



## گزارش «چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی انجمن ریاضی ایران»

بیژن احمدی کاکاوندی \* (رئیس کمیته علمی)

چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی انجمن ریاضی ایران با حضور از ۱۲۷ دانشجو در قالب ۲۷ تیم در روزهای ۲۶ تا ۳۰ مرداد ماه ۱۴۰۴ به میزبانی دانشگاه بوعلی سینای همدان برگزار شد. مکان برگزاری اغلب برنامه‌های مسابقه امسال مرکز همایش‌های قرآنی و بین‌المللی شهر همدان بود که بدین وسیله از مسئولان این مرکز تشکر و قدردانی می‌کنیم. مطابق برنامه‌ریزی اعلام شده مسابقه باید در تیرماه برگزار می‌شد، اما جنگ دوازده روزه تحمیلی موجب به هم خوردن برنامه‌های دانشگاهی کشور شد و مسابقه ریاضی را نیز یک ماه جابجا کرد. بسیار خرسندیم که به همت انجمن ریاضی کشور، همکاران خوبمان در دانشگاه همدان و همه سرپرستان و دانشجویان عزیز این مسابقه به خوبی و با کیفیت قابل قبول برگزار شد. به‌ویژه تلاش‌های آقای دکتر اسمعیل فیضی دبیر اجرایی مسابقه، خانم دکتر اشرف دانشخواه و آقایان دکتر سید حسن علوی و دکتر حسین عابدی که همگی از اعضای هیأت علمی دانشگاه بوعلی هستند، شایسته تقدیر است.

در مسابقه امسال پنج نفر از شرکت‌کنندگان موفق به کسب مدال طلا، ده نفر موفق به کسب مدال نقره و بیست و سه نفر نیز موفق به کسب مدال برنز شدند. به‌علاوه به پانزده نفر نیز دیپلم افتخار تعلق گرفت. ضمن تبریک به همه این عزیزان امیدواریم در ادامه



از طریق آدرس ایمیل [mathproblem.iran@gmail.com](mailto:mathproblem.iran@gmail.com) در میان بگذارند. امیدواریم با همت همه علاقه‌مندان به ریاضی و دوستان عزیز و عظمت و پیشرفت فرزندان ایران این مسابقه همچنان پویا، مؤثر و مفید باقی بماند و متناسب با تغییرات جامعه و جایگاه ریاضی در کشور بتواند نقش مهم خود را ایفا کند. در پایان از همراهی کمیته علمی مسابقات آقایان دکتر محمدرضا ودادی از دانشگاه صنعتی اصفهان، دکتر حمیدرضا دربی‌دی از دانشگاه جیرفت، دکتر حسام‌الدین رجب‌زاده از پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، دکتر امین السادات طالبی از دانشگاه صنعتی شریف، دکتر علی طاهرخانی از دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان و دکتر جواد ابراهیمی بروجنی دانشگاه صنعتی شریف کمال تشکر را دارم. همچنین از اعضای کمیته تصحیح پاسخ‌نامه‌ها سپاسگزارم.

#### کمیته تصحیح

دکتر مسعود بیرامی (آنالیز، دانشگاه تهران)، دکتر علی پرتوفرد (آنالیز، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی تهران)، دکتر هومن فتاحی (آنالیز، دانشگاه صنعتی شریف)، دکتر محرم ایردموسی (ابتکاری، دانشگاه شهید بهشتی)، دکتر محمدپویا پاک‌سرشت (ابتکاری، دانشگاه صنعتی شریف)، دکتر مصطفی عین‌اله‌زاده (ابتکاری، دانشگاه صنعتی اصفهان)، دکتر سینا ترکاشوند (ابتکاری، دانشگاه صنعتی شریف)، دکتر علی اکبر یزدان‌پور (جبر، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان)، دکتر محمد فرخی درخشنده (جبر، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان)، دکتر علی مرادزاده (جبر، دانشگاه اصفهان)، دکتر اصغر دانشور (جبر، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی تهران).

#### نتایج انفرادی

|                              |            |      |
|------------------------------|------------|------|
| ۱. امیرمحمد قوی              | صنعتی شریف | طلا  |
| ۲. عرفان امینی‌فر            | تهران      | طلا  |
| ۳. امیرمحمد بندری ماسوله     | صنعتی شریف | طلا  |
| ۴. مهران طلایی خواجه روشنایی | صنعتی شریف | طلا  |
| ۵. علی نظربلند چهارمی        | تهران      | طلا  |
| ۶. متین یوسفی                | صنعتی شریف | نقره |
| ۷. بهراد همتی آقاباقری       | تهران      | نقره |
| ۸. اشکان سهرابی              | شهید بهشتی | نقره |
| ۹. مهدی شاولی کوه‌شور        | صنعتی شریف | نقره |

مسیر زندگی و تحصیل و پژوهش موفق باشند و بتوانند به پیشرفت و توسعه کشور عزیزمان کمک کنند.

نتایج تیمی این مسابقه به‌صورت زیر است:

۱. دانشگاه صنعتی شریف تهران با سرپرستی آقای دکتر کسری عیشاهی،
۲. دانشگاه تهران با سرپرستی آقای دکتر رضا رضواند،
۳. دانشگاه صنعتی امیرکبیر با سرپرستی آقای دکتر امید نقشینه ارجمند،
۴. دانشگاه شهید بهشتی با سرپرستی آقای دکتر مهدی پوربرات،
۵. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی با سرپرستی خانم دکتر فرشته ملک.

مطابق آئین‌نامه مسابقات، در صبح روزهای آزمون و در جمع سرپرستان محترم تیم‌ها، کمیته علمی دو برابر سؤالات آزمون، یعنی در مجموع ۲۴ سؤال را در چهار شاخه آنالیز، جبر و ابتکاری و در چهار سطح دشواری، مطرح می‌کند. با انتخاب سرپرستان محترم نیمی از این سؤالات انتخاب و آزمون در دو روز برگزار می‌شود.

از برنامه‌های جنبی مسابقه امسال برگزاری دو سخنرانی بسیار جذاب و مفید بود. سخنرانی اول با عنوان «تفسیری ریاضی‌دانانه از خلاقیت» عصر روز ۲۷ مرداد با حضور تعداد بسیار زیادی از مخاطبان مشتاق در تالار قرآن برگزار شد. سخنران، آقای دکتر کسری عیشاهی عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف بودند و در سخنرانی خود به مروری خلافتانه (!) بر ریاضیات هوش مصنوعی پرداختند. عصر روز ۲۹ مرداد نیز آقای دکتر حسین مؤمنایی، عضو هیأت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان در یک سخنرانی جالب با عنوان «مسابقات ریاضی دانشجویی معتبر در جهان» به مروری بر مسابقات مشابه در کشورهای مختلف دنیا و مقایسه آن با مسابقه انجمن ریاضی ایران پرداختند. پس از گذشت نیم قرن از برگزاری نخستین دوره این مسابقه و با توجه به تغییرات مهمی که در برنامه‌های درسی ریاضی و نیز موقعیت ریاضیات در جامعه صورت گرفته است، نیاز به تغییراتی در جهت اصلاح و ارتقاء مسابقه و همخوانی بیشتر آن با شرایط انضمامی جامعه ریاضی احساس می‌شود. از این رو همچنان که در سخنرانی اختتامیه مسابقه نیز بیان شد، از همه صاحب‌نظران، اساتید و دانشجویان صاحب‌نظر و علاقمند درخواست می‌شود برای این امر مهم همفکری کنند و پیشنهادات خود را با انجمن ریاضی ایران یا مستقیماً با رئیس کمیته علمی

|                                    |                            |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
|------------------------------------|----------------------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| ۱۰. امیرعلی داوودی آبکنا           | صنعتی امیر کبیر            | نقره | امیرحسین معین نژاد.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | ولی عصر (عج) رفسنجان     |
| ۱۰. حمیدرضا معصومی                 | تهران                      | نقره | حسین امرایی .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | خوارزمی                  |
| ۱۱. ارژنگ ارباب                    | کاشان                      | نقره | فرید دوراندیش .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | شیراز                    |
| ۱۲. گایک انجرقلی                   | خوارزمی                    | نقره | سید احمد المهدی عالمزاده .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | صنعتی امیرکبیر           |
| ۱۳. مهرداد مهدی زاده               | تهران                      | نقره | هستی عشقی افجه قشلاق .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | دانشگاه علم و صنعت ایران |
| ۱۴. محمدمهدی مردانی                | صنعتی امیرکبیر             | نقره | سپهر جمالدار .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | گیلان                    |
| ۱۵. سهیل باطنی                     | صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی | برنز | رامتین درستکار .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | شیراز                    |
| ۱۶. ملیکا شریفی                    | صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی | برنز | پارسا کریمدادی .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | شیراز                    |
| ۱۷. امیرعلی اخگری                  | فردوسی مشهد                | برنز | میکائیل حمیدی .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | صنعتی اصفهان             |
| ۱۷. مصطفی تقوایی نسب               | اصفهان                     | برنز | محمدرضا کرامتی .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | فرهنگیان گلستان          |
| ۱۸. پوریا علایی                    | اصفهان                     | برنز | سارا حسینی .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | صنعتی اصفهان             |
| ۱۹. محمد ابراهیمی                  | صنعتی امیرکبیر             | برنز | حدیثه عیدیان نی زار .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | بجنورد                   |
| ۱۹. آریاد دوستی قلاتی              | شهید بهشتی                 | برنز | <b>سؤالات چهل و هفتمین مسابقه</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                          |
| ۲۰. علیرضا عموزاده                 | صنعتی امیرکبیر             | برنز | ۱. درون یک جعبه ۱۴۰۴ مهره سفید و ۱۴۰۳ مهره سیاه قرار دارد. دو مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. اگر دو مهره هم‌رنگ بودند، آن‌ها را کنار گذاشته و یک مهره سفید در جعبه قرار می‌دهیم. اگر دو مهره رنگ متفاوت داشتند آن‌ها را کنار گذاشته و یک مهره سیاه در جعبه قرار می‌دهیم. این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا فقط یک مهره درون جعبه باقی بماند. آخرین مهره‌ای که در جعبه قرار دارد چه رنگی است؟ ادعای خود را ثابت کنید. |                          |
| ۲۱. سید علیرضا ژیان اخوان          | فردوسی مشهد                | برنز | ۲. فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : f$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $x \in [0, 1]$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                          |
| ۲۲. محمد فاضل حکیم                 | شهید باهنر کرمان           | برنز | $1404f(x) = f\left(\frac{x}{1404}\right) + f\left(\frac{x+1}{1404}\right) + \dots + f\left(\frac{x+1403}{1404}\right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                          |
| ۲۳. ملیکا اسدی امیرآبادی           | شهید بهشتی                 | برنز | ثابت کنید $f$ تابعی ثابت است.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                          |
| ۲۴. محمدمهدی رئوف کاظمی            | تبریز                      | برنز | ۳. فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ ناصفر با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که $A = AJA$ که در آن $J$ ماتریسی $n \times n$ است که همه درایه‌های آن برابر یک می‌باشد. ثابت کنید ماتریس $A + J$ خودتوان نیست.                                                                                                                                                                                                               |                          |
| ۲۵. حسام الدین داوطلب استادی قوچان | فردوسی مشهد                | برنز | ۴. فرض کنید $m$ عددی طبیعی باشد. جعبه‌ای خالی و تعداد زیادی توپ در اختیار داریم. تارا به این ترتیب شروع به پر کردن این جعبه با توپ‌ها می‌کند. اگر تعداد توپ‌های موجود در جعبه کمتر از $m$ باشد، او یکی از اعداد ۱، ۲ یا ۳ را با احتمال برابر و مستقل از مراحل قبلی انتخاب کرده و به اندازه عدد انتخاب شده، توپ به جعبه اضافه                                                                                               |                          |
| ۲۶. ایرانا معمارزاده               | شهید بهشتی                 | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۲۷. علی قهرمان نژاد                | تبریز                      | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۲۸. فاطمه زهرا احسانی              | شهید باهنر کرمان           | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۲۹. محمد عالمی                     | صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۳۰. نوید شجراوی                    | فردوسی مشهد                | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۳۱. محمدپویا رحیم‌پور              | اصفهان                     | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۳۲. الیاس راهیما                   | فردوسی مشهد                | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۳۳. مبین امینی                     | خوارزمی                    | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۳۴. عطیه علی اکبریان               | اصفهان                     | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |
| ۳۴. علی محبیان                     | صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی | برنز |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                          |

### برندگان دیپلم افتخار

|                             |            |
|-----------------------------|------------|
| محمدمهدی توکلی .....        | شهید بهشتی |
| امیرمهدی محسنی .....        | خوارزمی    |
| مجتبی ناجی شاه‌بهرامی ..... | شیراز      |

(برای هر عدد طبیعی  $n$ ، تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی  $n$  را که نسبت به  $n$  اول هستند با  $\varphi(n)$  نشان می‌دهیم.)

۱۰. فرض کنید  $R$  یک حلقه یکدار ناصفر و  $Z(R)$  مرکز آن است. اگر برای هر  $r \in R$ ،  $r \neq 0$ ، عنصر  $z$  در  $Z(R)$  موجود باشد به طوری که  $zr \in Z(R)$ ،  $r \neq 0$ ، ثابت کنید ایده‌آل  $M$  در  $R$  موجود است به طوری که  $\frac{R}{M}$  یک میدان است.

۱۱. فرض کنید  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  توابعی تحلیلی باشند که برای هر  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\{f(z) : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 1\} = \{g(z) : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 1\}.$$

الف) ثابت کنید برای هر  $r > 1$  و هر  $w_0 \in \mathbb{C}$  نقطه‌ای مثل  $w \in \mathbb{C}$  وجود دارد به طوری که  $|w - w_0| = r$  و  $f(w) = g(w)$ .  
ب) ثابت کنید برای هر  $z \in \mathbb{C}$ ،  $f(z) = g(z)$ .

۱۲. فرض کنید  $n$  عددی طبیعی و  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های  $1, 2, \dots, n$  عضو از  $\{1, 2, \dots, n\}$  باشد که هر دو عضو  $\mathcal{F}$  اشتراک ناتهی دارند. به زیرمجموعه‌ای از  $\{1, 2, \dots, n\}$  یک مجموعه برخورد برای  $\mathcal{F}$  گوئیم هرگاه اشتراک آن با هر عضو  $\mathcal{F}$  ناتهی باشد. فرض کنید کمترین تعداد اعضای یک مجموعه برخورد برای  $\mathcal{F}$  برابر ۵ باشد. به خانواده  $\mathcal{H}$  از زیرمجموعه‌های  $\{1, 2, \dots, n\}$  یک ابربرخورد برای  $\mathcal{F}$  گوئیم هرگاه برای هر  $A \in \mathcal{F}$ ، عضو  $B$  مانند  $B \in \mathcal{H}$  وجود داشته باشد به طوری که  $B \subseteq A$ . ثابت کنید ابربرخوردی مانند  $\mathcal{H}$  برای  $\mathcal{F}$  وجود دارد به طوری که هر کدام از اعضای  $\mathcal{H}$  دقیقاً ۵ عضو دارند و  $|\mathcal{H}| \leq 75000$ .

می‌کند. این عملیات وقتی متوقف می‌شود که حداقل  $m$  توپ درون جعبه قرار گرفته باشد. فرض کنید  $p_m$  احتمال این باشد که در زمان توقف، دقیقاً  $m$  توپ در جعبه باشد. مطلوب است محاسبه  $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m$ .

۵. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک فشرده و فاقد نقطه تنها است. ثابت کنید زیرمجموعه متناهی  $S \subseteq X$  وجود دارد که برای هر  $x \in X$ ، مجموعه  $\{d(x, y) : y \in S\}$  شامل دست کم سه عدد حقیقی متمایز باشد. (نقطه  $x \in X$  را تنها گویند اگر مجموعه  $\{x\}$  باز باشد.)

۶. فرض کنید  $G$  یک گروه باشد به طوری که  $G'$  متناهی است. ثابت کنید گروه متناهی  $H$  وجود دارد که  $G' \cong H'$ . ( $G'$  زیرگروه مشتق  $G$  است.)

۷. فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق‌پذیر باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $f(x)f(x^2) \leq 0$ . ثابت کنید  $f'(0) = 0$ .

۸. فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H$  زیرگروه سرهای از آن باشد. همچنین فرض کنید عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که مرتبه هر عضو  $G$  که در  $H$  قرار ندارد برابر  $n$  است. ثابت کنید  $n$  توانی از یک عدد اول است.

۹. فرض کنید دنباله  $a_1, a_2, \dots$  از اعداد طبیعی دارای ویژگی‌های زیر باشد.

$$a_1 = 1.$$

$$\bullet \text{ به ازای هر } i \in \mathbb{N} \text{ داریم } 1404 \leq a_{2i} - a_{2i-1} \leq 0 \text{ و}$$

$$\bullet \text{ به ازای هر } i \in \mathbb{N} \text{ داریم } a_{2i+1} = \varphi(a_{2i}).$$

نشان دهید این دنباله کراندار است.

\* دانشگاه شهید بهشتی

