نوشته‌ها

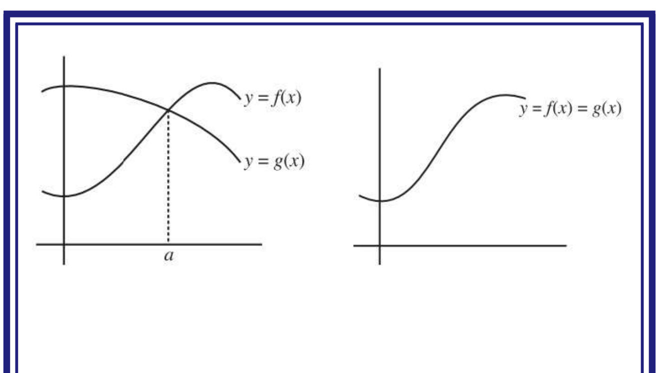
افسانه‌های تدریس ریاضیات *

مترجم: قاسم وحیدی‌اصل **

منظور من از «افسانه‌های تدریس ریاضیات» گزاره‌هایی دربارهٔ تدریس ریاضی است که می‌توان منطقاً فرض کرد که صادق‌اند، اما همیشه صادق نیستند. من نمی‌خواهم چنین القا کنم که کسی واقعاً این گزاره‌ها را به‌تصریح بیان کرده است؛ استدلال نیز نمی‌کنم که هیچ حقیقتی در آنها نیست. من صرفاً بر این ادعا هستم که ممکن است فرد وسوسه شود به اینکه فرض کند آنها صادق‌اند، اما چنین فرضی مستحق قدری شکاکی است. شاید بهترین راه برای توضیح آنچه در ذهن دارم، این است که اولین افسانه‌ام را بیان کنم.

دلیل اینکه به دانشجویان یاد می‌دهیم مسائل از نوع X را حل کنند، آن است که بیاموزند که مسائل از نوع X را چگونه حل کنند

شاید هیچکس تابه‌حال واقعاً این را نگفته باشد، اما این گفته بسیار شبیه به یک راستگو به‌نظر می‌رسد که ممکن است تصور اینکه چگونه ممکن است کاذب باشد، دشوار باشد و البته اغلب صادق است؛ ما می‌خواهیم دانشجویان بدانند که چگونه برخی از مسائلی را که حل کردن آنها را به آنها آموزش می‌دهیم، حل کنند. برای مثال، نحوهٔ محاسبهٔ مشتق‌ها و انتگرال‌ها و نحوهٔ یافتن مقادیر فرین تابع‌ها. اما گاهی دلایل دیگری برای یاددهی به دانشجویان برای حل انواع خاصی از مسائل داریم. یک مثال خوب از این قبیل، ممکن است با مسائل نرخ‌ها مرتبط باشد. شاید برای برخی افراد اهمیتی نداشته باشد که دانشجو قادر به حل مسائل مربوط به نرخ‌ها باشد یا نباشد، اما آموزش این مبحث مزایای آموزشی دیگری دارد. این کار به دانشجویان امکان ممارست در رفتار با آن کمیت‌های دنیای واقعی را که در طول زمان به‌عنوان تابع‌هایی نامشخص از زمان تغییر می‌کنند و تفسیر نرخ‌های تغییر آنها به‌عنوان مشتق‌های آن تابع‌ها، می‌دهد؛ نیز به آنها امکان تمرین با قانون زنجیری و مشتق‌گیری ضمنی را می‌دهد؛ و به آنها فنِّ مشتق گرفتن از دو طرف یک معادله را می‌آموزد. این فن، فن ظریفی است، می‌توان از آن فقط در معادله‌ای بین تابع‌ها استفاده کرد (نه معادله‌ای بین اعداد) و درک این امر مستلزم درک مفهومی معنای مشتق است (شکل ۱ را ببینید). من در زندگی‌ام به‌عنوان یک ریاضی‌دان، احتمالاً هرگز مجبور به حل مسئله‌ای مرتبط با نرخ‌ها (به‌جز به‌عنوان تمرینی در درس حسابان) نشده‌ام. اما اغلب گرفتنِ مشتق از هر دو طرف یک معادلهٔ تابعی را سودمند یافته‌ام، و این فنی است که زمانی آن را یاد گرفتم که درس حسابان را انتخاب کرده بودم و مجبور بودم مسائل مربوط به نرخ‌ها را حل کنم. آیا لازم است که نرخ‌های مرتبط را در درس حسابان بگنجانیم؟ من نمی‌خواهم در خصوص این سؤال، موضعی اتخاذ کنم. موضوعات ارزشمند بسیاری در حسابان وجود دارد. ترم، اغلب به اندازهٔ کافی طولانی نیست که همهٔ آنها را پوشش دهد و باید دست به انتخاب زد. اما حرف من این است که هنگام تصمیم‌گیری در مورد نرخ‌های مرتبط، ما نباید صرفاً سؤال زیر را از خود بپرسیم: «آیا می‌خواهیم که دانشجویان ما قادر باشند که مسائل مرتبط با نرخ‌ها را حل کنند؟» سؤال بهتری که باید پرسید، این است: «مزایای آموزشی یاد دادن مسائل مربوط به نرخ‌های مرتبط چیست؟»



شکل ۱: $f = g$ **پس** $f' = g'$.
$f(a) = g(a)$ **اما** $f'(a) \neq g'(a)$.

زمانی که دانشجویان در یادگیری کار کردن با یک مفهوم ریاضی مشکل دارند، آنچه آنها با آن مشکل دارند، خودِ مفهوم ریاضی است

دوباره، این مطلب آن‌قدر منطقی به‌نظر می‌رسد که شخص شاید بدون فکرکردن بپندارد که باید صادق باشد و البته اغلب صادق است، اما نه همیشه. این‌بار مثال من استقرای ریاضی است. بسیاری از دانشجویان در یادگیری ارائهٔ برهان از طریق استقرا مشکل دارند و طبیعی است که فرض کنیم که آنها در درک اصل استقرای ریاضی مشکل دارند. اگر آنها این اصل را فهمیده بودند، آن‌وقت برهان‌های مبتنی بر این اصل را می‌فهمیدند، این‌طور نیست؟ برای مقابله با این مشکل، ما به برخی تصوراتی که به اصل استقرا وضوح می‌بخشند، متوسل می‌شویم: اگر به اولین مهره در ردیفی از دومینوها ضربه بزنید و هر دومینو به دومینوی بعدی بخورد، دراین‌صورت تمامی دومینوها خواهند افتاد؛ یا اگر روی اولین پلهٔ یک نردبان قدم بگذارید و همیشه از یک پله به پلهٔ بعدی آن بالا بروید، دراین‌صورت به بالای نردبان خواهید رسید. هیچ اشکالی در این تصورات دربین نیست و امکان دارد که به دانشجویان در درک استقرای ریاضی کمک کند. اما وقتی دانشجویان با برهان‌های استقرایی مشکل دارند، آیا همیشه اصل استقرای ریاضی است که با آن مشکل دارند؟ آن گام استقرا را در نظر بگیرید که در آن باید یک گزاره به شکل $\forall n\in\mathbb{N}\ (P(n))\to P(n+1))$ را ثابت کرد. معمولاً این کار را با در نظر گرفتن اینکه n عدد طبیعی دلخواهی است، فرض صادق بودن $P(n)$، و اثبات درست بودن $P(n+1)$ انجام می‌دهیم. دانشجویان گاهی در مورد دلیل اینکه می‌توانیم فرض کنیم که $P(n)$ برای n دلخواهی درست است، سردرگم می‌شوند. آیا این فرض، معادل فرض $\forall n\in\mathbb{N}\ (P(n))$ نیست که قرار است ثابت کنیم؟ برخی از دانشجویان که در مورد این تمایز دچار گیجی شده‌اند، حتی ممکن است فرض استقرا را اشتباهاً به صورت $\forall n\in\mathbb{N}\ (P(n))$ بیان کنند. به‌نظر من چنین می‌رسد که دانشجویانی که دچار این سردرگمی هستند، احتمالاً در مورد اصل استقرای ریاضی سردرگم نیستند؛ بلکه آنها در مورد منطق استلزام‌های مربوط به سور عمومی سردرگم هستند. اثبات یک استلزام مربوط به سور عمومی تقریباً همیشه، متضمن انجام فرضی دربارهٔ یک شئ ثابت اما دلخواه است و درک منطق چنین برهان‌هایی، مستلزم درک این مطلب است که چنین چیزی با انجام فرض دربارهٔ همهٔ اشیا یکی نیست. در برخی موارد آنچه دانشجویان در آن نیاز به کمک دارند، این منطق است و نه اصل استقرای ریاضی.

چرا نباید کارهایی را در کلاس انجام دهیم که ممکن است برای دانشجویان گیج‌کننده باشد

گیج کردن دانشجویان‌مان چیز بدی است، درست است؟ بنابراین ممکن است فکر کنید که ما نباید کارهایی را در کلاس انجام بدهیم که امکان دارد برای دانشجویان گیج‌کننده باشند. هنگامی که خود را آماده می‌کنید که موضوع خاصی را تدریس کنید، ممکن است سعی کنید راه فکر کردن دربارهٔ موضوع را به‌گونه‌ای‌که به‌نظر دانشجویان شما به طبیعی‌ترین صورتِ ممکن باشد، پیدا کنید و نه این راه را که شما به‌عنوان یک ریاضی‌دان چگونه در مورد آن فکر می‌کنید. برای مثال در برخی درس‌ها شاید شما استدلال‌های باورپذیری را بر برهان‌ها ترجیح بدهید. به‌هرحال، دانشجویان برهان‌ها را گیج‌کننده می‌دانند و به‌نظر می‌رسد که استدلال‌های باورپذیری را آسان‌تر می‌پذیرند. حتی ممکن است از برخی مباحث به‌کلی اجتناب کنید، زیرا دانشجویان آنها را گیج‌کننده می‌دانند. اما آیا این کار، بهترین راه برای مقابله با موضوعات گیج‌کننده است؟ البته، منحرف شدن بیش‌ازحد از محدودهٔ راحتی فکری دانشجویان، می‌تواند منجر به فاجعه شود. دانشجویان ممکن است درصورتی‌که کاملاً گیج شوند، تمرکز خود را به‌کل از دست بدهند. اما این بدان معنا نیست که بهترین کار این است که کاملاً در محدودهٔ راحتی فکری دانشجویان بمانیم. ما نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که دانشجویان مبتدی مانند ریاضی‌دانان فکر کنند، اما این بدان معنا هم نیست که ما نباید آنها را به آن سمت سوق بدهیم، حتی درصورتی‌که خطر سردرگم کردن آنها در میان باشد. سردرگمی آنها را باید مدیریت و با آن مقابله کرد، نه اینکه به هر قیمتی از آن اجتناب شود. ارائهٔ چیزی که دانشجویان شما را گیج می‌کند، ممکن است گاهی فرصتی برای مقابله با سردرگمی دانشجویان و برطرف کردن آن ایجاد کند. به‌عنوان‌مثال، یک برهان را در نظر بگیرید که در آن، یک شیء ریاضی، بدون ایجاد هیچ انگیزه‌ای وارد بحث می‌شود، توگویی که آن را بی‌هیچ مبنای قبلی به‌یک‌باره از هوا قاپیده‌ایم. برخی از دانشجویان شاید بگویند که برهان به‌نظرشان گیج‌کننده می‌آید. آنها احتمالاً خواهند پرسید: «این را از کجا آورده‌اید؟» دانشجویانی که این سؤال را می‌پرسند احتمالاً در مورد برهان مورد بحث سردرگم نشده‌اند؛ بلکه سردرگمی آنها در مورد قواعد برهان ریاضی است. آنها متوجه نیستند که سؤال آنها دو تفسیر بسیار متفاوت دارد:

(۱) نتیجه‌گیری خود را چگونه توجیه کرده‌اید؟

(۲) در مورد استدلال خود چه نظری دارید؟

و آنها متوجه نمی‌شوند که یک برهان صحیح باید به (۱) پاسخ بدهد، اما نیازی نیست که به سؤال (۲) پاسخ دهد. ارائه یک برهان بالقوه گیج‌کننده که موجب مطرح شدن این سؤالِ دانشجو بشود، می‌تواند به بحث ارزشمندی از این دو تفسیر از سؤال و نقش‌های متفاوت آنها در برهان‌ها منجر شود. اما، البته، این بحث باید به دنبال

پاسخ به سؤال دانشجو صورت بگیرد!

دقت، موضوعی پیشرفته است

مواقعی هست که باید موضوعی را به دانشجویان آموزش دهیم که برای پرداخت کامل و دقیق آن آمادگی ندارند. اما آیا این به معنای آن است که ما باید دقت را یک موضوع پیشرفته تلقی بکنیم؟ مطمئناً وضعیت‌هایی وجود دارد که مطالبهٔ دقت در آنها، استدلال ریاضی را دشوارتر می‌کند. اما وضعیت‌هایی هم هست که در آنها، کارها را آسان‌تر می‌کند: استانداردهای دقت، این امر را که چه گام‌هایی در یک زمینهٔ ریاضی خاص مجازند و کدام گام‌ها چنین نیستند، نمایان‌تر می‌کنند. دقت، قواعد بازی ریاضی را روشن‌تر می‌کند، حتی درصورتی‌که باعث شود برنده شدن در بازی دشوارتر شود. گاهی دانشجویان آمادگی پروراندن دقیق نظریهٔ پشت‌بند موضوعی را که در حال مطالعهٔ آن هستند، ندارند اما هنوزهم باید بدانند که در حل مسائل در تکالیف خود مجاز هستند که از چه گام‌هایی استفاده کنند و از چه گام‌هایی مجاز نیستند. رعایت استانداردهای دقت در کلاس و خواستن از دانشجویان که در تکالیف خود به آنها پایبند باشند، می‌تواند این راهنمایی لازم را به دانشجویان بدهد. برای مثال، آموزش تکنیک‌های انتگرال‌گیری در درس حسابان را در نظر بگیرید. ما نمی‌توانیم از دانشجویان انتظار داشته باشیم که در اولین تلاششان همیشه تکنیک مناسب را برای محاسبهٔ انتگرال انتخاب کنند. بنابراین آنها باید یاد بگیرند که تشخیص دهند که چه موقع یک تکنیک به درد نمی‌خورد و به سراغ یک تکنیک جایگزین بروند. تشخیص اینکه یک تکنیک چه زمانی از عهدهٔ کار برنمی‌آید، هنگامی که استدلال مبتنی بر استانداردهای دقت بالا باشد، بسیار آسان‌تر است؛ اگر گام‌های راه‌حلی را که در تلاش برای استفاده از آن هستیم، نتوان به‌طوردقیق توجیه کرد، دراین‌صورت باید در پیِ یک رویکرد جایگزین بود. تجربه‌ای که گاهی در تدریس تکنیک‌های انتگرال‌گیری داشته‌ام، به این صورت است: دانشجویی به دفتر کار من می‌آید با انتگرالی که آن را با استفاده از گامی که نمی‌توان توجیهش کرد، به‌اشتباه محاسبه کرده است. پس از متوجه ساختن دانشجو به اشتباهش، از او می‌پرسم که آیا می‌تواند به تکنیک دیگری فکر کند که در این انتگرال به کار بخورد. پاسخ گاهی مثبت است و دانشجو قادر به محاسبهٔ انتگرال می‌شود. هرگاه دانشجو در وهلهٔ اول، کار خود را با استاندارد بالاتری از دقت انجام می‌داد، خودش می‌توانست به سهم خود به پاسخ درست برسد! مزایای دقت در آموزش ریاضیات به‌خوبی توسط دیوید گریس و فرِد اِشنایدر در ص ۶۹۶ مرجع (؟) توصیف شده است: آموزش ریاضیات از طریق نارسمی مانند رانندگی در مه است. انسان اَشکال ماتی را در دوردست می‌بیند و هر از چندگاهی برخی از آنها ناگهان به‌وضوح آشکار می‌شوند، اما معمولاً همه‌چیز پوشیده و مرموز است. رانندگی در مه خطرناک است، به‌ویژه در سرزمین‌های ناشناخته، و باید با احتیاط رانندگی کرد. حتی بااین‌حال، ممکن است همیشه از اینکه کجا هستید، مطمئن نباشید. آموزش دقت و صحت، مشروط بر اینکه بدون دخالت نقاب پیچیدگی انجام شود، مه را محو می‌کند و همه‌چیز را واضح و روشن می‌کند و امکان رانندگی سریع‌تر و ورود به سرزمین‌های ناشناخته را فراهم می‌آورد.

ریاضیات در سطح دانشگاه مالامال از استدلال‌های نارسمی است که امری منطقی به نظر می‌رسد اما در تحلیل بیشتر، نقص‌دار از کار درمی‌آیند. یادگیری شناسایی این نقص‌ها، یکی از بزرگ‌ترین چالش‌ها در یاد گرفتن ریاضیات است و انجام آن به‌ویژه زمانی که کارِ استدلال در سطحی غیررسمی صورت می‌گیرد، چالش‌برانگیز است. درواقع می‌توان چنین استدلال کرد که آنچه که در مباحث پیشرفته به عنوان دقت وانمود می‌شود، دقت نبوده بلکه ادای دقت درآوردن است.

پیش از آنکه بتوانید نوشتن یک برهان را آغاز کنید، باید فهمیده باشید که چرا قضیه درست است

شاید برخی ریاضی‌دانان بر این باور باشند که نوشتن برهان همین است که گفته شد. اما به نظر من، توصیه‌ای بد برای دانشجویانی است که سعی دارند نوشتن برهان‌ها را یاد بگیرند. آیا شما به دانشجویان می‌گویید که قبل از محاسبهٔ یک انتگرال، باید به‌طورشهودی بدانند که پاسخ چیست؟ مسلماً نه. برای محاسبهٔ یک انتگرال، شما باید به گامی فکر کنید که امیدوارکننده به نظر برسد - شاید یک تغییر متغیر، یک بازنویسی اعمال جبری یا کاربرد انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء. سپس جزئیات آن گام را می‌نویسید و سعی می‌کنید ببینید که شما را به کجا هدایت می‌کند. به‌همین‌ترتیب، برای شروع به نوشتن یک برهان، فقط کافی است که یک گام اولیه پیدا کنید. البته، هنگام نوشتن یک برهان، داشتن درکی از اینکه چرا آن قضیه درست است، بسیار مفید خواهد بود. اما اگر این را به یک شرط الزامی تبدیل کنید، این خطر وجود دارد که دانشجویان اصلاً نتوانند نوشتن برهان را شروع کنند، و دست به کار شدن برای نوشتن برهان معمولاً بزرگ‌ترین مشکل برای آن‌هاست. بهتر است به دانشجویان بگویید که اشکالی ندارد که گامی را از یک برهان روی کاغذ بیاورند، حتی اگر ندانند که آن گام به کجا ختم خواهد شد. نگرانی من این است که

اگر به دانشجویان بگوییم که نمی‌توانند نوشتن یک برهان را شروع کنند مگر زمانی که بفهمند چرا قضیه صادق است، تنها قضیه‌هایی که نهایتاً قادر خواهند بود ثابت کنند، آن‌هایی خواهند بود که آن‌قدر ساده‌اند که قبل از شروع به نوشتن برهان، می‌توانند بفهمند که چرا صادق‌اند.

نتیجه‌گیری

بدون‌شک برخی از خوانندگان—شاید همهٔ خوانندگان!—با برخی از نتیجه‌گیری‌های من موافق نباشند. اما امیدوارم حداقل توانسته باشم خوانندگان را متقاعد کنم که برخی موضوعاتی که ممکن است ساده به نظر برسند، سزاوار تأمل بیشترند.

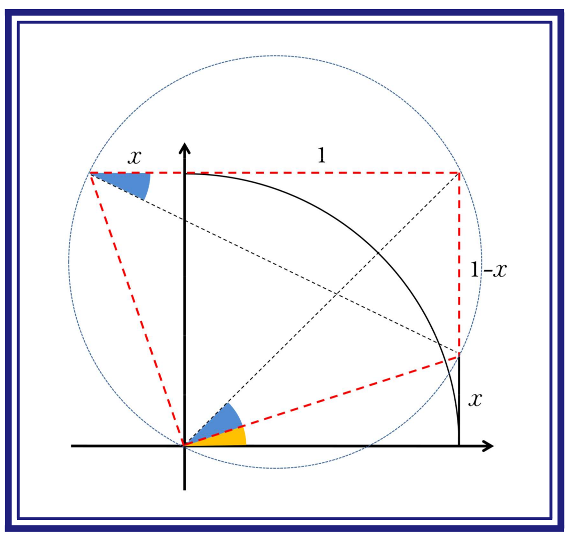
[1] David Gries and Fred B. Schneider, *Teaching Math More Effectively, Through Calculational Proofs*, Amer. Math. Monthly 102 (1995), no. 8, 691–697.

*Daniel J. Velleman, Myths of Mathematics Teaching, Notices of The American Mathematical Society, 71, Number 11, 1498–1500.

**دانشگاه شهید بهشتی

اثبات بی‌کلام *

مهدی حسنی **



$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < 1)$$

*Mehdi Hassani, The Mathematical Gazette, Vol. 105 (2021), P. 303. Department of Mathematics, University of Zanjan, University Blvd., 45371–38791, Zanjan, Iran

**دانشگاه زنجان