

چند نکته‌ی بنیادی در مورد اثبات و مثال نقض در ریاضیات

مرتضی منیری*

مقاله‌ی شهود و منطق خود به این موضوع پرداخته است. ذهن‌های تحلیلی به دنبال اثبات‌های دقیق هستند و چیزی کمتر از این، آنها را قانع نمی‌کند. در مقابل، ذهن‌های شهودی حتی با تعبیرهای فیزیکی به عنوان اثبات یک قضیه‌ی ریاضی راضی هستند. از دسته‌ی اول وایرستراس و از دسته‌ی دوم کلاین را می‌توان ذکر کرد. شهود را ابزار کشف و تحلیل و منطق را ابزار اثبات دانسته‌اند. از طرف دیگر، عصر کنونی، عصر سیطره‌ی روش اصل موضوعی در ریاضیات است. این روش تکیه بر اثبات‌های گام به گام و منطقی، جای زیادی برای شهود باقی نمی‌گذارد. البته معرفی یک دستگاه اصل موضوعی جذاب و مفید، کار ساده‌ای نیست، می‌توان ارائه‌ی ایده‌ی چنین دستگاهی را وظیفه‌ای شهودی دانست که ریاضی‌دانان شهودی، توانایی آن را دارند. اثبات قضیه‌های این دستگاه‌ها، وظیفه‌ی ریاضی‌دانان تحلیلی است. ارائه‌ی دستگاه‌های ریاضی کاری نیست که هر روزه صورت بگیرد، اما کار اثبات پایانی ندارد. بنابراین، ریاضی‌دانها معمولاً بیشتر زندگی خود را صرف اثبات می‌کنند. به این ترتیب این توانایی آنها تقویت می‌شود.

۳. برای ارائه‌ی مثال نقض برای حکمی در دستگاهی اصل موضوعی، می‌بایست مدلی از اصول آن دستگاه ساخت که حکم مورد نظر در آن غلط باشد. ساخت یک مدل، لزوماً فرایندی الگوریتمی ندارد و جنبه‌ی شهودی آن پررنگ است. می‌توان آنرا نوعی آفرینش‌گری دانست. مفاهیم محاسبه، مدل و اثبات از مفاهیم کلیدی در منطق ریاضی هستند و در این شاخه از ریاضیات است که ارتباط آنها به خوبی نمایان می‌شود.

اخیراً ریاست محترم انجمن ریاضی ایران پرسشی را پیش‌رو جامعه‌ی ریاضی ایران قرار داده‌اند. این پرسش این است که چرا دانشجویها و استادها ریاضی معمولاً در ارائه‌ی اثبات حکم‌های ریاضی درست، موفق‌تر از ارائه‌ی مثال نقض برای حکم‌های ریاضی غلط هستند. در مورد این پرسش چند نکته به ذهنم رسید که شاید پاسخ مستقیمی به آن پرسش نباشند، اما ممکن است مفید باشند.

۱. برای راحتی فرض کنید احکام مورد نظر ما در مورد اعداد طبیعی هستند. فرض کنید در یک دستگاه اثباتی منطقی مناسب چون حساب پئانو کار می‌کنیم. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی قضیه‌ها زیر مجموعه‌ای نیم-تصمیم‌پذیر از مجموعه‌ی همه‌ی احکام است. به عبارت دیگر، الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند همه‌ی قضیه‌ها را لیست کند. پس اگر حکمی قضیه باشد، پس از گذشت زمان به اندازه‌ی کافی، بالاخره در لیست ظاهر خواهد شد و ما متوجه‌ی قضیه بودن آن خواهیم شد. اما اگر حکمی قضیه نباشد، ما از این طریق هیچ‌گاه نمی‌توانیم از این موضوع مطمئن شویم. در واقع می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ی همه‌ی ناقضیه‌های حساب، نیم-تصمیم‌پذیر نیست، زیرا در این صورت مجموعه‌ی قضیه‌ها تصمیم‌پذیر خواهد بود که می‌دانیم چنین نیست (قضیه‌ی مشهور تصمیم‌ناپذیری حساب مرتبه‌ی اول). الگوریتم مورد اشاره به این شکل کار می‌کند که همه‌ی اثبات‌های حسابی ممکن را تولید و لیست می‌کند، به این ترتیب می‌توان مجموعه‌ی قضیه‌ها را لیست کرد. به عبارت دیگر، تشخیص قضیه بودن احکام حسابی، به شکل الگوریتمی، ممکن است، اما تشخیص قضیه نبودن آنها چنین نیست. این را می‌توان به نوعی به دشوارتر بودن آوردن مثال نقض نسبت به آوردن اثبات تعبیر کرد.

۲. برخی ریاضی‌دانان را به دو دسته‌ی شهودی و تحلیلی (منطقی) تقسیم می‌کنند. برای مثال، هانری پوانکاره در

** دانشگاه شهید بهشتی