ی آن تجزیه می‌شود. برای سنجش میزان تفکیک شدن مولفه‌های  $i$ ام و  $j$ ام سری زمانی که زیر سری‌های  $i$ ام و  $j$ ام می‌نامیم، از همبستگی وزنی که در رابطه‌ی (۲) تعریف شده است، استفاده می‌شود:

$$\rho_{ij}^{(w)} = \frac{\langle X_i, X_j \rangle}{\|X_i\|_F \|X_j\|_F} \quad (2)$$

در رابطه‌ی (۲)، نماد  $\langle X_i, X_j \rangle$  نشان دهنده‌ی ضرب داخلی دو ماتریس مسیر هنکل  $X_i$  و  $X_j$  مربوط به زیر سری‌های  $i$ ام و  $j$ ام بوده و به صورت رابطه‌ی (۳) تعریف می‌شود؛ به طوری که  $x_{mn}^{(i)}$  و  $x_{mn}^{(j)}$  به ترتیب درایه‌های سطر  $m$ ام و ستون  $n$ ام ماتریس‌های  $X_i$  و  $X_j$  هستند.

$$\langle X_i, X_j \rangle = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^K x_{mn}^{(i)} x_{mn}^{(j)} \quad (3)$$

نمادهای  $\|X_i\|_F$  و  $\|X_j\|_F$  نیز به ترتیب نشان دهنده‌ی نرم فروبنیوس<sup>۱۴</sup> ماتریس‌های  $X_i$  و  $X_j$  بوده و به صورت رابطه‌ی (۴) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \|X_i\|_F &= \sqrt{\langle X_i, X_i \rangle} = \sqrt{\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^K (x_{mn}^{(i)})^2} \\ \|X_j\|_F &= \sqrt{\langle X_j, X_j \rangle} = \sqrt{\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^K (x_{mn}^{(j)})^2} \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>9</sup>Hankel

<sup>10</sup>Window Length

<sup>11</sup>L-Lagged Vector

<sup>12</sup>Trajectory Matrix

<sup>13</sup>Singular Value Decomposition

<sup>14</sup>Frobenius

با استفاده از ویژگی هنکل بودن ماتریس‌های  $X_i$  و  $X_j$ ، همبستگی وزنی را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۵) نیز به دست آورد:

$$\rho_{ij}^{(w)} = \frac{\sum_{k=1}^N w_k y_k^{(i)} y_k^{(j)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N w_k (y_k^{(i)})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N w_k (y_k^{(j)})^2}} \quad (5)$$

در رابطه‌ی (۵)،  $y_k^{(i)}$  و  $y_k^{(j)}$  نشان دهنده‌ی  $k$ امین مشاهده از زیر سری  $i$ ام ( $j$ ام) بوده و  $w_k$  برابر است با تعداد تکرارهای مشاهده  $y_k^{(i)}$  و  $y_k^{(j)}$  در ماتریس هنکل  $X_i$  و  $X_j$ . در واقع می‌توان  $w_k$  را وزن مشاهده‌ی  $y_k^{(i)}$  (یا  $y_k^{(j)}$ ) در نظر گرفت؛ به همین دلیل، همبستگی معرفی شده در رابطه‌ی (۲) یا (۵) را همبستگی وزنی می‌نامند. وزن‌های  $w_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) را می‌توان از رابطه‌ی (۶) به دست آورد، به طوری که  $L^* = \min(L, K)$  و  $K^* = \max(L, K)$ .

$$w_k = \begin{cases} k & 1 \leq k < L^* \\ L^* & L^* \leq k \leq K^* \\ N - k + 1 & K^* < k \leq N \end{cases} \quad (6)$$

همواره داریم  $|\rho_{ij}^{(w)}| \leq 1$ . هر چقدر  $|\rho_{ij}^{(w)}|$  به عدد صفر نزدیک‌تر باشد، نشان دهنده‌ی تفکیک‌پذیری بهتر دو زیر سری  $i$ ام و  $j$ ام است [۱].

### ۳ معیار جدید تفکیک‌پذیری

می‌دانیم که اگر  $x$  و  $y$  دو بردار در یک فضای برداری نرم‌دار بوده و متعامد باشند آنگاه تساوی (۷) (رابطه‌ی فیثاغورث) برقرار است:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (7)$$

تفاضل دو مقدار  $\|x - y\|^2$  و  $\|x\|^2 + \|y\|^2$  را می‌توان به عنوان معیاری برای میزان انحراف از متعامد بودن (و یا همبستگی) دو بردار  $x$  و  $y$  در نظر گرفت. از طرفی می‌دانیم که در فضای برداری نرم‌دار نامساوی (۸) برقرار است [۴]:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (8)$$

اگر طرفین نامساوی (۸) را به توان دو رسانده و مجدداً مرتب‌سازی نماییم به نامساوی (۹) خواهیم رسید:

$$-1 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2\|x\|\|y\|} \leq +1 \quad (9)$$

حال می‌توان از نامساوی (۹) ایده گرفت و با استفاده از عبارت داخل نامساوی، معیاری برای تفکیک‌پذیری تعریف کرد به طوری که همواره مقدار آن بین  $-1$  و  $+1$  باشد. هدف ما ارائه معیاری برای تفکیک‌پذیری مولفه‌های سری زمانی است به طوری که نسبت به داده‌های دورافتاده استوار باشد. یکی از روش‌های استوارسازی، استفاده از نرم  $L_1$  است [۳]. بنابراین برای نیل به این هدف، نرم  $L_1$  را به کار برده و یک معیار تفکیک‌پذیری استوار به صورت رابطه‌ی (۱۰) تعریف می‌کنیم:

$$S_{ij}^{(L_1)} = \frac{\|X_i\|_{L_1}^2 + \|X_j\|_{L_1}^2 - \|X_i - X_j\|_{L_1}^2}{2\|X_i\|_{L_1}\|X_j\|_{L_1}} \quad (10)$$

در رابطه‌ی (۱۰)، نماد  $\|X_i\|_{L_1}$  نشان دهنده‌ی نرم  $L_1$  ماتریس  $X_i$  بوده و به صورت رابطه‌ی (۱۱) تعریف می‌شود به طوری که  $x_{mn}^{(i)}$  درایه‌ی سطر  $m$ ام و ستون  $n$ ام ماتریس  $X_i$  است. مقادیر  $\|X_i\|_{L_1}$  و  $\|X_i - X_j\|_{L_1}$  نیز به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

$$\|X_i\|_{L_1} = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^K |x_{mn}^{(i)}|. \quad (11)$$

با توجه به نامساوی (۹) واضح است که  $|S_{ij}^{(L_1)}| \leq 1$ . هر چقدر  $|S_{ij}^{(L_1)}|$  به عدد صفر نزدیک‌تر باشد، نشان دهنده‌ی تفکیک‌پذیری بهتر دو زیر سری  $i$ ام و  $j$ ام است. لازم به ذکر است که با استفاده از ویژگی‌های هنکل بودن ماتریس‌های  $X_i$  و  $X_j$ ،  $S_{ij}^{(L_1)}$  را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱۲) نیز بیان کرد:

$$S_{ij}^{(L_1)} = \frac{\left(\sum_{k=1}^N w_k |y_k^{(i)}|\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N w_k |y_k^{(j)}|\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^N w_k |y_k^{(i)} - y_k^{(j)}|\right)^2}{2 \left(\sum_{k=1}^N w_k |y_k^{(i)}|\right) \left(\sum_{k=1}^N w_k |y_k^{(j)}|\right)} \quad (12)$$

در رابطه‌ی (۱۲)،  $y_k^{(i)}$  و  $y_k^{(j)}$  نشان دهنده‌ی  $k$ امین مشاهده از زیر سری  $i$ ام و  $j$ ام بوده و مقادیر  $w_k$ ها همان وزن‌ها هستند که در تعریف همبستگی وزنی به کار رفته و از رابطه‌ی (۶) به دست می‌آیند.

## ۴ نتیجه‌گیری

تفکیک‌پذیری بحثی مهم در روش SSA است. برای سنجش میزان تفکیک‌پذیری مولفه‌های سری زمانی در روش SSA، از معیار همبستگی وزنی استفاده می‌شود؛ ولی این معیار نسبت به داده‌های دورافتاده استوار نیست. در این مقاله، یک معیار تفکیک‌پذیری جدید بر اساس نرم  $L_1$  معرفی شد که نسبت به داده‌های دورافتاده استوار است. این معیار جدید، در مقایسه با همبستگی وزنی، کمتر تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار می‌گیرد؛ در نتیجه می‌توان قضاوت بهتری در مورد تفکیک‌پذیری مولفه‌های سری زمانی در حضور داده‌های دورافتاده داشت.

## مراجع

- [1] N. Golyandina and A. Zhigljavsky, *Singular Spectrum Analysis for Time Series* (2nd ed.), Springer, (2020).
- [2] H. Hassani, R. Mahmoudvand, H. N. Omer and E. S. Silva, *A Preliminary Investigation into the Effect of Outlier(s) on Singular Spectrum Analysis*, *Fluctuation and Noise Letter*, **13**(4) 1450029 (2014).
- [3] R. A. Maronna and R. D. Martin and V. J. Yohai, *Robust Statistics: Theory and Methods*, John Wiley & Sons, Inc. (2006).
- [4] M. A. Proschan and P. A. Shaw, *Essential of Probability Theory for Statisticians*, Chapman & Hall/CRC (2016).

## حل عددی مسائل کنترل بهینه تاخیری با کمک تقریب پد

شقایق مطلبی\*، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه پیام نور، اردبیل

*shgyg1999@gmail.com*

آیتاله یاری، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

*a\_yary@yahoo.com, Ayari@pnu.ac.ir*

میرصادق سید صادقی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

*m\_sayedsadeghi@pnu.ac.ir*

**چکیده:** در این مقاله به بررسی یک روش تقریبی برای حل مسائل کنترل بهینه با سیستم‌های دارای تأخیر زمانی و قیود نابرابری نهایی پرداخته شده است. ابتدا با استفاده از تقریب پد، مسئله به مسئله‌ای بدون تأخیر زمانی تبدیل می‌شود و قیود نابرابری نهایی به قیود نابرابری تبدیل می‌شوند. سپس، یک روش محاسباتی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های بزیه برای حل مسئله ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** مسئله کنترل بهینه، سیستم تاخیری، تقریب پد، چندجمله‌ای بزیه.

## ۱ مقدمه

استفاده از منحنی‌های بزیه برای حل سیستم‌های کنترل بهینه دارای تأخیر زمانی با تقریب پد یک ایده جدید است. تکنیک مذکور زمان *CPU* و حافظه کامپیوتر را در مقایسه با روش‌های موجود مانند روش‌های ذکر شده در [۱]، [۴] کاهش می‌دهد و در عین حال دقت حل را حفظ می‌کند. می‌توانید برای مطالعه بیشتر در مورد پیشینه تحقیق به مراجع موجود در پایان مقاله رجوع کنید. در بخش ۲، بیان مسئله آورده می‌شود و روش پیشنهادی در بخش ۳ و مطالب مختصر در مورد بزیه در بخش ۴ و نهایتاً مثال در بخش ۵ بیان می‌شوند.



## ۲ بیان مسئله

در نظر بگیرید مسئله کنترل بهینه با تأخیر زمانی به صورت:

$$\min_{u, \gamma} J = \eta(x_{t_f}, \gamma) + \int_0^{t_f} L(x(t), x(t - \sigma), u(t), \gamma, t) dt \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \sigma), u(t), \gamma, t) \quad (2)$$

$$x(t) = \xi(t), -\sigma \leq t \leq 0 \quad (3)$$

$$\eta(x_f, \gamma) \geq 0 \quad (4)$$

تعریف می شود که در آن  $u(t) \in R^m$ ،  $x(t) \in R^n$  و  $\gamma \in R^p$  به ترتیب بردارهای حالت، کنترل و پارامترهای ناشناخته هستند،  $\eta \in R^q$  نماینده محدودیت‌های نابرابری نهایی است،  $t_f$  زمان پایان است و  $\sigma$  زمان تأخیر مربوط به بردار حالت  $x$  است. برای سادگی، بحث ما به مورد تأخیر زمانی واحد  $\sigma$  محدود خواهد شد. با این حال، همه نتایج می‌توانند به راحتی به مورد چندین تأخیر زمانی گسترش یابند. با استفاده از تقریب پد، مسئله به یک مسئله بدون تأخیر زمانی تبدیل شده و سپس با استفاده از منحنی‌های بزیه حل می‌شود.

## ۳ روش پیشنهادی

فرض کنید  $X(s)$  یک تبدیل لاپلاس دوطرفه از  $x(t)$  به صورت:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (5)$$

باشد. در حال حاضر،  $X(s)$  بر روی نوار همگرایی  $\alpha < \text{Re}(s) < \beta$  تعریف شده است، جایی که  $\text{Re}(s)$  قسمت حقیقی  $s$  را نشان می‌دهد، و  $\Leftrightarrow$  یک تبدیل لاپلاس دوطرفه را نشان می‌دهد. برای  $t \leq 0$  با فرض اینکه  $x(t) \Leftrightarrow X(s)$ ، تبدیل‌های لاپلاس برای  $x(t - \sigma)$  و حذف آرگومان تأخیر زمانی آن با فرض  $y(t) \simeq x(t - \sigma)$  به صورت:

$$y(t) \simeq x(t - \sigma) \Leftrightarrow Y(s) \simeq e^{-\sigma s} X(s), \alpha < \text{Re}(s) < \beta \quad (6)$$

خواهند شد. با استفاده از تقریب پد مرتبه اول داریم:

$$Y(s) \simeq \frac{\frac{2}{\sigma} - s}{\frac{2}{\sigma} + s} X(s) \rightarrow \left( \frac{2}{\sigma} + s \right) Y(s) \simeq \left( \frac{2}{\sigma} - s \right) X(s) \quad (7)$$

اگر تبدیل لاپلاس معکوس بر روی معادله آخر (۷) انجام شود، خواهیم داشت:

$$\dot{y}(t) \simeq \frac{2}{\sigma} [x(t) - y(t)] - \dot{x}(t) \quad (8)$$

برای افزایش دقت تقریب بالا، می‌توان تأخیر زمانی  $\sigma$  را به بخش‌های کوچکتر مانند:

$$y(t) \simeq x\left(t - \frac{\sigma}{2}\right) \quad (9)$$

$$z(t) \simeq y\left(t - \frac{\sigma}{2}\right) = x(t - \sigma) \quad (10)$$



تعریف کرد و نهایتاً با استفاده از تقریب پد مرتبه اول، می‌توان داشت:

$$\dot{x} = f(x(t), y(t), z(t), u(t)) \quad (11)$$

$$\dot{y}(t) \simeq \frac{4}{\sigma} [x(t) - y(t)] - \dot{x} \quad (12)$$

$$\dot{z}(t) \simeq \frac{4}{\sigma} [2y(t) - z(t) - x(t)] + \dot{x} \quad (13)$$

مسئله با تأخیر زمانی به مسئله‌ای از به حداقل رساندن  $J(x(t), z(t), u(t), \gamma, t)$  تبدیل می‌شود که دارای سیستمی با روابط (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) و با شرایط اولیه:

$$x(0) = \xi(0), y(0) = \xi\left(-\frac{\sigma}{2}\right), z(0) = \xi(-\sigma) \quad (14)$$

و شرط نهایی (۴) خواهد شد. استفاده مکرر از این روش به تدریج بهبود عملکرد را به همراه خواهد داشت. ولی این روش، منجر به افزایش مرتبه سیستم و در نتیجه افزایش زمان محاسباتی خواهد بود.

## ۴ مطالب مختصر در مورد بزیه

استراتژی ما استفاده از منحنی‌های بزیه برای تقریب جواب‌های  $u(t)$  و  $x_i(t)$  است. چندجمله‌ایهای بزیه از درجه  $n$  برای  $t \in [t_0, t_f]$  به صورت:

$$B_{r,n}\left(\frac{t-t_0}{h}\right) = \binom{n}{r} \frac{1}{h^n} (t_f - t)^{n-r} (t - t_0)^r \quad (15)$$

تعریف میشود که در آن  $h = t_f - t_0$  و نهایتاً تقریب جوابها براساس این چندجمله‌ایها به صورت

$$x_i(t) \simeq \sum_{r=0}^n a_r^i B_{r,n}\left(\frac{t-t_0}{h}\right), u(t) \simeq \sum_{r=0}^n b_r B_{r,n}\left(\frac{t-t_0}{h}\right) \quad (16)$$

خواهند شد. با جایگذاری  $u(t)$  و  $x_i(t)$  در معادلات (۱۱)–(۱۳) و شرایط مرزی (۱۴) مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ به یک مسئله بهینه سازی نامقید تبدیل می‌شود که آنرا می‌توان با نرم افزارهای مختلف از جمله MATLAB17 حل کرد، مجهولات مسئله ایجاد شده ضرایب  $a_r^i, b_r$  هستند که بایستی بدست آوریم و متغیرهای حالت و کنترل بر اساس آنها قابل دسترسی خواهند شد.

## ۵ مثال

در این بخش، کارایی روش ارائه شده را از طریق یک مثال عددی بررسی می‌کنیم. یک مسئله کنترل بهینه با تأخیر زمانی

$$\min J = 5(x_1(2))^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt \quad (17)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), 0 \leq t \leq 2 \quad (18)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + u(t), 0 \leq t \leq 2 \quad (19)$$

$$x_1(0) = 10, x_1(t) = 0, -1 \leq t < 0 \quad (20)$$

را در نظر بگیرید ، جواب واقعی به صورت

$$u(t) = \begin{cases} \delta \sin(2-t) + \frac{\delta}{2}(1-t) \sin(t-1) & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ \delta \sin(2-t) & \text{for } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (21)$$

ارائه شده است [۴] که در آن  $\delta = 2.5599$  است و  $J^* = 3.071361899443118$ . با استفاده از روش پیشنهادی، می‌توان به مقدار بهینه  $J = 3.04246518971317$  رسید و این مقدار با مقدار ارائه شده در [۴] ( $J = 3.256613$ ) قابل مقایسه است. با استفاده از روش پیشنهادی، می‌توان به موارد:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 10 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + 4.84426425991426t \left(1 - \frac{t}{2}\right), \\ x_2(t) &= -7.57786787004287 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 - 1.21106606497857t^2, \\ x_3(t) &= 8.74933030407381t \left(1 - \frac{t}{2}\right) - 1.39164977425000t^2, \\ x_4(t) &= 0.674964953083765t \left(1 - \frac{t}{2}\right) - 0.683400902532152t^2, \\ u(t) &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 (2.5599 \sin(2) - 1.279950000 \sin(1)) + 3.68282830005636t \left(1 - \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

دست یافت.

## ۶ نتایج

برای حل مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی، از تقریب *Pade* مرتبه اول استفاده می‌شود. چون برای بدست آوردن نتایج بهتر و با دقت بیشتر می‌توان از پد مرتبه بالاتر بهره‌مند شد لذا این روش جنبه نوآوری داشته از لحاظ کاربردی و موثر بودن می‌تواند به نوعی روش جدید تلقی شده و جایگزین روشهای قدیمی شود که به آسانی قابل اجرا است و این روش بدون از دست دادن دقت محاسباتی، از نظر محاسبات عددی، قابل درک است.

## مراجع

- [1] H. Banks, Approximation of nonlinear functional differential equation control systems, J. Optim. Theory Appl., 29(1979), 383–408.
- [2] F. Ghomanjani, A new approach for solving fractional differential-algebraic equations, J. Taibah Univ. Sci., 11(2017), 1158-1164.
- [3] F. Ghomanjani, M. H. Farahi and M. Gachpazan, Bezier control points method to solve constrained quadratic optimal control of time varying linear systems, Comput. Appl. Math., 31(3)(2012), 433–456.
- [4] A. Nazemi and M. Mansoori, Solving optimal control problems of the time-delayed systems by Haar wavelet, J. Vib. Control, 22(2016), 2657–2670.

# تحلیل رفتار ناوردا مقیاسی در داده‌های مربوط به اختلاف زمان گام برداشتن انسان با استفاده از آنالیز چندفرکتالی

احمد نادری بنی \* گروه فیزیک، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

anaderi@tvu.ac.ir

معصومه بی باک، گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

m.bibak62@gmail.com

(عضو هیات علمی)

**چکیده:** در سال‌های اخیر تحلیل سری‌های زمانی فیزیکی و فیزیولوژیکی با روش‌های مبتنی بر آنالیز فرکتالی مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله برای اولین بار سری زمانی مربوط به اختلاف زمان گام برداشتن انسان با هدف مقایسه داده‌های انسان سالم و بیمار با دو روش مختلف مبتنی بر آنالیز فرکتالی یعنی آنالیز چندفرکتالی استاندارد و آنالیز حذف شیب چندفرکتالی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته شده است. نتایج حاصله نشان می‌دهد اولاً سیگنال‌های الکتریکی حاصل از عصب‌های ماهیچه‌ای پای انسان هنگام راه رفتن دارای رفتار پیچیده و ناوردا-مقیاس است و ثانیاً داده‌های مربوط به انسان سالم همبستگی بیشتری نسبت به داده‌های مربوط به انسان بیمار از خود نشان می‌دهند.

**کلمات کلیدی:** آنالیز فرکتالی استاندارد، آنالیز حذف شیب چندفرکتالی، گام برداشتن انسان، همبستگی بلندبرد

## ۱ مقدمه

یک سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که در زمان‌های متوالی اندازه‌گیری شده است. مثال‌های بارز آن در شاخه‌های مختلف از فیزیک و شیمی گرفته تا مهندسی، اقتصاد، هواشناسی، زمین‌شناسی و فیزیولوژیکی مانند سیگنال‌های الکتریکی قلب و سیگنال‌های مغز قابل مشاهده است [۱]. هر سری زمانی عبارت است از تعدادی داده عددی که ممکن است بین مقادیر آن‌ها رابطه معناداری وجود داشته باشد که معمولاً آن را همبستگی می‌نامند. اگر همبستگی داده‌ها غیرخطی باشد سری زمانی آشوبناک است. برخی از روش‌های متداول در تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی مختلف عبارتند از استفاده از تابع همبستگی و ۲۴۶ دانسیته احتمالی، تشکیل سری فوریه در حوزه فرکانس،

استفاده از فیلتر برای حذف نویز از سری، تکنیک‌های تحلیل زمان-فرکانس و تبدیل فوریه زمان-کوتاه [۲]. در سال‌های اخیر روش‌های جدیدی برای آنالیز داده‌های فیزیکی ابداع گردیده است که عبارتند از تحلیل آشوبی و بُعد همبستگی، تحلیل فرکتالی استاندارد، تحلیل حذف شیب، تحلیل حذف شیب چندفرکتالی و تبدیل پیوسته موجک [۴]. هرگاه بخواهیم خواص فیزیکی یک سیستم پیچیده را مورد بررسی قرار دهیم باید پارامترهای ناورد-مقیاس را برای آن‌ها معرفی کنیم. یکی از مهم‌ترین خواص سیستم‌های پیچیده، فرکتالی بودن آن‌هاست، به این معنا که برای این سیستم‌ها می‌توان یک ساختار خودشبه معرفی کرد و با پارامترهای فرکتالی آن‌ها را مورد شناسایی قرار داد. مطالعات اخیر نشان داده می‌توان رفتار پیچیده سیستم‌ها را با بررسی داده‌های تولید شده توسط آن‌ها مورد مطالعه، تحلیل و مقایسه قرار داد. سری‌های زمانی چنین سیستم‌هایی با کمک فرمول بندی‌های ناورد-مقیاس مانند فرمول بندی چندفرکتالی و یا فرمول بندی حذف شیب چندفرکتالی مورد بررسی قرار می‌گیرد [۴]. مبنایی که بعد فرکتالی یک سیستم را مشخص می‌کند رفتار سیستم به ازای تقسیم‌بندی‌های مختلف آن است. در هر تقسیم‌بندی سیستم به تعدادی جعبه یکسان تفکیک می‌شود. توزیع شدت مقادیر تولید شده توسط سیستم در هر جعبه در بررسی رفتار فرکتالی سیستم مهم است.

## ۲ چگونگی محاسبه پارامترهای مقیاسی در آنالیز چندفرکتالی داده‌ها

در این قسمت به چگونگی اندازه‌گیری خواص چندفرکتالی داده‌های یک سری زمانی اشاره می‌شود، ابتدا الگوریتم محاسبه چندفرکتالی استاندارد را که برای آنالیز یک سری زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان می‌کنیم [۱]: ۱- سری زمانی را با  $X(i)$  نشان می‌دهیم به‌طوری که تعداد این داده‌ها  $N$  می‌باشد (طول سری). ۲- تابع  $\mu_{i,j}$  به عنوان سنج سیستم تعریف می‌شود:

$$\mu_{i,j} = |X(i+j) - X(i)| \quad \text{۳- محاسبه تابع پارش } Z(q,j), \text{ پارامتر } T(q,j) \text{ و } C(q,j):$$

$$Z(q,j) = \sum \mu_{i,j}^q = j^{T(q,j)}, C(q,j) = \frac{d^2 T(q,j)}{dq^2}$$

۴- محاسبه  $(C(q,j))_{max}$  های مختلف بر حسب  $j$  و استخراج پارامتر افت نمایی  $\alpha_c$  (شکل ۱). در این مقاله پارامتر  $\alpha_c$  برای داده‌های مربوط به اختلاف زمان گام برداشتن انسان برای ۱۰ انسان سالم و ۱۰ انسان بیمار مورد محاسبه قرار گرفته است که در بخش انتهایی مقاله، نتایج مربوطه گزارش شده است.

## ۳ معرفی الگوریتم آنالیز حذف شیب چندفرکتالی

روش حذف شیب چند فرکتالی در چند سال اخیر بصورت یک تکنیک گسترده برای اندازه‌گیری مقیاسی و نیز مشاهده همبستگی‌های بلند برد در سری‌های ناپایدار درآمده است. الگوریتم این روش به این صورت است [۱]: ۱- در مرحله اول با تقسیم بندی سری ازمانی  $X(i)$  به بازه‌هایی با طول  $S$ ، که مقدار آن می‌تواند شامل یک داده تا  $N$  داده باشد، سری زمانی جدیدی بنام  $Y(i)$  تولید می‌شود به‌طوری‌که  $Y(i) = \sum_{k=1}^i [X(k) - \bar{X}]$  و  $1 < i < N$  که  $N$  طول سری زمانی و  $\bar{X}$  میانگین آن است. ۲- شیب هر بازه، با روش حذف شیب، حذف می‌گردد و تابع  $F^2(\nu, S)$  بصورت زیر دست می‌آید:

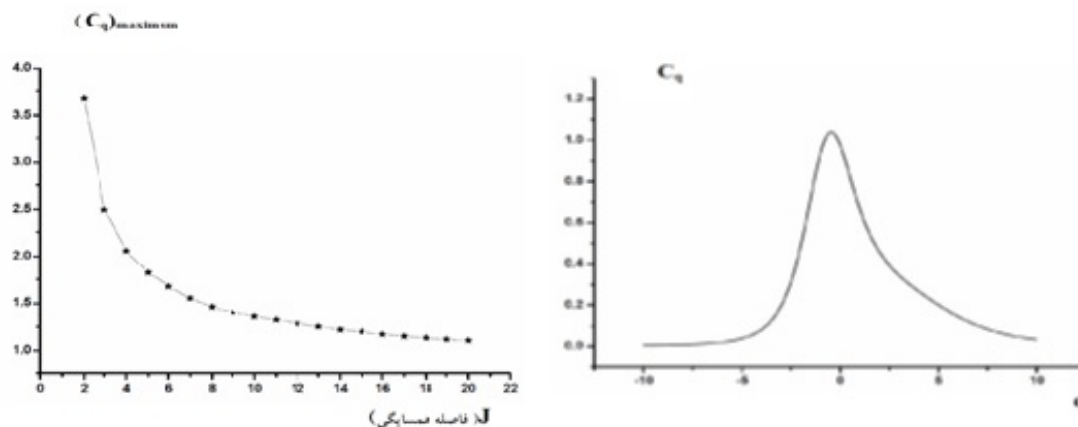
$$F^2(\nu, S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^s (Y_s[(\nu-1)S + i] - y_\nu(i))^2, \nu = 1, 2, \dots, N_s$$

$$F^2(\nu, S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^s (Y_s[N - (-\nu - N_s)S + i] - y_\nu(i))^2, \nu = N_{s+1}, \dots, 2N$$

در اینجا  $y_\nu(i)$  یک تابع چندجمله‌ای در بازه‌ی  $\nu$  ام است. ۳- در این مرحله روی مقادیر مختلف  $F^2(\nu, S)$  میانگین‌گیری انجام و تابعی به نام افت و خیز  $F_q(S)$  به صورت  $F_q(S) = \left( \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, S)]^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}$  محاسبه می‌گردد، که  $q$  یک متغیر حقیقی و  $N_s = \text{int}(\frac{N}{S})$  است. ۴- در نهایت پارامتر مقیاسی  $h(q)$  طبق رابطه‌ی  $F_q(S) = S^{h(q)}$  محاسبه می‌شود. به  $h(q)$  نمای تعمیم‌یافته هارست گفته می‌شود و مقدار آن نشان دهنده‌ی نوع همبستگی بلندبرد در سری زمان مورد مطالعه است به طوری که اگر  $0 < h(q) < 0.5$ ، سری پادهمبسته و چنانچه  $0.5 < h(q) < 1$ ، سری همبسته و اگر  $h(q) = 0.5$  سری ناهمبسته و کاملاً تصادفی است [۴].

## ۴ نتایج

الف) آنالیز چندفرکتالی با الگوریتم معرفی شده برای تحلیل داده‌های مربوط به سیگنال‌های الکتریکی ناشی از اعصاب ماهیچه‌ای پای انسان‌های سالم (۱۰ انسان سالم متفاوت) و انسان‌های بیمار با دو بیماری مختلف پارکینسون و اسکروز آمیوتروفیک جنبی (برای هر بیماری داده‌های ۱۰ انسان مختلف) مورد استفاده قرار گرفته است [۳]. همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود رفتار  $C_q$  نسبت به  $z$  دارای یک بیشینه در نزدیکی  $q = 0$  است. با توجه به



شکل ۱: رفتار پارامتر  $C_q$  نسبت به  $q$  که نشان‌دهنده وجود یک قله در نزدیکی  $q = 0$  است و همچنین رفتار افت نمایی  $(C_{q,j})_{\text{max}}$  نسبت به  $z$  که مبنای استخراج پارامتر مقیاسی  $\alpha_c$  می‌باشد.

تعریف تابع پارش که مشابه آن برای سیستم‌های ترمودینامیکی نیز تعریف می‌شود و همچنین پارامتر  $C(q, j)$  که شبیه ظرفیت گرمایی در سیستم ترمودینامیکی است، تغییرات پارامتر  $C(q, j)$  نسبت به  $z$ ، دارای یک رفتار افت نمایی می‌باشد. با استفاده از روش چندفرکتالی استاندارد برای هرکدام از سری‌های زمانی (مربوط به ۱۰ رکورد برای انسان سالم و ۱۰ رکورد برای افراد بیمار) ابتدا پارامتر  $C_{q,j}$  به ازای  $z$  های متفاوت محاسبه شده است. سپس رفتار مقیاسی  $j^{-\alpha_c} = (C_{q,j})_{\text{max}}$  را مشاهده کرده‌ایم که  $z$  از ۱ تا ۱۰ (تعداد رکوردها شامل ۱۰ انسان سالم و ۱۰ انسان با بیماری یکسان) تغییر می‌کند. محاسبات ما که در جدول ۱؛ ۲۴۸ داده شده‌است نشان می‌دهد پارامتر مقیاسی میانگین  $\alpha_c$  برای ۱۰ انسان سالم و ۱۰ انسان بیمار (با دو بیماری متفاوت)، تفاوت واضحی از خود نشان می‌دهد. پس این نشان

می‌دهد که پارامترهای مقیاسی ناشی از فرمول‌بندی چندفرکتالی استاندارد می‌تواند به خوبی رفتار داده‌های فیزیولوژیک را منعکس نماید و در تشخیص رفتار داده‌ها و گروه‌بندی آن‌ها که در این مقاله گروه انسان‌های سالم و بیمار است به ما کمک کند.

جدول ۱: نتایج مربوط به پارامتر مقیاسی  $\alpha_c$  با کمک فرمول‌بندی چندفرکتالی استاندارد

| وضعیت سلامتی انسان            | مقدار میانگین $\alpha_c$ بر روی ۱۰ رکورد مختلف |
|-------------------------------|------------------------------------------------|
| سالم                          | ۰/۷۶                                           |
| بیماری پارکینسون              | ۰/۴۱                                           |
| بیماری اسکروز آمیوتروفیک جنبی | ۰/۳۵                                           |

ب) همچنین ما به منظور بررسی همبستگی داده‌های مورد نظر، آن‌ها را با روش حذف شیب چندفرکتالی مورد آنالیز قرار داده‌ایم. نتایج در جدول ۲ به نمایش در آمده است. مقادیر محاسبه شده نشان می‌دهد داده‌های مربوط به انسان سالم رفتار همبسته‌تری نسبت به داده‌های انسان بیمار از خود نشان می‌دهد و این هم نشان‌دهنده رفتار پیچیده‌تر برای داده‌های فیزیولوژیکی انسان سالم نسبت به انسان بیمار است که با نتایج قبلی بدست آمده در آنالیز سایر داده‌های فیزیولوژیکی مانند سری زمانی سیگنال‌های الکتریکی قلب و ... در توافق است [۱].

جدول ۲: نتایج مربوط به پارامتر مقیاسی  $h(q)$  با کمک فرمول‌بندی حذف شیب چندفرکتالی

| وضعیت سلامتی انسان            | مقدار میانگین $h(q)$ بر روی ۱۰ رکورد مختلف |
|-------------------------------|--------------------------------------------|
| سالم                          | ۰/۸۲                                       |
| بیماری پارکینسون              | ۰/۴۵                                       |
| بیماری اسکروز آمیوتروفیک جنبی | ۰/۴۰                                       |

## مراجع

[۱] ا. نادری بنی و همکاران، تحلیل سیگنال‌های الکتریکی قلب با روش حذف شیب چندفرکتالی، مجله پژوهش فیزیک ایران، شماره ۲، جلد ۶، تابستان ۱۳۸۵.

[2] Ivonov, et. all, "Levels of Complexity in Scale-Invariant Neural Signals," Chaos 11, No.3, pp. 641-652, 2001.

[3] <https://physionet.org/>

[4] P. Oswiecimka, P. Kwapien, and P. Drozd, "Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures," Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys, vol. 74, 2006.

[5] M. F. Shlesinger, "Fractal time and  $\frac{1}{f}$  noise in complex systems," Ann. N. Y. Acad. Sci. vol. 504, pp.214, 1987.

## ارائه یک مدل ریاضی برای بررسی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر استئوکلاست

مریم نیکبخت\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

maryam\_nikbakht@yahoo.com

جهانگیر چشم‌آور، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

j.cheshmavar@gmail.com

سامره بسطامی، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

s.bastami.۱۹۸۱@gmail.com

**چکیده:** متاستاز استخوان به انتقال سلول‌های سرطانی از بافت اولیه در بدن به بافت استخوان گفته می‌شود. در این مطالعه یک مدل از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی، برای متاستاز استخوان گسترش داده شده است. مدل ارائه شده، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد که در آن رابطه بین سلول‌های استخوانی استئوکلاست و استئوبلاست، سلول‌های تومور و دوزهای داروی زولدرونیک اسید توصیف شده است. هدف از ارائه این مدل مقایسه تغییرات سلول‌های استئوکلاست به عنوان محل اثر داروی زولدرونیک اسید، در حالت بدون دارو (مدل ریاضی اولیه) و حالت با دارو (مدل ریاضی پیشنهادی) می‌باشد. شبیه‌سازی عددی مدل‌ها در نرم‌افزار متلب، نشان می‌دهد که متغیر استئوکلاست در مدل ریاضی ارائه شده کاهش چشمگیری نسبت به حالت بدون دارو دارد که کاملاً منطبق بر ادبیات موضوع است.

**کلمات کلیدی:** مدل ریاضی، متاستاز استخوان، داروی زولدرونیک اسید، شبیه‌سازی عددی، استئوکلاست.

### ۱ مقدمه

طی دهه‌های اخیر مدل‌های ریاضی متعددی برای متاستاز استخوان که یک عارضه بسیار رایج و غیرقابل درمان، ناشی از سرطان بوده و در مرحله پیشرفته این بیماری بروز می‌کند، معرفی شده و همچنین پژوهش‌هایی نیز به ارایه مدل ریاضی از نوع بهینه‌سازی و یا کنترل بهینه برای توصیف اثر داروهایی مانند دنوزومب، تاموکسیفن و پاکلیتاکسل بر متاستاز استخوان پرداخته‌اند [۴]. اما تاکنون برای یکی از مهم‌ترین و رایج‌ترین داروهای این عارضه به نام زولدرونیک اسید، مدل ریاضی جهت بررسی اثر مستقل دارو و یا تعداد دوزهای آن بر عارضه متاستاز استخوان ارائه نشده است. از آنجا

که این دارو، از طریق مهار حجم فعالیت و تسریع مرگ سلولی دسته‌ای از سلول‌های استخوانی به نام استئوکلاست‌ها، نقش حیاتی خود را در ایجاد تأخیر در بروز اتفاق‌های اسکلتی و بهبود کیفیت زندگی فردی و اجتماعی بیماران ایفا می‌کند [۱]، لذا در این پژوهش با وارد کردن ضابطه اثر این دارو در مدل ریاضی متاستاز استخوان، به ارائه مدل ریاضی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان و مقایسه تغییرات متغیر استئوکلاست در دو مدل یا به عبارتی در حالت با دارو و بدون دارو می‌پردازیم.

## ۲ مدل ریاضی متاستاز استخوان

برای دستیابی به هدف این پژوهش ابتدا باید یک مدل ریاضی متاستاز استخوان را به عنوان مدل پایه انتخاب کنیم. برای این منظور، مدل ارائه شده توسط جرز و کاماچو در سال ۲۰۱۸ [۳] را که در واقع یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی، شامل برهمکنش‌های بین سلول‌های استئوکلاست  $(C(t))$ ، استئوبلاست  $(B(t))$  و تومور  $(T(t))$  می‌باشد و پارامترهای آن در جدول ۱ معرفی شده‌اند، در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 C(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_1 C(t) + \sigma_1 C(t) T(t); \\ \frac{dB(t)}{dt} = \alpha_2 B(t) C(t)^{\gamma_2} - \beta_2 B(t) + \sigma_2 B(t) T(t); \\ \frac{dT(t)}{dt} = \alpha_3 \left(1 - \frac{T(t)}{M}\right) T(t) + \sigma_3 T(t) C(t)^{\gamma_2} + \sigma_4 T(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_3 T(t); \end{cases} \quad (1)$$

## ۳ مدل ریاضی اثر دارو

گام بعدی، انتخاب ضابطه‌ای از بین مدل‌های محاسبه اثر دارو، برای زولدرونیک اسید است. با توجه به نوع تجویز این دارو که به صورت تجویز وریدی، با حجم ۴ میلی گرم در هر دوز و با فاصله زمانی استاندارد ۴ هفته بین دوزهای دارو می‌باشد و بالاترین سرعت در رسیدن به محل هدف و کمترین اتلاف حجم دارو را دارد، معادله هیل [۲] برای این منظور در نظر گرفته می‌شود که ضابطه آن برای یک دوره مصرف دارو در بازه زمانی  $[0, t_{end}]$  که شامل  $n$  دوز است به صورت زیر خواهد بود.

$$H(t, n) = \sum_{k=1}^n k \cdot D_{\max}(t) \cdot \frac{D_p(t)}{D_{50}(t) + D_p(t)}; \quad (2)$$

در ضابطه فوق،  $D_p(t)$  معادل با حجم هر دوز دارو در پلاسمای خون و  $n = \left\lfloor \frac{t_{end}}{d} \right\rfloor + 1$  برابر با تعداد دوزهای دارو در بازه  $[0, t_{end}]$  بوده و  $d$  معرف فاصله زمانی بین دوزهای دارو است. پارامترهای مدل نیز در جدول ۱ معرفی شده‌اند.

## ۴ مدل ریاضی پیشنهادی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان

در این مرحله باید ضابطه داروی زولدرونیک اسید را در مدل متاستاز استخوان (۱) وارد کنیم. براساس ادبیات موضوع، اثر این دارو بر متاستاز استخوان صرفاً با مهار افزایش بیش از حد عملکرد سلول‌های استئوکلاست و از طریق حذف این سلول‌ها است. بنابراین محل ضابطه دارو در معادله اول بوده و به ضریب  $\beta_1$  اضافه می‌شود. در آخرین مرحله نیز معادله دیفرانسیل متغیر دارو (۴) که از [۲] راجع شده و با لحاظ کردن دوره مصرف و تعداد دوزهای

دارو در بازه زمانی به مدل اضافه می شود.

$$\frac{dD_p(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^n k \cdot k_e D_p(t); \quad (3)$$

با اضافه کردن (۳) به (۱)، مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 C(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_1 C(t) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot D_{\max}(t) \cdot D_p(t)}{D_{50}(t) + D_p(t)} \right) C(t) + \sigma_1 C(t) T(t); \\ \frac{dB(t)}{dt} = \alpha_2 B(t) C(t)^{\gamma_2} - \beta_2 B(t) + \sigma_2 B(t) T(t); \\ \frac{dT(t)}{dt} = \alpha_3 \left( 1 - \frac{T(t)}{M} \right) T(t) + \sigma_3 T(t) C(t)^{\gamma_2} + \sigma_4 T(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_3 T(t); \\ \frac{dD_p(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^n k \cdot k_e D_p(t); \end{cases} \quad (4)$$

جدول ۱: پارامترهای مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان [۲، ۳]

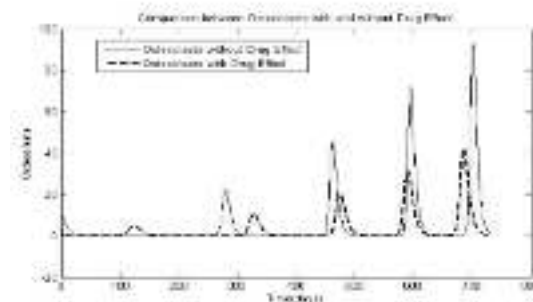
| ضریب       | توضیحات                                  | مقدار اولیه | ضریب           | توضیحات                              | مقدار اولیه |
|------------|------------------------------------------|-------------|----------------|--------------------------------------|-------------|
| $\alpha_1$ | نرخ تولید سلول های استئوکلاست            | 0/3         | $\sigma_3$     | اثر سلول های استئوکلاست بر تومور     | 0/001       |
| $\alpha_2$ | نرخ تولید سلول های استئوبلاست            | 0/1         | $\sigma_4$     | اثر سلول های استئوبلاست بر تومور     | 0/0         |
| $\alpha_3$ | نرخ تولید سلول های تومور                 | 0/055       | $M$            | ظرفیت حمل و انتقال سلول های تومور    | 300         |
| $\beta_1$  | نرخ مرگ سلول های استئوکلاست              | 0/2         | $K_e$          | سرعت حذف دارو در بدن                 | 0/1139      |
| $\beta_2$  | نرخ مرگ سلول های استئوبلاست              | 0/02        | $D_{\max}$     | بیشترین اثر دارو                     | 1/204       |
| $\beta_3$  | نرخ مرگ سلول های تومور                   | 0/05        | $D_{50}$       | حجم دارو که دارای نصف اثر آن است     | 0/0001      |
| $\gamma_1$ | اثر بازدارنده ی استئوبلاست بر استئوکلاست | -0/3        | $d$            | فاصله زمانی استاندارد ۴ هفته         | 28          |
| $\sigma_1$ | اثر سلول های تومور بر استئوکلاست         | 0/0005      | $[0, t_{end}]$ | مدت درمان یا مصرف دارو (روز)         | $[0, 730]$  |
| $\sigma_2$ | اثر سلول های تومور بر استئوبلاست         | -0/009      | $n$            | تعداد دوز دارو با فاصله زمانی ۴ هفته | 27          |

## ۵ شبیه سازی عددی

در این بخش نتایج شبیه سازی عددی برای مدل متاستاز استخوان و مدل پیشنهادی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان از طریق نرم افزار متلب و با در نظر گرفتن مقادیر ضرایب طبق جدول ۱ و جواب اولیه به صورت  $(C(t), B(t), T(t)) = (10, 5, 1)$  [۳] صورت گرفته است. شکل ۱ تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر استئوکلاست را در مقایسه با نمودار این متغیر در مدل متاستاز استخوان و یا به عبارتی مقایسه دو حالت با دارو و بدون دارو را نشان می دهد. در شکل ۱، نمودار مقایسه تغییرات استئوکلاست ها در حالت بدون دارو و با دارو، کاهش چشمگیر تعداد استئوکلاست ها تحت تأثیر داروی زولدرونیک اسید را نشان می دهد که این نتیجه با ادبیات موضوع کاملاً مطابقت دارد.

## ۶ نتایج

در این مقاله، با وارد کردن ضابطه داروی زولدرونیک اسید در یک مدل ریاضی متاستاز استخوان، مدل تأثیر این دارو بر متاستاز استخوان با هدف مقایسه تغییرات سلول های استئوکلاست در حالت بدون دارو و با دارو ارائه شد. با حصول



شکل ۱: مقایسه نمودار تغییرات سلول‌های استئوکلاست در حالت با دارو و بدون دارو

نتیجه منطبق بر ادبیات موضوع نشان دادیم که می‌توان با اضافه کردن ضابطه مناسب داروی زولدرونیک اسید به مدل ریاضی متاستاز استخوان، میزان اثر دارو بر این عارضه را از طریق مقایسه نتایج دو مدل ریاضی مورد بررسی قرار داد.

## مراجع

- [1] A., Ahmad, "Breast Cancer Metastasis and Drug Resistance: Challenges and Progress,". Second ed. Springer Books on Advances in Experimental Medicine and Biology Series. Springer Nature Switzerland AG Publications. Second ed., 2019.
- [2] R.M., Coelho, J.M., Lemos, I., Alho, D., Valerio, A.R., Ferreira, L., Costa, S., Vinga, "Dynamic modeling of bone metastasis, microenvironment and therapy Integrating parathyroid hormone (PTH) effect, anti-resorptive and anti-cancer therapy," Journal of Theoretical Biology, vol. 391, pp. 1-12, 2016.
- [3] S., Jerez, A., Camacho, "Bone metastasis modeling based on the interactions between the BMU and tumor cells," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 330, pp. 866-876, 2018.
- [4] R., Miranda, S., Vinga, D., Valerio, "Studying Bone Remodelling and Tumour Growth for Therapy Predictive Control," Journal of Mathematics, vol. 8, pp. 679-701, 2020.

## مقایسه اثر دوزهای داروی زولدرونیک اسید بر استئوکلاست در مدل ریاضی

**چکیده:** در این مطالعه با گسترش یک مدل از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی برای متاستاز استخوان که در آن رابطه بین سلول‌های استئوکلاست، استئوبلاست، تومور توصیف شده است، مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان ارائه می‌شود. هدف از ارائه این مدل، بکارگیری مدل ریاضی جهت مقایسه میزان اثربخشی فاصله زمانی استاندارد بین دوزهای دارو بر کاهش و مهار سلول‌های استئوکلاست با فاصله زمانی پیشنهادی مؤثر در کاهش عوارض دارو است. با بکارگیری نرم‌افزار متلب، نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که فاصله زمانی پیشنهادی، نسبت به فاصله زمانی استاندارد دارو اثربخشی بیشتری بر مهار سلول‌های استئوکلاست دارد.

**کلمات کلیدی:** مدل ریاضی، متاستاز استخوان، داروی زولدرونیک اسید، استئوکلاست، فاصله زمانی پیشنهادی.

### ۱ مقدمه

تاکنون برای متاستاز استخوان که عارضه ناشی از مراحل پیشرفته بیماری سرطان بوده و شامل انتقال سلول‌های سرطانی به بافت استخوان می‌باشد، مدل‌های ریاضی متعددی ارائه شده است. یک داروی بسیار رایج برای این عارضه، زولدرونیک اسید با نام تجاری زومتا است که از نوع داروهای ضد درد و مهارکننده استئوکلاست بوده و در حال حاضر با دوز ۴ میلی‌گرم به صورت تزریق در رگ و با فاصله زمانی استاندارد ۴ هفته یکبار تجویز می‌شود [۳]. طی سال‌های اخیر، مسأله افزایش فاصله زمانی بین دوزهای این دارو از حد استاندارد ۴ هفته به ۱۲ هفته، با هدف کاهش عوارض جانبی این دارو که وابسته به دوز و مدت مصرف دارو هستند، موضوع تحقیقات بسیار و دارای یافته‌های مثبت متعدد بوده است و با این وجود، هنوز به عنوان فاصله زمانی استاندارد برای این دارو مورد تأیید رسمی قرار نگرفته و نیازمند

مطالعات بیشتر است [۴]. لذا در این مطالعه، با به کارگیری مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان، به بررسی و مقایسه اثر دوزهای این دارو با فاصله زمانی پیشنهادی ۱۲ هفته و حالت استاندارد این دارو (یعنی فاصله زمانی ۴ هفته) بر مهار سلول‌های استئوکلاست پرداخته و نتایج را با یافته‌های مطالعات پزشکی در این زمینه مقایسه می‌کنیم.

## ۲ مدل ریاضی متاستاز استخوان و ضابطه اثر دارو

برای دستیابی به هدف این پژوهش ابتدا یک مدل ریاضی متاستاز استخوان ارائه شده توسط جرز و کاماچو در سال ۲۰۱۸ را که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی، شامل برهم کنش‌های بین سلول‌های استئوکلاست ( $C(t)$ )، استئوبلاست ( $B(t)$ ) و تومور ( $T(t)$ ) می‌باشد و پارامترهای آن در جدول ۱ معرفی شده‌اند، به عنوان مدل پایه انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 C(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_1 C(t) + \sigma_1 C(t) T(t); \\ \frac{dB(t)}{dt} = \alpha_2 B(t) C(t)^{\gamma_2} - \beta_2 B(t) + \sigma_2 B(t) T(t); \\ \frac{dT(t)}{dt} = \alpha_3 \left(1 - \frac{T(t)}{M}\right) T(t) + \sigma_3 T(t) C(t)^{\gamma_2} + \sigma_4 T(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_3 T(t); \end{cases} \quad (1)$$

در گام بعدی، با توجه به اینکه نوع تجویز داروی زولدرونیک اسید که به صورت تجویز وریدی بوده و بالاترین سرعت در رسیدن به محل هدف و کمترین اتلاف حجم دارو را دارد، معادله هیل به عنوان ضابطه دارو در نظر گرفته می‌شود [۱] و ضابطه آن برای یک دوره مصرف دارو در بازه زمانی  $[0, t_{end}]$  که شامل  $n$  دوز است به صورت زیر خواهد بود.

$$H(t, n) = \sum_{k=1}^n k \cdot D_{\max}(t) \cdot \frac{D_p(t)}{D_{50}(t) + D_p(t)}; \quad (2)$$

در ضابطه فوق،  $D_p(t)$  معادل با حجم هر دوز دارو در پلاسمای خون و  $n = \left\lfloor \frac{t_{end}}{d} \right\rfloor + 1$  برابر با تعداد دوزهای دارو در بازه  $[0, t_{end}]$  بوده و  $d$  معرف فاصله زمانی بین دوزهای دارو است. پارامترهای مدل نیز در جدول ۱ معرفی شده‌اند.

## ۳ مدل پیشنهادی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان

در این مرحله از آنجا که براساس ادبیات موضوع، اثر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان صرفاً با مهار افزایش بیش از حد عملکرد سلول‌های استئوکلاست و از طریق حذف این سلول‌ها است، بنابراین محل ضابطه دارو در معادله اول بوده و به ضریب  $\beta_1$  در (۱) اضافه می‌شود و در آخرین مرحله نیز معادله دیفرانسیل متغیر دارو (۳) که از [۱] استخراج شده، با لحاظ کردن دوره مصرف و تعداد دوزهای دارو در بازه زمانی به (۱) اضافه می‌شود.

$$\frac{dD_p(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n k \cdot k_e D_p(t); \quad (3)$$

با اعمال موارد فوق، مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان به صورت زیر حاصل می‌شود.

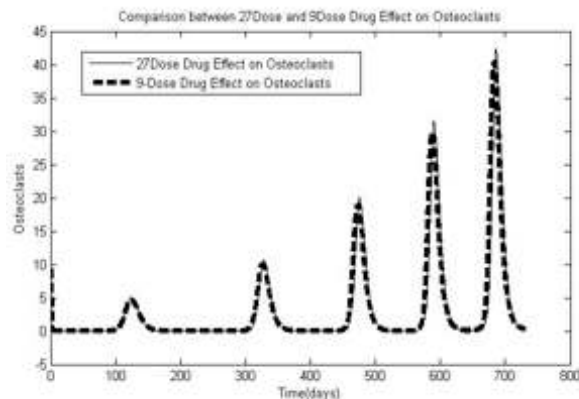
$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = \alpha_1 C(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_1 C(t) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot D_{\max}(t) \cdot D_p(t)}{D_{50}(t) + D_p(t)} \right) C(t) + \sigma_1 C(t) T(t); \\ \frac{dB(t)}{dt} = \alpha_2 B(t) C(t)^{\gamma_2} - \beta_2 B(t) + \sigma_2 B(t) T(t); \\ \frac{dT(t)}{dt} = \alpha_3 \left( 1 - \frac{T(t)}{M} \right) T(t) + \sigma_3 T(t) C(t)^{\gamma_2} + \sigma_4 T(t) B(t)^{\gamma_1} - \beta_3 T(t); \\ \frac{dD_p(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^n k \cdot k_e D_p(t); \end{cases} \quad (4)$$

جدول ۱: پارامترهای مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان [۱ و ۲]

| مقدار      | توضیحات                                 | ضریب      | مقدار                 | توضیحات                            | ضریب              |
|------------|-----------------------------------------|-----------|-----------------------|------------------------------------|-------------------|
| اولیه      |                                         |           | اولیه                 |                                    |                   |
| $\alpha_1$ | نرخ تولید سلول‌های استئوکلاست           | $0/3$     | $\sigma_1$            | نرخ سلول‌های استئوکلاست بر تومور   | $0/1$             |
| $\alpha_2$ | نرخ تولید سلول‌های استئوبلاست           | $0/1$     | M                     | ظرفیت حمل و نشان سلول‌ها تومور     | $3 \times 10^6$   |
| $\alpha_3$ | نرخ تولید سلول‌های تومور                | $0/0.25$  | $k_n$                 | سرعت منقسم دارو در بدن             | $0/1139$          |
| $\beta_1$  | نرخ مرگ سلول‌های استئوکلاست             | $0/2$     | $D_{\max}$            | مشتقین اثر دارو                    | $1/2 \times 10^3$ |
| $\beta_2$  | نرخ مرگ سلول‌های استئوبلاست             | $0/0.6$   | $D_{50}$              | مجموع دارو که دارای نصف اثر است    | $0/1 \times 10^3$ |
| $\beta_3$  | نرخ مرگ سلول‌های تومور                  | $0/0.5$   | $d_1$                 | دوره رشد سلول استخوان ۶ هفته       | ۶۸                |
| $\gamma_1$ | توانایی دارو ی استئوبلاست بر استئوکلاست | $0/3$     | $d_2$                 | دوره رشد سلول پستاندهای ۴ هفته     | ۸۴                |
| $\gamma_2$ | توانایی استئوکلاست بر استئوبلاست        | $0/5$     | $t_{\text{eff}}$      | نصف دوزهای مصرف دارو (روز)         | ۷۳۰               |
| $\sigma_1$ | اثر سلول‌های تومور بر استئوکلاست        | $0/0.005$ | $[0, t_{\text{end}}]$ | مدت درمان یا مصرف دارو (روز)       | $[0, 730]$        |
| $\sigma_2$ | اثر سلول‌های تومور بر استئوبلاست        | $-0/0.09$ | $n_2$                 | تعداد دوز دارو با غلظت ۴ میلی‌گرم  | ۲۷                |
| $\sigma_3$ | اثر سلول‌های استئوکلاست بر تومور        | $0/0.1$   | $n_3$                 | تعداد دوز دارو با غلظت ۱۶ میلی‌گرم | ۹                 |

## ۴ شبیه‌سازی عددی

در این بخش شبیه‌سازی عددی برای مدل پیشنهادی تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان برای دو فاصله زمانی استاندارد و پیشنهادی بین دوزهای دارو از طریق نرم‌افزار متلب و با در نظر گرفتن مقادیر ضرایب طبق جدول ۱ و جواب اولیه به صورت  $(C(t), B(t), T(t), D_p(t)) = (10, 5, 1, 4)$  صورت گرفته است. در شکل ۱ مقایسه میزان اثربخشی فاصله زمانی استاندارد (۴ هفته) و فاصله زمانی پیشنهادی (۱۲ هفته) بین دوزهای دارو بر متغیر استئوکلاست نشان داده شده است. در شکل ۱، مشاهده می‌شود که حجم استئوکلاست‌ها در روش تجویز دارو با فاصله زمانی ۱۲ هفته، تقریباً در نیمه دوره درمان، نسبت به فاصله زمانی استاندارد کاهش می‌یابد که به معنای عملکرد بهتر دارو با فاصله زمانی ۱۲ هفته می‌باشد. این نتیجه با نتایج مطالعه [۲۵۶] مبنی نیز کاملاً منطبق است.



شکل ۱: مقایسه نمودار تغییرات سلول‌های استئوکلاست در حالت با دارو و بدون دارو

## ۵ نتایج

در این مقاله، مدل تأثیر داروی زولدرونیک اسید بر متاستاز استخوان با هدف مقایسه میزان اثربخشی فاصله زمانی پیشنهادی بر متغیر استئوکلاست با فاصله زمانی استاندارد بین دوزهای دارو ارائه شد. با حصول نتیجه منطبق بر تحقیقات پزشکی، نشان دادیم که می‌توان میزان اثربخشی شیوه‌های مختلف تنظیم مقدار و تعداد دوز این دارو را از طریق مدل ریاضی مورد بررسی و مقایسه قرار داد و به نتایج منطقی و منطبق بر مطالعات بالینی رسید.

## مراجع

- [1] R.M., Coelho, J.M., Lemos, I., Alho, D., Valerio, A.R., Ferreira, L., Costa, S., Vinga, "Dynamic modeling of bone metastasis, microenvironment and therapy Integrating parathyroid hormone (PTH) effect, anti-resorptive and anti-cancer therapy," Journal of Theoretical Biology, vol. 391, pp. 1-12, 2016.
- [2] S., Jerez, A., Camacho, "Bone metastasis modeling based on the interactions between the BMU and tumor cells," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 330, pp. 866-876, 2018.
- [3] J. P., Lorange, J. R., Garcia Luna, F., Grou-Boileau, D., Rosenzweig, M. H., Weber, E., Akoury, "Management of bone metastasis with zoledronic acid: A systematic review and Bayesian network meta-analysis," J BONE ONCOL., vol. 39, 2023.
- [4] C., Van Poznak, M. R., Somerfield, W. E., Barlow, J. S., Biermann, L. D., Bosserman, M. J., Clemons, S. K., Dhesy-Thind, M. S., Dillmon, A., Eisen, E. S., Frank, R., Jagsi, R., Jimenez, R. L., Theriault, T. A., Vandenberg, G. C., Yee, B., Moy, "Role of Bone-Modifying Agents in Metastatic Breast Cancer: An American Society of Clinical Oncology-Cancer Care Ontario Focused Guideline Update," J Clin Onco., vol. 10;35(35), pp.3978-3986, 2017.

## تأثیر بازی‌وارسازی آموزش ریاضی در مشارکت فراگیران

ریحانه نیکنام اسکونی\*؛ دانشجوی کارشناسی رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

reyhaneniknam2731@gmail.com

نرگس یافتیان، دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

yaftian@sru.ac.ir

**چکیده:** تلاش‌های یک معلم در جهت جلب توجه همه دانش‌آموزان یک کلاس - خصوصاً اگر آن کلاس پرجمعیت باشد - ممکن است به ثمر نرسد، لذا استفاده از روش‌هایی که آنها را به یادگیری از طریق مشارکت در فعالیت‌های کلاسی برانگیزد، ضروری به نظر می‌رسد. یکی از این روش‌ها، آموزش به کمک بازی‌وارسازی است. هدف از پژوهش حاضر، بررسی تأثیر بازی‌وارسازی آموزش ریاضی بر مشارکت دانش‌آموزان در کلاس درس بود که با روش تحقیق شبه آزمایشی و با استفاده از یک فعالیت محقق‌ساخته انجام شد. جامعه آماری، شامل دانش‌آموزان پایه دهم مدارس دولتی منطقه ۱۹ شهر تهران بود و پژوهش حاضر روی یک نمونه در دسترس، متشکل از ۱۴ دانش‌آموز پایه دهم یکی از مدارس متوسطه دوم انجام شد. در طراحی این فعالیت از نظرات متخصصان و دبیران ریاضی مقطع متوسطه دوم بهره گرفته شد. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که به کارگیری رویکرد بازی‌وارسازی در آموزش، می‌تواند تأثیر بسزایی بر افزایش مشارکت و همکاری دانش‌آموزان در روند یادگیری داشته باشد. نتایج پژوهش پیش‌رو می‌تواند مورد استفاده معلم‌ها و متخصصان حوزه آموزش قرار گیرد.

**کلمات کلیدی:** بازی‌وارسازی، آموزش ریاضی، مشارکت، دانش‌آموزان، فعالیت‌های آموزشی

### ۱ مقدمه

بازی‌وارسازی<sup>۱</sup> آموزش رویکردی در حال توسعه است که در فرآیند یاددهی-یادگیری، در جهت افزایش انگیزه و مشارکت فراگیران از طریق اضافه نمودن عناصر بازی مانند سرعت، مشارکت و همکاری در گروه و مهارت حل مسئله، در محیط‌های آموزشی، تلاش می‌کند [۲]. از جمله اهداف بازی‌وارسازی، به حداکثر رساندن مشارکت، گفتمان و انگیزه دانش‌آموزان است و می‌تواند تعاملی لذت‌بخش‌تر را در کلاس درس خلق کند، لذا توجه به رویکرد بازی‌وارسازی آموزش، می‌تواند تجربه‌ای متفاوت از کلاس ریاضی را برای دانش‌آموزان رقم بزند [۳]. بازی‌وارسازی می‌تواند فناورانه، غیرفناورانه و یا ترکیبی باشد. بازی‌وارسازی غیرفناورانه شرکت‌کنندگان را به صورت فیزیکی درگیر کرده و آنها را به تلاش در جهت رسیدن به پاسخ درست، ترغیب می‌کند [۴].

## ۲ روش پژوهش

از آنجا که هدف این مطالعه به کارگیری روش‌هایی در جهت افزایش مشارکت و همکاری دانش‌آموزان در فرآیند یاددهی-یادگیری است، از روش تحقیق شبه آزمایشی استفاده گردید. در این پژوهش، متغیر مستقل روش تدریس بود که از شیوه بازی‌وارسازی آموزش استفاده شد و متغیر وابسته، میزان مشارکت دانش‌آموزان در مباحث کلاسی و علمی بود. جامعه آماری، شامل دانش‌آموزان پایه دهم مدارس دولتی منطقه ۱۹ شهر تهران بوده و پژوهش حاضر روی یک نمونه در دسترس، متشکل از ۱۴ نفر از دانش‌آموزان پایه دهم یکی از مدارس دولتی مقطع متوسطه دوم انجام گردید. به منظور بررسی تأثیر بازی‌وارسازی در مشارکت دانش‌آموزان، از یک فعالیت محقق‌ساخته مبتنی بر بازی‌وارسازی که به صورت غیرفناورانه طراحی شده بود، استفاده شد. در طراحی این فعالیت، نظرات متخصصان و دبیران ریاضی مقطع متوسطه دوم حائز اهمیت بود. این فعالیت در کلاس درس، توسط نویسنده اول مقاله حاضر انجام شد.

### مار و پله‌ای با رویکرد آموزشی

برای ترغیب دانش‌آموزان به همکاری بیشتر و افزایش میل به یادگیری در آنها، یک فعالیت آموزشی طراحی و با افزودن چند عنصر بازی، به جذابیت آن افزوده شد. ابزار به کار برده شده در این فعالیت، شامل یک صفحه بازی مشابه صفحه بازی مار و پله مرسوم (شکل ۱، سمت راست)، تاس، تعدادی مهره و پاکت سؤال بود که در آن تعدادی سؤال قرار داشت که برحسب ترجیح پژوهشگر در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گرفت (شکل ۱، سمت چپ)



شکل ۱: صفحه بازی مار و پله و برخی از سؤالات انتخابی پژوهشگر

صفحه این بازی طوری طراحی شده بود که دانش‌آموزان در جریان بازی مار و پله، به پاسخگویی به سؤالاتی می‌پرداختند. دانش‌آموزان با رسیدن به خانه‌هایی که در آن، تصویر نردبان وجود داشت، ملزم به پاسخگویی به سؤالاتی چالشی و با سطح بالاتر یا متنوع‌تر بودند و با رسیدن به خانه‌هایی که در آن، تصویر سَر مار وجود دارد، به سؤالاتی ساده‌تر، مفهومی و پایه‌ای اما مهم می‌پرداختند. به این ترتیب که در سؤالات چالشی‌تر اگر موفق به حل سؤال می‌شدند، از نردبان بالا می‌رفتند و اگر نمی‌توانستند پاسخ را بیابند به مسیر خود ادامه می‌دادند. در حالتی که به سؤالات ساده‌تر می‌رسیدند، با ارائه پاسخ صحیح، به مسیر ادامه می‌دادند و با پاسخ اشتباه، مار آنها را نیش می‌زد و به خانه‌ای که دُم مار در آن قرار داشت، می‌رَف ۲۵۹. همچنین، در خانه‌های مختلف صفحه بازی، عبارتهایی تشویق‌کننده و یا هشداردهنده، دانش‌آموزان را در فرآیند بازی هدایت می‌کرد. در طراحی این صفحه از عبارتهای

تشویقی مانند «تبریک!»، «خداقوت!»، «مرحبا!» و جملاتی هوشیارکننده مثل «مراقب باشید!» و «دقت کنید!» استفاده شد (شکل ۲).



شکل ۲: عبارت‌های تشویقی و هشداردهنده در برخی از خانه‌های مار و پله

### ۳ نتایج

قبل از اجرای فعالیت‌های مبتنی بر بازی‌وارسازی، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این پژوهش، افرادی بودند که رغبت چندانی به مشارکت در مباحث درسی نداشتند و گاهی دعوت معلم را برای شرکت در مباحث کلاسی رد می‌کردند. به عبارت دیگر، مشاهدات اولیه حاکی از آن بود که اکثر این دانش‌آموزان انگیزه و همت لازم برای شرکت در مباحث کلاسی را نداشتند. لذا، برای افزایش میزان مشارکت دانش‌آموزان از بازی‌وارسازی آموزش به کمک بازی مار و پله که یک بازی غیرفناورانه بود، استفاده شد. برای بررسی تأثیر استفاده از بازی مار و پله، پژوهشگر در ابتدا روند بازی را برای دانش‌آموزان شرح داد. سپس دانش‌آموزان به گروه‌هایی تقسیم شدند و مقابل یکدیگر بازی کردند. یک عضو از گروه به عنوان نماینده، تاس را می‌انداخت و با رو آمدن عدد ۶، وارد بازی می‌شدند. در طی مسیر بازی مار و پله، دانش‌آموزان به خانه‌هایی می‌رسیدند که در آنها علامت سؤال وجود داشت، در این زمان، تمام اعضای گروه موظف بودند به حل سؤالی که پژوهشگر از پاکت سؤال خارج می‌کرد، بپردازند (شکل ۳).



شکل ۳: حل سؤالات توسط اعضای گروه‌ها

در حین انجام این بازی آموزشی، لذت دانش‌آموزان از فرآیند حل سؤالات و رسیدن به پاسخ، تکاپوی آنها برای توجه به زمان، تشویق و حمایت یکدیگر و هیجان در آنها دیده می‌شد. برخی از دانش‌آموزان پس از پایان بازی، به حل بقیه سؤالات موجود در پاکت سؤال می‌پرداختند و این امر، توجه و ذوق پژوهشگر را برمی‌انگیخت. اگرچه بهتر است که دانش‌آموزان را با توجه به ارزش‌های درونی آنها تشویق کنیم و آنها را از حس خوب تمجید شدن بهره‌مند کنیم، اما با این حال، جوایز کوچکی که سرمادادی می‌بردند به دانش‌آموزان داده شد تا خاطره‌ای از این فعالیت آموزشی در ذهن دانش‌آموزان بماند.

## ۴ بحث و نتیجه گیری

برای موفقیت در امر یاددهی-یادگیری، معلم باید کلاسی فعال و متنوع ایجاد کند [۱]. امروزه، طرح ریزی برای یک آموزش هدمند و موفق، روش های آموزشی خاصی مانند استفاده از عناصر بازی در فرآیند آموزش را می طلبد [۶]. بازی وارسازی که به عنوان فرآیندی برای استفاده از ساز و کارهای بازی در جهت درگیر کردن دانش آموزان استفاده می شود، تجربه های یادگیری مثبتی را برای دانش آموزان ایجاد می کند، می تواند سبب پیشرفت آن ها در درس ریاضی شود، دانش آموز را در تجربه های آموزشی درگیر کند و مشارکت و همکاری آن ها را تا حد قابل توجهی افزایش دهد [۳، ۶]. از آنجا که تمایل به بازی کردن و تفریح در انسان فرو نمی نشیند، استفاده از عناصر و مکانیک های بازی در طراحی فعالیت های آموزشی می تواند مؤثر باشد و اشتیاق به تعاملی هدایت شده را در فراگیران برانگیزد [۶]. استفاده از رویکرد بازی وارسازی در آموزش، می تواند به روش های مرسوم و سنتی تدریس، تنوع بخشد و دید فراگیران را نسبت به یادگیری ریاضی تغییر دهد [۵]. استفاده از عناصر بازی مانند سرعت، زمان، مهارت حل مسئله، مشارکت و همکاری با هم گروهی ها و تلاش برای رسیدن به هدف، می تواند در دراز مدت دانش آموزانی توانمند تربیت کند [۳، ۶]. با طراحی یک بازی چالشی مشابه بازی مار و پله مرسوم و با رویکردی آموزشی، توانستیم توجه دانش آموزان را جلب کنیم، میل به یادگیری و شرکت در فعالیت های کلاسی را تقویت کنیم و کلاس را به محیطی تبدیل کنیم که در آن هر یک از دانش آموزان خود را مسئول حل چالش مدنظر می داند. بررسی میزان اثربخشی استفاده از اصل بازی وارسازی در فرآیند آموزش ریاضی جهت افزایش همکاری و مشارکت دانش آموزان در امر یادگیری، شایسته پژوهش های متعددی است.

## مراجع

- [۱] ح. قنبری نسب، بررسی روش های تدریس ریاضی و ارائه راهکارهایی برای کلاس پویا و فعال تدریس ریاضی، کنفرانس بین المللی پژوهش های مدیریت و علوم انسانی در ایران. تهران، ۱۴۰۲.
- [2] C. Dichev, D. Dicheva, "Gamifying education: what is known, what is believed and what remains uncertain: a critical review," *Int J Educ Technol High Educ*, vol 14, no 9, 2017.
- [3] O. Karamert, A. K. Vardar, "The effect of gamification on young mathematics learners' achievements and attitudes," *Journal of Educational Technology and Online Learning*, vol 4. no. 2, pp. 69-411, 2021.
- [4] Keumala CM, Z. Z, "Gamification concept without digital platforms: A strategy for parents on motivating children study at home during Covid-19 pandemic, " *PEDAGOGIK: Jurnal Pendidikan.*, vol 8. no. 1, pp. 93-156, Jun 2021.
- [5] K. E. Lewis, D. M. Lynn, "An insider's view of a mathematics learning disability: Compensating to gain access to fractions," *Investigations in Mathematics Learning*, vol. 10, no. 3, pp. 159-172, 2018.
- [6] R. R. Molano, "Development and validation of gamification-based mathematics curriculum for senior high school," *ASEAN Multidisciplinary Research Journal*, v ۲۶۸ no. 1, pp. 63-92, 2022.

## قابلیت داستان‌سرایی هوش مصنوعی در طراحی مسائل ریاضی

ریحانه نیکنام اسکویی\*؛ دانشجوی کارشناسی رشته آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

reyhaneniknam2731@gmail.com

نرگس یافتیان، دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

yaftian@sru.ac.ir

**چکیده:** همکاری هوش مصنوعی با معلمان باانگیزه و خلاق می‌تواند فرایند آموزش را به ماجراجویی هیجان‌انگیز تبدیل کند و شور یادگیری را در دانش‌آموزان بیدار سازد. ابزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی می‌توانند مواد آموزشی متنوع و مؤثری مانند داستان‌های آموزشی و تصاویر را در اختیار معلمان قرار دهند. البته لازم است که قدرت تفکر خلاق و نقادانه معلمان همواره ناظر بر فعالیت‌ها و پیشنهادات هوش مصنوعی باشد تا ضمن تطبیق مواد آموزشی با شرایط کلاس درس مورد نظر، از چالش‌های احتمالی موجود، کاسته شود. اگرچه هوش مصنوعی هیچ‌گاه نمی‌تواند به اندازه یک معلم انسانی مفید واقع شود، اما می‌تواند مانند یک همکار در کنار معلم حضور داشته باشد و با ارائه راهکارهایی ارزشمند، او را پشتیبانی کند. مقاله مروری پیش‌رو سعی دارد تا با معرفی برخی از ابزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی و توانایی‌های آنها، معلمان را به استفاده هر چه بیشتر و اثربخش‌تر از داستان‌های آموزشی و تصاویر ترغیب کند.

**کلمات کلیدی:** هوش مصنوعی، داستان، مسائل ریاضی، دستگاه معادله‌های خطی

### ۱ مقدمه

ظرفیت‌های فراوان هوش مصنوعی در حوزه آموزش و یادگیری، معلمان را به بهره‌گیری هرچه بیشتر از قابلیت‌های آن ترغیب می‌کند [۷، ۸]. توانایی ارائه طیف وسیعی از مثال‌های آموزشی در مباحث مختلف، مهارت گفت‌وگو با کاربر به صورت رسمی و یا محاوره‌ای، قدرت ارائه داستان‌های متنوع و همچنین ارائه تصاویر آموزشی، از جمله محدود امکاناتی است که ابزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی پیش‌روی معلمان قرار می‌دهد. البته با توجه به اهمیت شخصی‌سازی مواد آموزشی برای فراگیران [۵]، لازم است که معلمان با قدرت تفکر تحلیلی و نقادانه خویش، به ویرایش و شخصی‌سازی اطلاعات ارائه شده بپردازند [۷، ۸]. سه نمونه از ابزارهای توانمند مبتنی بر هوش مصنوعی، عبارتند از: Gemini که دستیار هوش مصنوعی Google است، ChatGPT که علاوه بر گفت‌وگو متنی، می‌تواند داستان‌های آموزشی طراحی کند و تصاویر جذاب نیز ارائه دهد و Copilot که هوش مصنوعی متعلق به موتور جست‌وجوی Bing است.

## ۲ تعامل با هوش مصنوعی در جهت خلق داستان‌های ریاضی

قصه‌گویی روشی مؤثر در آموزش مفاهیم - به‌ویژه مباحث ریاضی - به‌شمار می‌آید و به عنوان روشی برای ملموس‌تر کردن مفاهیم، محسوب می‌شود [۶]. برای به‌دست آوردن ایده‌هایی در راستای طرح داستان‌های ریاضی، با Gemini گفت‌وگو کردیم و از او خواستیم که مثال‌هایی از داستان‌های ریاضی در ارتباط با جبر و حل معادله ارائه دهد که پیشنهاد Gemini در رابطه با حل یک پرونده قضایی با استفاده از معادله‌های جبری، توجه ما را جلب کرد. برای دستیابی به ایده‌ها و داستان‌های بیشتر برای طراحی مسائلی چالش برانگیز و جذاب در خصوص «دستگاه معادله‌های خطی»، با ChatGPT4 که قابلیت داستان‌سرایی شگفت‌انگیزی دارد، گفت‌وگو کردیم و از او خواستیم داستانی با موضوع حل یک پرونده قضایی و با هدف تمرین حل دستگاه معادله‌های خطی توسط دانش‌آموزان طراحی کند (شکل ۱).

در یک شهر کوچک، پرونده‌ای پنهان شده است. داستانی سرگشته شد. در این پرونده، یک سرقت بزرگ از یک موزه معروف رخ داده بود و تنها سرنخ‌ها، همین معادله ریاضی بودند. داستان با کمک یک نابغه‌دان نامرئی شروع به حل این معادلات کرد. هر معادله، یک سرنخ جدید به آن‌ها می‌داد و در نهایت، با حل تمامی معادلات، مکان مفقود شده را پیدا کردند و توطئه‌شان را با موفقیت شکست دادند. این داستان نشان می‌دهد که چگونه ریاضیات می‌تواند در حل مسائل پیچیده و حتی پرونده‌های جنایی کمک کند.

شکل ۱: داستان ارائه شده توسط ChatGPT4

برای شفاف‌تر ساختن داستان، از هوش مصنوعی خواستیم تا همین داستان را گسترش دهد و همچنین معادلات یافت شده را در دفترچه‌ای که سارقین در محل جای گذاشته‌اند، بگنجانند (شکل ۲).

عنوان داستان: پرونده سرقت از موزه  
مقدمه: در یک شب تاریک و طوفانی، موزه بزرگ شهر تهران مورد سرقت قرار گرفت. زنده‌ها موفق شدند همین اثر هنری ارزشمند را به سرعت بیرون ببرند. سرعت وارد عمل شد، اما تنها سرنخ‌هایی که پیدا کردند همین معادله ریاضی بود که در آنجا برای رمزگشایی مثل افشای آثار هنری استفاده کرده بودند. شش‌مشت‌های این داستان، کارآگاهی باهوش و با تجربه و دانش‌آموزان کلاس شما هستند که به عنوان معجزان کارآگاه انتخاب شده‌اند. داستان: کارآگاه نوری به همراه دانش‌آموزان کلاس شما وارد موزه می‌شوند. آن‌ها به دقت به بررسی صحنه جرم می‌پردازند و متوجه می‌شوند که سارقین برای پنهان کردن آثار هنری از معادلات ریاضی استفاده می‌شود. هر معادله به یک مکان خاص در شهر اشاره می‌کند که آثار هنری در آنجا پنهان شده‌اند. دانش‌آموزان با حل این دستگاه معادلات، متوجه می‌شوند که اولین اثر هنری در پارک ملت، دومین اثر هنری در کتابخانه ملی ایران و سومی اثر هنری در موزه هنرهای معاصر پنهان شده است. با حل معادلات، دانش‌آموزان موفق می‌شوند آثار هنری را پیدا کنند و به موزه بازگردانند و کارآگاه دانش‌آموزان را به عنوان قهرمانان شهر معرفی می‌کند.

شکل ۲: داستان پیشنهاد شده توسط ChatGPT4 درباره داستان قضایی

با استفاده از ایده‌های به‌دست آمده از طریق هوش مصنوعی، با ترکیب داستان‌ها و افزودن برخی فرض‌ها، می‌توان به داستانی جذاب‌تر و متناسب با شرایط کلاس مدنظر، دست یافت. ماحصل تعامل با هوش مصنوعی، تطبیق داستان با شرایط کلاس خودمان، ویرایش و منطقی‌تر ساختن مطالب به‌دست آمده، داستان زیر است:

### داستان پرونده سرقت از یک جواهرسازی

در پی گزارشی که اداره مرکزی پلیس تهران، صبح امروز دریافت کرده است، چندین جواهر خاص و سنگ قیمتی از یک جواهرسازی معروف تهران سرقت شده‌اند. پلیس به سرعت وارد عمل می‌شود، اما تنها سرنخی یافت شده یک دفترچه است که در آن تعدادی دستگاه معادله‌های خطی و مختصات مکان‌های مختلف شهر وجود دارد. گویا سارقین، از این رمزگذاری‌ها برای مخفی کردن این ۲۶۳ ت در شهر استفاده می‌کنند. شخصیت‌های این داستان، شامل کارآگاه معلم - کارآگاهی باهوش و باتجربه - و دانش‌آموزان با استعداد کلاس درس که به عنوان دستیار کارآگاه

معلم فعالیت می‌کنند، هستند. کارآگاه معلم به همراه دانش‌آموزان کلاس وارد جواهرسازی می‌شوند. آن‌ها به دقت به بررسی مکان می‌پردازند و متوجه دستگاه‌های معادلات ریاضی در دفترچه می‌شوند. دانش‌آموزان برای پیدا کردن مکان‌ها، داده‌های موجود در دفترچه را دسته‌بندی و تفکیک می‌کنند (جدول ۱):

جدول ۱: دستگاه‌های معادلات موجود در دفترچه سارقین

| دستگاه معادلات ۱                              | دستگاه معادلات ۲                              | دستگاه معادلات ۳                             | دستگاه معادلات ۴                              |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-y=1 \end{cases}$ | $\begin{cases} 4x-y=7 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ | $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ | $\begin{cases} 4x+2y=6 \\ -x+y=3 \end{cases}$ |

در صفحات دیگری از دفترچه، مختصات مکان‌هایی دیده می‌شود و به نظر می‌رسد که پاسخ دستگاه‌های فوق، کارآگاه را به این مکان‌ها هدایت می‌کنند. مختصات‌های موجود در دفترچه، در این جدول خلاصه شده اند (جدول ۲):

جدول ۲: مختصات‌های موجود در دفترچه و پارک‌های نظیر آنها

| پارک ملت                               | بوستان نهج البلاغه                     | بوستان ولایت                           | پارک لاله                              | پارک ساعی                              | پارک آب و آتش                            | آبشار تهران                            |
|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 11 \\ 3- \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ |

در پایان، با حل تمامی معادلات، دانش‌آموزان موفق می‌شوند جواهرات را پیدا کنند و به جواهرسازی بازگردانند. مثلاً آنها با حل دستگاه معادلات ۱، اولین بخش از جواهرات را در «پارک لاله» پیدا می‌کنند. کارآگاه معلم از دانش‌آموزان تشکر می‌کند و آن‌ها را به عنوان قهرمانان این داستان معرفی می‌کند.

### ۳ بهره‌گیری از قابلیت طراحی تصویر هوش مصنوعی در آموزش

نمی‌توان از تأثیر استفاده از تصاویر در افزایش کیفیت روند یادگیری، غافل ماند [۱، ۳]. در جهت بهره‌مند شدن از مزایای استفاده از تصاویر، از هوش مصنوعی خواستیم تا تصاویری مرتبط با داستان «پرونده سرقت از یک جواهرسازی» را طراحی کند و نقش دانش‌آموزان را در حل مسئله پررنگ کند. ما برای نزدیک‌تر کردن تصاویر به شرایط کلاس، از هوش مصنوعی خواستیم که نمادی از پرچم کشورمان را نیز در تصاویر بگنجاند (شکل ۳).



شکل ۳: تصاویر ارائه شده توسط ChatGPT برای داستان سرقت از جواهرسازی

## ۴ بحث و نتیجه گیری

قابلیت داستان‌سرایی و طراحی تصاویر، از جمله توانایی‌های هوش مصنوعی است که افقی تازه را به روی فعالان آموزش می‌گشاید. قصه‌گویی، روشی مهم و اثربخش برای از بین بردن موانع یادگیری ریاضیات و قابل فهم کردن دروس به شمار می‌آید [۶]. همچنین استفاده از نگاره‌ها و تصاویری جذاب در کنار مواد آموزشی، می‌تواند نقش مؤثر داستان‌ها را پررنگ‌تر کند. معلمان با ایجاد تغییرات لازم و یا اضافه کردن اطلاعات ضروری در داستان‌ها و تصاویر ارائه شده توسط هوش مصنوعی، می‌توانند آنها را به شرایط کلاس خود نزدیک‌تر سازند و تأثیر استفاده از آنها را افزایش دهند [۷]. بررسی میزان اثربخشی طراحی مسائل آموزشی با استفاده از داستان‌ها، شایسته پژوهش است.

## مراجع

- [۱] م. بهرام‌بیگی، نقش تصویر و رنگ آن در کتاب‌های درسی و دانشگاهی و تأثیر آن در آموزش زبان بیگانه، فصلنامه علمی ترویج علم، شماره ۱، ۵۳-۳۷، ۱۳۹۵.
- [۲] ف. حنیفه‌زاده نودهی، رابطه بین فناوری اطلاعات و هوش مصنوعی با ارتقای تحصیلی دانش‌آموزان، اولین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های مدیریت، تعلیم و تربیت در آموزش و پرورش، ۱۴۰۲.
- [۳] ا. زوارکی و ف. جعفرخانی، بررسی کاربرد تصویر در آموزش ویژه، تعلیم و تربیت استثنایی، شماره ۷، ۳۶-۲۷، ۱۳۹۲.
- [۴] ک. کاظمی فلوردی، کاربرد هوش مصنوعی در آموزش و یادگیری، رشد فناوری آموزشی، شماره ۷، ۷-۶، ۱۳۹۹.
- [5] M.L. Bernacki, M.J. Greene, and N.G. Lobczowski, "A systematic review of research on personalized learning: Personalized by whom, to what, how, and for what purpose (s)?," *Educational Psychology Review*, vol. 33, no. 4, pp. 1675-1715, 2021.
- [6] E. Kükey, H. Günes, and Z. Genç, "Analysis of classroom teachers' storytelling in teaching mathematical skills," *International Journal of Curriculum and Instruction*, vol. 14, no. 2, pp.1301-1323, 2022.
- [7] B. Tao, V. Díaz, and Y. Guerra, "Artificial intelligence and education, challenges and disadvantages for the teacher," *Arctic Journal*, vol. 72, no. 12, pp. 30-50, 2019.
- [8] Y. Wu, "Critical thinking pedagogics design in an era of chatGPT and other AI tools—shifting from teaching "What" to Teaching "Why" and "How", " *Journal of Education and Development*, vol. 8, no.1, 2024.



هنری پوانکاره در شروع قرن بیستم نسبت داده اند. وی در حین مطالعه روی مدار سه جرم سماوی که به یکدیگر نیروی جاذبه وارد می‌کردند، با در نظر گرفتن رفتار حرکتی آنها با توجه به نقاط شروع اولیه متفاوت، نشان داد که این سیستم می‌تواند حرکت های خیلی پیچیده ای را تجربه کند که امروزه به آن آشوب گفته می‌شود. نظریه آشوب، گسترش خود را بیشتر مدیون کارهای هنری پوانکاره و ادوارد لورنز می‌باشد.

### ۳ مدل‌گزینی

کنترل مدل‌گزینی، یک کنترل ساختار متغیر و پسخور با استفاده از سوئیچینگ سرعت بالاست این روش، ابزاری مفید و مقاوم را برای کنترل طرح‌های غیرخطی فراهم می‌آورد که شامل دو بخش است:

۳-۱- انتخاب سطح لغزش: مرحله اول تعریف سطح لغزش که معادل با یک تابع اسکالر برحسب خطای ردیابی و تعداد مشتقات آن می‌باشد.

$$\sigma : R^{m+1} \rightarrow R\sigma = \sigma(e, \dot{e}, \dots, e^{(m)}) \quad (1)$$

حال تابع  $\sigma$  را باید به گونه‌ای انتخاب کرد که صفر شدن آن ( $\sigma = 0$ ) به یک معادله دیفرانسیل (پایدار) منجر شود که در این صورت، هر جواب  $e(t)$  در نهایت به صفر میل خواهد کرد. رایج‌ترین انتخاب برای انتخاب سطح لغزش یک ترکیب خطی به صورت

$$\sigma = \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^m e \quad (2)$$

است که در آن  $\alpha$ ، پارامتر ثابت است از دیدگاه هندسی، معادله  $\sigma = 0$ ، سطحی را در فضای خطا تعریف می‌کند که «سطح لغزش» نامیده می‌شود. مسیرهای سیستم تحت کنترل باید به سطح لغزش بروند که در آن، مشخصات طراحی لحاظ شده است و اگر  $\dot{\sigma} = 0$ ، آنگاه سطح لغزش حالت پایداری خواهد داشت.

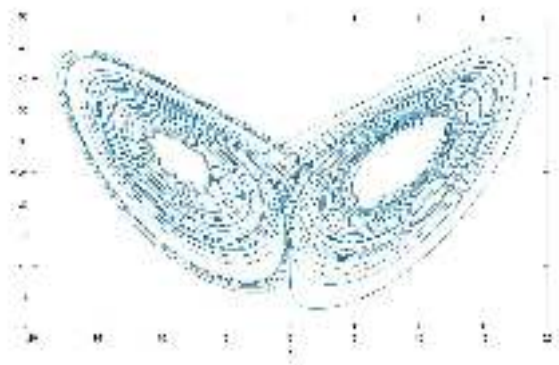
۳-۲- پیشنهاد قانون کنترل: یک قانون کنترلی را انتخاب می‌کند که حالت سیستم را از هر نقطه اولیه در زمان محدود به سطح لغزش بیاورد و آن‌ها بر روی سطح لغزشی حرکت لغزشی داشته و در آنجا بمانند به عبارت دیگر سطح لغزش در نقش جاذب عمل کند.

### ۴ شبیه‌سازی

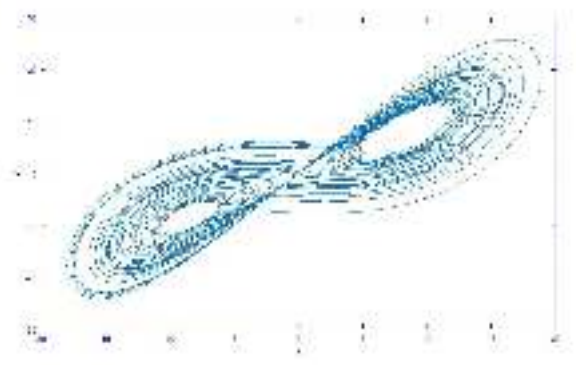
معادله دینامیکی سیستم آشوبناک لورنز به صورت

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (3)$$

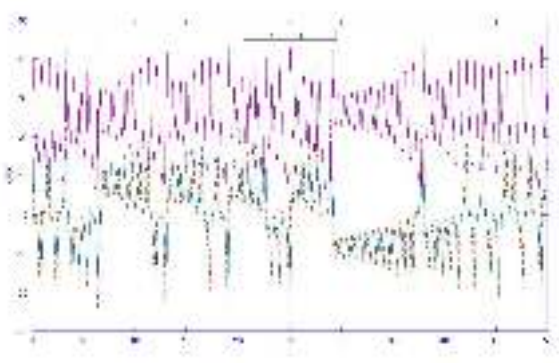
تعریف می‌شود که در آن  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  : ۲۶۷ زای پارامترهای  $a = 10, b = 28, c = \frac{8}{3}$  و به ازای شرایط اولیه  $x_0 = 12, y_0 = 15, z_0 = 15$  سیستم آشوبناک می‌باشد. شکل ۱ را ببینید.



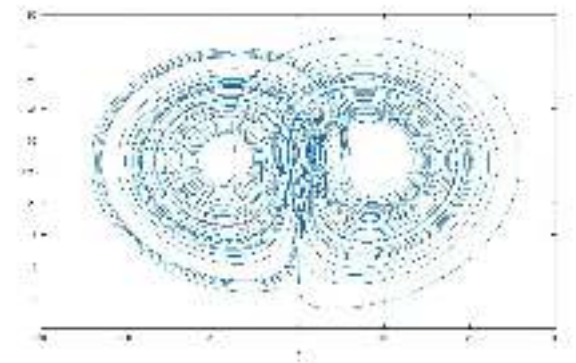
(ب) ارتباط بین  $x, z$



(آ) ارتباط بین  $x, y$



(د) نوسانات  $x, y, z$  نسبت به  $t$



(ج) ارتباط بین  $y, z$

شکل ۱: آشوبناکی سیستم لورنز

با توجه به آشوبناکی سیستم ۳، کنترلر را به حالت دوم اضافه می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - y - xz + u_2, \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (4)$$

سپس سطح لغزش را برای حالت ۲ طراحی می‌کنیم. با قراردادن  $e(t) = \dot{y} + xz + \eta_2 y$  و با انتگرال‌گیری از آن خواهیم داشت:

$$\sigma_2(t) = \int_0^t e_2(\tau) d(\tau) = \int_0^t \dot{y} + xz + \eta_2 y d(\tau) = y(t) + \int_0^t xz(\tau) + \eta_2 y(\tau) d(\tau) \quad (5)$$

که در آن  $\eta_2$  مقدار ثابت می‌باشد. با مشتق‌گیری از سطح لغزش داریم:

$$\dot{\sigma}_2(t) = \dot{y}(t) + xz(t) + \eta_2 y(t) \quad (6)$$

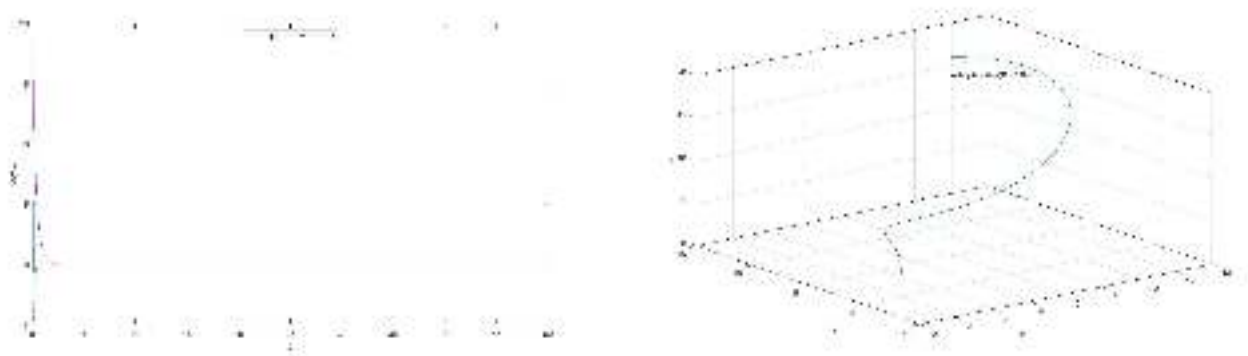
با توجه به شرایط پایداری مد لغزشی  $(\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0)$  داریم:

$$\dot{y}(t) = -xz(t) - \eta_2 y(t) \quad (7)$$

حال در بخش دوم یک قانون کنترل را به دست آوریم:

$$u_2 = \frac{dy}{dt} - bx + y + xz = -xz - \eta_2 y - bx + y + xz = -\eta_2 y - bx + y \quad (8)$$

برای  $\eta_2 = 8$  و شرایط اولیه  $x_0 = 12, y_0 = 15, z_0 = 16$  به جواب بهینه که همان همگرایی به صفر است می‌رسیم و سیستم آشوبناک لورنز پایدار می‌شود. شکل ۲ را ببینید.



شکل ۲: همگرایی متغیرها به صفر با شرایط اولیه  $x_0 = 12, y_0 = 15, z_0 = 16$

## مراجع

- [1] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [2] G. Chen and T. Ueta, "Yet another chaotic attractor," International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 9, no. 7, pp. 1465–1466, 1999.
- [3] M. Roopaei, B. R. Sahraei, and T. C. Lin, "Adaptive sliding mode control in a novel class of chaotic systems," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, no. 12, pp. 4158–4170, 2010.
- [4] R. B. Leipnik and T. A. Newton, "Double strange attractors in rigid body motion with linear feedback control," Physics Letters A, vol. 86, no. 2, pp. 63–67, 1981.
- [5] Y. Chatibi, E. H. El kinani, and A. Ouahdan, "Lie symmetry analysis and conservation laws for the time fractional blacksholes equation," International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, vol. 17, no. 1, p. 14, 2020.