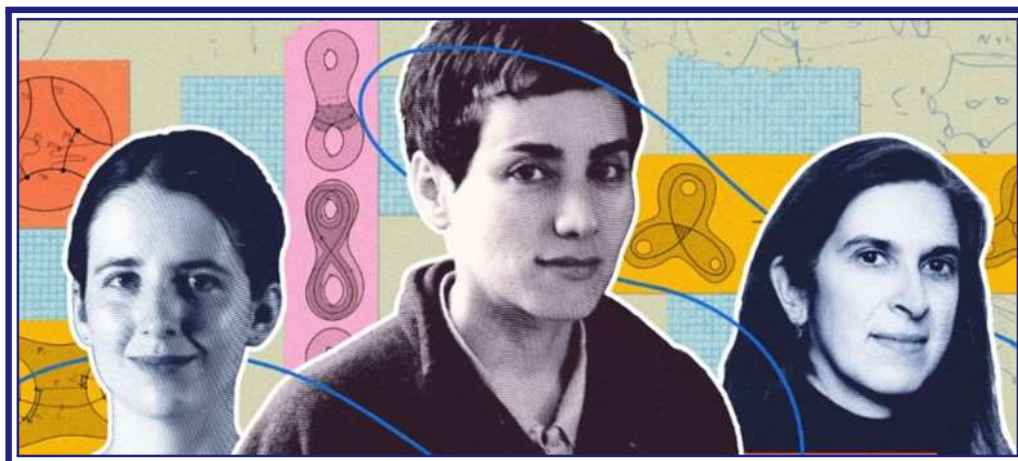


رقص منحنی‌ها در بی‌نهایت میراث مریم میرزاخانی و گامی نو در هندسه هذلولوی*

جوزف هاوالت*

مترجم: ساحل غیبی‌پور**



میرزاخانی (وسط) به هندسه هذلولوی تحول بخشید. لورا مانک (سمت چپ) و نالینی آنانتارامان ادامه دهنده راه او هستند.

رفتارهای غیرمنتظره‌ای داشتند. نام او مریم میرزاخانی بود، کسی که بعدها با تحقیقات درخشان خود، مرزهای دانش بشری را گسترش داد و در نهایت، به اولین زنی تبدیل شد که مدال فیلدز، بالاترین جایزه دنیای ریاضیات، را دریافت کرد. اولین پژوهش‌های مریم میرزاخانی بر سطوح هذلولوی متمرکز بود؛ نوعی از فضاهای هندسی که در آن، برخلاف هندسه اقلیدسی، خطوط موازی نه‌تنها در فاصله ثابتی حرکت نمی‌کنند، بلکه با سرعت از هم دور می‌شوند. در این فضاها، سطح در دو جهت مخالف خم شده و ساختارهای پیچیده‌ای شکل می‌گیرد که تجسم آن‌ها دشوار است. این سطوح، که در مباحثی چون نظریه ریسمان، فیزیک کوانتومی و دینامیک سیستم‌ها اهمیت بالایی دارند، همواره یکی از چالش‌برانگیزترین موضوعات در هندسه مدرن بوده‌اند. مریم میرزاخانی با روش‌های نوآورانه خود، تحولی اساسی در مطالعه این هندسه پیچیده ایجاد کرد. او به کمک ابزارهای جدید ریاضی، راهکارهای خلاقانه‌ای برای درک بهتر این سطوح ارائه داد و توانست ارتباطات عمیقی میان توپولوژی، دینامیک و هندسه آن‌ها برقرار کند. اما در حالی که در اوج دوران پژوهشی

سال‌ها پس از درگذشت نابهنگام نابغه ریاضی دوران، مریم میرزاخانی، ایده‌های درخشان او همچنان در دنیای ریاضیات زنده هستند و جان تازه‌ای می‌یابند. اخیراً، اثباتی جدید در حوزه هندسه و دینامیک سطوح، کارهای مریم میرزاخانی را توسعه داده و تأثیر عمیق او را در این علم بیش از پیش نمایان کرده است. این پیشرفت، بار دیگر جایگاه بی‌بدیل او را به عنوان یک پیشگام در دنیای ریاضیات تقویت می‌کند. مریم میرزاخانی در دوران دانشجویی خود، با نبوغ کم‌نظیرش، تحولی شگرف در درک ساختارهای هندسه هذلولوی ایجاد کرد. او با کنجکاوی بی‌حد و تلاش بی‌وقفه، به پرسش‌های بنیادی در این زمینه پرداخت و مسیرهای تازه‌ای را در مطالعه دینامیک سطوح و توپولوژی باز کرد. اما در حالی که هنوز بسیاری از پرسش‌های مورد علاقه‌اش بی‌پاسخ مانده بودند، در اوج شکوفایی علمی خود، در سن ۴۰ سالگی از دنیا رفت. دهه اول پس از سال ۲۰۰۰ میلادی، دانشجویی جوان در دانشگاه هاروارد شروع به کشف دنیایی متفاوت در ریاضیات کرد؛ دنیایی جدید، پر از شکل‌هایی که قوانین معمول هندسه را به چالش می‌کشیدند و

*Joseph Howlett

ژئودزیک‌ها و پیچیدگی مسیرهای بسته

برای بررسی یک سطح هذلولوی، ریاضی‌دان‌ها مسیرهای بسته‌ای به نام ژئودزیک‌ها را مطالعه می‌کنند. ژئودزیک‌ها، کوتاه‌ترین مسیرهای ممکن روی یک سطح برای بازگشت به نقطه شروع هستند. در هندسه مسطح، این مسیرها به سادگی می‌توانند دایره‌هایی روی کره یا خطوط مستقیم روی صفحه باشند، اما در سطوح هذلولوی، این مسیرها رفتاری بسیار پیچیده‌تر دارند. هرچه یک سطح سوراخ‌ها و پیچیدگی‌های بیشتری داشته باشد، مسیرهای ژئودزیکی نیز پریچ‌وخم‌تر و متنوع‌تر خواهند بود. به همین دلیل، مطالعه این مسیرها نه تنها به درک بهتر شکل کلی سطح کمک می‌کند، بلکه اطلاعات مهمی درباره نحوه اتصال بخش‌های مختلف سطح به یکدیگر ارائه می‌دهد.



ساختار ژئودزیک

بررسی میزان اتصال سطح و حرکت تصادفی

علاوه بر ژئودزیک‌ها، یکی دیگر از روش‌های مطالعه این سطوح، بررسی میزان اتصال آن‌ها است. ریاضی‌دانان این ویژگی را با تحلیل حرکت تصادفی روی سطح بررسی می‌کنند. این حرکت‌ها نشان می‌دهند که چقدر طول می‌کشد تا یک نقطه متحرک روی سطح، از یک بخش به بخش دیگر برسد. در سطوحی با اتصال ضعیف، این زمان بسیار طولانی است، زیرا بخش‌های مختلف سطح

خود قرار داشت و همچنان سؤالات بزرگی در ذهنش بود، در سال ۲۰۱۷، به دلیل ابتلا به سرطان سینه، در سن ۴۰ سالگی درگذشت. پس از درگذشت مریم، پژوهش‌های ارزشمند او همچنان الهام‌بخش ریاضی‌دانان سراسر جهان باقی ماند. اخیراً، دو زن ریاضی‌دان برجسته، نالینی آنتاتارامان و لورا مانک، در ادامه مسیر پژوهشی او گام‌های بزرگی برداشته‌اند. آن‌ها در مقاله‌ای جدید، با گسترش ایده‌های میرزاخانی، نشان داده‌اند که سطوح هذلولوی حتی پیچیده‌تر از آن چیزی هستند که پیش‌تر تصور می‌شد. این کشف، نه تنها درک ما را از این ساختارهای شگفت‌انگیز افزایش داده، بلکه راه‌های تازه‌ای را برای مطالعه دینامیک سطوح و رفتارهای غیرمنتظره ژئودزیک‌ها در این فضاها گشوده است. تحقیق جدید آن‌ها، ادامه‌دهنده آثار مریم میرزاخانی است و رویای او را برای درک بهتر این دنیای عجیب زنده نگه می‌دارد. مریم میرزاخانی تنها یک ریاضی‌دان نبود؛ او یک متفکر پیشگام بود که با عبور از موانع، راهی تازه در علم گشود. هرچند که زندگی کوتاهش مجال نداد تا به تمامی سؤالاتش پاسخ دهد. پژوهش‌های نالینی آنتاتارامان و لورا مانک نشان می‌دهد که میراث میرزاخانی، نه تنها به یادماندنی است، بلکه همچنان الهام‌بخش و تأثیرگذار باقی خواهد ماند. اندیشه‌های یک نابغه، فراتر از زمان و مکان امتداد می‌یابد و مسیر علم را برای آیندگان روشن می‌سازد.

هندسه‌ای شگفت‌انگیز و چالش برانگیز

الکس رایت، ریاضی‌دان برجسته، سطوح هذلولوی را به پازلی از تکه‌های خمیده تشبیه می‌کند که هرگز در فضای سه‌بعدی به‌طور کامل بسته نمی‌شوند. این سطوح دارای ویژگی‌های منحصر به فردی هستند که آن‌ها را از دیگر انواع فضاهای هندسی متمایز می‌کند. هر بخش از یک سطح هذلولوی مانند زین اسب است، فرمی که در یک جهت به سمت بالا و در جهت دیگر به سمت پایین خم می‌شود. این تکه‌های زینی شکل را می‌توان در کنار یکدیگر قرار داد، اما همیشه شکاف‌هایی میان آن‌ها باقی می‌ماند که مانع از بسته شدن کامل سطح در فضای سه‌بعدی می‌شود. همین ساختار غیرعادی باعث می‌شود که مطالعه این سطوح به شدت چالش برانگیز باشد. برخلاف هندسه اقلیدسی، که در آن بسیاری از ویژگی‌ها به سادگی قابل تعریف و اندازه‌گیری هستند، در هندسه هذلولوی حتی ساده‌ترین سؤالات درباره ساختار این سطوح هنوز بی‌پاسخ مانده‌اند. این ویژگی‌ها موجب شده‌اند که این سطوح نه تنها در ریاضیات محض، بلکه در زمینه‌هایی مانند فیزیک نظری و نظریه پیچیدگی نیز اهمیت ویژه‌ای داشته باشند.

دکتری، مریم فرمول (نظریه) شمارش ژئودزیک‌ها را کشف کرد که به او امکان می‌داد تعداد ژئودزیک‌ها را تا طول مشخصی روی هر سطح هذلولوی محاسبه کند. این فرمول نه تنها درک بهتری از این سطوح ارائه می‌داد، بلکه او را قادر ساخت تا یکی از حدس‌های مشهور نظریه ریمان را اثبات کند و بفهمد چه انوعی از سطوح هذلولوی را می‌توان ساخت. پس از دریافت مدرک دکتری، میرزاخانی در زمینه هندسه، توپولوژی و سیستم‌های دینامیکی پیشرفت‌های بزرگی رقم زد. باین‌حال، علاقه‌اش به موضوع رساله دکتری همچنان پابرجا بود. از این‌رو، او به بررسی تصادفی سطوح هذلولوی و ویژگی‌های آن‌ها روی آورد. همکارانش می‌گویند که ابزارهای لازم برای این کار را در اختیار داشت و به همین دلیل، این مسیر پژوهشی برایش طبیعی و بدیهی بود. اما پیش از آنکه بتواند به‌طور کامل این مسیر را ادامه دهد، زندگی کوتاهش به پایان رسید. مانک، درباره او می‌گوید: «او در حال توسعه ابزارهای جدید بود، اما متأسفانه فرصتی برای استفاده از آن‌ها پیدا نکرد.»

لورا مانک و ادامه راه مریم میرزاخانی

لورا مانک هرگز تصور نمی‌کرد روزی ادامه‌دهنده راه مریم میرزاخانی باشد. در واقع، تا اوایل بیست‌سالگی حتی قصد نداشت وارد دنیای پژوهش‌های ریاضی شود. از کودکی تصمیم داشت معلم شود و از سر بی‌حوصلگی در کلاس‌های ریاضی، به همکلاسی‌هایش درس می‌داد. خودش درباره آن دوران می‌گوید: «در مدرسه کاملاً ناراضی بودم. خودم را با نقش دستیار معلم سرگرم می‌کردم.» باین‌حال، در دوران تحصیلات تکمیلی، مانک مسیر متفاوتی را در پیش گرفت. او روی گسترش نظریه‌های ریاضی‌ای کار کرده است که مریم میرزاخانی پیش از درگذشتش فرصت تکمیل آن‌ها را نیافت. مانک حس می‌کند که از طریق اثبات‌های ریاضی، پیوندی نامرئی با میرزاخانی دارد. او مقطع کارشناسی ارشد را در دانشگاه پاریس - ساکلی گذراند، جایی که از میان ۴۰ دانشجو، تنها سه زن حضور داشتند. نزدیک به پایان دوره، متوجه شد که دو همکلاسی زن دیگر قصد دارند دانشگاه را ترک کنند. این مسئله او را به فکر فرو برد: آیا آن‌ها واقعاً از روی انتخاب شخصی چنین تصمیمی گرفته بودند، یا اینکه محیطی که در آن اقلیت بودند، آن‌ها را به این سمت سوق داده بود؟ او احساس کرد که باید برای دخترانی که می‌خواست روزی به آن‌ها آموزش دهد، الگویی از یک زن موفق در ریاضیات باشد. همین دغدغه او را به سمت دکتری کشاند. با خود گفت: «یکی از ما باید این کار را بکند، وگرنه بعداً پشیمان می‌شویم.» به

به‌سادگی به هم مرتبط نیستند. در مقابل، در سطوح با اتصال قوی، این زمان کوتاه‌تر است و حرکت میان بخش‌های مختلف سریع‌تر انجام می‌شود. این ویژگی نقش مهمی در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی و حتی نظریه شبکه‌ها ایفا می‌کند.

اهمیت پژوهش‌های جدید

همین پیچیدگی‌ها باعث شده‌اند که پژوهش‌های جدید در مورد سطوح هذلولوی همچنان ادامه داشته باشند. کارهای اخیر نالینی آنتاتارامان و لورا مانک، با الهام از تحقیقات مریم میرزاخانی، نشان داده‌اند که ساختارهای این سطوح حتی پیچیده‌تر از آن چیزی هستند که پیش‌تر تصور می‌شد. این پژوهش‌ها نه تنها درک ما از این سطوح را گسترش داده‌اند، بلکه مسیرهای تازه‌ای را برای مطالعه دینامیک هندسی و توپولوژی این فضاها عجیب و شگفت‌انگیز باز کرده‌اند. مطالعه سطوح هذلولوی همچنان یکی از چالش‌های بزرگ ریاضیات مدرن است، اما تلاش‌های پیوسته دانشمندان نشان می‌دهد که هر گام در این مسیر، افق‌های جدیدی را برای فهم بهتر ساختارهای بنیادی فضا و هندسه می‌گشاید.



میرزاخانی در کودکی در ایران، ابتدا رویای نویسندگی داشت قبل از اینکه ریاضی‌دان شود.

مریم میرزاخانی و رازهای هندسه هذلولوی

مریم میرزاخانی مجذوب منحنی‌های چرخشی بود. هر زمان که با همکارانش صحبت می‌کرد، با هیجان از آن‌ها سخن می‌گفت، انگار که درباره شخصیت‌های یک داستان حرف می‌زند. کاسراف، استاد دانشگاه تورنتو، به یاد می‌آورد که او همیشه دو پرسش اساسی را مطرح می‌کرد: «چند منحنی وجود دارد؟ و آن‌ها کجا قرار دارند؟» در دوران

او کرد—توانایی ترکیب نگاه عمیق ریاضیاتی با روش‌های خلاقانه حل مسئله. مسیر لورا مانک، از دانشجویی که روزی به ریاضیات بی‌علاقه بود تا پژوهشگری که راه مریم میرزاخانی را ادامه می‌دهد، نشان‌دهنده تأثیر افرادی همچون نالینی آنانتارامان در شکل‌گیری نسل جدید ریاضی‌دانان است. اکنون، او نه تنها به تحقیقات خود ادامه می‌دهد، بلکه در تلاش است تا راه را برای زنانی که می‌خواهند وارد دنیای ریاضیات شوند، هموارتر کند.

اتصال و شکاف طیفی در سطوح هذلولوی

در سال ۲۰۱۵، هر دو ریاضی‌دان برای یک ترم به دانشگاه کالیفرنیا، برکلی سفر کردند. جالب اینجاست که دختر میرزاخانی و پسر آنانتارامان هم‌سن و سال بودند؛ به گونه‌ای که در یک زمین بازی محلی به‌طور اتفاقی یکدیگر را ملاقات می‌کردند و در حالی که کودکانشان مشغول بازی بودند، درباره چالش‌ها و تجربیات مربوط به مادر بودن گفتگو می‌کردند. نالینی آنانتارامان آگاه بود که مریم میرزاخانی در پایان عمر خود، آزمایشاتی روی سطوح هذلولوی تصادفی آغاز کرده بود و او قصد داشت همین مسیر پژوهشی را ادامه دهد. یکی از راه‌های فهم میزان اتصال یک سطح هذلولوی، بررسی حرکت تصادفی بر روی آن است. تصور کنید که یک مورچه به‌طور تصادفی روی چنین سطحی حرکت کند؛ اگر مسیرهای متعددی بین بخش‌های مختلف وجود داشته باشد، مورچه به راحتی می‌تواند به هر نقطه‌ای برسد. اما اگر اتصال بین نواحی ضعیف باشد—مثلاً مانند یک دمبل که دو قسمت بزرگ را تنها با یک پل باریک به هم وصل می‌کند—مورچه ممکن است مدت طولانی در یک ناحیه گیر کند و به‌سختی به بخش دیگر منتقل شود. برای اندازه‌گیری میزان اتصال یک سطح، ریاضی‌دانان از مفهومی به نام شکاف طیفی استفاده می‌کنند. این عدد نشان می‌دهد که سطح از نظر پیوستگی چقدر به هم متصل است؛ هرچه شکاف طیفی بیشتر باشد، ارتباط میان بخش‌های سطح قوی‌تر است. حتی اگر نتوان شکل دقیق سطح را تجسم کرد، این عدد می‌تواند نمای کلی ساختار آن را به ما نشان دهد. به عبارت دیگر، رافی می‌گوید: «این عدد مثل ابزاری است برای گفتن اینکه «این سطح چه شکلی به نظر می‌رسد؟» برای درک بهتر، می‌توان این موضوع را به شهرسازی تشبیه کرد: در شهری با خیابان‌ها و راه‌های متعدد، رفت‌وآمد میان محله‌ها آسان است (شکاف طیفی بالا). اما در شهری که تنها یک یا دو مسیر باریک وجود دارد، ممکن است مردم برای مدت زیادی در یک منطقه بمانند و دسترسی به سایر محله‌ها دشوار شود (شکاف طیفی پایین). این

پیشنهاد یکی از اساتیدش، مانک با قطار به دیدار نالینی آنانتارامان رفت، ریاضی‌دانی که احتمالاً می‌توانست مشاور او باشد. آنانتارامان، همانند میرزاخانی، در چندین حوزه ریاضی تخصص داشت. در واقع، او در دوران کاری خود چندین بار با میرزاخانی ملاقات کرده بود. هر دو تقریباً هم‌سن بودند و به موضوعات مشابهی علاقه داشتند. همچنین، هر دو علاقه خاصی به علوم انسانی داشتند؛ همان‌طور که میرزاخانی در نوجوانی به ادبیات گرایش داشت، آنانتارامان نیز سال‌ها در دوراهی بین موسیقی و ریاضیات سرگردان بود. نالینی آنانتارامان تا مدت‌ها بین حرفه پیانیست کلاسیک و ریاضی‌دان بودن مردد بود. اما در نهایت، به دنیای ریاضیات روی آورد و اخیراً نتیجه‌ای انقلابی در هندسه هذلولوی به دست آورده است. پژوهش‌های او در این حوزه، به‌ویژه در زمینه توزیع مقادیر ویژه در فضاها هذلولوی، نقش مهمی در فهم بهتر رفتار سیستم‌های دینامیکی و مکانیک کوانتومی داشته است. او موفق شده است ارتباطی میان نظریه طیفی، هندسه هذلولوی و سیستم‌های آشوبناک برقرار کند؛ حوزه‌هایی که می‌توانند تأثیر عمیقی بر فیزیک نظری، نظریه اعداد و حتی علوم کامپیوتر داشته باشند. آنچه آنانتارامان را از بسیاری از ریاضی‌دانان دیگر متمایز می‌کند، دیدگاه بین‌رشته‌ای او نسبت به مسائل علمی است.



لورا مانک از طریق توسعه نظریه‌های ریاضی میرزاخانی، احساس می‌کند که به نوعی او را شناخته است.

او نه تنها به روابط انتزاعی میان فضاها هذلولوی و فیزیک علاقه دارد، بلکه سعی می‌کند درک شهودی از این مفاهیم را نیز پرورش دهد. این همان چیزی است که مانک را شیفته همکاری با

دگرگون کند.



وقتی میرزاخانای ایده‌های ریاضی‌اش را توضیح می‌داد، شاداب و اجتماعی می‌شد و اشیاء را مانند شخصیت‌های یک داستان توصیف می‌کرد.

پیشرفت با استفاده از فرمول میرزاخانای

مانک و آنانتارامان کار خود را با فرمولی آغاز کردند که مریم میرزاخانای در دورهٔ دکتریش برای شمارش ژئودزیک‌های بسته ارائه داده بود. این فرمول یکی از شاهکارهای او محسوب می‌شد، اما یک محدودیت مهم داشت: فرمول میرزاخانای تعداد ژئودزیک‌ها را کمتر از مقدار واقعی تخمین می‌زد. این فرمول بیشتر ژئودزیک‌ها را در نظر می‌گرفت، اما برخی از مسیرهای پیچیده‌تر را از قلم می‌انداخت — به‌ویژه مسیرهایی که از روی خود عبور می‌کردند. به عنوان مثال، مسیرهایی که مانند شکل عدد هشت انگلیسی، دو حفره را در بر می‌گیرند، در این شمارش لحاظ نشده بودند. میرزاخانای سال‌ها در دنیای سطوح هذلولوی، با اشکال پیچیده و انتزاعی سروکار داشت. او ایده‌هایش را با رسم شکل روی کاغذهای بزرگ دنبال می‌کرد، هرچند این اشکال، به‌طور دقیق، قابل ترسیم نبودند.

یک گام به سوی کشف شکاف طیفی

با استفاده از فرمول میرزاخانای، مانک و آنانتارامان موفق شدند شکاف طیفی نسبتاً بزرگی را ثابت کنند. اما آنانتارامان در این مورد گفت: «مثل یک معجزه بود. هنوز هم برایم عجیب است که این روش این‌قدر خوب جواب می‌دهد.» آن‌ها دریافتند که اگر بتوانند فرمول میرزاخانای را دقیق‌تر کنند و ژئودزیک‌های پیچیده‌تر را هم بشمارند، شاید بتوانند مقدار شکاف طیفی را به همان مقدار ۴۱ که ریاضی‌دانان به دنبالش بودند، برسانند. در همین حین، آنانتارامان ناگهان ایمیلی را به یاد آورد که چند سال پیش از درگذشت میرزاخانای دریافت کرده بود. در آن ایمیل، میرزاخانای دربارهٔ ارتباط بین شکاف طیفی و شمارش

رویکرد در هندسه و فیزیک کاربرد فراوانی دارد؛ به کمک آن می‌توان ساختار فضاها و نحوهٔ حرکت در آن‌ها را به‌طور جامع‌تر تحلیل کرد. شکاف طیفی به‌طور نظری می‌تواند هر مقداری بین ۰ تا ۴۱ باشد، اما بیشتر سطوح هذلولوی که ریاضی‌دان‌ها ساخته‌اند، شکاف طیفی نسبتاً کمی دارند. تا سال ۲۰۲۱، آن‌ها نتوانسته بودند راهی پیدا کنند که سطوحی با هر تعداد حفره بسازند که بالاترین شکاف طیفی ممکن را داشته باشند؛ یعنی سطوحی که بیشترین اتصال را دارند. اگرچه سطوح هذلولوی با شکاف طیفی بالا کم هستند، ریاضی‌دان‌ها فکر می‌کنند که این سطوح در واقع رایج‌تر باشند. یک دنیای وسیع از سطوح هذلولوی وجود دارد که هنوز به‌طور کامل کاوش نشده است. ریاضی‌دان‌ها معمولاً نمی‌توانند سطوح خاصی را بسازند، اما امیدوارند ویژگی‌های عمومی یک سطح معمولی را بفهمند. وقتی به همه سطوح هذلولوی نگاه می‌کنند، انتظار دارند بیشتر آن‌ها شکاف طیفی ۴۱ داشته باشند. این چالشی بود که آنانتارامان امیدوار بود به دانشجوی دکتریش جدیدش محول کند. مانک، که مشتاق بود تحت نظر یک استاد زن کار کند و اهداف بلندپروازانه‌ای برای خود تعیین کند: «اگر قراره دکترا بگیرم، واقعاً باید این کار رو بکنم.»

ادامهٔ مسیر

در سال ۲۰۱۸، تنها یک سال پس از درگذشت مریم میرزاخانای، لورا مانک تحصیلات تکمیلی خود را تحت نظر نالینی آنانتارامان آغاز کرد. نخستین هدف او این بود که تا حد امکان دربارهٔ پژوهش‌های میرزاخانای در زمینهٔ سطوح هذلولوی بیاموزد. او می‌دانست که این حوزه از ریاضیات، با وجود پیچیدگی زیاد، سرخ‌هایی برای حل برخی از عمیق‌ترین مسائل در هندسه، فیزیک نظری و نظریهٔ طیفی ارائه می‌دهد. یکی از چالش‌های کلیدی در این حوزه، تخمین تعداد ژئودزیک‌های بسته روی یک سطح هذلولوی بود — مسیرهای حلقه‌ای که میرزاخانای در کارهایش به‌شدت مطالعه کرده بود. مشخص شده بود که اگر بتوان تعداد این ژئودزیک‌ها را با دقت کافی تخمین زد، می‌توان شکاف طیفی آن سطح را محاسبه کرد. شکاف طیفی، معیاری است که اطلاعات مهمی دربارهٔ ساختار یک سطح و نحوهٔ انتشار امواج روی آن ارائه می‌دهد. مانک و آنانتارامان تلاش کردند ثابت کنند که تقریباً همهٔ سطوح هذلولوی دارای شکاف طیفی ۴۱ هستند. این بدان معناست که هرچه تعداد حفره‌های یک سطح بیشتر باشد، احتمال اینکه شکاف طیفی آن به بیشترین مقدار ممکن نزدیک شود، افزایش می‌یابد. این یک نتیجهٔ بنیادی در نظریهٔ طیفی و هندسهٔ هذلولوی بود که می‌توانست درک ما را از این فضاها

بتوانند این مقدار را به طور کامل ثابت کنند؟ سرانجام، آن‌ها تصمیم گرفتند که به جای انتشار یک نتیجه ناقص، مسیر تحقیق را تا دستیابی کامل به مقدار ۴۱ ادامه دهند. آن‌ها می‌دانستند که این مسئله یکی از پرسش‌های مهم در هندسه هذلولوی و نظریه طیفی است، و هر گامی که در این مسیر برمی‌دارند، می‌تواند دستاوردی ارزشمند برای آینده ریاضیات باشد.

بن‌بست و بازنگری در روش

آن‌ها با یک مشکل جدی روبه‌رو شدند. برخی ژئودزیک‌ها برای مدت طولانی در یک ناحیه از سطح می‌چرخیدند و مسیرهای درهم‌تنیده‌ای ایجاد می‌کردند. این اتفاق فقط در تعداد کمی از سطوح رخ می‌داد، اما در صورت وقوع، تعداد زیادی از این ژئودزیک‌ها ظاهر می‌شدند. اگر مانک و آناتارامان آن‌ها را در شمارش کلی لحاظ می‌کردند، محاسبات دچار خطا می‌شد و مقدار شکاف طیفی کمتر از ۴۱ به دست می‌آمد. مانک گفت که اوضاع ناامیدکننده به نظر می‌رسید. این ناامیدی زمانی بیشتر شد که دو تیم مستقل، در فاصله‌ای چند ماهه، مقالاتی منتشر کردند و شکاف طیفی ۴۱ را ثابت کردند. اما این خبر برای آناتارامان مهم نبود؛ او فقط به رسیدن به ۴۱ فکر می‌کرد. او گفت: «وقتی روی کاری شروع به کار می‌کنم، به یک هدف دوردست علاقه‌مند می‌شوم» ویژگی‌ای که به نظر می‌رسید با میرزاخانی مشترک بود. الکس رایت، که عضو یکی از تیم‌هایی بود که به نتیجه ۴۱ رسید، دیدگاه مانک را درک کرد. او گفت: «کار کردن روی چنین مسئله‌ای برای یک دانشجوی دکترا غیرمعمول است.» همچنین، به نظر نمی‌رسید که کسی بتواند راهی برای رسیدن به ۴۱ پیدا کند.

نظریه گراف و هندسه هذلولوی: پلی میان دو جهان

در دنیای ریاضیات، شاخه‌های مختلف گاهی به شکل غیرمنتظره‌ای به هم پیوند می‌خورند. یکی از این پیوندهای شگفت‌انگیز، ارتباط میان نظریه گراف‌ها و هندسه هذلولوی است. هرچند این دو حوزه در نگاه اول کاملاً مجزا به نظر می‌رسند — یکی در مطالعه شبکه‌های انتزاعی از نقاط و یال‌ها، و دیگری در بررسی فضاهای خمیده و غیرمسطح — اما شباهت‌های عمیقی میان آن‌ها وجود دارد که می‌تواند به حل مسائل بنیادی در هر دو زمینه کمک کند. نالینی آناتارامان و لورا مانک هنگام تحقیق روی شکاف طیفی در سطوح هذلولوی، به ارتباطات شگفت‌انگیزی بین این دو شاخه پی بردند. آن‌ها دریافتند که ایده‌هایی که در نظریه گراف‌ها برای توصیف رفتار

ژئودزیک‌ها سؤال‌هایی مطرح کرده بود. آناتارامان گفت: «آن موقع نمی‌دانستم چرا این سؤال‌ها را می‌پرسد.» اما اکنون، متوجه شد که شاید میرزاخانی هم قصد داشت از روشی مشابه استفاده کند. این کشف، انگیزه‌ی بیشتری به آن‌ها داد تا مسیر پژوهشی خود را ادامه دهند.

توسعه فرمول میرزاخانی توسط مانک

در دوران تحصیلات تکمیلی، مانک تلاش کرد فرمول میرزاخانی را برای ژئودزیک‌های پیچیده‌تر گسترش دهد. علاوه بر این، او توضیحاتی درباره برخی از مفاهیمی نوشت که میرزاخانی در مقالاتش به طور کامل توضیح نداده بود. مانک گفت: «احساس می‌کنم برخی از ایده‌هایش را مطرح کرده بود تا کسی آن‌ها را برای دیگران توضیح دهد، چون خودش فرصت نکرد.»

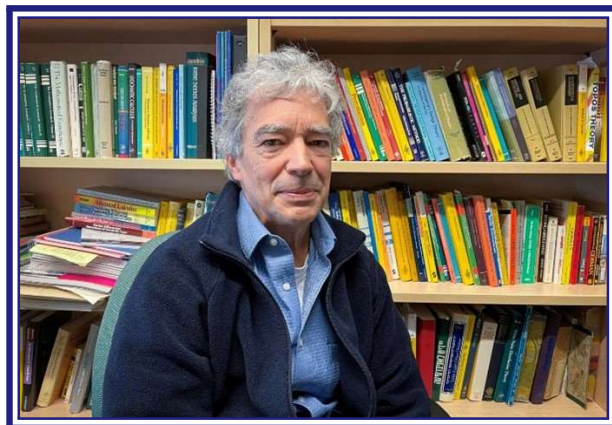


نالینی آناتارامان، از دنیای موسیقی تا اثباتی انقلابی در هندسه هذلولوی.

نقطه عطف در سال

تا سال ۲۰۲۱، مانک موفق شد روشی برای شمارش انواع ژئودزیک‌های پیچیده بیابد که پیش‌تر قابل دسترس نبودند. این یک پیشرفت بزرگ در پژوهش‌های آن‌ها بود، زیرا اجازه می‌داد فرمول جدید را برای تخمین دقیق‌تر شکاف طیفی به کار گیرند. اما آن‌ها با یک تصمیم مهم روبه‌رو شدند: منتشر کردن نتایج اولیه خود، حتی اگر به شکاف طیفی ۴۱ نرسیده باشند؟ یا صبر کردن تا زمانی که

استفاده می‌کرد. مارک رایت، یکی از متخصصان این حوزه، دربارهٔ سختی این اثبات گفته است: «این یک نتیجهٔ مشهور و بسیار سخت است که اثبات آن طولانی بوده و در برابر ساده‌سازی مقاوم است.» اما آنانتارامان پس از مدتی دوباره به این موضوع بازگشت. او سرنخ‌های جدیدی پیدا کرد و دریافت که بخش‌هایی از اثبات فریدمن شباهت زیادی به کاری دارد که خودش و مانک روی سطوح هذلولوی انجام می‌دادند. این بینش، دریچه‌ای تازه به روی آن‌ها گشود.



جونل فریدمن ثابت کرد که بیشتر گراف‌ها ویژگی کلیدی خاصی دارند و ریاضی‌دانان از کار او برای حل یک مسئله بزرگ در هندسه هذلولوی استفاده کردند.

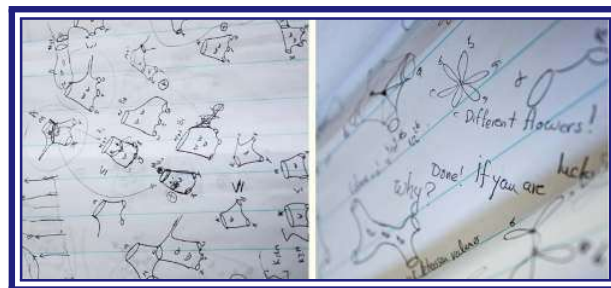
شباهت‌های کلیدی میان گراف‌ها و سطوح هذلولوی

به‌طور شهودی، یک گراف مجموعه‌ای از نقاط (رأس‌ها) است که با یال‌هایی به هم متصل شده‌اند. در مقابل، یک سطح هذلولوی را می‌توان به عنوان یک فضای خمیده در نظر گرفت که در آن، مسیرهای مستقیم (ژئودزیک‌ها) به شکلی متفاوت از فضای اقلیدسی رفتار می‌کنند.

مسیرهای پیچیده و مشکل شمارش آن‌ها

در اثبات فریدمن، یکی از چالش‌های اصلی، وجود مسیرهای پیچیده‌ای بود که بین نقاط یک گراف کشیده می‌شدند. این مسیرها، مانند ژئودزیک‌های پیچیده در سطوح هذلولوی، باعث می‌شدند که محاسبهٔ شکاف طیفی به‌درستی انجام نشود. به زبان ساده، این مسیرها همانند ژئودزیک‌هایی بودند که چندین بار از روی خودشان عبور می‌کنند، مشابه آنچه که در کارهای میرزاخانی روی ژئودزیک‌های بسته پیچیده بررسی شده بود.

گراف‌های تصادفی استفاده می‌شوند، می‌توانند به حل مسائل پیچیده در هندسهٔ هذلولوی نیز کمک کنند. این درک جدید، راه را برای کاربردهای گسترده‌تر نظریهٔ گراف‌ها در مسائل هندسی باز کرد.



میرزاخانی سال‌ها در حال مطالعه اشکال هذلولوی بود و از طراحی ایده‌هایش روی کاغذهای بزرگ لذت می‌برد، حتی وقتی این اشکال قابل ترسیم نبودند.

قضیه جونل فریدمن: گراف‌های تصادفی و بهینه‌بودن اتصال

در حدود بیست سال پیش، جونل فریدمن، یکی از ریاضی‌دانان برجستهٔ نظریهٔ گراف، نشان داد که بیشتر گراف‌های تصادفی دارای یک ویژگی مهم هستند: آن‌ها بهینه به هم متصل‌اند. این ویژگی به این معناست که اگر در یک گراف تصادفی یک مسیر از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر بکشیم، احتمال اینکه این مسیر از لحاظ طول و اتصال، کارآمدترین مسیر ممکن باشد، بسیار بالا است. در نظریهٔ طیفی گراف، این ویژگی از طریق کمیتی به نام شکاف طیفی اندازه‌گیری می‌شود. هرچه شکاف طیفی بزرگ‌تر باشد، اتصال در گراف قوی‌تر است و این مسئله ارتباط مستقیمی با رفتار امواج، انتشار اطلاعات و حتی پایداری شبکه‌ها دارد. قضیهٔ فریدمن، که به عنوان یکی از نتایج اساسی در نظریهٔ گراف‌های تصادفی شناخته می‌شود، بعدها ابزاری ارزشمند برای حل مسائل پیچیده در هندسهٔ هذلولوی شد. اما کاربرد آن در این حوزه، کار ساده‌ای نبود.

چالش استفاده از نتیجهٔ فریدمن در هندسه هذلولوی

هنگامی که آنانتارامان و مانک پروژهٔ خود را آغاز کردند، آنانتارامان تصمیم گرفت که اثبات فریدمن را مطالعه کند. اما همانند بسیاری از ریاضی‌دانان دیگر، در ابتدا این نتیجه را غیرقابل درک یافت. او دربارهٔ تجربهٔ اولیهٔ خود در مواجهه با این قضیه گفت: «در آن زمان واقعاً هیچ چیزی از آن نمی‌فهمیدم.» اثبات فریدمن نه تنها طولانی و پیچیده بود، بلکه از ابزارهای پیشرفته‌ای در ترکیبیات، احتمال، و آنالیز طیفی

الهام از نظریه گراف‌ها برای حل یک مسئله هندسی

در ماه می ۲۰۲۲، آنانتارامان و مانک کارگاهی برگزار کردند و از جوئل فریدمن دعوت نمودند تا درباره کارهایش سخن بگوید. فریدمن که سال‌ها پیش اثباتی پیچیده در نظریه گراف‌ها ارائه کرده بود، در این جلسه گفت: «آن‌ها واقعاً به تکنیکی نیاز داشتند که در اعماق اثبات من نهفته بود.» این دیدار نقطه عطفی در پژوهش آنانتارامان و مانک شد و مسیر تحقیقاتی آن‌ها را دگرگون کرد. در همین راستا، آنانتارامان و مانک نیز با اشتیاق زیاد، روش فریدمن را بررسی کردند و متوجه شدند که او راهی برای حذف مسیرهای مشکل‌زا در گراف‌ها از محاسبات خود یافته است. این همان روشی بود که آن‌ها برای هندسه هذلولوی به دنبالش بودند. پس از گفتگو با فریدمن، آنانتارامان و مانک دریافتند که می‌توانند تکنیک او را برای حل مسئله خود تطبیق دهند. البته چالش‌های زیادی باقی مانده بود؛ تبدیل این روش به چیزی که در هندسه هذلولوی کار کند، نیازمند تلاش و خلاقیت زیادی بود. اما تردیدهای آن‌ها برطرف شده بود. مانک با هیجان گفت: «در این مرحله کاملاً واضح بود که می‌توانیم کار را به پایان برسانیم.» این کشف، پلی میان نظریه گراف‌ها و هندسه هذلولوی ایجاد کرد و نشان داد که چگونه ایده‌های ریاضی، حتی اگر در ابتدا به نظر نامرتب و بیابند، می‌توانند در نهایت به هم پیوند بخورند و به حل مسائل پیچیده کمک کنند. اوایل سال ۲۰۲۳، آنانتارامان و مانک مقاله‌ای منتشر کردند که دستاوردهای مهم آن‌ها تا آن زمان را خلاصه می‌کرد. در این مقاله، آن‌ها موفق به اثبات شکاف طیفی ۴۱ شدند که یک رکورد جدید در این حوزه محسوب می‌شد. مانک این نتیجه را «یک گام میانی بسیار خوب» توصیف کرد. در سال بعد، آن‌ها روش‌های جوئل فریدمن را تطبیق داده و چارچوبی برای دستیابی به مقدار ۴۱ ارائه کردند. سرانجام، در ماه گذشته، آن‌ها موفق به تکمیل اثبات خود شدند و نشان دادند که یک سطح هذلولوی تصادفی، با احتمال بالا، دارای بیشینه شکاف طیفی خواهد بود. این کشف، درک ریاضی‌دانان از سطوح هذلولوی را بیش از هر زمان دیگری گسترش داده است. اکنون، پژوهشگران دیگر امیدوارند که روش‌های ارائه‌شده در این کار بتوانند به حل مسائل بنیادی در حوزه‌های مختلف، از جمله نظریه اعداد و دینامیک، کمک کنند. آنتون زوریش، ریاضی‌دان مؤسسه ریاضیات ژوسو در پاریس، درباره این پیشرفت گفت: «چنین پژوهشی بلافاصله موجی از نتایج مرتبط را به همراه دارد.» این تحقیق همچنین به مانک و آنانتارامان فرصت داد تا با پژوهش‌های مریم میرزاخانی آشنایی عمیق‌تری پیدا کنند. مانک، با اینکه هنوز هیچ‌یک از سخنرانی‌های

ارتباط بین اتصال گراف و شکاف طیفی در سطوح هذلولوی

یکی از نتایج مهم نظریه گراف این است که هرچه گراف بهینه‌تر به هم متصل باشد، شکاف طیفی آن بزرگ‌تر خواهد بود. این ایده در فضای هذلولوی نیز مصداق داشت: در یک سطح هذلولوی، اگر ژئودزیک‌ها به‌طور یکنواخت توزیع شوند و مسیرهای تصادفی به‌صورت متوازن سطح را پوشش دهند، شکاف طیفی آن سطح به مقدار ماکزیمم ۴۱ نزدیک‌تر خواهد شد. به‌طور مشابه، در یک گراف تصادفی، اگر گراف بهینه به هم متصل باشد، مقادیر ویژه آن ساختار طیفی مناسبی خواهند داشت.

تطبیق روش‌های نظریه گراف با هندسه هذلولوی

هنگامی که آنانتارامان به شباهت‌های میان قضیه فریدمن و سطوح هذلولوی پی برد، متوجه شد که برخی از روش‌هایی که در نظریه گراف‌ها برای بررسی اتصال گراف‌ها به کار می‌رود، می‌تواند برای مطالعه هندسه هذلولوی نیز مفید باشد. به بیان دیگر، اگر بتوان گرافی را پیدا کرد که ویژگی‌های آن به سطح هذلولوی نزدیک باشد، می‌توان با استفاده از ابزارهای نظریه گراف‌ها، اطلاعات جدیدی درباره شکاف طیفی این سطوح به دست آورد. کشف آنانتارامان و مانک نشان داد که روش‌های نظریه گراف‌ها می‌توانند به حل برخی از بزرگ‌ترین چالش‌های هندسه هذلولوی کمک کنند. این پژوهش، پیامدهای عمیقی داشت: ایجاد ابزارهای جدید برای تحلیل سطوح هذلولوی؛ اکنون، محققان می‌توانند از تکنیک‌های گرافی برای مطالعه این فضاها استفاده کنند. گسترش نظریه طیفی در فیزیک و ریاضیات: شکاف طیفی در هندسه هذلولوی، ارتباط نزدیکی با رفتار کوانتومی امواج دارد، و این نتایج می‌تواند در فیزیک نظری کاربرد داشته باشد. درک عمیق‌تر از ارتباط میان حوزه‌های مختلف ریاضیات: این پژوهش نمونه‌ای عالی از بینارشته‌ای بودن ریاضیات است، جایی که ایده‌های نظریه گراف به حل مشکلاتی در هندسه هذلولوی کمک می‌کنند. کاری که آنانتارامان و مانک انجام دادند، نمونه‌ای از قدرت الهام‌گیری بین رشته‌ای در ریاضیات است. درحالی‌که نظریه گراف‌ها در ابتدا ابزاری کاملاً مجزا از هندسه هذلولوی به نظر می‌رسید، در نهایت مشخص شد که روش‌های آن می‌توانند بینشی جدید در مورد ساختار سطوح هذلولوی و شکاف طیفی ارائه دهند.

افزود: «قرار بود او در اینجا باشد تا از این دستاوردها قدردانی کند. هیچ شکی ندارم که او از این موضوع بسیار خوشحال می‌شد». این پژوهش، نه تنها یک موفقیت فنی در هندسه هذلولوی است، بلکه پلی میان نسل‌های مختلف ریاضی‌دانان ایجاد کرده است — از فریدمن و میرزاخانی گرفته تا مانک و آنانتارامان — و تأثیر آن در سال‌های آینده نیز ادامه خواهد داشت.

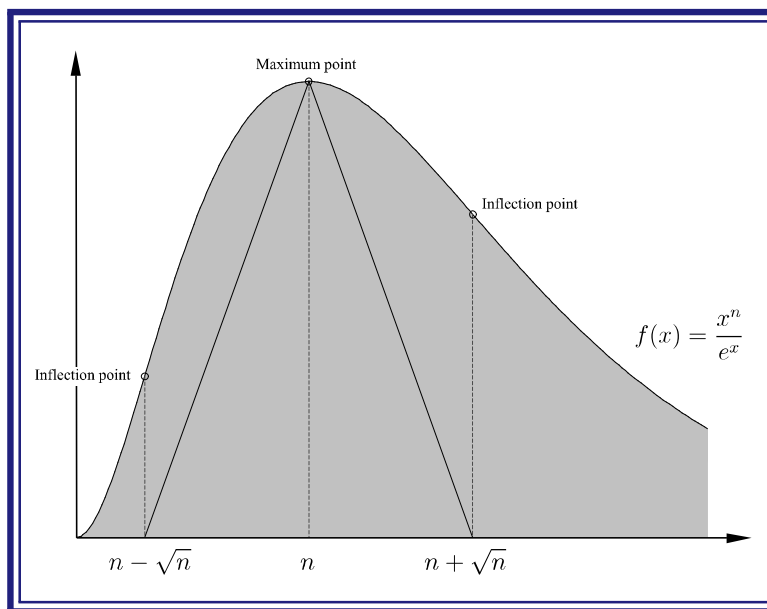
* <https://www.quantamagazine.org/years-after-the-early-death-of-a-math-genius-her-ideas-gain-new-life-20250303/>

** دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ریاضیات، دانشگاه ملایر

ضبط‌شده میرزاخانی را تماشا نکرده و صدای او را نشنیده است و ترجیح می‌دهد که تصویر او همچنان «کمی ناشناخته» باقی بماند — اما معتقد است که از طریق مطالعه اثبات‌های او، به درک بهتری از نحوه تفکرش دست یافته است. او می‌گوید: «زمانی که آثار کسی را به طور دقیق مطالعه می‌کنید، نه تنها محتوای اثر بلکه نحوه تفکر او را نیز می‌فهمید». اینکه آنانتارامان و مانک توانسته‌اند میراث میرزاخانی را گسترش دهند، برای جامعه ریاضی دستاوردی بزرگ محسوب می‌شود. رایت، استاد پیشین مانک، با ابراز تأسف گفت: «متأسفم که او نمی‌تواند این را ببیند.» زوریش نیز با این نظر موافق بود و

اثبات بی کلام*

مهدی حسنی**



$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty f(x) dx > \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sqrt{n}) f(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

*Mehdi Hassani, 108.12 Proof without words: a lower bound for $n!$, The Mathematical Gazette. 2024;108(571):146–146.

doi:10.1017/mag.2024.29