

«سوالات در دو صفحه است.»

۷. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x)f(x^2) \leq 0$. ثابت کنید $f'(0) = 0$.

۸. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه سره‌ای از آن باشد. همچنین فرض کنید عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که مرتبه هر عضو G که در H قرار ندارد برابر n است. ثابت کنید n توانی از یک عدد اول است.

۹. فرض کنید دنباله $a_1, a_2, \dots$ از اعداد طبیعی دارای ویژگی‌های زیر باشد.

• به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $0 \leq a_{2i} - a_{2i-1} \leq 1404$ و

• به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $a_{2i+1} = \varphi(a_{2i})$.

نشان دهید این دنباله کراندار است.

(برای هر عدد طبیعی n ، تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n را که نسبت به n اول هستند با $\varphi(n)$ نشان می‌دهیم.)

۱۰. فرض کنید R یک حلقه یکدار ناصفر و $Z(R)$ مرکز آن است. اگر برای هر $r \in R$ ، $0 \neq r$ عنصر z در $Z(R)$ موجود باشد به طوری که $0 \neq zr \in Z(R)$ ، ثابت کنید ایده‌آل M در R موجود است به طوری که $\frac{R}{M}$ یک میدان است.

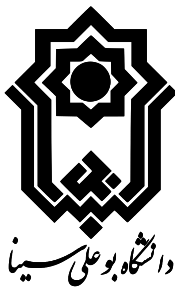
۱۱. فرض کنید $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که برای هر $z_0 \in \mathbb{C}$ ،

$$\{f(z) : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 1\} = \{g(z) : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 1\}.$$

الف) ثابت کنید برای هر $1 < r$ و هر $w_0 \in \mathbb{C}$ ، نقطه‌ای مثل $w \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $f(w) = g(w)$ و $|w - w_0| = r$.

ب) ثابت کنید برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $f(z) = g(z)$.

«سوال ۱۲ در پشت صفحه است.»



آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



۱۲. فرض کنید n عددی طبیعی و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های 11 عضوی از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که هر دو عضو $\mathcal{F}$ اشتراک ناتهی دارند. به زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n\}$ یک مجموعه برخورد برای $\mathcal{F}$ گوئیم هرگاه اشتراک آن با هر عضو $\mathcal{F}$ ناتهی باشد. فرض کنید کمترین تعداد اعضای یک مجموعه برخورد برای $\mathcal{F}$ برابر 5 باشد. به خانواده $\mathcal{H}$ از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ یک ابربرخورد برای $\mathcal{F}$ گوئیم هرگاه برای هر $A \in \mathcal{F}$ ، عضوی مانند $B \in \mathcal{H}$ وجود داشته باشد به طوری که $B \subseteq A$. ثابت کنید ابربرخوردی مانند $\mathcal{H}$ برای $\mathcal{F}$ وجود دارد به طوری که هر کدام از اعضای $\mathcal{H}$ دقیقاً 5 عضو دارند و $|\mathcal{H}| \leq 75000$.

موفق باشید