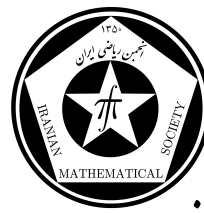


پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



انجمن ریاضی ایران

(۷) فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x)f(x^2) \leq 0$. ثابت کنید $f'(0) = 0$.

پاسخ:

راه حل اول. ابتدا دقت کنید که طبق فرض مسئله برای $x = 0$ ، $f(0)^2 \leq 0$ پس $f(0) = 0$. حال عدد حقیقی $r \in (0, 1)$ را در نظر بگیرید. طبق فرض مسئله برای $x = r^{2^n}$ ، $f(r^{2^n})f(r^{2^{n+1}}) \leq 0$ بنابراین طبق قضیه مقدار میانی $x_n \in (r^{2^{n+1}}, r^{2^n})$ وجود دارد که $f(x_n) = 0$. حال چون $0 \leq x_n \leq r^{2^n}$ و $r < 1$ ، نتیجه می گیریم $x_n \rightarrow 0$. در مورد مشتق f در صفر، با توجه به مشتق پذیری می توان $f'(0)$ را با حد گرفتن به کمک دنباله x_n محاسبه کرد:

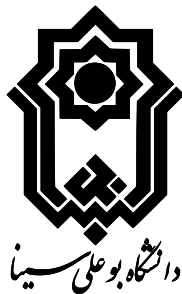
$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{x_n} = 0.$$

راه حل دوم. مشابه راه حل اول نتیجه می گیریم $f(0) = 0$. حال اگر $f'(0) \neq 0$ طبق تعریف مشتق، $\varepsilon > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in (0, \varepsilon)$ علامت $\frac{f(x)-0}{x-0}$ و $f'(0)$ یکسان است (به طور خاص $f(x) \neq 0$). پس برای هر عدد حقیقی مثبت مثل r که $r, r^2 < \varepsilon$ ، علامت $f(r)$ و $f(r^2)$ یکسان است و بنابراین $f(r)f(r^2) > 0$ و این با فرض مسئله تناقض دارد. پس $f'(0)$ باید برابر صفر باشد.

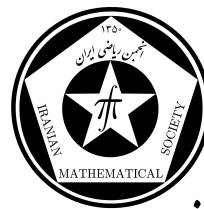
توضیح. همان طور که از هر دو راه حل بالا مشخص است، برای درستی حکم مسئله فرض مشتق پذیری تابع در صفر کافی است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



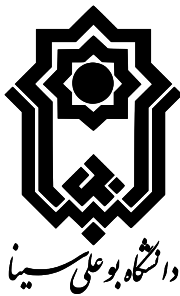
انجمن ریاضی ایران

۸) فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه سرهای از آن باشد. همچنین فرض کنید عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که مرتبه هر عضو G که در H قرار ندارد برابر n است. ثابت کنید n توانی از یک عدد اول است.

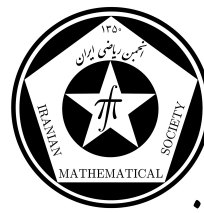
پاسخ: (برهان خلف) اگر n توانی از یک عدد اول نباشد آنگاه دارای حداقل دو عامل اول متمایز p, q است. بنابراین اعداد صحیح r, s وجود دارند که $rp + sq = 1$. حال اگر $a \in G \setminus H$ آنگاه $o(a) = n$. بنابراین $o(a^p) = \frac{n}{p} \neq n, o(a^q) = \frac{n}{q} \neq n$. در این صورت $a^p, a^q \in H$ که نتیجه می دهد $a = a^{sp+rq} \in H$ که تناقض است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۹) فرض کنید دنباله $a_1, a_2, \dots$ از اعداد طبیعی دارای ویژگی‌های زیر باشد.

• $a_1 = 1$

• به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $0 \leq a_{2i} - a_{2i-1} \leq 1404$ و

• به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $a_{2i+1} = \varphi(a_{2i})$.

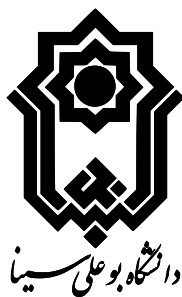
نشان دهید این دنباله کراندار است.

(برای هر عدد طبیعی n ، تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n را که نسبت به n اول هستند با $\varphi(n)$ نشان می‌دهیم.)

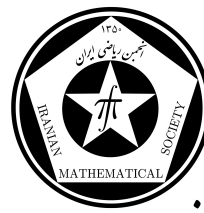
پاسخ: ابتدا توجه کنید که در گام‌هایی که دنباله افزایشی است، حداکثر 1404 واحد افزایش دارد و در گام‌های کاهشی، اگر a_{2i} بر عددی مثل m بخشپذیر باشد، در این صورت جمله بعدی حداقل به اندازه $\frac{a_{2i}}{m}$ کاهش پیدا خواهد کرد. پس اگر بازه‌ای به طول بیشتر از 1404 عدد مرکب متوالی داشته باشیم طوری که تابع ϕ در هر یک از آن نقاط به اندازه حداقل 1404 واحد کاهش داشته باشد، هیچ یک از جملات دنباله از بزرگترین عضو آن بازه بزرگتر نخواهد شد و حکم ثابت می‌شود. وجود چنین بازه‌ای نیز واضح است و مثلاً $1406! + 1, 1406! + 2, \dots, 1406! + 1406$ دارای ویژگی مطلوب است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



انجمن ریاضی ایران

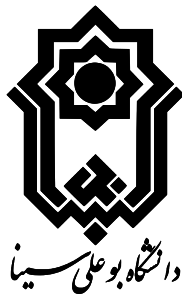
۱۰ فرض کنید R یک حلقه یکدار ناصفر و $Z(R)$ مرکز آن است. اگر برای هر $r \in R, r \neq 0$ ، عنصر z در $Z(R)$ موجود باشد به طوری که $zr \in Z(R), r \neq 0$ ، ثابت کنید ایده‌ال M در R موجود است به طوری که $\frac{R}{M}$ یک میدان است.

پاسخ: ابتدا با استقرا روی n ثابت می‌کنیم برای هر دنباله $x_1, \dots, x_n$ از اعضای R عضو $c \in Z(R), c \neq 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n, cx_i \in Z(R)$. برای $n = 1$ اگر $x_1 = 0$ قرار دهید $c = 1$ و اگر $x_1 \neq 0$ طبق فرض مساله حکم ثابت می‌شود. فرض کنید $n > 1$ و حکم برای اعداد کوچکتر از n درست باشد. بنابراین $c_1 \in Z(R), c_1 \neq 0$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n-1, c_1 x_i \in Z(R)$. اگر $c_1 x_n = 0$ حکم با فرض $c = c_1$ ثابت می‌شود. اگر $c_1 x_n \neq 0$ طبق فرض $c_2 \in Z(R), c_2 \neq 0$ وجود دارد که $c_2 c_1 x_n \in Z(R)$. در این حالت $c = c_2 c_1 \in Z(R), c \neq 0$ و $cx_i \in Z(R), 1 \leq i \leq n$.

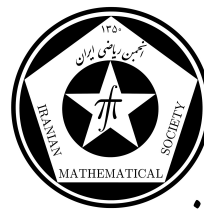
ایده‌ال تولید شده توسط تمام عناصر به شکل $xy - yx$ را I بنامید. اگر $1 \in I$ آنگاه عناصر $r_i, s_i, x_i, y_i \in R (1 \leq i \leq n)$ وجود دارند به طوری که $1 = \sum_{i=1}^n r_i(x_i y_i - y_i x_i) s_i$. طبق ادعای بالا عنصر $c \in Z(R), c \neq 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n, cx_i \in Z(R)$. بنابراین $c(x_i y_i - y_i x_i) = cx_i y_i - cy_i x_i = (cx_i) y_i - y_i (cx_i) = (cx_i) y_i - (cx_i) y_i = 0$. بالا در c و رابطه $cr_i(x_i y_i - y_i x_i) s_i = 0$ نتیجه می‌شود $c = 0$ که تناقض است. بنابراین $1 \notin I$. پس ایده‌ال سره R است. بنابراین طبق لم زورن ایده‌ال ماکزیمال M شامل I وجود دارد. بنابراین $\frac{R}{I} \cong \frac{R}{M}$ می‌باشد. لذا $\frac{R}{M} \cong \frac{R}{I}$ میدان می‌باشد.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



انجمن ریاضی ایران

(۱۱) فرض کنید $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که برای هر $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\{f(z) : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 1\} = \{g(z) : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq 1\}.$$

الف) ثابت کنید برای هر $1 < r$ و هر $w_0 \in \mathbb{C}$ ، نقطه‌ای مثل $w \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که
 $|w - w_0| = r$ و $f(w) = g(w)$.

ب) ثابت کنید برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $f(z) = g(z)$.

پاسخ: به وضوح اگر دست کم یکی از f و g تابعی ثابت باشد، به دلیل فرض مسئله باید تابع دیگر نیز تابعی ثابت با همان مقدار باشد و بنابراین دو تابع در همه نقاط مقدار برابر می‌گیرند. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم که هیچکدام از f, g توابع ثابت نیستند.

الف) با توجه به این که هر گوی بسته به شعاع بیش‌تر از ۱ در صفحه مختلط را می‌توان به صورت اجتماع گوی‌های بسته به شعاع ۱ نوشت، نتیجه می‌گیریم برای هر گوی بسته D با شعاع بیش‌تر یا مساوی ۱ در صفحه مختلط $f(D) = g(D)$.

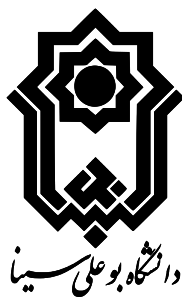
حال برای $r > 1$ ، D را گوی بسته به شعاع r به مرکز w_0 در $\mathbb{C}$ بگیریم. به دلیل فشردگی D ، نقطه‌ای مثل $w \in D$ وجود دارد که $|f(w)| = \max_{z \in D} |f(z)|$. چون یک تابع تحلیلی غیر ثابت نمی‌تواند ماکسیمم قدر مطلق خود روی یک ناحیه فشرده را در نقطه‌ای درونی از ناحیه اتخاذ کند نتیجه می‌گیریم $|w - w_0| = r$ و همچنین برای هر $z \in \text{int}(D)$ ، $|f(z)| < |f(w)|$. در ادامه ثابت می‌کنیم $g(w) = f(w)$.

نقطه $z_0 \in \mathbb{C}$ را به گونه‌ای بگیریم که $z_0 - w_0 := \frac{r-1}{r}(w - w_0)$. در این صورت $|w - z_0| = 1$. بنابراین اگر D' را گوی بسته به شعاع ۱ به مرکز z_0 بگیریم، $w \in \partial D'$ به علاوه به دلیل نابرابری مثلث، هر نقطه دیگر از D' نقطه‌ای درونی از D است:

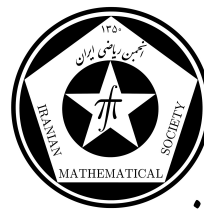
$$D' \subseteq D, \quad D' \setminus \{w\} \subseteq \text{int}(D).$$

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
چهل و هفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
۱۴۰۴/۰۵/۲۸



انجمن ریاضی ایران

این روابط نتیجه می دهد که ماکسیمم قدر مطلق f روی D' تنها و تنها در w اتخاذ می شود:

$$z \in D' \setminus \{w\} \Rightarrow |f(z)| < |f(w)|.$$

حال توجه کنید که $g(D') = f(D')$. بنابراین نقطه ای مثل $w' \in D'$ وجود دارد که $f(w) = g(w')$.

پس

$$|g(w')| = |f(w)| = \max\{|f(z)| : z \in D'\} = \max\{|g(z)| : z \in D'\}.$$

پس $|g|$ ماکسیمم خود روی D' را در w' اتخاذ می کند. ادعا می کنیم $w' = w$. اگر $w' \neq w$,

نقطه درونی از D است و بنابراین $|g(w')|$ نمی تواند ماکسیمم $|g|$ روی D باشد. اما چون $|f(w)|$

ماکسیمم قدر مطلق $|f|$ روی D را می دهد و $f(w) = g(w)$ خواهیم داشت:

$$|g(w')| = |f(w)| = \max\{|f(z)| : z \in D\} = \max\{|g(z)| : z \in D\},$$

که تناقض است. پس حتماً $w = w'$ و لذا $f(w) = g(w)$.

ب) طبق بخش الف، برای $r \in (1, 2]$ ، تابع هولومورف $f - g$ دست کم در یک نقطه روی مرز گوی

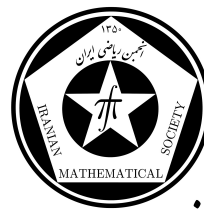
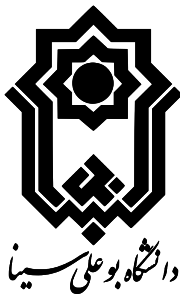
به شعاع r به مرکز مبدأ مقدار صفر می گیرد و چون همه این نقاط در ناحیه ای فشرده (گوی بسته

به شعاع ۲ به مرکز مبدأ) قرار دارند، نقطه ای حدی خواهند داشت و این یعنی $f - g$ باید متحد با

صفر باشد. پس برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $f(z) = g(z)$.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



(۱۲) فرض کنید n عددی طبیعی و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های 11 عضوی از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که هر دو عضو $\mathcal{F}$ اشتراک ناتهی دارند. به زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n\}$ یک مجموعه برخورد برای $\mathcal{F}$ گوییم هرگاه اشتراک آن با هر عضو $\mathcal{F}$ ناتهی باشد. فرض کنید کمترین تعداد اعضای یک مجموعه برخورد برای $\mathcal{F}$ برابر 5 باشد. به خانواده $\mathcal{H}$ از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ یک ابربرخورد برای $\mathcal{F}$ گوییم هرگاه برای هر $A \in \mathcal{F}$ ، عضوی مانند $B \in \mathcal{H}$ وجود داشته باشد به طوری که $B \subseteq A$. ثابت کنید ابربرخوردی مانند $\mathcal{H}$ برای $\mathcal{F}$ وجود دارد به طوری که هر کدام از اعضای $\mathcal{H}$ دقیقاً 5 عضو دارند و $|\mathcal{H}| \leq 75000$.

پاسخ: حکم را برای هر r که $1 \leq r \leq 5$ ثابت می‌کنیم. نشان می‌دهیم برای $\mathcal{F}$ خانواده ابربرخوردی مانند $\mathcal{H}_r$ وجود دارد به طوری که هر کدام از اعضای $\mathcal{H}_r$ دارای r عضو هستند و $|\mathcal{H}_r| \leq 5 \times 11^{r-1}$. برای زمانی که $r = 1$ به علت وجود یک برخورد مانند Y که 5 عضوی است حکم به راحتی نتیجه می‌شود زیرا کافی است قرار دهید $\mathcal{H}_1 = \{\{y\} \mid y \in Y\}$. حال فرض کنید $r \geq 2$ و $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{r-1}$ ساخته شده‌اند و شرایط مطلوب را دارند. می‌خواهیم $\mathcal{H}_r$ را به کمک $\mathcal{H}_{r-1}$ بسازیم که ابربرخود باشد، اعضای آن r عضوی باشند و $|\mathcal{H}_r| \leq 5 \times 11^{r-1}$. برای هر عضو $\mathcal{H}_{r-1}$ مانند B ، عضوی مانند $F_B \in \mathcal{F}$ وجود دارد که $B \cap F_B = \emptyset$ زیرا در غیر اینصورت B یک مجموعه برخورد برای $\mathcal{F}$ خواهد بود که این با کوچکترین بودن 5 در تناقض است. خانواده $\mathcal{H}_r$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H}_r = \{B \cup \{i\} \mid B \in \mathcal{H}_{r-1} \text{ و } i \in F_B\}$$

واضح است که هر کدام از اعضای $\mathcal{H}_r$ دارای r عضو هستند و همچنین می‌توان دید که تعداد اعضای $\mathcal{H}_r$ حداکثر برابر است با

$$|\mathcal{H}_r| \leq 11 |\mathcal{H}_{r-1}| \leq 5 \times 11^{r-1}.$$

حال ثابت می‌کنیم $\mathcal{H}_r$ یک خانواده ابربرخورد برای $\mathcal{F}$ است. عضو $A \in \mathcal{F}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $\mathcal{H}_{r-1}$ یک خانواده ابربرخورد برای $\mathcal{F}$ است پس عضوی مانند $B_0 \in \mathcal{H}_{r-1}$ وجود دارد که $B_0 \subset A$. چون هر دو عضو $\mathcal{F}$ اشتراک دارند پس $A \cap F_{B_0} \neq \emptyset$. فرض کنید $i_0 \in A \cap F_{B_0}$. بنابراین $B_0 \cup \{i_0\} \subseteq A$