



۱. درون یک جعبه ۱۴۰۴ مهره سفید و ۱۴۰۳ مهره سیاه قرار دارد. دو مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. اگر دو مهره هم‌رنگ بودند، آن‌ها را کنار گذاشته و یک مهره سفید در جعبه قرار می‌دهیم. اگر دو مهره رنگ متفاوت داشتند آن‌ها را کنار گذاشته و یک مهره سیاه در جعبه قرار می‌دهیم. این کار را آن قدر ادامه می‌دهیم تا فقط یک مهره درون جعبه باقی بماند. آخرین مهره‌ای که در جعبه قرار دارد چه رنگی است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۲. فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $x \in [0, 1]$

$$1404f(x) = f\left(\frac{x}{1404}\right) + f\left(\frac{x+1}{1404}\right) + \dots + f\left(\frac{x+1403}{1404}\right)$$

ثابت کنید f تابعی ثابت است.

۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ناصفر با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که $A = AJA$ که در آن J ماتریسی $n \times n$ است که همه درایه‌های آن برابر یک می‌باشد. ثابت کنید ماتریس $A + J$ خودتوان نیست.

۴. فرض کنید m عددی طبیعی باشد. جعبه‌ای خالی و تعداد زیادی توپ در اختیار داریم. تارا به این ترتیب شروع به پر کردن این جعبه با توپ‌ها می‌کند. اگر تعداد توپ‌های موجود در جعبه کمتر از m باشد، او یکی از اعداد ۱، ۲ یا ۳ را با احتمال برابر و مستقل از مراحل قبلی انتخاب کرده و به اندازه عدد انتخاب شده، توپ به جعبه اضافه می‌کند. این عملیات وقتی متوقف می‌شود که حداقل m توپ درون جعبه قرار گرفته باشد. فرض کنید p_m احتمال این باشد که در زمان توقف، دقیقاً m توپ در جعبه باشد. مطلوب است محاسبه $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m$.

۵. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده و فاقد نقطه تنها است. ثابت کنید زیرمجموعه متناهی $S \subseteq X$ وجود دارد که برای هر $x \in X$ مجموعه $\{d(x, y) : y \in S\}$ شامل دست‌کم سه عدد حقیقی متمایز باشد. (نقطه $x \in X$ را تنها گویند اگر مجموعه $\{x\}$ باز باشد).

۶. فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که G' متناهی است. ثابت کنید گروه متناهی H وجود دارد که $G' \cong H'$.
(G' زیرگروه مشتق G است.)

موفق باشید