مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

(۱۳۸۶-۱۴۰۳)

گردآوری و تدوین:

دکتر بیژن احمدی کاکاوندی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مسابقات ریاضی دانشجویی کشور (۱۳۸۶-۱۴۰۳)

گردآوری و تدوین: دکتر بیژن احمدی کاکاوندی

کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران

مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

(۱۳۸۶-۱۴۰۳)

مسابقه ریاضی دانشجویی کشور با ابتکار و همت انجمن ریاضی ایران از سال ۱۳۵۲ تاکنون تقریباً هر سال به میزبانی یکی از دانشگاه‌ها و هر بار با حضور تیم‌های دانشجویی از بهترین دانشگاه‌های سراسر کشور برگزار شده است. مسائل این مسابقه عمده مباحث نظری دوره کارشناسی ریاضی را پوشش می‌دهد و توسط تیمی متشکل از اعضای هیئت علمی دانشگاه‌ها طرح می‌شود. پیش‌تر نتایج، پرسش‌ها و پاسخ‌های مسابقه اول تا سی‌ام در دو نسخه فارسی و انگلیسی منتشر شده است. اکنون کتابی که در دست شماست شامل نتایج، پرسش‌ها و پاسخ‌های مسابقه سی‌ویکم تا چهل‌وششم است. این مجموعه می‌تواند کمک موثری به مدرسان، دانشجویان و دوستداران ریاضی در بالابردن توان حل مسئله باشد. علاقمندان برای دسترسی به اطلاعات کامل‌تر در مورد کیفیت برگزاری و تاریخچه این مسابقه می‌توانند به تارنمای انجمن ریاضی ایران به آدرس ims.ir مراجعه کنند.

گردآوری و تدوین:

دکتر بیژن احمدی کاکاوندی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

انتشارات واژگان خرد

9786008878650

کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران

مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

(۱۳۸۶-۱۴۰۳)

گردآوری و تدوین:

دکتر بیژن احمدی کاکاوندی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

سرشناسه:
عنوان و نام پدیدآور:
مشخصات نشر: مشهد: انتشارات واژگان خرد و کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران، ۱۴۰۳.
مشخصات ظاهری: ۲۰۸ ص.
شابک: ISBN: 978-600-8878-65-0
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا.
یادداشت: عنوان اصلی:
موضوع:
شناسه افزوده:
شناسه افزوده:
رده‌بندی کنگره:
رده‌بندی دیویی:
شماره کتابشناسی ملی:

مشهد، آبکوه، چهارراه کلاهدوز، شماره ۴۵۲
E-mail: vkhpub@gmail.com

مسابقات ریاضی دانشجویی کشور (۱۴۰۳-۱۳۸۶)

گردآوری و تدوین: دکتر بیژن احمدی کاکاوندی
ویراستار: دکتر محمد صال مصلحیان
ناشر: انتشارات واژگان خرد و کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران
شمارگان: ۵۰ نسخه، چاپ اوّل تابستان ۱۴۰۳ – ۲۰۸ صفحه وزیری
چاپ و صحافی: گلگونه
قیمت: رایگان

فهرست مطالب

درآمد

موضوع ریاضیات اعداد، معادلات، محاسبات یا الگوریتم‌ها نیست.
موضوع ریاضیات فهمیدن است.
(ویلیام پاول ترستن، ریاضی‌دان آمریکایی متولد ۱۹۴۶)

ارزش یک مسئله در ریاضیات بیش از آنکه به خود آن مسئله مربوط باشد
به ریاضیاتی مربوط است که آن مسئله تولید می‌کند.
(اندرو وایلز، ریاضی‌دان انگلیسی متولد ۱۹۵۳)

اگر مسئله ای را نمی‌توانید حل کنید، مسئله ساده‌تری وجود دارد که آن را می‌توانید حل کنید؛
آن مسئله را بیابید!
(جرج پولیا، ریاضی‌دان مجارستانی-آمریکایی ۱۹۸۵-۱۸۸۷)

موضوع این نیست که من خیلی باهوش‌ام.
موضوع این است که من مدت طولانی‌تری روی مسئله متمرکز می‌شوم.
(آلبرت انشتین، فیزیکدان آلمانی، ۱۹۵۵-۱۸۷۹)

هر علاقمند به علوم ریاضی به اهمیت جایگزین‌ناپذیر حل مسئله در آموزش و یادگیری ریاضیات آگاه است. بر این اساس انجمن ریاضی ایران از همان ابتدای تأسیس به گسترش فرهنگ حل مسئله اهتمام داشته است. در فروردین ۱۳۵۱ جناب آقای دکتر مهدی بهزاد رئیس وقت انجمن در اولین مجمع عمومی انجمن در دانشگاه ملی ایران (دانشگاه شهید بهشتی فعلی) پیشنهاد ایجاد یک مسابقه ملی ریاضی را برای دانشجویان مقطع کارشناسی مطرح کرد. اولین مسابقه در فرودین ۱۳۵۲ در دانشگاه تهران برگزار شد. به رغم همه تحولاتی نظیر انقلاب، جنگ و کرونا جز چند استثنا، هر سال این مسابقات برگزار شده است که تازه‌ترین آن چهل‌وششمین مسابقه بود که اردیبهشت ۱۴۰۳ در دانشگاه تبریز برگزار شد. پیشتر، به همت جناب آقای دکتر بامداد یاحقی مسائل، پاسخ‌ها و نتایج مسابقات یکم تا سی‌ام در دو نسخه فارسی و انگلیسی چاپ و منتشر شده است. اکنون براساس تصویب شورای اجرایی انجمن و با حمایت و تشویق جناب آقای دکتر محمد صال مصلحیان، رئیس محترم انجمن ریاضی، ادامه این کار به عهده اینجانب گذاشته شده است. در این مسیر زحمت اصلی این کار مهم بر عهده سرکار خانم دکتر گندم گنجی کارشناس محترم انجمن ریاضی بوده است که با حوصله و سلیقه فراوان با دسترسی به آرشیو مسابقات، تایپ کتاب را انجام دادند. از ایشان و همکاران محترم‌شان در دفتر انجمن ریاضی سپاسگزارم. از سال ۱۳۷۸ تاکنون تقریباً همیشه این افتخار و فرصت را داشته‌ام که به شکلی با این مسابقات مرتبط باشم. به عنوان دانشجوی شرکت کننده، سرپرست تیم، عضو کمیته تصحیح، عضو کمیته علمی و سرانجام رئیس کمیته علمی، بیست و پنج سال است که با این مسابقات زندگی کرده‌ام. جذاب‌ترین بخش این مسابقات برای من شور و شوق و انگیزه‌ای است که در میان دانشجویان ریاضی در سراسر ایران ایجاد می‌کند. اسامی مدال‌آوران این مسابقات و موقعیت کنونی آنان به خوبی نشان می‌دهد که این مسابقات با چه گنجینه‌ای از استعدادها در تعامل است و چه فرصت کم‌نظیری برای دلسوزان مملکت است تا بتوانند با حمایت از آن یا استفاده از فرصتی که این مسابقات ایجاد می‌کند به تقویت ریاضیات در ایران بپردازند. با اطمینان می‌توان گفت این مسابقات با توجه به استاندارد بسیار بالای آن در میان مسابقات ریاضی برای دانشجویان مقطع کارشناسی در جهان کم‌نظیر است. امیدواریم در شرایط تازه‌ای که علوم ریاضی در ایران و جهان با آن روبروست، این مسابقات بتواند با حفظ هویت خود، متناسب با مقتضیات زمانه تکامل یابد و بر نفوذ و اهمیت خود بیافزاید.

از آن به دیر مغان‌ام عزیز می‌دارند — که آتشی که نمیرد همیشه در دل ماست

بیژن احمدی
تهران
تیرماه ۱۴۰۳

بخش

اول

نتایج

سی‌ویکمین دوره مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۲۰ تا ۲۳ اردیبهشت ۱۳۸۶				
دانشگاه فردوسی مشهد				
رئیس کمیته علمی: دکتر فریبرز آذرپناه				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، فردوسی مشهد، صنعتی اصفهان، شهید باهنر کرمان				
برندگان مدال طلا	آقای	علی اکبر دائمی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	ناصر طالبی زاده	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	عرفان صلواتی	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	نیما احمدی پوراناری	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	محمد قراخانی	صنعتی شریف	رتبه چهارم
سی‌ودومین دوره مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۸ تا ۲۱ اردیبهشت ۱۳۸۷				
دانشگاه صنعتی امیرکبیر				
رئیس کمیته علمی: دکتر فریبرز آذرپناه				
پنج تیم برتر صنعتی شریف، تهران، صنعتی امیرکبیر، صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، اصفهان				
برندگان مدال طلا	آقای	ناصر طالبی زاده	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	نیما احمدی پوراناری	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	امید حاتمی ورزنه	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	جابر زارع زاده	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	بهزاد مهرداد	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	ناصر گلستانی کویرآبادی	تهران	رتبه پنجم
	آقای	حسین لامعی رامندی	تهران	رتبه ششم
	آقای	محسن ملاحاجی آقایی	صنعتی امیرکبیر	رتبه هفتم
سی‌وسومین دوره مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۶ تا ۱۹ اردیبهشت ۱۳۸۸				
دانشگاه تربیت مدرس				
رئیس کمیته علمی: دکتر فریبرز آذرپناه				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، صنعتی امیرکبیر، فردوسی مشهد، شهید باهنر کرمان، اصفهان				
برندگان مدال طلا	آقای	خشایار فیلم	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	عماد نصراله پور	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	محمدصادق زمانی به آبادی	صنعتی شریف	رتبه سوم

	آقای	سیدجلیل کاظمی تبار	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	جابر زارع زاده	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای	امین السادات طالبی	صنعتی امیرکبیر	رتبه ششم
سی‌وچهارمین دوره مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱ تا ۴ اردیبهشت ۱۳۸۹				
دانشگاه کاشان				
رئیس کمیته علمی: دکتر فریبرز آذرپناه				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، صنعتی امیرکبیر، فردوسی مشهد، شهید باهنر کرمان، شهید بهشتی				
برندگان مدال طلا	آقای	محمدرضا تکاپویی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	حسین کرکه آبادی	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	عماد نصرالله پورسمامی	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	محمدعلی کرمی	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	عبدالله علی پور	قم	رتبه پنجم
سی‌وپنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۶الی ۱۹اردیبهشت ماه سال ۱۳۹۰				
دانشگاه شهید بهشتی				
رئیس کمیته علمی: دکتر فریبرز آذرپناه				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، فردوسی مشهد، صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، شهید باهنر کرمان، صنعتی امیر کبیر				
برندگان مدال طلا	آقای	پویا وحیدی	فردوسی مشهد	رتبه اول
	آقای	محمدرضا تکاپویی	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	نیما حمیدی	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	شایان دشمیز	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	محمدمهدی یزدی	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای	محمدحسین شفیع نیا	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای	امیرحسین قدرتی	صنعتی امیرکبیر	رتبه ششم
سی‌وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۲۶ الی ۲۹ اردیبهشت ماه سال ۱۳۹۱				
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان				
رئیس کمیته علمی: دکتر فریبرز آذرپناه				

پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، صنعتی اصفهان، شیراز، صنعتی امیر کبیر				
برندگان مدال طلا	آقای	نیما حمیدی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	مسعود شفائی ابر	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	محمد پدرام فر	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	محی الدین متوسل	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	خشایار سرتیپی	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای	مهدی صالحی فر	تهران	رتبه ششم
	آقای	سیدحامد موسوی	شیراز	رتبه هفتم
	آقای	آران رئوفی	تهران	رتبه هفتم
	آقای	حامد قاسمیان	فردوسی مشهد	رتبه هشتم
	آقای	امیر ساکی	صنعتی امیرکبیر	رتبه نهم
سی‌وهفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۲۴ الی ۲۷ اردیبهشت ماه ۱۳۹۲				
دانشگاه سمنان				
رئیس کمیته علمی: دکتر مجتبی قیراطی				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، صنعتی اصفهان، تهران، صنعتی امیر کبیر، شهید بهشتی				
برندگان مدال طلا	آقای	امیرحسین گرزی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	حسام الدین رجب زاده	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	مسعود شفایی ابر	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	آیدین یوسف زاده فرد	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	مجتبی شکریان زینی	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	محمد سبک دست	خوارزمی	رتبه پنجم
	آقای	یزدان بهرام نسبت	تهران	رتبه ششم
	آقای	یعقوب رحیمی	شیراز	رتبه هفتم
	آقای	رضا کابلی	کاشان	رتبه هشتم
	آقای	حامد قاسمیان زوارم	فردوسی مشهد	رتبه نهم
	آقای	آرمان آشتاب	خوارزمی	رتبه نهم
	آقای	سجاد بکرانی بالانی	صنعتی اصفهان	رتبه دهم
سی‌وهشتمین دوره مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۲۳ الی ۲۶ اردیبهشت ماه ۱۳۹۳				

دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته			
رئیس کمیته علمی: دکتر مجتبی قیراطی			
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، صنعتی اصفهان، تهران، فردوسی مشهد، شهید بهشتی			
برندگان مدال طلا	آقای پدرام صفایی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای محمد پدرام فر	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای مجتبی تفاق	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای حمید نادری یگانه	قم	رتبه چهارم
	آقای داوود خواجه پور	تهران	رتبه پنجم
سی‌ونهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۲۲ الی ۲۵ اردیبهشت ماه ۱۳۹۴			
دانشگاه یزد			
رئیس کمیته علمی: دکتر مجتبی قیراطی			
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، صنعتی اصفهان، تهران، شیراز، شهید بهشتی			
برندگان مدال طلا	آقای امیرحسین اخلاصی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای پویا هنریار	صنعتی شریف	رتبه دوم
	خانم تینا ترکمان	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای حسن قره داغی	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای امین نجات بخش	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای محمدرضا حق پناه	شهید بهشتی	رتبه ششم
	آقای سیدعلی اکبر حسینی	شیراز	رتبه هفتم
	آقای شهاب الدین شعبانی	علم و صنعت ایران	رتبه هشتم
چهلمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، تاریخ ۳ الی ۶ شهریور ماه ۱۳۹۵			
دانشگاه علم و صنعت ایران			
رئیس کمیته علمی: دکتر مجتبی قیراطی			
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، صنعتی اصفهان، شهید باهنر کرمان، صنعتی امیر کبیر			
برندگان مدال طلا	آقای شایان غلامی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای ابوالفضل نجفیان	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای علیرضا عطایی	صنعتی شریف	رتبه سوم

چهل‌ویکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۴ الی ۱۷ شهریور ماه ۱۳۹۶			
دانشگاه شهرکرد			
رئیس کمیته علمی: دکتر مجتبی قیراطی			
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، صنعتی امیر کبیر، شهید باهنر کرمان، شهید بهشتی			
برندگان مدال طلا	آقای سیدابوالفضل نجفیان	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای علیرضا شاولی کوه‌شور	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای امیرحمزه خوشنام	شهید باهنر کرمان	رتبه سوم
چهل‌ودومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۹ الی ۲۲ تیر ماه ۱۳۹۷			
دانشگاه علم و فناوری مازندران			
رئیس کمیته علمی: دکتر محمدرضا ودادی			
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، صنعتی امیر کبیر، تهران، صنعتی اصفهان، صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی			
برندگان مدال طلا	آقای علی دایی نبی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای وحید شاهوردی	صنعتی امیرکبیر	رتبه دوم
	آقای سیدعلی ناصری صدر	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای حبیب علیزاده	تهران	رتبه چهارم
	آقای احسان حافظی اصل	صنعتی اصفهان	رتبه پنجم
	آقای محمد هنری	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای هومن فتاحی مقدم	صنعتی شریف	رتبه ششم
چهل‌وسومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۲ الی ۱۵ شهریورماه ۱۳۹۸			
دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان			
رئیس کمیته علمی: دکتر مجتبی قیراطی			
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، صنعتی امیر کبیر، خوارزمی، صنعتی اصفهان، صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی			
برندگان مدال طلا	آقای علی دایی نبی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای مجتبی زارع بیدکی	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای سینا ناصریان	تهران	رتبه سوم

چهل‌وچهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۹ الی ۲۳ اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۱				
دانشگاه الزهرا(س)				
رئیس کمیته علمی: دکتر بیژن احمدی کاکاوندی				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، فردوسی مشهد، شیراز، تهران، صنعتی امیر کبیر				
برندگان مدال طلا	آقای	جواد فرخ نژاد	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	امیرعباس محمدی	صنعتی شریف	رتبه دوم
چهل‌وپنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۲۷ الی ۳۰ تیرماه ۱۴۰۲				
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان				
رئیس کمیته علمی: دکتر بیژن احمدی کاکاوندی				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، صنعتی امیر کبیر، خوارزمی، فردوسی مشهد				
برندگان مدال طلا	آقای	امیر محمد قوی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	علی میرزایی اناری	صنعتی شریف	رتبه دوم
	آقای	جواد فرخ نژاد	صنعتی شریف	رتبه سوم
	آقای	محمد شاه وردی کندری	صنعتی شریف	رتبه چهارم
چهل‌وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور، ۱۱ الی ۱۲ اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳				
دانشگاه تبریز				
رئیس کمیته علمی: دکتر بیژن احمدی کاکاوندی				
پنج تیم برتر: صنعتی شریف، تهران، فردوسی مشهد، صنعتی امیر کبیر، صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، شهید باهنر کرمان				
برندگان مدال طلا	آقای	امیرعباس محمدی	صنعتی شریف	رتبه اول
	آقای	امیررضا مزینانی	تهران	رتبه دوم
	آقای	سهیل حقیقی	صنعتی امیر کبیر	رتبه سوم
	آقای	آرین همتی	صنعتی شریف	رتبه چهارم
	آقای	مهران طلایی خواجه روشنایی	صنعتی شریف	رتبه پنجم
	آقای	امیریاسین خراشادی زاده	فردوسی مشهد	رتبه ششم
	آقای	امیرحسین قربانی نژاد	تهران	رتبه هفتم
	آقای	امیرمحمد قوی	صنعتی شریف	رتبه هفتم

بخش

دوم

پرسش‌ها

سی‌ویکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۱ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۸۶/۲/۲۰

پرسش ۱.۱.۳۱. تمام نقاط محیط دایره‌ای را به‌طور دلخواه با دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. آیا لزوماً با هر رنگ‌آمیزی، مثلثی با رئوس همرنگ محاط در دایره وجود دارد که

الف) متساوی الاضلاع باشد؛

ب) قائم‌الزاویه باشد؛

ج) متساوی الساقین باشد؟

پرسش ۲.۱.۳۱. جمع مینکوفسکی دو مجموعه $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A+B=\left\{a+b \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; a \in A, b \in B\right\}.$$

ثابت کنید اگر A کران‌دار و B بسته باشد، آن‌گاه

$$(A+B)'=(A'+B)\bigcup(A+B')$$

که در آن منظور از A'، مجموعه نقاط حدی A است.

پرسش ۳.۱.۳۱. فرض کنید گروهی مانند G وجود دارد که دقیقاً دارای n زیرگروه با شاخص[1] عدد ۲ باشد (n عددی طبیعی است). ثابت کنید گروه آبلی و متناهی دیگری وجود دارد که دقیقاً دارای n زیرگروه با شاخص ۲ است.

پرسش ۴.۱.۳۱. آیا می‌توان دو تاس ناسالم را چنان انتخاب کرد که احتمال پیشامد مجموع j در پرتاب همزمان آن‌ها برای هر j، $۲ \leq j \leq ۱۲$، عددی در بازه $\left(\frac{۲}{۳۳}, \frac{۴}{۳۳}\right)$ باشد؟

پرسش ۵.۱.۳۱. نشان دهید $\mathbb{R}^۲$ زیرمجموعه‌ای چگال دارد که هیچ سه نقطه‌اش هم‌خط نیستند.

پرسش ۶.۱.۳۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و وارون‌پذیر با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید

$$\det(A) = \frac{۱}{n!}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \operatorname{tr}(A^۲) & \operatorname{tr}(A) & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \operatorname{tr}(A^۳) & \operatorname{tr}(A^۲) & \operatorname{tr}(A) & ۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \operatorname{tr}(A^n) & \operatorname{tr}(A^{n-۱}) & \operatorname{tr}(A^{n-۲}) & & \cdots & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}.$$

(منظور از $\operatorname{tr}(B)$، اثر ماتریس A، یعنی، مجموع درایه‌های واقع روی قطر اصلی ماتریس B است).

۲.۳۱ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۸۶/۲/۲۱

پرسش ۱.۲.۳۱. فرض کنیم n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید n عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموعشان مربع کامل است. در ادامه تعیین کنید که آیا دوازده عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموعشان مربع کامل باشد؟

[1] index

پرسش ۲.۲.۳۱. به ازای چه مقادیری از اعداد حقیقی ناصفر α و β، حد زیر موجود (و متناهی) است؟

$$\lim_{x,y\to \circ^+} \frac{x^{۲\alpha}y^{۲\beta}}{x^{۳\alpha}+y^{۳\beta}}.$$

پرسش ۳.۲.۳۱. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی و A^n مجموعه n تایی‌های مرتب عناصر A باشند. برای هر $\alpha=(\alpha_۱,\cdots,\alpha_n)$ و $\beta=(\beta_۱,\cdots,\beta_n)$ در A^n تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{d}(\alpha,\beta) = \text{تعداد مؤلفه‌های متناظر } \alpha \text{ و } \beta \text{ که با یکدیگر متفاوتند}$$

برای هر دو عضو دلخواه x و y در A^n، ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین دو مجموعه زیر وجود دارد:

$$C=\{z\in A^n : \mathrm{d}(x,z)<(y,z)\}$$
$$D=\{z\in A^n : \mathrm{d}(y,z)<(x,z)\}.$$

پرسش ۴.۲.۳۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد. ثابت کنید حلقه $R[x]$ دارای تعداد نامتناهی ایده‌آل بیشین[۲] است.

پرسش ۵.۲.۳۱. فرض کنید $x_۱,x_۲,\cdots,x_{۲n}$ $(n\geq ۲)$ اعدادی حقیقی باشند که با برداشتنِ هر یک از آن‌ها، بقیه به دو دسته با حاصل جمع‌های برابر تقسیم می‌شوند. ثابت کنید همه x_iها صفرند.

پرسش ۶.۲.۳۱. فرض کنید T اجتماع تمام پاره‌خط‌هایی در صفحه باشد که یک سرشان نقطه $M=(\circ,۱)$ و سر دیگرشان نقطه‌ای با مختصات گویا روی محور xهاست. به‌عبارت دیگر،

$$T=\left\{(tq,۱-t)\in R^۲ \;\middle|\; t\in[\circ,۱], q\in Q\right\}.$$

الف) فرض کنید $A,B\in T$ به‌طوری‌که A، B و M بر یک راستا نباشند. نشان دهید هر مسیر پیوسته از نقطه A به نقطه B در مجموعه T، حتماً از نقطه M عبور می‌کند؛
(منظور از مسیر، تابعی پیوسته مانند $\gamma:[\circ,۱]\to T$ است که $\gamma(\circ)=A$ و $\gamma(۱)=B$.)
ب) ثابت کنید هر تابع پیوسته از T به T دست‌کم یک نقطه ثابت دارد.

[2] maximal

سی‌ودومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۲ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۸۷/۲/۱۸

پرسش ۱.۱.۳۲. فرض کنید X یک مجموعه k عضوی است. برای یک عدد طبیعی ثابت m، تعداد دنباله‌های $A_1, \ldots, A_m$ را پیدا کنید که

$$A_1 \subseteq A_2 \cdots \subseteq A_m \subseteq X.$$

پرسش ۲.۱.۳۲. فرض کنید f یک تابع مختلط تام[۱] و $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ به گونه‌ای باشند که $\frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$. نشان دهید اگر برای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $f(z + w_1) = f(z) = f(z + w_2)$، آن‌گاه f ثابت است.

پرسش ۳.۱.۳۲. فرض کنید A_1، A_2،...، A_n ماتریس‌هایی $k \times k$، خودتوان[۲] و با درایه‌های حقیقی باشند. ثابت کنید

$$\operatorname{rank}(I - A_1 A_2 \cdots A_n) \leq N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_n).$$

(منظور از $N(B)$ و $\operatorname{rank}(B)$ به‌ترتیب پوچی و رتبه ماتریس B می‌باشد.)

پرسش ۴.۱.۳۲. فرض کنید A و B دو نقطه متمایز روی یک سهمی و $n \geq 3$ عددی طبیعی باشد.

الف) نشان دهید می‌توان $n - 2$ نقطه $P_1, \ldots, P_{n-2}$ را بین A و B روی سهمی طوری انتخاب کرد که مساحت

[1] entire
[2] idempotent

n ضلعی محدب $AP_1 \ldots P_{n-2}B$ بیشترین مقدار ممکن شود؛

ب) ثابت کنید نسبت مساحت n ضلعی حاصل در قسمت (الف) به مساحت قطاع سهمی تنها تابعی از n و مستقل از انتخاب A و B است. این نسبت را به دست آورید.

راهنمایی: با توجه به این که تمام سهمی‌ها متشابه هستند، مسأله را برای سهمی $y = x^2$ ثابت کنید. ابتدا حالت $n = 3$ را بررسی کنید.

پرسش ۵.۱.۳۲. زیرمجموعه ناتهی S از خانه‌های یک صفحه شطرنجی $n \times n$ را زوج می‌گوییم هرگاه از هر سطر و ستون صفحه شطرنجی تعدادی زوج خانه متعلق به S باشد. کمترین مقدار k چقدر باشد تا مطمئن شویم هر زیرمجموعه k عضوی از خانه‌ها شامل یک زیرمجموعه زوج است.

پرسش ۶.۱.۳۲. ثابت کنید حلقه‌ای وجود ندارد به‌طوری‌که دقیقاً دارای پنج عضو منظم باشد.
(عضو a از یک حلقه R را منظم می‌نامیم اگر برای هر $x \in A$، همواره از $ax = 0$ یا $xa = 0$ نتیجه شود $x = 0$. همچنین توجه کنید که حلقه‌ها لزوماً یکدار، جابه‌جایی یا متناهی نیستند.)

۲.۳۲ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۸۷/۲/۱۹

پرسش ۱.۲.۳۲. ثابت کنید گروهی مانند G وجود ندارد که مرکز G، زیرگروه بیشین G باشد.
(زیرگروه H از گروه G را بیشین گوییم اگر زیرگروه دیگری مانند K موجود نباشد که $H \subsetneqq K \subsetneqq G$.)

پرسش ۲.۲.۳۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A مجموعه‌ای باز و بسته در X باشد به‌طوری‌که $A \neq \varnothing$ ،X. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

بر X پیوسته یکنواخت است اگر و تنها اگر $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \notin A\} > 0$.

پرسش ۳.۲.۳۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و دنباله $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت باشد که $a_0 = a_{n+1} = 1$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i > 1$ و $a_i \mid a_{i-1} + a_{i+1}$.

الف) ثابت کنید عدد $1 \leq j \leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_j = a_{j-1} + a_{j+1}$؛

ب) ثابت کنید در چنین دنباله‌ای دست‌کم یک عدد ۲ وجود دارد.

پرسش ۴.۲.۳۲. همه اعداد طبیعی n را مشخص کنید که $2 \overset{\phi(n)}{\equiv} n\sigma(n)$.

(منظور از $\sigma(n)$، مجموع همه مقسوم‌علیه‌های مثبت n بوده و $\phi(n)$ تابع اویلر است.)

پرسش ۵.۲.۳۲. تعدادی دانشجو در یک مسابقه که در آن n سؤال دوگزینه‌ای مطرح شده است، شرکت کرده‌اند و مشخص شده است که مجموعه پاسخ‌های هیچ دو نفری یکسان نیست. اکنون به هر سؤال به صورت مستقل، یکنواخت و تصادفی نمره‌ای از مجموعه $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ اختصاص می‌یابد. ثابت کنید احتمال آن که تنها یک نفر بیشترین مجموع نمرات را بیاورد، حداقل $\frac{1}{2}$ است.

پرسش ۶.۲.۳۲. فرض کنید $\gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ یک تابع باشد و برای هر $s,t \in [0,1]$ داشته باشیم

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq M|s-t|^{\alpha},$$

که در آن M, α اعدادی ثابت و مثبت هستند. نشان دهید اگر γ پوشا باشد، آن‌گاه $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

سی‌وسومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۳ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۸۸/۲/۱۶

پرسش ۱.۱.۳۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. ثابت کنید اگر به ازای هر زیرمجموعه فشرده از X مانند K، مجموعه $A\cap K$ بسته باشد، آن‌گاه A بسته است.

پرسش ۲.۱.۳۳. گروه G مفروض است. ثابت کنید موارد زیر معادل هستند:

الف) هر زیرگروه G نرمال است؛

ب) برای هر $a,b\in G$ عدد صحیح m وجود دارد که $(ab)^m=ba$.

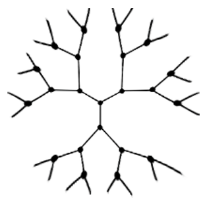
پرسش ۳.۱.۳۳. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$ بر $n!$ بخش‌پذیر است.

پرسش ۴.۱.۳۳. در حلقه یکدار R هر عضو برابر است با حاصلضرب تعدادی عضو خودتوان. ثابت کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی است.

پرسش ۵.۱.۳۳. فرض کنید $A\subseteq\mathbb{C}$ بسته و شمارا باشد. ثابت کنید اگر تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\backslash A\to\mathbb{C}$ کران‌دار باشد، آن‌گاه f برابر مقداری ثابت است.

(چنانچه برای حالت خاص $A=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$ به سؤال پاسخ دهید نصف نمره را می‌گیرید.)

پرسش ۶.۱.۳۳. در شبکه نامتناهی زیر، هر گره به سه گره دیگر متصل است و هیچ دوری وجود ندارد. عدد حقیقی λ داده شده است. می‌خواهیم به هر گره از شبکه یک عدد حقیقی اکیداً مثبت نسبت دهیم به‌طوری که حاصل جمع اعداد گره‌های مجاور هر گره، λ برابر عدد آن گره شود. به ازای چه مقادیری از λ این کار ممکن است؟



۲.۳۳ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۸۸/۲/۱۷

پرسش ۱.۲.۳۳. نقاط $A_۱, \dots, A_n$ درون گوی واحد فضای سه بعدی $\mathbb{R}^۳$ قرار دارند و G مرکز ثقل این نقاط است. نشان دهید شاخص $۱ \leq i \leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که فاصله A_i تا G کم‌تر از یک است.

پرسش ۲.۲.۳۳. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد به‌طوری‌که $\iint_{\mathbb{R}^۲} f(x,y)dxdy = ۱$. ثابت کنید گوی بسته‌ای مانند D با کم‌ترین شعاع ممکن وجود دارد که

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{۱}{۲}.$$

پرسش ۳.۲.۳۳. ثابت کنید اگر F یک میدان باشد، هر عضو $M_۲(F)$ را می‌توان به صورت مجموع چهار ماتریس وارون‌پذیر نوشت.
($M_۲(F)$ مجموعه تمام ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های در F است.)

پرسش ۴.۲.۳۳. قرار است صد دانشجو در سالنی که صد صندلی دارد، امتحان دهند. هر دانشجو دارای یک شماره صندلی است. اولین دانشجویی که وارد سالن می‌شود شماره صندلی خود را گم کرده است. بنابراین یک صندلی را به تصادف انتخاب کرده و روی آن می‌نشیند. بقیه دانشجویان شماره صندلی خود را به همراه دارند و هر کدام که وارد سالن می‌شوند اگر صندلی‌اش خالی باشد روی آن می‌نشینند و اگر اشغال شده باشد، از

صندلی‌های خالی یکی را به تصادف انتخاب کرده و روی آن می‌نشینند. احتمال این که دو دانشجویی که آخر از همه وارد سالن می‌شوند روی صندلی خود بنشینند چقدر است؟

پرسش ۵.۲.۳۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای کران‌دار از آن باشد. برای $a \in A$ خروج از مرکز a به صورت $\mathrm{ecc(a) = \sup\{d(a,b) : b \in A\}}$ تعریف می‌شود. همچنین قطر A و شعاع A را به ترتیب به صورت

$$\mathrm{diam(A) = \sup\{ecc(a) : a \in A\}} \quad \text{و} \quad \mathrm{rad(A) = \inf\{ecc(a) : a \in A\}}$$

تعریف می کنیم. فضای متریک X را مرکزی می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه کران‌دار از آن مانند A داشته باشیم $\mathrm{diam(A) = rad(A)}$. فرض کنید X یک فضای متریک مرکزی باشد.

الف) فرض کنید $r > ۰$ و $x \in X$. نشان دهید مجموعه $C_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}$ باز است؛

ب) فرض کنید X بیش از یک عضو داشته باشد. ثابت کنید X ناهمبند است.

پرسش ۶.۲.۳۳. گروه G مفروض است به‌طوری‌که G' آبلی است و هر زیرگروه آبلی و نرمال G متناهی است. ثابت کنید G متناهی است.

سی‌وچهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۴ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۸۹/۲/۱

پرسش ۱.۱.۳۴. گروه G و تابع $f: G \to G$ مفروض هستند به‌طوری‌که برای هر $x, y \in G$ داریم $f(xf(y)) = f(x)y$. ثابت کنید f یک خودریختی (همریختی یک به یک و پوشا) است.

پرسش ۲.۱.۳۴. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که در آن هر زیرمجموعه چگال، باز است. ثابت کنید مجموعه نقاط تنهای X چگال است.

(نقطه تنهای یک مجموعه، نقطه‌ای از آن است که نقطه حدی نیست.)

پرسش ۳.۱.۳۴. به هر کدام از نقاط شبکه اعداد با مختصات صحیح در صفحه، یکی از پیکان‌های $\rightarrow$ ، $\uparrow$ ، $\leftarrow$ و $\downarrow$ نسبت داده شده است. مورچه‌ای در نقطه دلخواهی از این شبکه قرار دارد و لانه‌اش در نقطه دیگری از شبکه است. در هر مرحله مورچه در جهت پیکان مربوط به نقطه‌ای که در آن قرار گرفته، به نقطه مجاور حرکت می‌کند و سپس پیکان نقطه‌ای که ترک کرده، 90° در جهت ساعت‌گرد تغییر می‌کند. نشان دهید اگر مورچه هرگز به لانه‌اش نرسد فاصله‌اش تا لانه به بی‌نهایت میل می‌کند.

پرسش ۴.۱.۳۴. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید زیرمجموعه ناشمارایی از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که هر n عضو متمایز آن مستقل خطی است.

($\mathbb{R}^n$ را به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.)

پرسش ۵.۱.۳۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ دارای این خاصیت باشد که تصویر هر زیرمجموعه همبند $\mathbb{R}^۲$ تحت f همبند و تصویر هر زیرمجموعه فشرده $\mathbb{R}^۲$ تحت f فشرده باشد. ثابت کنید f پیوسته است.

پرسش ۶.۱.۳۴. نشان دهید مساحت بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان در مکعب واحد قرار داد برابر $\frac{۹}{۸}$ است.

۲.۳۴ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۸۹/۲/۲

پرسش ۱.۲.۳۴. فرض کنید تعدادی سنگ‌ریزه را به n قسمت با وزن‌های $W_۱\leqslant W_۲\leqslant\cdots\leqslant W_n$ تقسیم کرده باشیم. بار دیگر همان سنگ‌ریزه‌ها را به n قسمت با وزن‌های $V_۱\geqslant V_۲\geqslant\cdots\geqslant V_n$ تقسیم می‌کنیم. نشان دهید برای هر $۱\leqslant k\leqslant n$ داریم

$$W_۱+W_۲+\cdots+W_k\leqslant V_۱+V_۲+\cdots+V_k.$$

پرسش ۲.۲.۳۴. همه اعداد حقیقی مانند c را بیابید که برای آن‌ها تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f''(x)>f'(x)+c\ ,\ f'(x)>f(x)+c.$$

پرسش ۳.۲.۳۴. گروه G مفروض است به‌طوری‌که در G همواره از $ab\neq ba$ نتیجه می‌شود $a^۲=b^۲$.

الف) ثابت کنید هر زیرگروه G نرمال است؛

ب) مثالی از یک گروه غیر آبلی G بیاورید که شرط بالا را داشته باشد.

پرسش ۴.۲.۳۴. فرض کنید $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد به گونه‌ای که بر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $[۰,۱]$ مقادیر آن حقیقی است. ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)\in\mathbb{R}$.

پرسش ۵.۲.۳۴. تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را یک اَبَر چندجمله‌ای می‌نامیم اگر دنباله $P_۱(x),P_۲(x),\ldots$ از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر عدد صحیح مانند x فقط تعدادی متناهی از $P_i(x)$ ها ناصفر باشند و $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}P_n(x)$.

الف) اگر $P_n(x)=x(x^۲-۱)(x^۲-۴)\ldots\ (x^۲-n^۲)$، نشان دهید $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}P_n(x)$ یک

اَبَرچندجمله‌ای است ولی هیچ چندجمله‌ای مانند $Q(x)$ وجود ندارد که برای هر $x \in \mathbb{Z}$، $f(x) = Q(x)$.

ب) ثابت کنید یک اَبَرچندجمله‌ای ناصفر حداکثر تعداد متناهی ریشه در اعداد صحیح دارد.

پرسش ۶.۲.۳۴. الف) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی، یکدار و متناهی باشد که بیش از $\frac{۲}{۳}$ اعضای آن خودتوان هستند. ثابت کنید همه عناصر R خودتوان هستند.

ب) ثابت کنید برای هر k، حلقه‌ای متناهی با بیش از k عضو وجود دارد که دقیقاً $\frac{۲}{۳}$ اعضای آن خودتوان هستند.

سی‌وپنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۵ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۰/۲/۱۴

پرسش ۱.۱.۳۵. همه اعداد طبیعی مانند k را مشخص کنید که به ازای آن‌ها گروهی متناهی مانند G موجود باشد که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه k داشته باشد.
(توجه کنید که برای هر چنین k ای ارائه گروهی متناهی که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه k داشته باشد لازم است.)

پرسش ۲.۱.۳۵. فرض کنیم X یک فضای متریک همبند و فشرده و $p \in X$ یک نقطه برشی آن باشد، یعنی، مجموعه‌های ناتهی U و V موجود باشند که $X \setminus \{p\} = U \cup V$ و $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \phi$. ثابت کنید $U \cup \{p\}$ همبند و فشرده است.

پرسش ۳.۱.۳۵. حلقه‌های R و S مفروض هستند به‌طوری‌که R میدان است و $R[x] \cong S[x]$. ثابت کنید $R \cong S$.

پرسش ۴.۱.۳۵. وجوه یک ۱۳۹۰ وجهی همگی مثلث هستند. دو وجه این چندوجهی را همسایه گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. نشان دهید برای هر رنگ‌آمیزی وجه‌ها با سه رنگ، همیشه دو وجه وجود دارند که همرنگ و دارای یک وجه همسایه مشترک هستند.

پرسش ۵.۱.۳۵. فضای $C(X)$ متشکل از تمام توابع حقیقی مقدار، پیوسته و کران‌دار بر فضای متریک (X,d) را همراه با متر

$$\rho(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|:x\in X\}$$

در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر $(C(X),\rho)$ زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا داشته باشد، آن‌گاه (X,d) نیز زیرمجموعه‌ای چگال و شمارادارد.

پرسش ۶.۱.۳۵. فرض کنید $x_۱,x_۲,\ldots$ دنباله‌ای از اعداد متمایز در بازه $[۰,۱]$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، با حذف مجموعه نقاط $\{x_۱,\ \ldots\ ,x_{n-۱}\}$ از این بازه، n زیربازه به دست می‌آید. اگر M_n را برابر با بزرگترین طول این زیربازه‌ها بگیریم، نشان دهید $\limsup\limits_{n\to\infty} nM_n\geq \frac{۱}{\ln ۲}$.

۲.۳۵ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۰/۲/۱۵

پرسش ۱.۲.۳۵. اعداد حقیقی $۰<a_۱<a_۲<\cdots<a_{۲۰}$ مفروض‌اند. برای هر $۱\leq i\leq ۲۰$، تابع $b_i:(۰,\infty)\to\mathbb{R}$ را به صورت $b_i(x)=\begin{cases}\frac{a_i}{x} & x\leq a_i\\ \frac{x}{a_i} & x>a_i\end{cases}$ تعریف می‌کنیم. تابع $f(x)=\prod_{i=۱}^{۲۰}b_i(x)$ در چه نقاطی کمینه[1] مقدار خود را اختیار می‌کند؟

پرسش ۲.۲.۳۵. حلقه یکدار R مفروض است. می‌دانیم برای هر $a\in R$، عضو $x\in R$ وجود دارد که $a=a^۲x$. ثابت کنید برای هر $a\in R$، عضو $y\in R$ وجود دارد به گونه‌ای که $a=ya^۲$.

پرسش ۳.۲.۳۵. فرض کنیم $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد. ثابت کنید $z_۰\in\mathbb{C}$ موجود است که $|z_۰|=۱$ و $|f(z_۰)-\bar{z}_۰|\geq ۱$.

[1] minimum

پرسش ۴.۲.۳۵. نشان دهید تابع $f(x_{11},\dots,x_{nn}) = \det \begin{bmatrix} x_{11},\dots,x_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_{n1},\dots,x_{nn} \end{bmatrix}$ به عنوان یک چندجمله‌ای n^2 متغیره، تحویل‌ناپذیر است.

(یک چندجمله‌ای چند متغیره را تحویل‌ناپذیر می‌گوییم اگر نتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو چندجمله‌ای غیر ثابت تجزیه کرد.)

پرسش ۵.۲.۳۵. فرض کنیم $U \subseteq [0,\infty)$ مجموعه‌ای باز و بی‌کران باشد. ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که $U \cap \{x, 2x, 3x, \dots\}$ نامتناهی است.

پرسش ۶.۲.۳۵. تابع $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را شبه اثر می‌نامیم اگر ماتریس صفر را به عدد صفر تصویر کند و برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$، داشته باشیم $f(AB) = f(BA)$. ثابت کنید ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر برای هر تابع شبه اثر مانند $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$، داشته باشیم $f(A) = 0$.

سی‌وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۶ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۱/۲/۲۶

پرسش ۱.۱.۳۶. همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی مانند A را مشخص کنید که در شرط زیر صدق کنند:

اگر v بردار ستونی دلخواهی باشد که تمام درایه‌های آن ناصفر است، آن‌گاه همه درایه‌های Av نیز ناصفر است.

پرسش ۲.۱.۳۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ یک مجموعه باز U شامل x وجود داشته باشد که تحدید f به U یک چندجمله‌ای باشد. ثابت کنید f یک چندجمله‌ای است.

پرسش ۳.۱.۳۶. آهن فروشی تیرآهن‌هایی به طول ۱۰ متر دارد. برای سه عدد حقیقی دلخواه $0 < x_1, x_2, x_3 \leq 10$ می‌خواهیم با برش این تیرآهن‌ها ۳ قطعه آهن به طول‌های x_1، x_2 و x_3 تهیه کنیم. توجه کنید جوش دادن قطعه‌های تیرآهن امکان‌پذیر نیست. فرض کنید $f(x_1, x_2, x_3)$ حداقل تعداد تیرآهن‌های مورد نیاز باشد. مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع f را مشخص کنید.

پرسش ۴.۱.۳۶. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد. ثابت کنید برای هر $x \in R$ حداکثر یک عضو خودتوان $e \in R$ وجود دارد که $e + x$ وارون‌پذیر و ex پوچ‌توان باشد.

پرسش ۵.۱.۳۶. می‌دانیم $\mathbb{R}(x)$ (میدان توابع گویا با ضرایب حقیقی) با رابطه زیر به یک میدان مرتب تبدیل

می‌شود: فرض کنیم $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_۰}{b_m x^m + \cdots + b_۰}$، در این صورت تعریف می‌کنیم $\frac{P}{Q} \rhd ۰$ اگر و تنها اگر $\frac{a_n}{b_m} > ۰$. می‌گوییم دنباله $\{f_n\}$ به f، $\lhd$ـ همگرا است اگر برای هر $g \in \mathbb{R}(x)$ که $g \rhd ۰$، عدد $N > ۰$ وجود داشته باشد که اگر $n > N$، آن‌گاه $-g \lhd (f_n - f) \lhd g$. همچنین می‌گوییم دنباله $\{f_n\}$، $\lhd$ـ کوشی است اگر برای هر $g \in \mathbb{R}(x)$ که $g \rhd ۰$ عدد $N > ۰$ وجود داشته باشد که اگر $n, m > N$، آن‌گاه $-g \lhd (f_n - f_m) \lhd g$.

الف) دنباله‌ای با جملات متمایز مثال بزنید که $\lhd$ـ همگرا باشد؛

ب) نشان دهید دنباله‌ای وجود دارد که $\lhd$ـ کوشی است ولی $\lhd$ـ همگرا نیست.

پرسش ۶.۱.۳۶. P متوازی‌السطوحی است که مختصات همه رأس‌های آن صحیح است. فرض کنید A، B، C و D به ترتیب تعداد نقاط با مختصات صحیح اکیداً داخل P، روی وجوه ولی نه روی اضلاع P، روی اضلاع ولی نه روی رأس‌های P، و روی رأس‌های P باشند. نشان دهید حجم P برابر است با

$$A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D.$$

۲.۳۶ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۱/۲/۲۷

پرسش ۱.۲.۳۶. فرض کنید n عددی طبیعی و $A_۱, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی دلخواه باشند. ماتریس $X = [x_{ij}]_{n\times n}$ را چنین تعریف می‌کنیم $x_{ij} = \begin{cases} ۱ & A_i \subsetneqq A_j \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$. نشان دهید $X^n = ۰$.

پرسش ۲.۲.۳۶. فرض کنید p عددی اول باشد. قرار دهید

$$G=\left\{\begin{pmatrix} ۱ & a & b & c \\ \circ & ۱ & \circ & d \\ \circ & \circ & ۱ & e \\ \circ & \circ & \circ & ۱ \end{pmatrix} : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}_p\right\}.$$

می‌دانیم که G به همراه عمل ضرب ماتریس‌ها (به پیمانه p) یک گروه از مرتبه p^{5} است. اعضای G' (زیرگروه مشتق G) را مشخص کنید.

پرسش ۳.۲.۳۶. فرض کنید X یک فضای متریک و $f : X \to \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد. می‌گوییم f در نقطه $x \in X$ بیشین است اگر برای هر $y \in X$ که $f(y)$ مؤلفه به مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی $f(x)$ است، داشته باشیم $f(x) = f(y)$.

الف) ثابت کنید اگر X فشرده و ناتهی باشد مجموعه $M_f = \{x \in X \mid \text{بیشین است } x \text{ در } f\}$ ناتهی است؛

ب) فضای متریک فشرده‌ای مانند X و تابعی پیوسته مانند $f : X \to \mathbb{R}^{۲}$ مثال بزنید که M_f فشرده نباشد.

پرسش ۴.۲.۳۶. فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}$ باز و همبند باشد و $f, g : U \to \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که $|f| + |g|$ ثابت است. ثابت کنید f و g توابعی ثابت هستند.

پرسش ۵.۲.۳۶. رأس‌های چهاروجهی P روی سطح کره قرار گرفته‌اند. نشان دهید اگر بیش از $\frac{۳}{۴}$ از سطح کره رنگ شده باشد، دورانی از P وجود دارد که همه رأس‌های آن در قسمت رنگ شده قرار می‌گیرند.

پرسش ۶.۲.۳۶. عمل دوتایی $\circ$ روی مجموعه G تعریف شده است. همچنین تابع $H : G \to G$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $a, b, c, d, f \in G$ از تساوی $(a \circ b) \circ c = (a \circ d) \circ f$ نتیجه می‌شود $b = d \circ (f \circ H(c))$، ثابت کنید $(G, \circ)$ یک گروه است.

سی‌وهفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۷ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۲/۲/۲۴

پرسش ۱.۱.۳۷. فرض کنید متریک d روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$d(x,y)=\begin{cases} ۰ & x=y \\ \max\{|x|,|y|\} & x\neq y \end{cases}$$

ثابت کنید $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}\ ,d)$ بسته است و باز نیست.

(نیازی به اثبات متریک بودن d نیست.)

پرسش ۲.۱.۳۷. فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه فرد باشد. ثابت کنید یک عددی طبیعی k وجود دارد که به ازای هر $x\in G$، داریم $x^{۲^k}=x$.

پرسش ۳.۱.۳۷. معادله $x^۲-kxy+y^۲+x=۰$ را در مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این معادله برای $k=۳$ دارای جواب است؛

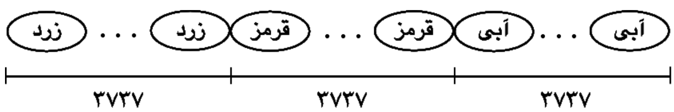
ب) ثابت کنید این معادله برای تعداد نامتناهی عدد طبیعی و فرد k دارای جواب نیست.

پرسش ۴.۱.۳۷. فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و متناهی باشد به‌طوری‌که هر عضو R را بتوان به صورت حاصلضرب دو عضو از R نوشت. ثابت کنید حلقه R یکدار است.

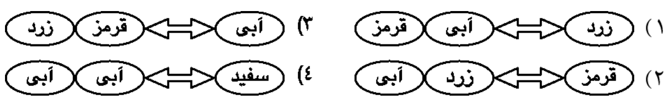
پرسش ۵.۱.۳۷. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده، همبند و ناتهی باشد. ثابت کنید عددی مانند β موجود است که برای هر $n \geq ۱$ و هر $z_۱,\dots,z_n \in X$ معادله زیر در X جواب دارد:

$$\frac{۱}{n}(d(x,z_۱)+\cdots+d(x,z_n))=\beta.$$

پرسش ۶.۱.۳۷. در یک بازی با مهره‌های سفید، قرمز، آبی و زرد، ۳۷۳۷ مهره قرمز، ۳۷۳۷ مهره آبی و ۳۷۳۷ مهره زرد به صورت زیر روی یک سطر چیده شده‌اند:



در هر حرکت می‌توان دو مهره سفید در محل‌های دلخواه بین مهره‌ها اضافه یا کم کرد. سایر حرکات بازی به صورت زیر است:



مثلاً حرکت اول، یعنی، اگر اولین مهره سمت راست یک مهره قرمز، یک مهره آبی باشد، با حذف این دو مهره می‌توان مهره‌ای زرد جایگزین کرد یا برعکس، یعنی، به جای یک مهره زرد، دو مهره در کنار هم قرار داد که مهره سمت راست آبی و مهره سمت چپ قرمز باشد. آیا از آرایش اولیه می‌توان به حالتی رسید که هیچ مهره‌ای باقی نماند؟

۲.۳۷ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۲/۲/۲۵

پرسش ۱.۲.۳۷. فرض کنید $k > ۱$ عددی حقیقی باشد. دنباله $\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_۰ = ۱, \quad a_{n+۱} = \frac{ka_n}{k^{n+۱} - ۱}, \quad n \geq ۰.$$

قرار می‌دهیم $f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots$.

(سری مذکور همواره همگرا است و تابع f در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته است. نیازی به اثبات این مطالب نیست.)

الف) ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(kx) - f(x) = kxf(x)$؛

ب) تمام ریشه‌های f را بیابید.

پرسش ۲.۲.۳۷. همه ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های حقیقی مانند A را مشخص کنید به‌طوری‌که $\det(A) = ۱$ و $A^۲ = I$.

پرسش ۳.۲.۳۷. فرض کنید تابع پیوسته $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ از پایین کران‌دار باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}^۲$ و هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y) - \lambda(۱-\lambda)||x-y||^۲.$$

ثابت کنید f مقدار کمینه[1] خود را در یک و فقط یک نقطه می‌گیرد.

پرسش ۴.۲.۳۷. فرض کنید زیرمجموعه باز U از $\mathbb{C}$ شامل قرص[2] $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ۱\}$ باشد. ثابت کنید اگر $f : U \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد و برای هر $x \in [-۱, ۱]$ داشته باشیم $|f(x)| \geq ۱$، آن‌گاه

$$\left| \int_۰^{۲\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{-it})}dt \right| \geq ۴.$$

پرسش ۵.۲.۳۷. فرض کنید X یک مجموعه متناهی n عضوی و $\mathscr{S}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به‌طوری‌که برای هر A و B در $\mathscr{S}$ داریم $A \cup B \in \mathscr{S}$. همچنین فرض کنید برای هر دو عضو متمایز X،

[1] minimum

[2] disc

عضوی از $\mathscr{S}$ وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از آن‌ها است. ثابت کنید

$$\sum_{A\in\mathscr{S}} |A| \geq \frac{n(n-۱)}{۲}.$$

پرسش ۶.۲.۳۷. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد. نشان دهید اعضای $g,h,a \in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $g \neq h$، $h = aga^{-۱}$ و $gh = hg$.

سی‌وهشتمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۸ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۳/۲/۲۳

پرسش ۱.۱.۳۸. فرض کنید A یک زیرمجموعه از اعداد گنگ باشد که مجموع هر دو عضو متمایز آن گویا است. ثابت کنید A حداکثر دو عضو دارد.

پرسش ۲.۱.۳۸. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک همبند ناتهی باشد به‌طوری‌که حد هر دنباله همگرا، جمله‌ای از آن دنباله باشد. ثابت کنید X تک عضوی است.

پرسش ۳.۱.۳۸. فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار باشد به گونه‌ای که تعداد اعضای R برابر با p^3 باشد، که در آن p عددی اول است. ثابت کنید اگر تعداد اعضای مجموعه $\mathrm{zd}(\mathrm{R})$ نیز توانی از p باشد که در آن $\mathrm{zd}(\mathrm{R}) = \{\mathrm{a} \in \mathrm{R} \mid \exists\, 0 \neq \mathrm{b} \in \mathrm{R}, \mathrm{ab} = 0\}$، آن‌گاه R تنها یک ایده‌آل بیشین دارد.

پرسش ۴.۱.۳۸. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و تابع $f : X \to X$ طوری باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

الف) ثابت کنید به ازای هر $x \in X$، $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d(x, f^n(x))}{n}$ موجود است، که در آن f^n، $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ \text{مرتبه}}$ است؛

ب) ثابت کنید مقدار این حد به انتخاب x بستگی ندارد.

پرسش ۵.۱.۳۸. فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گروه متناهی باشند به‌طوری‌که برای هر گروه متناهی H تعداد همریختی‌های گروهی از $G_۱$ به H با تعداد همریختی‌های گروهی از $G_۲$ به H برابر باشد. نشان دهید $G_۱$ و $G_۲$ یکریخت هستند.

پرسش ۶.۱.۳۸. فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریسی $n \times n$ باشد که درایه‌های آن همگی از اعداد $\{۱, \dots, n\}$ است. نشان دهید با جابه‌جایی ستون‌های A می‌توان به ماتریسی مانند $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ رسید که $K(B) \leq n$. که در آن $K(B)$ برابر است با تعداد اعضای مجموعه $\{(i, j)\ ;\ b_{ij} = j\}$.

۲.۳۸ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۳/۲/۲۴

پرسش ۱.۲.۳۸. گروه متناهی G مفروض است به‌طوری‌که برای هر دو زیرگروه آن مانند H و K، یا $H \cong K$ یا $H \subseteq K$ و یا $K \subseteq H$. ثابت کنید هر زیرگروه G را می‌توان با حداکثر ۲ عضو تولید کرد.

پرسش ۲.۲.۳۸. آیا سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}(۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}})$ همگرا است؟ چرا؟

پرسش ۳.۲.۳۸. فرض کنید G گرافی ساده (بدون طوقه و یال چندگانه) $۲n$ رأسی باشد به‌طوری‌که به هرگونه رأس‌های آن را به دو دسته n رأسی $V_۱$ و $V_۲$ تقسیم کنیم تعداد یال‌های بین رأس‌های $V_۱$ با تعداد یال‌های بین رأس‌های $V_۲$ برابر است. نشان دهید درجه همه رئوس برابر است.

پرسش ۴.۲.۳۸. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی یک میدان F و $\{e_۱, \dots, e_n\}$ پایه‌ای از آن باشد. مجموعه $P = \{\lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n : \lambda_i = ۰, ۱\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید برای هر زیرفضای m بعدی W از V تعداد اعضای مجموعه $W \cap P$ کمتر یا مساوی با ۲^m است.

پرسش ۵.۲.۳۸. اگر معادله $a^۲ + b^۲ + ۱ = abc$ در اعداد طبیعی دارای جواب باشد ثابت کنید $c = ۳$.

پرسش ۶.۲.۳۸. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از صفحه مختلط شامل قرص یکه بسته $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ۱\}$، و f بر U تحلیلی باشد. نشان دهید اگر به ازای هر z که $|z| = ۱$ داشته باشیم $۰ < \mathrm{Re}\ (\bar{z}f(z))$، آن‌گاه f فقط یک ریشه در $\mathbb{D}$ دارد و آن ریشه ساده است.

سی‌ونهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۹ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۴/۲/۲۲

پرسش ۱.۱.۳۹. فرض کنید X یک مجموعه n عضوی بوده و $P(X)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های X باشد. تعداد توابع $f : P(X) \to \{0, 1\}$ را تعیین کنید که $f(\varnothing) = 0$ و برای هر $A, B \in P(X)$، داشته باشیم

$$f(A) + f(B) = f(A \cup B) + f(A \cap B).$$

پرسش ۲.۱.۳۹. فرض کنید f روی گوی بازی به مرکز a تحلیلی باشد و γ یک خم ساده بسته در این گوی باشد که از a نمی‌گذرد. نشان دهید تابعی تحلیلی مانند g روی این گوی وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n، داریم

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^n} dz = \int_\gamma \frac{\sqrt{n} f(z)}{(z-a)^n} dz.$$

پرسش ۳.۱.۳۹. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و $\mathbb{C}$ حلقه اعداد مختلط باشد. فرض کنید $f, g : R \to \mathbb{C}$ دو همریختی حلقه‌ای باشند به‌طوری‌که به ازای هر $r \in R$، $|f(r)| = |g(r)|$. ثابت کنید $f = g$ یا $f = \overline{g}$.
(تابع T از حلقه A به حلقه B یک همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $T(x+y) = T(x) + T(y)$ و $T(xy) = T(x)T(y)$.)

پرسش ۴.۱.۳۹. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. تابع پیوسته $f: X \to \mathbb{R}$ را «خوب» گوییم هرگاه برای هر تابع پیوسته $g: X \to \mathbb{R}$ مجموعه $\{x \in X : f(x)g(x) = ۱\}$ فشرده باشد. نشان دهید مجموع دو تابع خوب، خوب است.

پرسش ۵.۱.۳۹. فرض کنید $f: [۰,\pi] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به‌طوری‌که

$$\int_{۰}^{\pi} f(x)\sin x dx = \int_{۰}^{\pi} f(x)\cos x dx = ۰.$$

ثابت کنید f دارای حداقل دو ریشه در $[۰,\pi]$ است.

پرسش ۶.۱.۳۹. مجموعه $\mathbb{C}^n$ را به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. بیشترین بعد یک زیرفضای $\mathbb{C}^n$ را بیابید که زیرمجموعه $A = \left\{(z_۱,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : z_۱^۲ + \cdots + z_n^۲ = ۰\right\}$ باشد.

۲.۳۹ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۴/۲/۲۳

پرسش ۱.۲.۳۹. نشان دهید یک فضای متریک موجود است که دارای نقطه حدی است و هر گوی باز آن بسته است.

پرسش ۲.۲.۳۹. فرض کنید F یک میدان باشد و قرار دهید

$$R = \left\{a_۰ + a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n \geq ۲,\ a_i \in F\right\}.$$

به وضوح R با جمع و ضرب معمولی چندجمله‌ای‌ها یک حلقه یکدار و جابه‌جایی است. نشان دهید R نمی‌تواند یک حوزه ایده‌آل اصلی (PID) باشد.

پرسش ۳.۲.۳۹. ثابت کنید اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک را می‌توانیم در یک دنباله چنان قرار دهیم که هر عدد دقیقاً یک بار ظاهر شود و هیچ دو جمله متوالی نسبت به هم اول نباشند.

پرسش ۴.۲.۳۹. فرض کنید p یک عدد اول فرد و G یک گروه از مرتبه $۴p$ باشد. به‌علاوه، فرض کنید G

دارای یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ باشد. نشان دهید G دارای حداقل $۲p - ۲$ عضو از مرتبه بزرگ‌تر از ۲ است.

پرسش ۵.۲.۳۹. فرض کنید $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با مقادیر صحیح باشند. قرار دهید $f(n) = n + U_n$ و $A = \{n \in \mathbb{Z} : f(n) = ۰\}$. نشان دهید $\mathbb{E}[|A|] = ۱$.

پرسش ۶.۲.۳۹. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد به‌طوری‌که به ازای هر زیرمجموعه $A \subseteq X$ که بیش از یک نقطه دارد و اشتراکی از گوی‌های بسته است، $a \in A$ و $r > ۰$ وجود دارند که r از قطر A کمتر است و نیز $A \subseteq D_r(a)$. ثابت کنید هر طولپایی[۱] $f : X \to X$ یک نقطه ثابت دارد.
(در اینجا، $D_r(a) = \{x \in X; d(x,a) \leq r\}$).

[1] isometry

چهلمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۰ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۵/۶/۳

پرسش ۱.۱.۴۰. حلقه R و عناصر خودتوان $e,f \in R$ مفروض هستند به‌طوری‌که $e+f$ خودتوان است. ثابت کنید ef هم خودتوان است.

(عنصر x از حلقه R را خودتوان گویند هرگاه $x^2 = x$)

پرسش ۲.۱.۴۰. ثابت کنید تابع $d:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ که با ضابطه $d(m,n)=\log\dfrac{\sqrt{mn}}{(m,n)}$ تعریف می‌شود یک متر روی $\mathbb{N}$ است.

(منظور از (m,n)، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n است.)

پرسش ۳.۱.۴۰. می‌دانیم برای هر عدد طبیعی n، معادله $x^n+\cdots+x-1=0$ دقیقاً یک ریشه مثبت دارد که آن را u_n می‌نامیم. نشان دهید دنباله $\{u_n\}$ همگرا است و حد آن را محاسبه کنید.

پرسش ۴.۱.۴۰. فرض کنید R یک حلقه متناهی و یکدار و $U(R)$ مجموعه تمام عناصر وارون‌پذیر آن باشد. اگر مرتبه $U(R)$ و مرتبه R نسبت به هم اول باشند، نشان دهید R عنصر پوچ‌توان ناصفر ندارد.

(عنصر x در R را پوچ‌توان گویند هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری‌که $x^n=0$.)

پرسش ۵.۱.۴۰. فرض کنید P_1 ، ... و P_n نقاطی داخل دایره‌ای به شعاع یک باشند به‌طوری‌که برای هر نقطه مانند P روی این دایره، حاصلضرب فاصله‌های P از نقاط P_1 ، ... و P_n حداکثر یک باشد. نشان دهید نقاط P_1 ، ... و P_n در مرکز دایره قرار دارند.

پرسش ۶.۱.۴۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که تحدید آن به هر خط در $\mathbb{R}^2$ یکنوا باشد، یعنی، برای هر $a,b\in\mathbb{R}^2$، تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(t)=f(ta+b)$ یکنوا است. ثابت کنید تابع $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و بردار v در $\mathbb{R}^2$ وجود دارند که $f(x)=h(x.v)$.

(منظور از $x.v$ ضرب داخلی x و v است.)

۲.۴۰ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۵/۶/۴

پرسش ۱.۲.۴۰. فرض کنید A و B دو ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی باشند به‌طوری‌که AB ترکیبی خطی از I، A و B است. نشان دهید BA نیز ترکیبی خطی از I، A و B است.

پرسش ۲.۲.۴۰. نشان دهید برای هر پنج نقطه روی سطح کره، یک نیم‌کره بسته چنان می‌توان یافت که شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه است.

(توضیح: نیم‌کره بسته، مرز آن را نیز شامل می‌شود.)

پرسش ۳.۲.۴۰. فرض کنید $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ سه دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشند. همچنین فرض کنید برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a_{n+1}\leq a_n-b_n+c_n$ و به‌علاوه، سری $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ همگرا باشد. ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.

پرسش ۴.۲.۴۰. ثابت کنید هیچ تابع پیوسته $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود ندارد به‌طوری‌که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(f(x))=\cos x$.

پرسش ۵.۲.۴۰. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n>1$ ، 3^n-1 بر 2^n-1 بخش‌پذیر نیست.

پرسش ۶.۲.۴۰. فرض کنید G گروهی است که دارای تعداد متناهی زیرگروه غیرنرمال است. نشان دهید هر زیرگروه نامتناهی G، یک زیرگروه نرمال است.

چهل‌ویکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۱ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۶/۶/۱۴

پرسش ۱.۱.۴۱. فرض کنید x و y دو عضو از حلقه R باشند به‌طوری‌که $x^2 = y^2 = 0$. ثابت کنید اگر $x+y$ یک عنصر خودتوان از R باشد، آن‌گاه $x+y=0$.

پرسش ۲.۱.۴۱. تابع دوبار مشتق‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را محدب گوییم اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f''(x)\geq 0$. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

اگر f دوبار مشتق‌پذیر و محدب باشد، آن‌گاه $(f\circ f)$ نیز محدب است.

پرسش ۳.۱.۴۱. فرض کنید G یک گروه باشد که دقیقاً ۱۳۹۶ عنصر از آن در مرکز G قرار ندارند. ثابت کنید G یک گروه متناهی ۱۴۰۰ عضوی است. یک مثال از چنین گروهی ارائه دهید.

پرسش ۴.۱.۴۱. فرض کنید f یک چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب حقیقی باشد. ثابت کنید حداکثر یک عدد حقیقی r وجود دارد به‌طوری‌که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)-r$ حقیقی باشند و تکرر بیشتر از یک داشته باشند.

پرسش ۵.۱.۴۱. ثابت کنید برای هر تابع صعودی $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$، تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x>0$، داریم $f(x)\geq\varphi(x)$.

پرسش ۶.۱.۴۱. فرض کنید $P(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}x^iy^j$ یک چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی باشد و $A\subseteq \mathbb{R}^2$ به‌طوری‌که $|A|>(n+1)^2$. همچنین فرض کنید برای هر دو نقطه متمایز (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در A، داریم $P(x_1-x_2,y_1-y_2)=0$. نشان دهید $P(0,0)=0$.

۲.۴۱ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۶/۶/۱۵

پرسش ۱.۲.۴۱. تعداد ۴۱ عدد طبیعی را روی یک دایره قرار داده‌ایم با این خاصیت که از هر دو عدد کنار هم یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. نشان دهید دو عدد وجود دارند که کنار هم نیستند ولی همچنان یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

پرسش ۲.۲.۴۱. فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $\{x_1,\dots,x_n\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از X است. تعریف می‌کنیم:

$$A=\left\{a>0:\bigcup_{i=1}^{n}B_a(x_i)=X\right\}.$$

ثابت کنید A مجموعه‌ای باز است.

($B_a(x)$ گوی باز به مرکز x و شعاع a است.)

پرسش ۳.۲.۴۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. اگر S یک زیرمجموعه ناتهی از تبدیلات خطی روی V باشد که نسبت به عمل ترکیب توابع بسته است، نشان دهید تبدیل خطی T در S وجود دارد که $\operatorname{Im} T\oplus \ker T=V$.

پرسش ۴.۲.۴۱. مکعبی با اضلاع به طول یک را در نظر بگیرید و فرض کنید γ خمی پیوسته و بسته است که روی وجوه مکعب قرار دارد و با همه وجه‌ها در تماس است. (اگر خم با یک ضلع یا یک رأس از یک وجه مکعب برخورد کند نیز می گوییم با آن وجه در تماس است). کمترین مقدار ممکن برای طول این خم را به دست آورید.

پرسش ۵.۲.۴۱. برای هر دنباله $n_۱, n_۲, \ldots$ از اعداد مثبت، دنباله $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_k = ۲ + \frac{n_۱}{۲ + \frac{n_۲}{\ldots + \frac{n_k}{۲}}}.$$

حد دنباله x_k را در صورت وجود با $[n_۱, n_۲, \ldots]$ نشان می‌دهیم.

S را مجموعه همه xهایی می‌گیریم که به ازای یک دنباله $n_۱, n_۲, \ldots$ با $n_i \in \{۵, ۲۰\}$ داشته باشیم $x = [n_۱, n_۲, \ldots]$.

الف) $\min(S)$ و $\max(S)$ را بیابید؛

ب) ثابت کنید اگر به ازای هر i، $n_i \in \{۵, ۲۰\}$، آن‌گاه دنباله $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دارای حد است؛

ج) ثابت کنید $S = [\min(S), \max(S)]$.

پرسش ۶.۲.۴۱. فرض کنید R یک حلقه یکدار و $f(x)$ یک چندجمله ای ناصفر با ضرایب در R باشد. اگر M یک عضو بیشین (نسبت به رابطه شمول) در مجموعه $\{J \trianglelefteq R[x] : f \notin J\}$ باشد، آن‌گاه برای هر $I \trianglelefteq R$ ثابت کنید $M \neq I[x]$.

چهل‌ودومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۲ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۷/۴/۱۹

پرسش ۱.۱.۴۲. آیا تابعی مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که تصویر هر زیر مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$ تحت f برابر با کل $\mathbb{N}$ باشد؟

پرسش ۲.۱.۴۲. ثابت کنید فضای متریک (X,d) همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو زیرمجموعه ناتهی A و B از X، یک نقطه $x\in X$ موجود باشد به‌طوری‌که $d(x,A)=d(x,B)$.

پرسش ۳.۱.۴۲. فرض کنید R یک حلقه یکدار و I یک ایده‌آل راست بیشین در R باشد. نشان دهید I یک ایده‌آل دو طرفه است یا $I^۲=I$.

پرسش ۴.۱.۴۲. فرض کنید تابع $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ دارای مشتق دوم پیوسته باشد و $f(۱)=f(۰)$. ثابت کنید

$$۳f'(۱)^۲\leq\int_۰^۱ f''(x)^۲dx.$$

پرسش ۵.۱.۴۲. فرض کنید n عددی طبیعی و t عددی مثبت باشد. قرار می‌دهیم:

$$A=\left\{(u_۱,\ldots,u_n)\in\mathbb{Z}^n : u_۱,\ldots,u_n\geq ۰,\quad \sum_{j=۱}^{n}\frac{u_j}{j}\leq t\right\}.$$

نشان دهید $|A|>t^n$ که در آن $|A|$ تعداد اعضای A را نشان می‌دهد.

پرسش ۶.۱.۴۲. گروه G را «مناسب» گوییم هرگاه برای هر دو عنصر هم‌مرتبه a,b در آن، $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sigma(a)=b$. فرض کنید G یک گروه مناسب از مرتبه p^k (p یک عدد اول) و N زیرگروه نرمالی از G باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$ داشته باشیم $\alpha(N)\subseteq N$. ثابت کنید G/N نیز یک گروه مناسب است.

($\mathrm{Aut}(G)$ نمایش‌دهنده مجموعه خودریختی‌های گروه G است.)

۲.۴۲ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۷/۴/۲۰

پرسش ۱.۲.۴۲. فرض کنید $B=\left\{x=(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^۲ :\ ||x||=\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲}<۱\right\}$ و برای هر $x,y\in B$، متر d را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y)=\begin{cases} ۲-||x||-||y||, & x\neq y\\ ۰ & x=y.\end{cases}$$

ثابت کنید فضای متریک (B,d) نقطه حدی ندارد.

پرسش ۲.۲.۴۲. نشان دهید زیرگروه‌های سره A و B از گروه $(\mathbb{Q},+)$ موجودند به‌طوری‌که

$$\mathbb{Q}=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

پرسش ۳.۲.۴۲. مثالی از تابعی پیوسته و غیرثابت مانند $f:(۰,+\infty)\to\mathbb{R}$ ارائه کنید به‌طوری‌که برای هر x مثبت $f(۲x)f(x)\leq ۰$.

پرسش ۴.۲.۴۲. فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های $n\times n$ حقیقی و $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ تابعی باشد که برای هر دو ماتریس وارون‌پذیر $P,Q \in M_n(\mathbb{R})$ داشته باشیم $\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$. ثابت کنید برای هر $A,B \in M_n(\mathbb{R})$، داریم

$$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

پرسش ۵.۲.۴۲. فرض کنید $\cdots > x_۳ > x_۲ > x_۱ > ۰$ اعدادی حقیقی باشند و $۱ \leq \beta < \alpha$. ثابت کنید سری زیر همگراست:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(x_n - x_{n-۱})^{\beta}}{x_n^{\alpha}}.$$

پرسش ۶.۲.۴۲. ثابت کنید زیرمجموعه‌های $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی وجود دارند به‌طوری‌که برای هر دو عدد طبیعی i و j (نه لزوماً متمایز) تعداد اعضای $A_i \cap A_j$ برابر با بزرگترین مقسوم علیه مشترک i و j است.

چهل‌وسومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۳ پرسش‌های نوبت اول ۱۳۹۸/۶/۱۲

پرسش ۱.۱.۴۳. فرض کنید $a,b,c,d>0$ و $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مثبت x، دنباله $\left\{f^{2n}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.
(منظور از f^m، m بار ترکیب تابع f با خودش است.)

پرسش ۲.۱.۴۳. فرض کنید دو تابع $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هر دو پیوسته بوده و $(f\circ g)$ دوسویی باشد. ثابت کنید هر دو تابع f و g دوسویی هستند.
(تابع دوسویی، تابعی است که یک به یک و پوشا باشد.)

پرسش ۳.۱.۴۳. فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد به طوری که ۲ در آن مقسوم‌علیه صفر نیست و $x\in R$. اگر x با هر عنصر وارون‌پذیر در R جابجا شود، ثابت کنید x با هر عنصر خودتوان نیز جابجا می‌شود.

پرسش ۴.۱.۴۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. برای هر $r>0$ و $x\in X$، تعریف کنید:

$$B_r(x)=\left\{y\in X \;\middle|\; d(x,y)<r\right\} \quad \text{و} \quad C_r(x)=\left\{y\in X \;\middle|\; d(x,y)\leq r\right\}.$$

ثابت کنید اگر X فشرده و x_0 نقطه‌ای از X باشد، آن‌گاه به ازای حداکثر شمارا مقدار r داریم

$\overline{B_r(x_\circ)} \neq C_r(x_\circ)$.

پرسش ۵.۱.۴۳. فرض کنید X یک مجموعه و $T: X \to X$ یک تابع باشد به‌طوری‌که $A \backslash T(A)$ به ازای هر $A \subseteq X$ شمارا است. ثابت کنید $\{x \in X \mid T(x) \neq x\}$ شمارا است.

پرسش ۶.۱.۴۳. فرض کنید G یک گروه باشد که برای هر a و b در آن $\langle a \rangle \cap \langle bab^{-۱} \rangle = \{e\}$ یا $\langle a \rangle \cap \langle bab^{-۱} \rangle = \langle a \rangle$. همچنین فرض کنید x و y دو عنصر نابدیهی از G باشند که با هم جابجا می‌شوند و $(o(x), o(y)) = ۱$. اگر $\langle x \rangle$ در G نرمال باشد، ثابت کنید $\langle y \rangle$ در G نرمال است.

۲.۴۳ پرسش‌های نوبت دوم ۱۳۹۸/۶/۱۳

پرسش ۱.۲.۴۳. یک فضای متریک مثال بزنید که حداکثر دارای تعداد شمارا زیرمجموعه فشرده بوده ولی تعداد ناشمارا زیرمجموعه بسته داشته باشد.

پرسش ۲.۲.۴۳. فرض کنید S نیم‌گروهی با عضو همانی است. همچنین فرض کنید x عضوی از S باشد به‌طوری‌که $x^۲$ وارون‌پذیر است. ثابت کنید x نیز وارون‌پذیر است.

پرسش ۳.۲.۴۳. ثابت کنید عدد $۲^{۱۳۹۸} + ۱$ حداقل سه عامل اول متمایز دارد.

پرسش ۴.۲.۴۳. فرض کنید F یک میدان با مشخصه صفر باشد و $A, B \in M_n(F)$. ثابت کنید اگر هر ترکیب خطی A و B پوچتوان باشد، آن‌گاه برای هر $k \geq ۱$، داریم $\mathrm{tr}(\mathrm{A^kB}) = 0$.

پرسش ۵.۲.۴۳. فرض کنید $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تحلیلی و $\operatorname{diam} f(S_۱) \leq ۱$. ثابت کنید برای هر $r \in (\circ, ۱)$ داریم $\operatorname{diam}(f(S_r)) \leq r$، که در آن $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ و $\operatorname{diam}(A)$ قطر مجموعه A است.

پرسش ۶.۲.۴۳. دو خانواده مجزا[۱] و ناتهی $F_۱$ و $F_۲$ از زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را درنظر بگیرید به‌طوری‌که برای هر $i \in \{۱, ۲\}$ و هر $A, B \in F_i$ داشته باشیم $A \cap B \neq \varnothing$. نشان دهید که $۱, ۲, \ldots, n$ را می‌توان با سه رنگ سفید، قرمز و آبی به گونه‌ای رنگ کرد که هر عضو از $F_۱ \cup F_۲$ با حداقل سه عضو، حداقل دو رنگ داشته باشد.

[۱] disjoint

چهل‌وچهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۴ پرسش‌های نوبت اول ۱۴۰۱/۲/۱۹

پرسش ۱.۱.۴۴. فرض کنید A و B به ترتیب ماتریس‌های $m \times n$ و $n \times m$ با درایه‌های حقیقی باشند. اگر AB خودتوان و BA قطری باشد، نشان دهید BA نیز خودتوان است.

(ماتریس T را خودتوان گوییم هرگاه $T^{۲} = T$.)

پرسش ۲.۱.۴۴. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ویژگی زیر وجود ندارد:

«برای هر دنباله همگرای $\{a_i\}_{i=۱}^{\infty}$ از اعداد حقیقی با جملات متمایز، دنباله $\{f(a_i)\}_{i=۱}^{\infty}$ به هیچ عدد حقیقی همگرا نیست.»

پرسش ۳.۱.۴۴. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع چندجمله‌ای n متغیره با ضرایب حقیقی باشد به گونه‌ای که درجه هر متغیر در f حداکثر ۱ است. قرار دهید:

$$Q = \{(x_۱, \cdots, x_n) \mid x_۱, \cdots, x_n \in [۰, ۱]\}.$$

نشان دهید نقطه‌ای مانند b در $\mathbb{R}^n$ موجود است که هر کدام از درایه‌های آن ۰ یا ۱ هستند و به ازای هر $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ در Q، داریم $|f(b)| \geq |f(x)|$.

پرسش ۴.۱.۴۴. فرض کنید $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد به طوری که $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i < \infty$. می‌دانیم برای حداکثر تعداد شمارایی از زیرمجموعه‌های ناتهی اعداد طبیعی مانند A، $\sum_{i\in A} a_i$ عددی گنگ است. ثابت کنید اعضای این دنباله از جایی به بعد برابر صفر هستند.

پرسش ۵.۱.۴۴. فرض کنید G یک گروه، و T و C زیرگروه‌های آن باشند به‌طوری‌که $G = CT$. اگر T متناهی، C دوری نامتناهی و $T \neq \mathrm{N}_G(T)$، ثابت کنید $G/\mathrm{Z}(G)$ متناهی است.

پرسش ۶.۱.۴۴. مجموعه Δ را متشکل از تمام نقاط به صورت (p_1, p_2, p_3) تعریف کنید که p_i ها اعداد حقیقی نامنفی باشند و $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. فرض کنید v_1, v_2, v_3 سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند که در بین آنها، v_1 بیشترین طول اقلیدسی را دارد. اگر نقطه (p_1, p_2, p_3) به طور تصادفی با توزیع یکنواخت از Δ انتخاب شود، ثابت کنید به ازای هر عدد c در بازه $(0, \frac{1}{4})$ داریم

$$\mathbb{P}(\|p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3\| \leq c\|v_1\|) \leq 4c.$$

(منظور از $\mathbb{P}(A)$ احتمال رخ دادن پیشامد A و منظور از $\|w\|$ طول اقلیدسی بردار w است.)

۲.۴۴ پرسش‌های نوبت دوم ۱۴۰۱/۲/۲۰

پرسش ۱.۲.۴۴. در یک جمع، n نفر حاضر هستند. هر دو فرد در این جمع یا با هم دوست هستند یا دشمن. فرض کنید m بیشترین تعداد افراد حاضر در جمع باشد که دو به دو با هم دشمن هستند. هر فرد را متناظر یک نقطه در صفحه $\mathbb{R}^2$ بگیرید. فرض کنید فاصله هر دو دوست حداکثر یک متر و فاصله هر دو دشمن، بیش از ۳ متر است. کمترین مقدار k را بدست آورید که بتوان همه این افراد را به k دسته افراز کرد به‌طوری‌که اولاً افراد متعلق به هر دسته با هم دوست باشند و ثانیاً هر دو فردی که در یک دسته قرار ندارند با یکدیگر دشمن باشند.

پرسش ۲.۲.۴۴. فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه از G با شاخص متناهی باشد. اگر یک همریختی پوشا از G به گروه $(\mathbb{Z}, +)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه ثابت کنید یک همریختی پوشا از H به $(\mathbb{Z}, +)$ نیز وجود دارد.

پرسش ۳.۲.۴۴. فرض کنید تابع $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ روی هر بازه کران‌دار، انتگرال‌پذیر باشد و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1.$$

ثابت کنید برای هر $\alpha<1$،

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx=\infty.$$

پرسش ۴.۲.۴۴. اعداد طبیعی t و k داده شده‌اند. فرض کنید $A_1,\dots,A_{t+1}$ زیرمجموعه‌هایی متمایز و k-عضوی از مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ باشند. فرض کنید $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k-عضویِ $\{1,2,\dots,n\}$ است به‌طوری‌که هر عضو $\mathscr{F}$ حداکثر با $t-1$ تا از A_iها اشتراک ندارد. ثابت کنید برای n به اندازه کافی بزرگ، داریم

$$|\mathscr{F}|\le\binom{n}{k}-\binom{n-\lfloor\frac{(t+1)k}{2}\rfloor}{k}.$$

پرسش ۵.۲.۴۴. زیرمجموعه A از یک حلقه R را پوچ‌گرا می‌نامیم هرگاه به ازای هر دنباله $a_1,a_2,\cdots$ در A عدد طبیعی n موجود باشد که $a_1\cdots a_n=0$. ثابت کنید در یک حلقه جابه‌جایی، ایده‌ال تولید شده توسط یک مجموعه پوچ‌گرا، یک مجموعه پوچ‌گرا است.

پرسش ۶.۲.۴۴. عدد حقیقی گنگ α و تابع $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ با ضابطه $g(z)=1+e^z+e^{\alpha z}$ مفروض‌اند. ثابت کنید بستار مجموعه $\{\mathrm{Re}(z):g(z)=0\}$ یک بازه بسته و کران‌دار است.
(منظور از $\mathrm{Re}(z)$ قسمت حقیقی عدد مختلط z است.)

چهل‌وپنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۵ پرسش‌های نوبت اول ۱۴۰۲/۴/۲۷

پرسش ۱.۱.۴۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی است که برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، داریم

$$\int_a^{f(b)} f(t)dt = \int_{f(a)}^{b} f(t)dt.$$

ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=x$.

پرسش ۲.۱.۴۵. فرض کنید G یک گروه نامتناهی باشد به‌طوری‌که مرتبه هر زیرگروه نابدیهی آن عددی اول است. ثابت کنید

الف) G توسط ۲ عنصر تولید می‌شود؛

ب) G یک گروه ساده است.

(گروه G ساده است هرگاه فاقد زیرگروه نرمال نابدیهی باشد).

پرسش ۳.۱.۴۵. فرض کنید $a_۱,\dots,a_n$ اعداد طبیعی متمایز هستند. نشان دهید مجموعه

$$A=\left\{\frac{a_i}{a_j}\mid ۱\le i,j\le n\right\}$$

دارای حداکثر $n-۱$ عدد اول متمایز است.

پرسش ۴.۱.۴۵. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. اگر یک تابع $f: G \to G$ و $a \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in G$، داشته باشیم $f(xa) = xf(x)$، آن‌گاه ثابت کنید مرتبه G فرد است.

پرسش ۵.۱.۴۵. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است و تابع $f: X \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که برای هر $x, y \in X$، داریم $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) + ۱$. ثابت کنید تابع $g: X \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $x, y \in X$ در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$|g(x) - f(x)| \leq ۱ \quad \text{و} \quad |g(x) - g(y)| \leq d(x, y).$$

پرسش ۶.۱.۴۵. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ اعداد طبیعی هستند که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک همه آن‌ها ۱ است. ثابت کنید می‌توان ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های صحیح و با دترمینان ۱ یافت که سطر اول آن $[a_۱ \ldots a_n]$ باشد.

۲.۴۵ پرسش‌های نوبت دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸

پرسش ۱.۲.۴۵. ثابت کنید با دو قرص به شعاع کمتر از ۱ نمی‌توان قرصی به شعاع ۱ را پوشاند.
(منظور از قرص، گوی بسته در $\mathbb{R}^۲$ است.)

پرسش ۲.۲.۴۵. تابع $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تحلیلی و برای هر $z \in \mathbb{C}$، $f(z) = f(z - z^۲)$. ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

پرسش ۳.۲.۴۵. فرض کنید A یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی است به‌طوری‌که ماتریس $A + A^t$ خودتوان باشد. ثابت کنید مجموع همه درایه‌های A عددی نامنفی است.
(ماتریس B را خودتوان [1] گوییم هرگاه $B^۲ = B$.)

پرسش ۴.۲.۴۵. ثابت کنید دنباله $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots$ از اعداد $\{-۱, +۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر برای $n \geq ۱$، تعریف کنیم $x_n = \alpha_۱ + \frac{\alpha_۲}{۲} + \cdots + \frac{\alpha_n}{n}$، آن‌گاه مجموعه $\{x_n \mid n \geq ۱\}$ در $\mathbb{R}$ چگال است.

[1] idempotent

پرسش ۵.۲.۴۵. فضای $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی d را در نظر بگیرید. فرض کنید x یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^n$ است که هر مولفه آن به طور مستقل با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر ۱ و با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر -1 است. فرض کنید W یک زیرفضای k بُعدی از $\mathbb{R}^n$ باشد. مطلوب است محاسبه امید ریاضی $\left(\operatorname{dist}(x,W)\right)^2$ که در آن

$$\operatorname{dist}(x,W) = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in W\}.$$

پرسش ۶.۲.۴۵. فرض کنید R یک دامنه (حوزه) صحیح باشد به طوری‌که هر چندجمله‌ای تکین[۲] در $R[x]$ یک ریشه در R داشته باشد و P و Q دو ایده‌آل اول در R باشند. برای هر $a,b \in R$ که $ab \in P+Q$، ثابت کنید $a \in P+Q$ یا $b \in P+Q$.

[2] monic

چهل‌وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۶ پرسش‌های نوبت اول ۱۴۰۳/۲/۱۱

پرسش ۱.۱.۴۶. ثابت کنید دنباله $x_1, x_2, \ldots$ از اعداد حقیقی وجود ندارد که

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+7})=3 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3})=7.$$

پرسش ۲.۱.۴۶. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر برای هر $x,y\in R$، داشته باشیم $(x+y)^2=x^2+y^2$، آن‌گاه ثابت کنید برای هر $x,y\in R$، داریم $(xy)^2=x^2y^2$.

پرسش ۳.۱.۴۶. فرض کنید $(\Omega,\mathbb{P})$ یک فضای احتمال متناهی و $E_1,\ldots,E_n$ پیشامدهایی از Ω باشند. هر عضو x در Ω این ویژگی را دارد که اگر $x\in E_i$، آن‌گاه x در حداکثر a_i تا از $E_1,\ldots,E_n$ قرار دارد. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i}\leq 1.$$

پرسش ۴.۱.۴۶. فرض کنید G یک گروه متناهی است به‌طوری‌که به ازای هر دو زیرگروه H و K از آن، $|H\cap K|$ برابر با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $|H|$ و $|K|$ است. ثابت کنید G یک گروه دوری است.

پرسش ۵.۱.۴۶. فضای متریک کامل (X,d) دارای این خاصیت است که برای هر دنباله $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots$ از اعداد حقیقی مثبت، می‌توان دنباله $x_1,x_2,\dots$ از اعضای X را یافت به‌طوری‌که $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\varepsilon_i}(x_i)$. ثابت کنید X مجموعه‌ای حداکثر شماراست.

(برای $x\in X$ و $\varepsilon>0$، منظور از $B_\varepsilon(x)$ گوی باز به شعاع ε و به مرکز x است.)

پرسش ۶.۱.۴۶. آیلا ۱۰۰ عدد حقیقی دوبه‌دو متمایز $x_1,\dots,x_{100}$ را در اختیار دارد. هدف بردیا این است که شاخص k را بیابد به‌طوری‌که $x_k=\min\{x_1,\dots,x_{100}\}$. برای این‌منظور، بردیا در هر گام دو عدد i و j را از مجموعه اعداد $\{1,\dots,100\}$ انتخاب می‌کند و از آیلا می‌پرسد که «کدام یک از اعداد x_i یا x_j کوچکتر است؟». پس، از این‌که آیلا به سوال بردیا پاسخ داد، بردیا سوال بعدی خود را می‌پرسد و بازی به همین‌صورت ادامه می‌یابد. آیلا اجازه دارد که حداکثر به یک سوال بردیا پاسخ غلط دهد. کمترین تعداد سوال‌هایی را بیابید که بردیا با پرسیدن آن‌ها به هدف خود می‌رسد. ادعای خود را ثابت کنید.

۲.۴۶ پرسش‌های نوبت دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲

پرسش ۱.۲.۴۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $\{a_1,\dots,a_n\}$ و $\{b_1,\dots,b_n\}$ دو مجموعه n عضوی از اعداد حقیقی باشند. اگر برای هر عدد حقیقی t، داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n}|b_i-t|\le\sum_{i=1}^{n}|a_i-t|$، ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

پرسش ۲.۲.۴۶. فرض کنید A یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی باشد. اگر $A-A^2$ یک ماتریس پوچ‌توان باشد، ثابت کنید چندجمله‌ای‌های مشخصه A و A^2 برابرند.

پرسش ۳.۲.۴۶. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد. تابع پیوسته $T:X\to X$ دارای این خاصیت است که برای هر دو نقطه متمایز $x,y\in X$، عدد طبیعی n وجود دارد که $d(T^n(x),T^n(y))<d(x,y)$. ثابت کنید $x_*\in X$ وجود دارد که $T(x_*)=x_*$.

(منظور از T^n، n بار ترکیب T با خودش است.)

پرسش ۴.۲.۴۶. فرض کنید $n \leq ۲$ عددی طبیعی و $\mathscr{A}$ مجموعه همه بردارهای به طول n با مولفه‌های ۰، ۱ یا عدد دلخواه $*$ باشد. برای هر دو بردار $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱, \ldots, y_n)$ در $\mathscr{A}$ فاصله $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را برابر با تعداد i های بین ۱ تا n تعریف می‌کنیم که $\{x_i, y_i\} = \{۰, ۱\}$. ثابت کنید بیشترین تعداد اعضای $\mathscr{A}$ که فاصله دوبه‌دو آن‌ها حداقل ۱ و حداکثر $n - ۱$ است برابر است با $۳ \times ۲^{n-۲}$.

پرسش ۵.۲.۴۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $z_۱, \ldots, z_n$ اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ باشند، و

$$P(z) = (z - z_۱)(z - z_۲) \cdots (z - z_n).$$

برای هر عدد حقیقی $r > ۱$، ثابت کنید $z_* \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $|z_*| = r$ و $|P(z_*)| = r^n$.

پرسش ۶.۲.۴۶. فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابه‌جایی باشد. ایده‌آل I در R را بزرگ گوییم هرگاه I با هر ایده‌آل ناصفر در R، اشتراک ناصفر داشته باشد. فرض کنید هر ایده‌آل بزرگ در R شامل یک عنصر باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست. ثابت کنید مجموع تمام ایده‌آل‌های کمین[1] در R توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

[1] minimal

بخش

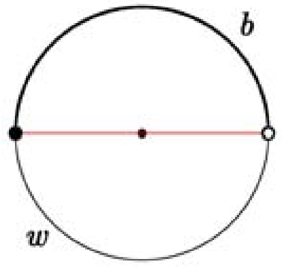
سوم

پاسخ‌ها

سی‌ویکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۱ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۸۶/۲/۲۰

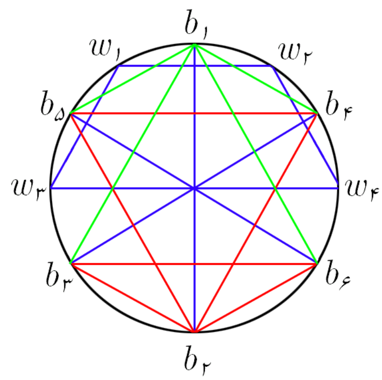
پاسخ ۱.۱.۳۱. الف و ب) با رنگ‌آمیزی دایره با دو رنگ سیاه (b) و سفید (w) به‌صورت دو نیم‌دایره نیمه‌باز می‌بینیم که پاسخ منفی است. زیرا هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای یک رأس در قسمت سفید و دو رأس در قسمت سیاه یا برعکس است. همچنین وترِ هر مثلث قائم‌الزاویه قطری از دایره است که رئوس آن به دو رنگ می‌باشند.



شکل ۱.۳۱:

ج) پاسخ مثبت است. ابتدا وتری با دو رأس همرنگ (مثلاً سفید) انتخاب می‌کنیم که قطر نباشد ($w_۱w_۲$). حال رأس‌هایی که با این وتر مثلث متساوی‌الساقین پدید می‌آورند، بر قطر عمود بر این وتر قرار دارند. بدترین حالت آن است که دو سر این قطر از رنگ دیگر (یعنی سیاه) باشند ($b_۱b_۲$)، پس، به فرض عدم وجود مثلث متساوی‌الساقین، دو سر قطر عمود بر این قطر سفید هستند ($w_۳w_۴$). حال دو وتر $w_۱w_۳$ و $w_۲w_۴$ را در

نظر می‌گیریم. اگر همچنان مثلث متساوی‌الساقینی نداشته باشیم انتهای قطرهای عمود بر آن‌ها باید سیاه باشند، ($b_۳, b_۴$ و $b_۵, b_۶$). حال هر چهار مثلث $b_۲b_۴b_۵$، $b_۲b_۳b_۶$، $b_۱b_۴b_۵$ و $b_۱b_۳b_۶$ مثلث‌هایی متساوی‌الساقین با رأس‌های سیاه هستند.



پاسخ ۲.۱.۳۱. به راحتی می‌توان دید که برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ و هر $A \subseteq \mathbb{R}^d$، داریم

$$\big(A+\{x\}\big)' = A' + \{x\}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} A' + B &= \bigcup_{b\in B} \big(A' + \{b\}\big) = \bigcup_{b\in B} \big(A + \{b\}\big)' \\ &\subseteq \Big(\bigcup_{b\in B} \big(A+\{b\}\big)\Big)' = \big(A+B\big)'. \end{aligned} \tag{۱.۳۱}$$

با توجه به این‌که در نتایج به‌دست آمده از خصوصیات مجموعه‌های A و B استفاده‌ای نشد، به‌طور مشابه داریم

$$A + B' \subseteq \big(A+B\big)'. \tag{۲.۳۱}$$

از (۱.۳۱) و (۲.۳۱) نتیجه می‌شود

$$\big(A+B'\big) \bigcup \big(A'+B\big) \subseteq \big(A+B\big)'. \tag{۳.۳۱}$$

اکنون فرض کنید $c \in \left(A+B\right)'$. پس، دنباله $\{a_n+b_n\}$ با جمله‌های متمایز وجود دارد که

$$a_n+b_n \to c.$$

که $a_n \in A$ و $b_n \in B$. مجموعه A کران‌دار است، در نتیجه، دنباله $\{a_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد. برای سادگی می‌توان فرض کرد که همین دنباله همگراست و حد آن نقطه‌ای مثل $a \in \overline{A}$ است. در این‌صورت دنباله $\{b_n\}$ نیز به $c-a$ میل می‌کند. B بسته است، لذا $c-a \in B$. با توجه به‌این‌که $\overline{A}=A\cup A'$، دو حالت برای نقطه a می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: $a \in A'$. در این‌صورت $c=a+(c-a)$ که در آن $a \in A'$ و $c-a \in B$. پس، $c \in A'+B$.

حالت دوم: $a \in A\setminus A'$. در این‌صورت دنباله $\{a_n\}$ از جایی به بعد برابر با a است. در نتیجه، با توجه به این که جمله‌های دنباله $\{a_n+b_n\}$ متمایز است، از جایی به بعد جملات دنباله $\{b_n\}$ هم متمایز خواهد بود و لذا، حد آن، یعنی، $c-a$، عضو B' است. در نتیجه، $c \in A+B'$.

پس، هر کدام از دو حالت اول یا دوم روی دهد، a عضو $\left(A'+B\right)\bigcup\left(A+B'\right)$ است. در نتیجه،

$$\left(A+B\right)' \subseteq \left(A+B'\right)\cup\left(A'+B\right). \qquad (۴.۳۱)$$

از (۳.۳۱) و (۴.۳۱) نتیجه می‌شود

$$\left(A+B\right)' = \left(A+B'\right)\cup\left(A'+B\right).$$

پاسخ ۳.۱.۳۱. فرض کنیم $H_۱,\dots,H_n$ فهرست همه زیرگروه‌های G باشد که شاخصشان در G برابر با ۲ است. پس، هر H_i نرمال بوده، در نتیجه، $H_۱\cap\cdots\cap H_n$ هم نرمال است. همچنین چون هر H_i دارای شاخص متناهی است می‌توان نتیجه گرفت که شاخص $H_۱\cap\cdots\cap H_n$ هم متناهی است. پس، گروه $\frac{G}{H_۱\cap\cdots\cap H_n}$ که آن‌را A می‌نامیم، متناهی است. ادعا می‌کنیم که A همان گروه مورد نظر است.

فرض کنید B زیرگروهی از A با شاخص ۲ باشد. طبق قضایای یکریختی، می‌توان نوشت $B=\frac{K}{H_۱\cap\cdots\cap H_n}$ که‌درآن $H_۱\cap\cdots\cap H_n \subseteq K \trianglelefteq G$. حال از

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{G}{H_۱\cap\cdots\cap H_n}}{\frac{K}{H_۱\cap\cdots\cap H_n}} \cong \frac{G}{K}$$

نتیجه می‌شود که شاخص K در G مساوی ۲ است. در نتیجه، K یکی از H_iها است. پس، A دقیقاً n زیرگروه با شاخص ۲ دارد که عبارتند از

$$\frac{H_1}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}, \frac{H_2}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}, \cdots, \frac{H_n}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}.$$

توجه کنید که چون H_iها دوبه‌دو متمایز هستند، گروه‌های ذکر شده در بالا هم دوبه‌دو متمایز هستند. باقی کار این است که نشان دهیم A آبلی است. چون هر H_i شاخص ۲ دارد، گروه $\frac{G}{H_i}$ دو عضوی و در نتیجه، آبلی است، پس، $G' \subseteq H_i$. بنابراین، $G' \subseteq H_1 \cap \cdots \cap H_n$، و در نتیجه، A آبلی است.

پاسخ ۴.۱.۳۱. دو تاس A و B به‌ترتیب با احتمال‌های $A_1, \ldots, A_6$ و $B_1, \ldots, B_6$ برای وجوه ۱، ۲، ... و ۶ آن‌ها را در نظر می‌گیریم و احتمال پیش‌آمد مجموع j در پرتاب هم‌زمان آن‌ها را با $P_j (2 \leq j \leq 12)$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت $P_j = \sum_{k=1}^{j} A_k B_{j-k}$. فرض کنید شرط $\frac{2}{33} < P_j < \frac{4}{33}$ برای $j = 2, 3, \ldots, 12$ برقرار باشد. اکنون با توجه به‌این‌که $P_2 = A_1 B_1$، $P_{12} = A_6 B_6$ و

$$P_7 = A_1 B_6 + A_2 B_5 + A_3 B_4 + A_4 B_3 + A_5 B_2 + A_6 B_1،$$

داریم

$$\begin{aligned} P_7 \geq A_1 B_6 + A_6 B_1 &\geq 2\sqrt{A_1 A_6 B_1 B_6} = 2\sqrt{A_1 B_1 A_6 B_6} \\ &\geq 2\sqrt{P_2 P_{12}} \geq 2\sqrt{\tfrac{2}{33} \cdot \tfrac{2}{33}} \geq \frac{4}{33}. \end{aligned}$$

که امکان ندارد.

پاسخ ۵.۱.۳۱. مجموعه گوی‌هایی که هم شعاع و هم مختصات مرکزشان گویاست شمارا است. آن‌ها را $\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ نام‌گذاری می‌کنیم. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط صفحه باشد که برای هر n داشته باشیم $x_n \in B_n$، آن‌گاه مجموعه نقاط این دنباله در صفحه چگال است. برای این‌که شرط دیگر نیز برقرار شود، کافی است به شکل استقرایی x_n را طوری انتخاب کنیم که برای هر $i < j < n$، در راستای خط گذرنده از

دو نقطه x_i و x_j نباشد. این کار به‌وضوح ممکن است زیرا تعداد متناهی خط نمی‌توانند یک گوی را بپوشانند.

پاسخ ۶.۱.۳۱. فرض کنید $p(x)=x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_n$ چندجمله‌ای مشخصه A بوده و $\lambda_۱,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه A (در حقیقت ریشه‌های $p(x)=۰$) باشند. ابتدا توجه کنید که

$$a_n=(-۱)^n\lambda_۱\cdots\lambda_n=(-۱)^n\det(A).$$

از آنجا که برای هر i باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x-\lambda_i$ برابر با صفر است، با انجام عمل تقسیم خواهیم داشت

$$\frac{p(x)}{x-\lambda_i}=x^{n-۱}+(\lambda_i+a_۱)x^{n-۲}+\cdots+\big(\lambda_i^{n-۱}+a_۱\lambda_i^{n-۲}+\cdots+a_{n-۲}\lambda_i+a_{n-۱}\big).$$

حال توجه کنید که $p'(x)=\frac{P(x)}{x-\lambda_۱}+\cdots+\frac{p(x)}{x-\lambda_n}$. پس، با جمع کردن روابط بالا به ازای $i=۱,\ldots,n$ و استفاده از تساوی $\mathrm{tr}(A^k)=\lambda_۱^k+\cdots+\lambda_n^k$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}p'(x)&=nx^{n-۱}+\big(\mathrm{tr}(A)+na_۱\big)x^{n-۲}\\&\quad+\cdots+\big(\mathrm{tr}(A^{n-۱})+a_۱\mathrm{tr}(A^{n-۲})+\cdots+a_{n-۲}\mathrm{tr}(A)+na_{n-۱}\big).\end{aligned}$$

از طرفی مشتق p برابر $p'(x)=nx^{n-۱}+(n-۱)a_۱x^{n-۲}+\cdots+a_{n-۱}$ است. پس، با مساوی قرار دادن ضرایب $p'(x)$ از دو رابطه اخیر، دستگاه زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{cases}a_۱=-\mathrm{tr}(A)\\ a_۱\mathrm{tr}(A)+۲a_۲=-\mathrm{tr}(A^۲)\\ a_۱\mathrm{tr}(A^۲)+a_۲\mathrm{tr}(A)+۳a_۳=-\mathrm{tr}(A^۳)\\ \vdots\\ a_۱\mathrm{tr}(A^{n-۲})+\cdots+a_{n-۲}\mathrm{tr}(A)+(n-۱)a_{n-۱}=-\mathrm{tr}(A^{n-۱})\\ a_۱\mathrm{tr}(A^{n-۱})+\cdots+a_{n-۱}\mathrm{tr}(A)+na_n=-\mathrm{tr}(A^n).\end{cases}$$

توجه کنید که آخرین سطر دستگاه قبل، نه از مساوی قرار دادن ضرایب بلکه به‌دلیل تساوی

$p(\lambda_1)+\cdots+p(\lambda_n)=0$ حاصل شده است. اکنون با استفاده از دستور کرامر، مقدار a_n از دستگاه بالا را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$a_n=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mathrm{tr}(A) \\ \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & 0 & \cdots & -\mathrm{tr}(A^2) \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & 0 & \cdots & -\mathrm{tr}(A^3) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathrm{tr}(A^{n-1}) & \mathrm{tr}(A^{n-2}) & \mathrm{tr}(A^{n-3}) & \cdots & \cdots & -\mathrm{tr}(A^n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathrm{tr}(A^{n-1}) & \mathrm{tr}(A^{n-2}) & \mathrm{tr}(A^{n-3}) & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}}$$

حال توجه کنید که دترمینان واقع در مخرج کسر بالا برابر با $n!$ است. از طرفی چنان‌که در ابتدای برهان متذکر شدیم $a_n=(-1)^n\det(A)$. پس، با جایگذاری در رابطه بالا اثبات کامل می‌شود.

۲.۳۱ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۸۶/۲/۲۱

پاسخ ۱.۲.۳۱. اگر n عدد طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه رابطه

$$\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+\left(\frac{n-1}{2}+2\right)+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}+n\right)=n^2$$

قسمت اول مسئله را ثابت می‌کند. برای بررسی قسمت دوم، فرض کنیم m و k اعدادی صحیح باشند و $(m+۱)+(m+۲)+\cdots+(m+۱۲)=k^۲$. بنابراین، $۱۲m+۷۸=k^۲$. پس، k زوج است، برای مثال به ازای t ای داریم $k=۲t$. حال با جایگذاری در رابطه قبل داریم $۲t^۲-۶m=۳۹$ که ممکن نیست، زیرا سمت چپ این تساوی عددی زوج است.

پاسخ ۲.۲.۳۱. راه‌حل اوّل: با تغییر متغیر $u=x^\alpha$ و $v=y^\beta$، مسأله به بررسی عبارت زیر منجر می‌شود:

$$\frac{u^۲v^۲}{u^۳+v^۳} \tag{۵.۳۱}$$

که البته بسته به علامت α و β، نقطه‌ای که باید u و v به ان میل کنند صفر یا بی‌نهایت است.

حالت اول: $\alpha,\beta>۰$. در این حالت حد (۵.۳۱) باید وقتی بررسی شود که $u,v\to ۰^+$. این حد موجود و برابر صفر است، زیرا

$$۰\leq \frac{u^۲v^۲}{u^۳+v^۳}=\left((\tfrac{u}{v})^{\frac{۳}{۲}}+(\tfrac{v}{u})^{\frac{۳}{۲}}\right)^{-۱}\sqrt{uv}\leq \frac{\sqrt{uv}}{۲}.$$

حالت دوم (و سوم): $\alpha>۰$ و $\beta<۰$ (و برعکس). در این حالت حد (۵.۳۱) باید وقتی بررسی شود که $u\to ۰^+$ و $v\to+\infty$. در این حالت هم حد موجود و برابر صفر است، زیرا

$$۰\leq \frac{u^۲v^۲}{u^۳+v^۳}=\frac{u^۲}{\frac{u^۳}{v^۲}+v}\leq \frac{u^۲}{v}.$$

حالت چهارم: $\alpha,\beta<۰$. در این حالت حد (۵.۳۱) باید وقتی بررسی شود که $u,v\to+\infty$. نشان می‌دهیم که در این حالت حد از مسیری خاص برابر بی‌نهایت است؛ مسیر $u=v$ را در نظر بگیرید. حد مورد نظر به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{u^۴}{۲u^۳}=\frac{u}{۲}\to+\infty$$

بنابراین، در این حالت حد موجود نیست.

راه‌حل دوم: بعد از تغییر متغیر، می‌توان قسمت‌های اول تا سوم را به شکل زیر هم بررسی کرد:

$$\circ \leq \frac{u^{۲}v^{۲}}{u^{۳}+v^{۳}} \leq \min\left\{\frac{u^{۲}}{v}, \frac{v^{۲}}{u}\right\} \leq \max\{u, v\}$$

همگرایی حالت اول از نابرابری نهایی و همگرایی حالت‌های دوم و سوم از نابرابری میانی نتیجه می‌شود.

پاسخ ۳.۲.۳۱. فرض کنید $x = (x_{۱}, \ldots, x_n)$ و $y = (y_{۱}, \cdots, y_n)$. تابع f را از A^n به A^n با ضابطه

$$f : z = (z_{۱}, \ldots, z_n) \mapsto z' = (Z'_{۱}, \ldots, Z'_n)$$

و

$$Z'_j = \begin{cases} x_j, & z_j = x_j \neq y_j \\ y_j, & z_j = y_j \neq x_j \\ z_j, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

برای $۱ \leq j \leq n$ تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد که تابع f از A^n به A^n برای هر $z \in A^n$ دارای خاصیت زیر است:

$$\mathrm{d}(z, x) = \mathrm{d}(z', y) \quad \text{و} \quad \mathrm{d}(z, y) = \mathrm{d}(z', x).$$

بنابراین، f تابعی یک‌به‌یک و پوشا است که C را به‌روی D و D را به‌روی C می‌نگارد.

پاسخ ۴.۲.۳۱. ابتدا حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

«اگر F یک میدان باشد، آن‌گاه حلقه $F[x]$ دارای تعدادی نامتناهی ایده‌آل بیشین است.»

برای اثبات توجه کنید که چون ایده‌آل تولید شده توسط یک چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر و تکین، بیشین است و ایده‌آل تولید شده توسط دو چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر و تکین متمایز، متمایز هستند، کافی است نشان دهیم که تعداد چندجمله‌ای‌های تکین و تجزیه‌ناپذیر در $F[x]$ نامتناهی است. برای این کار به برهان خلف، فرض کنید

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ فهرستی از همه چندجمله‌ای‌های تکین و تجزیه‌پذیر در $F[x]$ باشد. چون‌که چندجمله‌ای $f_1 f_2 \cdots f_n + 1$ باید عاملی تجزیه‌ناپذیر و تکین داشته باشد پس، برای حداقل یک i، $f_1 f_2 \cdots f_n + 1$ مضربی از f_i است. امّا $f_1 f_2 \cdots f_n$ هم مضرب f_i است و در نتیجه، چندجمله‌ای ثابت ۱ هم مضرب f_i بوده که تناقض است (برهان اقلیدس برای اثبات نامتناهی بودن مجموعه اعداد اول را به‌یاد آورید).

اکنون برای اثبات مسئله در حالت کلی، فرض کنید M ایده‌آل بیشینی در R باشد. طبق قسمت قبل، حلقه $(\frac{R}{M})[x]$ دارای نامتناهی ایده‌آل بیشین است. حال از آنجا که نگاشت $\Phi : R[x] \to (\frac{R}{M})[x]$ با ضابطه $\Phi(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_n + M)x^n + \cdots + (a_1 + M)x + (a_0 + M)$ یک همریختی پوشا است، نتیجه می‌شود که $R[x]$ هم دارای تعداد نامتناهی ایده‌آل بیشین است، زیرا برای هر ایده‌آل بیشین در $(\frac{R}{M})[x]$ مانند I، $\Phi^{-1}(I)$ هم ایده‌آلی بیشین در $R[x]$ است، و اگر $I \neq J$، آن‌گاه $\Phi^{-1}(I) \neq \Phi^{-1}(J)$.

پاسخ ۵.۲.۳۱. مسأله را می‌توانیم به‌صورت $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ بازنویسی کنیم که A ماتریسی به‌صورت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \pm 1 \\ & \ddots & \\ \pm 1 & & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

می‌باشد، یعنی، درایه‌های قطر اصلی آن همه صفر و بقیه درایه‌ها $+1$ یا -1 هستند. اگر نشان دهیم که A یک ماتریس وارون‌پذیر است، مسئله حل است.

چون دترمینان این ماتریس عددی صحیح است، نشان می‌دهیم که $|A|$ به پیمانه ۲ برای هر n برابر ۱ است.

بنابراین، نمی‌تواند صفر باشد. داریم

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & & ±۱ \\ & \ddots & \\ ±۱ & & ۰ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} ۰ & & ۱ \\ & \ddots & \\ ۱ & & ۰ \end{vmatrix} \ (\text{پیمانه ۲})$$

$$= \text{تعداد جایگشت‌های } ۲n \text{ عنصر که در آن‌ها هیچ عنصری سر جای خودش قرار ندارد}$$

$$= ۲n!\left(\tfrac{۱}{۰!} - \tfrac{۱}{۱!} + \tfrac{۱}{۲!} - \cdots + (-۱)^{۲n}\tfrac{۱}{(۲n)!}\right)$$

$$\equiv ۱\ (\text{پیمانه ۲}).$$

پاسخ ۶.۲.۳۱. الف) با توجه به فرض $A = (t_۱q_۱, ۱-t_۱)$ و $B = (t_۲q_۲, ۱-t_۲)$ که $t_۱, t_۲ \in (۰, ۱]$ و $q_۱$ و $q_۲$ دو عدد گویای متمایز هستند. واضح است که اگر α عدد گنگی بین این دو عدد گویا باشد، خط واصل بین M و نقطه $(\alpha, ۰)$ دو نیم‌صفحه می‌سازد که $T \setminus \{M\}$ را می‌پوشاند و در ضمن A و B در دو نیم‌صفحه مختلف می‌افتند. در نتیجه، ممکن نیست مسیری پیوسته داخل $T \setminus \{M\}$ بین A و B وجود داشته باشد.

ب) فرض کنید $f : T \to T$ پیوسته باشد و

$$F(M) = M' = (\lambda p, ۱-\lambda)$$

اگر $\lambda = ۰$، مسئله حل است، زیرا M نقطه ثابت f است. پس، حالتی را بررسی می‌کنیم که $\lambda > ۰$. تابع $g : [۰, ۱] \to T$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f(tp, ۱-t).$$

واضح است که g نیز پیوسته است. مجموعه D را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \left\{(tp, ۱-t) \in T \;\middle|\; t \in [۰, ۱]\right\}.$$

[1] homeomorphic

D در واقع همان پاره‌خط شامل M و M'، و لذا، همسانریخت[1] با یک بازه فشرده است. نشان می‌دهیم که D شامل دست‌کم یک نقطه ثابت برای f است. اگر هیچ‌کدام از نقاط D تحت f به M نروند، مسئله حل است، زیرا طبق (الف)، $f(D)$ زیرمجموعه D است و در نتیجه، f دست‌کم یک نقطه ثابت دارد.

پس، فرض می‌کنیم بعضی از نقاط D، تحت f به نقطه M بروند. قرار می‌دهیم

$$t_۰ = \inf\left\{t \in [۰, ۱] \;\middle|\; g(t) = M\right\}.$$

با توجه به پیوستگی g و این‌که $M \neq f(M) = g(۰)$، داریم $t_۰ > ۰$ و به‌علاوه $g(t_۰) = M$. همچنین با توجه به قسمت (الف) تصویر نقاط بازه $[۰, t_۰]$ تحت g، داخل پاره‌خط D می‌افتند.

فرض کنید $\pi : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تصویر روی مؤلفه دوم باشد. در این‌صورت

$$\pi(g(۰)) = ۱ - \lambda < ۱ - ۰$$

و

$$\pi(g(t_۰)) = \pi(M) = ۱ > ۱ - t_۰.$$

در نتیجه، $t_۱ \in (۰, t_۰)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\pi(g(t_۱)) = ۱ - t_۱.$$

با توجه به این‌که $g(t_۱) \in D$ خواهیم داشت

$$f(t_۱ p, ۱ - t_۱) = (t_۱ p, ۱ - t_۱).$$

یعنی، f نقطه ثابت دارد.

سی‌ودومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۲ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۸۷/۲/۱۸

پاسخ ۱.۱.۳۲. برای دنباله $X \supseteq A_m \supseteq \cdots \supseteq A_۲ \supseteq A_۱ \supseteq \varnothing$، مجموعه‌های $B_۱ = A_۱ \setminus \varnothing$، $B_۲ = A_۲ \setminus A_۱$، …، $B_{m+۱} = X \setminus A_m$ زیرمجموعه‌های جدا از هم از X هستند که اجتماع آن‌ها برابر X است. بنابراین، جواب مسأله معادل قرار دادن k عضو X در $m+۱$ جعبه $B_۱, \dots, B_{m+۱}$ است و این برابر با تعداد توابع از یک مجموعه k عضوی به یک مجموعه $m+۱$ عضوی، یعنی، $(m+۱)^k$ می‌باشد.

پاسخ ۲.۱.۳۲. توجه کنید که اگر A یک ماتریس خودتوان باشد، آن‌گاه بسادگی می‌توان نشان داد که $\mathrm{rank}(I-A) = N(A)$. پس، حکم به ازای $n = ۱$ برقرار است. حال به روش استقرای ریاضی، فرض کنید حکم به ازای $n = k$ درست باشد و $A_۱$، …، $A_{k+۱}$ ماتریس‌هایی خودتوان باشند. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(I - A_1A_2\cdots A_{k+1}) &= \mathrm{rank}((I - A_1)A_2\cdots A_{k+1} + I - A_2\cdots A_{k+1}) \\
&\leq \mathrm{rank}(I - A_1) + \mathrm{rank}(I - A_2\cdots A_{k+1}) \\
&\leq N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_{k+1}).
\end{aligned}$$

پس، بنا بر استقرای ریاضی، اثبات کامل است.

پاسخ ۳.۱.۳۲. به سادگی می‌توان دید که برای هر m و n صحیح و هر $z \in \mathbb{C}$، داریم

$$f(z+mw_۱+nw_۲)=f(z).$$

حالت اول: فرض کنید $\frac{w_۱}{w_۲}$ حقیقی نباشد. در این صورت ۰، $w_۱$ و $w_۲$ در یک راستا قرار نمی‌گیرند. متوازی‌الاضلاعی با رئوس $w_۱$، ۰، $w_۲$ و $w_۱+w_۲$ را در نظر بگیرید. تابع f روی ناحیه محدود به این متوازی‌الاضلاع کران‌دار است. از آنجایی که این تابع با دو دوره تناوب $w_۱$ و $w_۲$ متناوب است، این ویژگی در همه صفحه مختلط معتبر است. به بیان دقیق‌تر، با توجه به این که $w_۱$ و $w_۲$ به عنوان دو بردار در صفحه به‌عنوان یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند، هر عضو صفحه توسط آن‌ها تولید می‌شود. بنابراین، اعداد حقیقی x و y وجود دارند که $z=xw_۱+yw_۲$. در نتیجه،

$$\begin{aligned} f(z) &= f(xw_۱+yw_۲)\\ &= f(([x]+x-[x])w_۱+([y]+y-[y])w_۲)\\ &= f((x-[x])w_۱+(y-[y])w_۲). \end{aligned}$$

اما $(x-[x])w_۱+(y-[y])w_۲$ نقطه‌ای در متوازی‌الاضلاع یاد شده است، پس، f کران‌دار است و از قضیه لیوویل نتیجه می‌شود که تابعی ثابت است.

حالت دوم: فرض کنید $r=\frac{w_۱}{w_۲}$ عددی حقیقی و گنگ باشد. به دلیل گنگ بودن r، مجموعه $\{mr+n \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ در $\mathbb{R}$ چگال است و لذا $\{(mr+n)w_۲ \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ شامل یک زیرمجموعه کران‌دار و نامتناهی در $\mathbb{C}$ است. f روی تمام نقاط این مجموعه برابر $f(۰)$ است. در نتیجه، f ثابت است.

پاسخ ۴.۱.۳۲. الف) با توجه به راهنمایی، A را برابر نقطه $(a,a^۲)$ و B را برابر نقطه $(b,b^۲)$ می‌گیریم که هر دو روی سهمی متناظر با تابع $f(x)=x^۲$ قرار دارند و $a<b$. مجموعه X را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$X=\left\{(x_۱,x_۲,\dots,x_{n-۲})\in[a,b]^{n-۲} \;\middle|\; x_۱\le x_۲\le\cdots\le x_{n-۲}\right\}.$$

مجموعه X زیرمجموعه بسته و کران‌دار $\mathbb{R}^{n-۲}$ و در نتیجه، فشرده است. اگر قرار دهیم $P_i = (x_i, x_i^۲)$، آن‌گاه $AP_۱ \cdots P_{n-۲}B$ یک n ضلعی محدب و احتمالاً تباهیده است. با توجه به پیوسته بودن تابع $f(x) = x^۲$، نگاشتی که به هر عضو X مساحت n ضلعی $AP_۱ \cdots P_{n-۲}B$ را نسبت می‌دهد پیوسته است. با توجه به این که هر تابع حقیقی پیوسته روی یک فضای فشرده ناتهی، مقدار بیشینه[۱] خود را می‌گیرد، $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۲}) \in X$ وجود دارد که مساحت $AP_۱, \cdots P_{n-۲}B$ بیش‌ترین مقدار ممکن است. این چند ضلعی نمی‌تواند تباهیده باشد زیرا با جابه‌جایی نقطه‌های روی هم افتاده، یک چندضلعی با مساحت بیش‌تر به وجود می‌آید.

ب) مساحت قطاع سهمی به صورت زیر، با کم کردن انتگرال مربوط به زیر سطح سهمی از ذوزنقه بین وتر AB و محور افقی، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S &= \frac{f(b)+f(a)}{۲}(b-a) - \int_a^b f = \frac{b^۲+a^۲}{۲}(b-a) - \frac{۱}{۳}(b^۳-a^۳) \\ &= \frac{b-a}{۶}(۳(b^۲+a^۲) - ۲(b^۲+ba+a^۲)) \\ &= \frac{(b-a)^۳}{۶}. \end{aligned}$$

ابتدا حالت $n = ۳$ را بررسی می‌کنیم. باید $c \in [a, b]$ را طوری بیابیم که مثلث ABC، که در آن $C = (c, c^۲)$، بیش‌ترین مساحت ممکن را داشته باشد. این معادل با این است که C بیش‌ترین فاصله ممکن را تا ضلع AB داشته باشد. چنین حالتی در صورتی ممکن است که مماس در نقطه C با ضلع AB موازی باشد، یعنی،

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

در نتیجه، $c = \frac{b+a}{۲}$. تا این جا محل C مشخص شده است. محاسبه مساحت مثلث ABC هم ساده است:

$$\begin{aligned} S_۳ &= \frac{b^۲+a^۲}{۲}(b-a) - \frac{c^۲+a^۲}{۲}(c-a) - \frac{b^۲+c^۲}{۲}(b-c) \\ &= \frac{b-a}{۴}\left(۲(b^۲+a^۲) - (b^۲+a^۲+۲\left(\frac{b+a}{۲}\right)^۲)\right) \\ &= \frac{(b-a)^۳}{۸}. \end{aligned}$$

و در نتیجه، $\frac{S_۳}{S}=\frac{۳}{۴}$. به این ترتیب حکم برای $n=۳$ ثابت شد. به‌علاوه، جای نقطه سوم نیز مشخص شد.
برای اثبات حالت کلی، فرض کنید بزرگ‌ترین n ضلعی با افراز زیر تولید شود:

$$a=x_۰<x_۱<\ \ldots<x_{n-۲}<x_{n-۱}=b.$$

با توجه به جواب حالت $n=۳$، برای هر $۰<k<n-۱$ باید $x_k=\frac{x_{k+۱}+x_{k-۱}}{۲}$. این نتیجه می‌دهد که افرازی که مساحت را بیشینه می‌کند منظم است. به عبارت دیگر

$$x_k=a+\frac{k}{n-۱}(b-a).$$

مساحت n ضلعی حاصل به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
S_n &= \tfrac{b^۲+a^۲}{۲}(b-a)-\sum_{k=۱}^{n-۱}\tfrac{x_k^۲+x_{k-۱}^۲}{۲}(x_k-x_{k-۱})\\
&= \tfrac{b-a}{۲(n-۱)}((n-۱)(b^۲+a^۲)-\sum_{k=۱}^{n-۱}((a+\tfrac{k}{n-۱}(b-a))^۲+(a+\tfrac{k-۱}{n-۱}(b-a))^۲))\\
&= \tfrac{b-a}{۲(n-۱)}((n-۱)(b^۲-a^۲)-\tfrac{۲a(b-a)}{n-۱}\sum_{k=۱}^{n-۱}(۲k-۱)-\tfrac{(b-a)^۲}{(n-۱)^۲}\sum_{k=۱}^{n-۱}(k^۲+(k-۱)^۲))\\
&= \tfrac{(b-a)^۲}{۲(n-۱)^۳}((n-۱)^۳(b+a)-۲a(n-۱)^۳-(b-a)\tfrac{n-۱}{۳}(۲n^۲-۴n+۳))\\
&= \tfrac{(b-a)^۳}{۶(n-۱)^۲}(n^۲-۲n).
\end{aligned}$$

پس، $\frac{S_n}{S}=\frac{n(n-۲)}{(n-۱)^۲}=۱-\frac{۱}{(n-۱)^۲}$ که تنها تابع n است.

پاسخ ۵.۱.۳۲. جواب $k=۲n$ است. ابتدا توجه کنید که زیرمجموعه‌هایی با $۲n-۱$ عضو از صفحه شطرنجی $n\times n$ وجود دارند که شامل هیچ زیرمجموعه زوجی نیستند. برای مثال، خانه‌های روی قطر اصلی و زیر قطر اصلی را در نظر بگیرید.
اکنون با استقرا روی n، ثابت می‌کنیم که انتخاب هر $۲n$ خانه از صفحه شطرنجی، زیرمجموعه‌ای زوج دارد. نتیجه برای $n=۱$ (به انتفای مقدم) و $n=۲$ به روشنی برقرار است.

[1]maximum

فرض کنید یک صفحه شطرنجی $(n+1)\times(n+1)$ داریم و $2(n+1)=2n+2$ خانه از آن انتخاب شده است. اگر از هر سطر و ستون دقیقاً دو خانه انتخاب شده باشد که خود آن مجموعه زوج است.
در هر یک از حالات زیر با حذف سطر و ستونی مناسب به صفحه شطرنجی $n\times n$ ای می‌رسیم که از آن حداقل $2n$ خانه انتخاب شده است.
الف) اگر از هر سطر دو خانه انتخاب شده باشد، اما از هر ستون دقیقاً دو خانه انتخاب نشده باشد، به ستونی مانند j نگاه می‌کنیم که از آن حداکثر یک خانه انتخاب شده است. اگر از ستون j خانه‌ای انتخاب شده باشد، برای مثال در سطر i، آن‌گاه سطر i را حذف می‌کنیم. در صورتی که از ستون j خانه‌ای انتخاب نشده باشد، سطری دلخواه را حذف می‌کنیم. ستون j را هم حذف می‌کنیم.
ب) اگر از سطری مانند i دقیقاً یک خانه انتخاب شده باشد، برای مثال در ستون j، آن‌گاه به ستون j نگاه می‌کنیم. اگر از ستون j، حداکثر ۲ خانه انتخاب شده باشد، سطر i و ستون j را حذف می‌کنیم. اگر از ستون j، بیش‌تر از دو خانه انتخاب شده باشد، ستونی مانند j' وجود دارد که از آن حداکثر یک خانه انتخاب شده است. در این صورت ستون j' و سطر i را حذف می‌کنیم.
ج) اگر از سطری مانند i هیچ خانه‌ای انتخاب نشده باشد، ستونی مانند j وجود دارد که از آن حداکثر ۲ خانه انتخاب شده است، سطر i و ستون j را حذف می‌کنیم.

پاسخ ۶.۱.۳۲. به روش برهان خلف، فرض کنید R حلقه‌ای با دقیقاً پنج عضو منظم باشد. به راحتی دیده می‌شود که مجموعه عناصر منظم R نسبت به عمل ضرب بسته است، یعنی، همراه عمل ضرب تشکیل یک نیم گروه می‌دهد. حال از آنجا که هر نیم گروه متناهی حداقل یک عضو خودتوان دارد، پس، عضو منظم $e\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $e^2=e$. بنابراین، برای هر $x\in R$،

$$e(ex-x)=0=(xe-x)e.$$

چون e منظم است داریم $ex=x=xe$، یعنی، R حلقه‌ای یکدار با عضو همانی ضربی e است. برای راحتی، از اینجا به بعد، بجای استفاده از نماد e، عضو همانی ضربی حلقه را با ۱ نشان می‌دهیم.
اگر y عضوی منظم باشد، چون y^2، y^3، ... نیز منظم هستند و R فقط پنج عضو منظم دارد، پس، اعداد طبیعی $m>n$ وجود دارند به‌طوری‌که $y^m=y^n$. به این ترتیب $y^ny^{m-n}=y^n1$ و در نتیجه، $y^{m-n}=1$. پس، هر عضو منظم وارون‌پذیر است. از طرفی واضح است که هر عضو وارون‌پذیر، منظم است. از این رو R حلقه‌ای یکدار است که $U(R)$، گروه عناصر وارون‌پذیر R، گروهی پنج عضوی است. حال از یک طرف $(-1)^2=1$

و از طرف دیگر چون $U(R)$ گروهی ۵ عضوی است، پس، $(-۱)^۵ = ۱$ و در نتیجه، $۱ = -۱$. بنابراین، مشخصه R برابر با ۲ است. پس، اگر α را مولدی برای گروه $U(R)$ بگیریم، آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
(۱+\alpha^۲+\alpha^۳)^۳ &= (۱+\alpha^۲+\alpha^۳+\alpha^۲+\alpha^۴+\alpha^۵+\alpha^۳+\alpha^۵+\alpha^۶)(۱+\alpha^۲+\alpha^۳) \\
&= (۱+\alpha+\alpha^۳)(۱+\alpha^۲+\alpha^۳) \\
&= ۱+\alpha^۲+\alpha^۳+\alpha+\alpha^۳+\alpha^۴+\alpha^۴+\alpha^۶+\alpha^۷ \\
&= ۱+\alpha^۲+\alpha+\alpha^۶+\alpha^۷ \\
&= ۱.
\end{aligned}
$$

به این ترتیب، $۱+\alpha^۲+\alpha^۳ \in U(R)$. در نتیجه، $(۱+\alpha^۲+\alpha^۳)^۵ = ۱$. اما چون $(۳,۵) = ۱$، باید داشته باشیم $۱+\alpha^۲+\alpha^۳ = ۱$. پس، $\alpha^۲(۱+\alpha) = ۰$ و در نتیجه، $\alpha = ۱$ که تناقض است.

۲.۳۲ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۸۷/۲/۱۹

پاسخ ۱.۲.۳۲. به روش برهان خلف، فرض کنید گروهی مانند G با این خاصیت موجود باشد. بنابراین، گروه $\frac{G}{Z(G)}$ زیرگروه سره ندارد و در نتیجه، دوری است. پس، G آبلی است، یعنی، $G = Z(G)$، که با بیشین بودن $Z(G)$ تناقض دارد.

راه‌حل دوم: به روش برهان خلف، فرض کنید گروهی مانند G با این خاصیت موجود باشد. چون $Z(G)$ زیرگروه سره است، پس، $a \in G$ را چنان می‌گیریم که در مرکز G نباشد. بنابراین، $C(a)$،مرکزساز a، اکیداً شامل $Z(G)$ است. بنابراین، $C(a) = G$ و در نتیجه، $a \in Z(G)$ که تناقضی آشکار است.

پاسخ ۲.۲.۳۲. اگر f پیوسته یکنواخت باشد، آن‌گاه $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $d(x,y) < \delta$، آن‌گاه $|f(x)-f(y)| < \frac{۱}{۲}$. پس، برای هر $a \in A$ و $b \notin A$ چون $f(a)-f(b) = ۱$، پس، $d(a,b) \geq \delta$. در نتیجه، $\inf\{d(a,b); a \in A\ b \notin A\} \geq \delta > 0$.

بالعکس، با انتخاب $\delta = \inf\{d(a,b); a \in A, b \notin A\}$ ملاحظه می‌شود که برای هر $\varepsilon > ۰$، اگر $d(x,y) < \delta$، آن‌گاه $|f(x)-f(y)| = ۰ < \varepsilon$.

پاسخ ۳.۲.۳۲. دنباله $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_n, a_{n+۱}$ با ویژگی ذکر شده را C_n می‌نامیم.

الف) قرار می‌دهیم $a_j = \max\{a_i : ۱ \le i \le n\}$. در این صورت $a_j \ge a_{j-۱}$ و $a_j \ge a_{j+۱}$. این دو نابرابری و عبارت $a_j \mid a_{j-۱} + a_{j+۱}$ نتیجه می‌دهد که یا $a_j = a_{j-۱} + a_{j+۱}$ و یا $a_{j-۱} = a_j = a_{j+۱}$. در حالت اخیر $j \ne ۱$ و از $a_{j-۱} | a_{j-۲} + a_j$ نتیجه می‌شود که $a_j | a_{j-۲}$. با به کاربردن مکرر همین استدلال به $a_j | ۱$ می‌رسیم که با $a_j > ۱$ متناقض است.

ب) توجه کنید که با حذف a_j از یک دنباله $\{C_n\}$ با $n \ge ۲$، به یک دنباله $\{C_{n-۱}\}$ می‌رسیم. برای اثبات این مطلب با توجه به سه حالت $j = ۱$، $j = n$ و $۱ < j < n$، باید برقراری یک یا هر دو عبارت

$$a_{j+۱} | a_{j-۱} + a_{j+۲} \quad \text{و} \quad a_{j-۱} | a_{j-۲} + a_{j+۱}$$

را بررسی کنیم که با توجه به خصوصیات C_n و $a_j = a_{j-۱} + a_{j+۱}$ به‌دست می‌آیند. بنابراین، با حذف پیاپی بزرگترین جملات به یک دنباله $C_۱$ به صورت $۱, b, ۱$ می‌رسیم که در آن b باید برابر با ۲ باشد.

پاسخ ۴.۲.۳۲. فرض کنید n جوابی برای مسأله باشد و $۲^a p_۱^{a_۱} \cdots p_k^{a_k}$ را تجزیه n به عوامل اول متمایز بگیرید. اگر برای یک $۱ \le i \le k$ داشته باشیم $a_i > ۱$، آن‌گاه p_i، هم $\phi(n)$ و هم n را می‌شمارد. در نتیجه، $p_i | ۲$ که ممکن نیست. پس، برای هر i، $a_i = ۱$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $a \in \{۰, ۱, ۲\}$. اکنون توجه کنید $۲^k | \sigma(n)$ و $۲^k | \phi(n)$، پس، $۲^k | ۲$ و در نتیجه، $k \in \{۰, ۱\}$. بنابراین، n یا برابر با ۲ یا برابر با ۴ است و یا عدد اول p وجود دارد به‌طوری‌که یا $n = p$، یا $n = ۲p$ و یا $n = ۴p$.
اگر $n = ۲p$، پس، $۲ \overset{p-۱}{\equiv} ۶p(p+۱)$ و از آنجا که $۶p(p+۱) - ۲ = (۶p + ۱۲)(p-۱) + ۱۰$، باید $p - ۱$ مقسوم‌علیهی از ۱۰ باشد و در نتیجه، $n \in \{۶, ۲۲\}$. حالت $n = ۴p$ هم ممکن نیست چرا که در این صورت $۴ | \phi(n)$ و $۴ | n$، پس، $۴ | ۲$ که ممکن نیست. بنابراین، یا n عددی اول است و یا برابر با یکی از اعداد ۱، ۴، ۶ یا ۲۲ است.

پاسخ ۵.۲.۳۲. سؤالات را از یک تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و یک بارم‌دهی را با $(w_۱, w_۲, \cdots, w_n)$ نمایش می‌دهیم که $w_i \in \{۱, ۲, \cdots, ۲n\}$.

پیش‌آمد A را این بگیرید که دست‌کم دو نفر بیشترین نمره را گرفته باشند و پیش‌آمد A_i را این بگیرید که دو نفر با امتیاز بیشینه موجود باشند که یکی سؤال iام را حل کرده باشد و دیگری سؤال iام را حل نکرده باشد.

روشن است که $A = \cup_{i=۱}^{n} A_i$. زیرا اولاً $A_i \subseteq A$، ثانیاً اگر دو نفر در یک بارم‌دهی بیشینه شده باشند، به دلیل فرض مسأله، دست‌کم در یک سؤال با هم اختلاف دارند. پس،

$$P(A) = P(\cup_{i=۱}^{n} A_i) \leq \sum_{i=۱}^{n} P(A_i).$$

اکنون نشان می‌دهیم برای هر i، $P(A_i) \leq \frac{۱}{۲n}$.

لم. اگر $(w_۱, \cdots, w_i, \cdots, w_n), (w_۱, \cdots, w'_i, \cdots, w_n) \in A_i$، آن‌گاه $w_i = w'_i$.

اثبات لم. فرض کنید $w_i < w'_i$. برای حالتی که بارم سؤال iام w_i است، کسانی که بیشترین نمره را گرفته‌اند، دو دسته‌اند. آن‌هایی که سؤال i را حل کرده‌اند و آن‌هایی که حل نکرده‌اند. وقتی بارم این سؤال به w'_i افزایش پیدا کند این افراد منحصر به آن‌هایی می‌شوند که سؤال i را حل کرده‌اند و شخص دیگری که دارای بیشترین نمره باشد، وجود ندارد که سؤال i را حل نکرده باشد که این خلاف فرض است.

از این لم نتیجه می‌شود که با انتخاب تمام w_jها به غیر از iامی، حداکثر یک w_i وجود دارد که $(w_۱, \cdots, w_i, \cdots, w_n) \in A_i$ و در نتیجه،

$$P(A_i) \leq \frac{(۲n)^{n-۱}}{(۲n)^n} = \frac{۱}{۲n}.$$

بنابراین، $P(A) \leq n\frac{۱}{۲n} = \frac{۱}{۲}$. پس، احتمال این که دقیقاً یک نفر دارای بیشترین نمره باشد دست‌کم $\frac{۱}{۲}$ است.

پاسخ ۶.۲.۳۲. به ازای یک عدد طبیعی n، مربع $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ را به $n^۲$ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم. در رئوس این تقسیم‌بندی $m = (n+۱)^۲$ نقطه به وجود می‌آید که آن‌ها را $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$ و x_m می‌نامیم. واضح است که اگر $i \neq j$، آن‌گاه

$$|x_i - x_j| \geq \frac{۱}{n}.$$

با توجه به پوشا بودن γ به ازای هر i عدد $t_i \in [۰, ۱]$ وجود دارد که $x_i = \gamma(t_i)$.

بنابراین، برای هر $i \neq j$،

$$M|t_i - t_j|^{\alpha} \geq |\gamma(t_i) - \gamma(t_j)| = |x_i - x_j| \geq \frac{۱}{n}.$$

در نتیجه، t_i ها $(n+۱)^۲$ نقطه متمایز در $[۰,۱]$ هستند که فاصله هر دوتایشان دست‌کم $(Mn)^{\frac{-۱}{\alpha}}$ است.
این نتیجه می‌دهد که

$$((n+۱)^۲-۱)(Mn)^{\frac{-۱}{\alpha}} \leq ۱.$$

در نتیجه،

$$n^{۲-\frac{۱}{\alpha}} \leq M^{\frac{۱}{\alpha}}.$$

برقراری این نابرابری برای هر n نتیجه می‌دهد که توان سمت چپ نمی‌تواند مثبت باشد و این نتیجه می‌دهد که $\alpha \leq \frac{۱}{۲}$.

سی‌وسومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۳ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۸۸/۲/۱۶

پاسخ ۱.۱.۳۳. به برهان خلف، فرض کنیم A بسته نباشد. پس، دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ در A موجود است که به نقطه‌ای مانند $x \notin A$ همگراست. مجموعه $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان نشان داد که این مجموعه فشرده است. بنابراین، با توجه به فرض مسأله، می‌توان گفت که $A \cap K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ بسته است. حال چون x یک نقطه چسبیدگی برای مجموعه اخیر است، نتیجه می‌گیریم که $x \in A \cap K \subseteq A$ که ممکن نیست.

پاسخ ۲.۱.۳۳. (ب $\Leftarrow$ الف) فرض کنید $a, b \in G$. از آنجا که $\langle ab \rangle$، زیرگروه دوری تولید شده توسط ab، در G نرمال است پس، $ba = b(ab)b^{-۱} \in \langle ab \rangle$، یعنی، عدد صحیح m وجود دارد که $(ab)^m = ba$.
(الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنید H زیرگروه دلخواهی از G بوده، $h \in H$ و $g \in G$. طبق (ب)، عدد صحیح m وجود دارد که $ghg^{-۱} = (g^{-۱}gh)^m = h^m \in H$. پس، H نرمال است.

پاسخ ۳.۱.۳۳.

$$\prod_{k=۰}^{n-۱}(۲^n - ۲^k) = \prod_{k=۰}^{n-۱} ۲^k(۲^{n-k} - ۱) = ۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}} \prod_{k=۱}^{n}(۲^k - ۱). \qquad (*)$$

برای اثبات، کافی است نشان دهیم برای هر عدد اول $p \leq n$، توان p در تجزیه $n!$ از توان p در تجزیه $(*)$

کمتر است. برای $n = ۱, ۲$ حکم واضح است فرض کنید $n \geq ۳$، اگر $p = ۲$، توان ۲ در $n!$ برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{۲^k}\right] \leq \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^k} = n \leq \frac{n(n-۱)}{۲}.$$

اگر $p > ۲$، توان p در تجزیه $n!$ برابر با $\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$ است. برای تخمین توان p در $(*)$، طبق قضیه فرما، $۲^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$. همچنین $۲^{t(p-۱)} \overset{p}{\equiv} ۱$. تعداد tهایی که به ازای آنها $t(p-۱) \leq n$ برابر با $\left[\frac{n}{p-۱}\right]$ است. بنابراین، حداقل $\left[\frac{n}{p-۱}\right]$ تا از $(۲^k - ۱)$ها که در $(*)$ ظاهر شده است بر p بخش‌پذیر هستند. پس، توان p در $(*)$ بزرگتر یا مساوی $\left[\frac{n}{p-۱}\right]$ است. اما

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leq \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{n}{p^k} \leq \frac{n}{p-۱}.$$

چون سمت چپ یک عدد صحیح است، پس، از $\left[\frac{n}{p-۱}\right]$ نیز کمتر یا مساوی است و این حکم را ثابت می‌کند.
راه حل دوم: تعداد ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ روی $\mathbb{Z}_۲$ برابر است با $\prod_{k=۰}^{n-۱}(۲^n - ۲^k)$. زیرا سطر اول $۲^n - ۱$ حالت دارد، سطر دوم که مستقل از سطر اول باید باشد، $۲^n - ۲^۱$ حالت و به همین ترتیب سطر $(k+۱)$ام که ترکیب خطی سطرهای اول تا kام نیست $(۲^n - ۲^k)$ حالت می تواند نداشته باشد. حال تعداد اعضای ماتریس‌های جایگشتی، یعنی، آنهایی که در هر سطر و ستون دقیقاً یک ۱ و $n-۱$ صفر دارند $n!$ است. اما ماتریس‌های جایگشتی تشکیل یک زیرگروه از ماتریس‌های وارون‌پذیر می‌دهند و طبق قضیه لاگرانژ حکم ثابت است.

پاسخ ۴.۱.۳۳. فرض کنیم x عضو پوچتوانی در R باشد. اعضای خودتوان $e_۱, e_۲, \cdots, e_n$ را چنان می‌گیریم که $۱ - x = e_۱e_۲\cdots e_n$. پس، $(۱-e_۱)(۱-x) = ۰$. اما $۱ - x$ وارون‌پذیر است و در نتیجه، $e_۱ = ۱$. بنابراین، $۱ - x = e_۲\cdots e_n$. با تکرار استدلال قبل، نتیجه می‌شود که $e_۲ = \cdots = e_n = ۱$. پس، $۱ - x = ۱$ و در نتیجه، $x = ۰$، یعنی، R عضو پوچتوانی به جز صفر ندارد. حال اگر e خود توان باشد، آن‌گاه برای هر x داریم $(ex - exe)^۲ = ۰$، و از این رو $ex = exe$. به طور مشابه $xe = exe$ و در نتیجه، $ex = xe$، یعنی، اعضای خودتوان در مرکز R قرار دارند. چون هر عضو، حاصلضرب تعدادی عضو خودتوان است، پس، R جابه‌جایی است.

پاسخ ۵.۱.۳۳. فرض کنید M یک کران بالای $|f|$ باشد. گردایه S را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$S=\left\{(g,B)\;\middle|\; g|_{\mathbb{C}\setminus A}=f\text{، }B\subseteq A\text{ بسته، }|g|\leq M\text{ و }g:\mathbb{C}\setminus B\to\mathbb{C}\text{ تحلیلی است}\right\}.$$

این مجموعه را می‌توان با رابطه ترتیب زیر به طور جزئی مرتب کرد:

$$(g,B)\trianglelefteq(h,C)\iff(C\subseteq B\text{ و }h\text{ توسعه }g\text{ است}).$$

نشان می‌دهیم که $(S,\trianglelefteq)$ شرایط لم زُرن را دارد. فرض کنید $\{(g_\alpha,B_\alpha)|\alpha\in I\}$ زنجیری در S باشد. اگر B^* را برابر $\cap B_\alpha$ بگیریم، این مجموعه بسته و مشمول در A است. تابع g^* هم روی B^* به طور طبیعی تعریف می‌شود. اگر $z\in B^*$، آن‌گاه $\alpha\in I$ وجود دارد که $z\in B_\alpha$. $g^*(z)$ را برابر $g_\alpha(z)$ می‌گیریم و با توجه به زنجیر بودن مجموعه انتخاب‌شده، خوش‌تعریفی تضمین شده است. پس، (g^*,B^*) یک کران بالا برای زنجیر مورد بحث است. به‌علاوه، $(f,A)\in S$. بنابراین، S ناتهی است.
پس، طبق لم زُرن، S یک عضو بیشین دارد. اگر (h,C) عضو بیشین S باشد، C باید تهی باشد، زیرا در غیر این صورت C مجموعه بسته شمارا و ناتهی است که لزوماً شامل یک نقطه تنهاست. چون h کران‌دار است تکینگی آن در این نقطه رفع‌شدنی است و این با بیشین بودن (h,C) در تناقض است.
پس، $C=\phi$، یعنی، h روی تمام $\mathbb{C}$ تعریف شده و کران‌دار است. پس، طبق قضیه لیوویل، h ثابت است. لذا، f نیز تابعی ثابت است.

پاسخ ۶.۱.۳۳. ابتدا نشان می‌دهیم که λ جوابی از مسئله است اگر و تنها اگر همه اعضای دنباله $\{s_n\}_{n=۰}^{\infty}$ که از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند مثبت باشند:

$$s_{n+۱}=\lambda s_n-۲s_{n-۱}\text{،}\quad s_۰=۱\quad\text{و}\quad s_۱=\lambda.\quad(*)$$

برای اثبات ادعا، تابعی که به هر گره، عددی نسبت می‌دهد را با f و یکی از گره‌های شبکه را به دلخواه انتخاب کرده و o می‌نامیم. به‌علاوه، با ضرب کردن f در عددی مثبت، فرض می‌کنیم $f(o)=۱$. اکنون اگر قرار دهیم $s_n=\sum\limits_{d(x,o)=n}f(x)$، به راحتی می‌توان دید که $\{s_n\}$ دنباله‌ای مثبت است که در $(*)$ صدق می‌کند.
بر عکس اگر $\{s_n\}$ جوابی مثبت برای $(*)$ باشد، کافی است قرار دهیم: $f(o)=۱$. اگر $d(x,o)=n>۰$،

داریم $f(x)=\frac{s_n}{۳\times ۲^{n-۱}}$. حال ثابت می‌کنیم که جواب $(*)$ مثبت است اگر و تنها اگر $\lambda \geq \sqrt{۸}$. قرار دهید $u_n=\frac{s_n}{\sqrt{۲}^n}$. در این صورت اگر $\mu=\frac{\lambda}{\sqrt{۲}}$، خواهیم داشت

$$u_{n+۱}=\mu u_n-u_{n-۱} \quad u_\circ=۱, u_۱=\mu \quad (**).$$

اکنون به‌راحتی با استقرا ثابت می‌شود که اگر $\mu \geq ۲$، $\{u_n\}$ دنباله‌ای صعودی و بنابراین، مثبت خواهد شد. و از طرف دیگر اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای با اعضای مثبت باشد، قرار می‌دهیم $t_n=\frac{u_{n+۱}}{u_n}$، در این صورت، اولاً $\mu > t_n > \circ$ و ثانیاً $\mu = t_{n+۱}+\frac{۱}{t_n}$. بنابراین، $t_{n+1}-t_n=\frac{1}{t_{n-1}}-\frac{1}{t_n}$. پس، با استقرا، $\{t_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و کران‌دار است. بنابراین، حدی چون t دارد. اما در این صورت $\mu=t+\frac{۱}{t}$، پس، $\mu \geq ۲$ و این نتیجه می‌دهد که $\lambda \geq \sqrt{۸}$.

۲.۳۳ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۸۸/۲/۱۷

پاسخ ۱.۲.۳۳. روش هندسی: فرض کنید این طور نباشد، بنابراین، همه A_i ها خارج گوی به شعاع ۱ و به مرکز G واقع‌اند. پس، اگر صفحه‌ای که از فصل مشترک این گوی و گوی واحد می‌گذرد را با π نشان دهیم، A_iها هم در سمتی از π که G قرار ندارد، واقع‌اند ولی در این صورت G که مرکز ثقل آن‌ها است، نمی‌تواند در طرف دیگر π باشد.
روش جبری: به راحتی می‌توان دید که تابع $f(x)=\sum_{i=۱}^{n}|X-A_i|^۲$ کمینه خود را در مرکز ثقل نقاط $A_۱,\dots,A_n$ اتخاذ می‌کند، زیرا در نقطه کمینه داریم $O=\nabla f(x)=۲\sum_{i=۱}^{n}(X-A_i)$. در نتیجه، $X=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}A_i=G$. اما چون A_iها درون گوی واحد هستند، داریم $f(O)<n$. پس، $f(G)<n$، بنابراین، i ای وجود دارد که $|G-A_i|^۲ \leq ۱$.

پاسخ ۲.۲.۳۳. تابع $F:\mathbb{R}^۲\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x,r)=\iint_{D_r(x)} f.$$

که در آن $D_r(x)$ قرص به مرکز x و به شعاع r است. واضح است که $F(x,\circ)=\circ$ و $F(x,\infty)=۱$.
پس، برای هر x، $R_x>\circ$ ای وجود دارد که $F(x,R_x)>\frac{۱}{۲}$. مؤلفه دوم تابع را موقتاً به بازه $[\circ,R_x]$ محدود می‌کنیم. f پیوسته است، پس، روی $D_{R_x}(x)$ کران‌دار است. پس، $M>\circ$ ای وجود دارد که اگر $|x|\le R_x$، آن‌گاه $f(x)\le M_x$. برای $\circ\le r<r'\le R_x$، داریم

$$\circ\le F(\circ,r')-F(\circ,r)=\iint_{D_r(\circ)\setminus D_r(\circ)} f\le M_x\pi(r'^{۲}-r^{۲})\le ۲R_xM_x\pi(r'-r).$$

پس، برای هر x ثابت، $F(x,r)$ برحسب r پیوسته است و با توجه به این که

$$F(x,\circ)=\circ<\frac{۱}{۲}<F(x,R_x)$$

طبق قضیه مقدار میانی $r_x>\circ$ وجود دارد که $F(x,r_x)=\frac{۱}{۲}$. لذا، دست‌کم یک قرص وجود دارد که انتگرال f روی آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. اکنون همه چنین قرص‌هایی با شعاع کم‌تر یا مساوی $r_\circ$ را در نظر بگیرید. اگر تعداد قرص‌های مورد بحث متناهی باشد که مسأله کوچک‌ترین قرص بدیهی است. در غیر این صورت، ممکن نیست که سه تا از این قرص‌ها دو به دو از هم جدا باشند زیرا انتگرال f روی اجتماع این سه قرص $\frac{۳}{۲}$ خواهد شد. اگر همه این قرص‌ها $D_{r_\circ}(\circ)$ را قطع کنند که همه زیرمجموعه $D_{۳r_\circ}(\circ)$ هستند. اگر یکی از این قرص‌ها$D_{r_\circ}(\circ)$ را قطع نکند، هر قرص دیگری باید دست کم یکی از این دو قرص را قطع کند. پس، در هر صورت $R^*>\circ$ ای وجود دارد که همه این قرص‌ها زیرمجموعه $D_{R^*}(\circ)$ هستند.
فرض کنید برای $|x|\le R^*$، داشته باشیم $f(x)\le M^*$. نشان می‌دهیم F روی مجموعه فشرده

$$A=[\circ,r_\circ]\times\left\{x\in\mathbb{R}^{۲}\ \middle|\ |x|\le R^*\right\}$$

پیوسته است. اگر $|x|,|y|\le\mathbb{R}^*$ و $\circ\le r,s\le r_\circ$، آن‌گاه

$$|F(x,r)-F(y,s)|\le\iint_{D_r(x)\Delta D_s(y)} f\le M^*S$$

که در آن S، برابر مساحت $D_r(x)\Delta D_s(y)$ است. واضح است که وقتی $y\to x$ و $s\to r$، مساحت تفاضل متقارن $D_r(x)\Delta D_s(y)$ به صفر میل می‌کند و در نتیجه $F(y,s)$ هم به $F(x,r)$ میل می‌کند. لذا، F پیوسته است.

قرار می‌دهیم

$$K=\left\{r\in[\circ,r_\circ]\;\middle|\;\exists x;(x,r)\in A, F(x,r)=\frac{۱}{۲}\right\}.$$

این مجموعه فشرده و شامل $r_\circ$ است زیرا $F(\circ,r_\circ)=\frac{۱}{۲}$. پس، کوچک‌ترین عضو دارد و اگر $r^*=\min K$، آن‌گاه x^*ای وجود دارد که $F(x^*,r^*)=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه، $D=D_{r^*}(x^*)$ و این همان است که می‌خواستیم.

پاسخ ۳.۲.۳۳.

$$\begin{pmatrix} b & a\\ d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & a\\ \circ & -۱\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -۱ & \circ\\ d & ۱\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \circ & ۱\\ ۱ & c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -۱\\ -۱ & \circ\end{pmatrix}$$

واضح است که ماتریس‌های نوشته شده در سمت راست رابطه بالا همگی وارون‌پذیر هستند.

(یادداشت: کافی است که F حلقه‌ای یکدار باشد.)

پاسخ ۴.۲.۳۳. ثابت می‌کنیم برای حالت n دانشجو که $n\geq ۳$، این احتمال برابر $\frac{۱}{۳}$ است. فرض کنید p_n احتمال مربوط باشد. به راحتی دیده می‌شود که $p_3=\frac{1}{3}$. برای حالت n دانشجو، فرض کنید نفر اول جای صندلی نفر kام ($۲\leq k\leq n-۲$) بنشیند. احتمال این پیشامد $\frac{۱}{n}$ است. حال نفرات دوم تا $(k-1)$ام در جای خود می‌نشینند و نفر kام یک صندلی از بین $n-k+۱$ صندلی خالی به تصادف انتخاب می‌کند. بنابراین، برای $۲\leq k\leq n-۲$ با شرط این که نفر اول جای نفر kام بنشیند، احتمال این که دو نفر آخر سر جای خود بنشینند برابر با p_{n-k} است. برای $k=۱$ این احتمال ۱ است و برای $k=n-۱,n$ این احتمال صفر است. پس،

$$\begin{aligned} p_n&=\frac{۱}{n}\times ۱+\frac{۱}{n}p_{n-۱}+\frac{۱}{n}p_{n-۲}+\ldots+\frac{۱}{n}p_۳+\frac{۱}{n}\times\circ+\frac{۱}{n}\times\circ\\ &=\frac{۱}{n}(۱+p_{n-۱}+\ldots+p_۳).\end{aligned}$$

حال با استقرای قوی روی n با توجه به این که $p_۳=\frac{۱}{۳}$، ثابت می‌کنیم $p_n=\frac{۱}{۳}$. با فرض

$p_۳ = p_۴ = \ldots = p_{n-۱} = \frac{۱}{۳}$، داریم

$$p_n = \frac{۱}{n}\left(۱ + \frac{n-۳}{۳}\right) = \frac{۱}{۳}.$$

پاسخ ۵.۲.۳۳. لم. در یک فضای متریک مرکزی هر مثلث متساوی‌الساقین است و ساق، ضلع بزرگ‌تر است.
اثبات لم. فرض کنید $a,b,c \in X$. مجموعه $A = \{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. داریم $\mathrm{diam(A)} = \mathrm{rad(A)}$. می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{diam(A)} = \mathrm{d(a,b)}$. به خروج مرکز A در نقطه c توجه کنید $\mathrm{ecc(c)} = \max\{\mathrm{d(c,a)}, \mathrm{d(c,b)}\}$. با توجه به تعریف شعاع، داریم $\mathrm{ecc(c)} \geq \mathrm{rad(A)}$. در نتیجه، $\max\{d(c,a), d(c,b)\} \geq d(a,b)$. به‌علاوه، می‌دانیم که $d(a,b)$ بزرگ‌ترین فاصله در A است، پس، یکی از اعداد $d(c,a)$ و $d(c,b)$ با $d(a,b)$ برابر است و دیگری کوچک‌تر یا مساوی $d(a,b)$ است. به‌این‌ترتیب، لم اثبات شد.

اثبات الف): فرض کنید $y \in C_r(x)$. پس، $d(x,y) = r$. باید نشان دهیم که y نقطه درونی $C_r(x)$ است. $N_r(y)$، یعنی، گوی باز به شعاع r و به مرکز y، را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم $N_r(y) \subseteq C_r(x)$. فرض کنید $z \in N_r(y)$. پس، $d(z,y) < r$. با توجه به سه نقطه x، y و z و این که $d(z,y) < d(x,y)$ و با استفاده از لم، داریم $d(x,z) = r$. پس، $z \in C_r(x)$. بنابراین، باز بودن $C_r(x)$ ثابت شد.
اثبات ب): فرض کنید a و b دو عضو متمایز X باشند. r را عددی مثبت و کم‌تر از $\frac{۱}{۲}d(a,b)$ بگیرید. در این صورت $N_r(a) \cup C_r(a)$ شامل a است و b عضو آن نیست. به‌علاوه، به دلیل لم، این مجموعه باز است و به وضوح بسته نیز هست. پس، X ناهمبند است.

پاسخ ۶.۲.۳۳. می دانیم که $G' \trianglelefteq G$. چون G' آبلی است، داریم $|G'| < \infty$. حال ایده حل مسأله این است که بین زیرگروه‌های نرمال و آبلی و شامل G' که البته G' یکی از آن‌ها است یک عنصر بیشین پیدا کنیم با استفاده از متناهی بودن این زیرگروه، مسأله را حل کنیم. برای این کار تعریف می‌کنیم:

$$X = \left\{H < G \;\middle|\; G' \subseteq H \text{ و } \text{آبلی و نرمال است } H\right\}.$$

چون $G' \in X$، پس، $X \neq \phi$. حال با استفاده از لم زُرن نشان می‌دهیم X دارای عنصری بیشین است. فرض کنید $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ زنجیری در X باشد که رابطه ترتیب در نظر گرفته شده، همان رابطه شمول است.

به راحتی می‌توان دید $\cup_{\alpha\in I}H_\alpha$ آبلی و نرمال است. پس، X دارای عنصری بیشین مانند H است. H نرمال و آبلی است. پس، طبق فرض مسأله متناهی می‌باشد. حال مرکزساز H، یعنی، $C(H)$ را در نظر می‌گیریم. چون Hآبلی است، داریم $H\subseteq C(H)$. نشان می‌دهیم $H=C(H)$. اگر $g\in C(H)\backslash H$، آن‌گاه به‌راحتی می‌توان نشان داد $\langle g,H\rangle$ یک زیرگروه نرمال و آبلی G است که اکیداً شامل H می‌باشد. اما این با بیشین بودن H تناقض دارد.

پس، $H=C(H)$. می‌دانیم $\frac{N(H)}{C(H)}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut(H)}$ یکریخت است که $N(H)$ نرمال ساز H در G است. چون $N(H)=G$ و $C(H)=H$، پس، $\frac{G}{H}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut(G)}$ یکریخت است. چون H متناهی است، $\mathrm{Aut(H)}$ هم متناهی است، در نتیجه، $\frac{G}{H}$ هم متناهی است که متناهی بودن G را نتیجه می‌دهد.

سی‌وچهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۴ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۸۹/۲/۱

پاسخ ۱.۱.۳۴. با قراردادن $x=y=e$ در فرض مسأله تساوی $f(e)=f(f(e))$ را به دست می‌آوریم. بنابراین،

$$f(f(e))=f(f(f(e))).$$

در نتیجه، $f(e)=f(f(f(e)))=f(ef(f(e)))=f(e)f(e)$. پس، $f(e)=e$. حال با قرار دادن $x=e$ در فرض مسأله، رابطه $f(f(y))=y$ به دست می‌آید که خود بیانگر دوسویی بودن f است. به‌علاوه، برای هر $x,y\in G$ داریم

$$f(xy)=f(xf(f(y)))=f(x)f(y).$$

پس، f همریختی است.

پاسخ ۲.۱.۳۴. فرض کنید S مجموعه نقاط تنهای X باشد. اگر S در X چگال نباشد، نقطه $a\in X$ و یک همسایگی از آن مانند B وجود دارد که $B\cap S=\phi$. دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ چنان انتخاب کنید که اولاً همه اعضای آن در B باشد، ثانیاً همه نقاط آن مخالف a باشند و ثالثاً $x_n\to a$. با توجه به این که a نقطه تنها نیست، این کار ممکن است.

ادعا می‌کنیم $A=X\setminus\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ یک زیرمجموعه چگال X است. کافی است نشان دهیم برای هر

$k \in \mathbb{N}$، x_k یک نقطه حدی A است.

چون x_n ها در S نیستند، می‌توان با دنباله‌ای از نقاط X مانند $\{y_n\}$ به x_k میل کرد. با توجه به این که $x_n \to a$ و $a \neq x_k$، می‌توان دنباله $\{y_n\}$ را طوری انتخاب کرد که نقاطش غیر از نقاط دنباله $\{x_n\}$ باشد.

در نتیجه، جملات دنباله $\{y_n\}$ در A هستند و لذا، $x_k \in \bar{A}$.

پس، ثابت کردیم که A چگال است و لذا، طبق فرض مسأله A باز است. این یک تناقض به‌دست‌می‌دهد، زیرا A^c مجموعه نقاط دنباله $\{x_n\}$ است که حد آن، یعنی، a، در A^c نیست. در نتیجه، A^c بسته نیست. این متناقض با باز بودن A است.

پاسخ ۳.۱.۳۴. فرض کنید فاصله مورچه تا لانه به بی‌نهایت میل نکند. این بدان معنی است که مجموعه کران‌دار A از شبکه وجود دارد که مورچه نامتناهی مرتبه به آن باز می‌گردد. تعداد نقاط A متناهی است، بنابراین، نقطه‌ای مانند a وجود دارد که مورچه بی‌نهایت بار از آن گذر می‌کند. چون جهت پیکان خارج شده از a در هر بار گذر $^\circ$۹۰ در جهت ساعتگرد تغییر می‌کند، مورچه از همه نقاط مجاور a نیز بی‌نهایت بار گذر می‌کند و با تکرار این استدلال مورچه از تمام نقاط شبکه بی‌نهایت مرتبه گذر می‌کند پس، به لانه‌اش می‌رسد.

پاسخ ۴.۱.۳۴. راه‌حل اول: قرار دهید $A_۰ = \{(۱, x, \dots, x^{n-۱}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ در این صورت $A_۰$ جواب مسأله است. برای این منظور کافی است توجه کنیم که اگر $V_۱ = (۱, x_۱, \dots, x_۱^{n-۱})$، $V_۲ = (۱, x_۲, \dots, x_۲^{n-۱})$، ... و $V_n = (۱, x_n, \dots, x_n^{n-۱})$، n عضو متمایز $A_۰$ باشند، آن‌گاه این n عضو مستقل خطی هستند. چون دترمینان ماتریسی که سطرهای آن به ترتیب $V_۱$، $V_۲$، ...، V_n می‌باشد عددی غیر صفر است، سطرهای این ماتریس مستقل خطی هستند.

راه‌حل دوم: قرار دهیم

$$X = \{A \mid A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ و هر زیرمجموعه } n \text{ عضوی } A \text{ مستقل خطی است}\}.$$

در این صورت X غیرتهی است و در شرایط لم زُرن صدق می‌کند. $A_۰$ را عضو بیشینی از X می‌گیریم. ادعا می‌کنیم $A_۰$ ناشمارا است که در این صورت $A_۰$ جواب مسأله است.

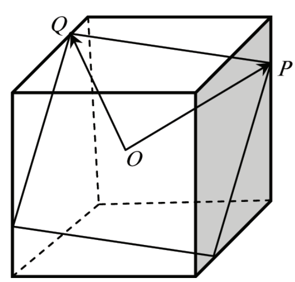
در غیر این صورت، فرض کنید $A_۰$ شمارا باشد. اگر $v \notin A_۰$، آن‌گاه چون $A_۰ \subsetneqq A_۰ \cup \{v\}$، عنصر v ترکیبی خطی از $n - ۱$ عضو $A_۰$ است.

بنابراین، هر بردار در $\mathbb{R}^n$ ترکیب خطی $n - ۱$ عضو $A_۰$ است و چون تعداد زیرمجموعه‌های $n - ۱$ عضوی

$A_\circ$ هم شمارا است پس، $\mathbb{R}^n$ برابر با اجتماع تعدادی شمارا ابرصفحه است که ممکن نیست.
(توجه کنید که صفحه اجتماع تعدادی شمارا خط نیست. همچنین فضا اجتماع تعدادی شمارا صفحه نیست.)

پاسخ ۵.۱.۳۴. فرض کنید f در نقطه‌ای مانند $x^* \in \mathbb{R}^۲$ پیوسته نباشد. در این صورت $\varepsilon > ۰$ و دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_n \to x^*$ و $|f(x_n) - f(x^*)| \geq \varepsilon$. برای هر $n \geq ۱$ پاره خطی که دو سر آن x_n و x^* است را در نظر بگیرید. این پاره‌خط یک مجموعه همبند است و لذا، تصویر آن تحت f که شامل دو نقطه $f(x_n)$ و $f(x^*)$ است نیز همبند است. توجه کنید که $|f(x_n) - f(x^*)| \geq \varepsilon$. پس، y_n ای روی پاره‌خط مذکور وجود دارد که $|f(y_n) - f(x^*)| = \frac{k}{k+۱}\varepsilon$.
اکنون به وضوح دنباله $\{y_k\}$ به x^* میل می‌کند. پس، مجموعه $\{x^*\} \cup \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ فشرده است و لذا، تصویر آن هم باید فشرده باشد. این ممکن نیست، زیرا $|f(x^*) - f(y_k)| \to \varepsilon$ و $\{y_k\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد که نمی‌تواند به هیچ کدام از نقاط $f(x^*)$ و $f(y_k)$ میل کند. پس، $f(\{x^*\} \cup \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\})$ بسته نیست و لذا، فشرده نیست.

پاسخ ۶.۱.۳۴. یک روش برای قراردادن مربعی به مساحت $\frac{۹}{۸}$ درون مکعب در شکل نشان داده شده است که رأس‌های مربع، اضلاع مکعب را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کنند.



پیش از ادامه، برای سادگی، در برخی محاسبات با یک تغییر مقیاس مکعب را به شکل $[-۱,۱]^۳$ و با طول ضلع ۲ فرض می‌کنیم. اکنون مسأله را در چند گام حل می‌کنیم:
گام اول: ادعا می‌کنیم که می‌توان مرکز مربع بیشین را منطبق بر مرکز مکعب و برابر با مبدأ مختصات O گرفت، زیرا اگر مربع را با S و بردار متصل کننده مرکز مربع به O را با $\vec{l}$ نشان دهیم، به دلیل تقارن مکعب $-S$ نیز درون مکعب قرار می‌گیرد. ولی $-S = S + ۲\vec{l}$، یعنی، S و $S + ۲\vec{l}$ درون مکعب واقع شده‌اند. پس، $S + ۲\vec{l}$ نیز درون مکعب است که مربع با ویژگی مطلوب ماست.

گام دوم: P، Q را برابر با دو رأس مجاور از مربع مورد نظر بگیرید. از شرایط مسأله روشن است که P و Q دو نقطه از مکعب $[-۱,۱]^3$ هستند که $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ و $\vec{P}\perp\vec{Q}$. بالعکس، اگر P و Q این ویژگی‌ها را داشته باشند P، Q، $-P$ و $-Q$ رأس‌های مربعی درون مکعب را تشکیل می‌دهند. پس، هدف یافتن چنین P، Q ای است که $|\vec{P}|$ بیشینه شود. اگر مختصات P و Q را به ترتیب (x,y,z) و (u,v,w) بنامیم، شرایط فوق به‌صورت‌زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+z^۲ = u^۲+v^۲+w^۲ \\ xu+yv+zw = ۰ \\ x,y,z,u,v,w \in [-۱,۱] \end{cases} \qquad (*)$$

و هدف یافتن مقدار $A = x^۲+y^۲+z^۲ = u^۲+v^۲+w^۲$ برای همه جواب های $(*)$ است. ادعا می‌کنیم این بیشینه برابر با $\frac{۹}{۴}$ است که به عنوان مثال به ازای $(x,y,z,u,v,w) = (۱,۱,\frac{۱}{۲},-۱,\frac{۱}{۲},۱)$ اختیار می‌شود.

گام سوم: نشان می‌دهیم که برای مربع بیشین با شرایط دو گام قبلی، یکی از P یا Q روی ضلع مکعب و دیگری بر وجه مکعب واقع است. ابتدا فرض کنید هیچ کدام از P و Q بر ضلعی از مکعب قرار نداشته باشند. در این صورت، ابتدا با دوران کوچکی حول $\vec{Q}$، P را به داخل مکعب و سپس با دوران کوچکی حول $\vec{P}$، Q را به داخل مکعب منتقل می‌کنیم. اکنون می‌توان هر دوی $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ را همزمان بزرگ‌تر کرد به‌طوری‌که هم‌چنان داخل مکعب باقی بمانند و این با بیشین بودن مربع در تناقض است. اکنون فرض کنید P بر روی ضلع مکعب باشد. اگر Q بر وجهی از مکعب نباشد، یعنی، اکیداً داخل مکعب است. پس، می‌توان در صفحه گذرنده از $\vec{P}$ و ضلعی که P بر آن واقع است با دوران کوچکی P را به داخل مکعب منتقل کرد به‌طوری‌که Q هم‌چنان درون مکعب بماند. بنابراین، مجدداً با بزرگ کردن همزمان P و Q به تناقض می‌رسیم.

نتیجه این است که می‌توان با در نظر گرفتن $-P$ به جای P و یا $-Q$ به جای Q، در صورت لزوم، در $(*)$ فرض کرد $x = y = ۱$ و نیز یکی از u، v و w نیز برابر با یک هستند.

این دو حالت را در گام بعد بررسی می‌کنیم.

گام چهارم: (حالت اول) $x = y = w = 1$. پس،

$$\begin{cases} 1+1+z^2 = u^2+v^2+1 (=A) \\ u+v+z = 0. \end{cases}$$

از معادله دوم داریم $z^2 = (u+v)^2$. به‌عبارت دیگر، $2+2uv = 1$، یعنی، $uv = \frac{-1}{2}$.
از معادله اول داریم $|u|,|v| \geq \frac{1}{2}$ و $A = |u|^2 + 1 + \frac{1}{4|u|^2}$. این عبارت بیشترین مقدار خود را برای $1 \leq |u|^2 \leq \frac{1}{2}$ در $|u| = \frac{1}{2}$ می‌گیرد که برابر با $\frac{9}{4}$ است.
(حالت دوم) $x = y = v = 1$ (حالت $x = y = u = 1$ مشابه است). داریم

$$\begin{cases} 1+1+z^2 = 1+u^2+w^2 (=A) \\ u+1+zw = 0. \end{cases}$$

از معادله دوم داریم

$$|zw| = |u+1| \Rightarrow z^2 \geq (zw)^2 \geq (u+1)^2.$$

از معادله اول داریم

$$\begin{aligned} 1+u^2+w^2 \geq 2+(1+u)^2 &\Rightarrow w^2 \geq 2(1+u) \\ &\Rightarrow |w|^2 \geq 2|1+u| = 2|zw| \\ &\Rightarrow |z| \leq \frac{|w|}{2} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow A \leq 2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

۲.۳۴ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۸۹/۲/۲

پاسخ ۱.۲.۳۴. می‌دانیم $A = v_۱ + v_۲ + \ldots + v_n = w_۱ + w_۲ + \ldots + w_n$. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

الف) $w_k \leqslant v_k$. داریم

$$w_۱ + w_۲ + \ldots + w_k \leqslant kw_k \leqslant kv_k \leqslant v_۱ + v_۲ + \ldots + v_k.$$

ب) $w_k > v_k$. داریم

$$\begin{aligned} w_۱ + w_۲ + \ldots + w_k &= A - (w_{k+۱} + \ldots + w_n) \\ &\leqslant A - (n-k)w_k \\ &\leqslant A - (n-k)v_k \\ &\leqslant A - (v_{k+۱} + \ldots + v_n) \\ &= v_۱ + v_۲ + \ldots + v_k. \end{aligned}$$

پاسخ ۲.۲.۳۴. ادعا می‌کنیم پاسخ مسأله، $c \leqslant ۰$ است. برای $c \leqslant ۰$، می‌توان تابع $f(x) = e^{۲x}$ را در نظر گرفت. اکنون اثبات می‌کنیم که برای $c > ۰$ هیچ تابعی مانند f که در شرایط مسأله صدق کند وجود ندارد. قرار می‌دهیم $g = f' - f$. پس، برای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم

$$g(x), g'(x) > c.$$

برای $y < x$ با توجه به قضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند $z \in (y,x)$ موجود است که

$$g(x) - g(y) = g'(z)(x-y) > c(x-y).$$

بنابراین،

$$g(x) - cx > -cy + g(y) > -cy + c = c(۱-y).$$

حال اگر x را ثابت فرض کنیم و y را به سمت $-\infty$ میل دهیم، به تناقض می‌رسیم، چون سمت چپ نامساوی

فوق مقداری ثابت است.

پاسخ ۳.۲.۳۴. راه حل اول: فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، $h \in H$، g عضو دلخواهی در G باشد. اگر $ghg^{-۱} = h$، آن‌گاه $ghg^{-۱} \in H$. در غیر این صورت، $ghg^{-۱} \neq h$، یعنی، g و h جابجا نمی‌شوند. پس، $g^۲ = h^۲$. همچنین h و $g^{-۱}$ هم جابجا نمی‌شوند. پس، $g^{-۲} = h^۲$. بنابراین، $g^۲ = g^{-۲}$ و در نتیجه، $g^۴ = e$.

به طور مشابه، چون g و h جابجا نمی‌شوند، g و $g^{-۱}h$ هم جابه‌جا نمی‌شوند و در نتیجه، $g^۲ = (g^{-۱}h)^۲ = g^{-۱}hg^{-۱}h$. با ضرب طرفین در $g^۲$ و استفاده از رابطه $g^۴ = e$ داریم $e = ghg^{-۱}h$. پس، $ghg^{-۱} = h^{-۱} \in H$. بنابراین، H نرمال است.

همچنین گروه چهارگان‌های همیلتونی $Q_۸ = \{\pm ۱, \pm i, \pm j, \pm k\}$ مثالی غیرآبلی از گروهی است که در شرط‌های مسأله صدق می‌کند.

راه حل دوم: به طور مشابه با راه‌حل اول، اگر g و h با هم جابه‌جا نشوند، آن‌گاه gh و h هم جابه‌جا نمی‌شوند. لذا، $(gh)^۲ = h^۲$. پس، $ghg = h$. بنابراین،

$$ghg^{-۱} = hg^{-۲} = h(g^۲)^{-۱} = hh^{-۲} = h^{-۱} \in H.$$

پس، H نرمال است.

پاسخ ۴.۲.۳۴. تابع $g(z) = \overline{f(\bar{z})} - f(z)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به بسط تیلور تابع f، می‌توان نتیجه گرفت که g نیز تحلیلی است.

اکنون تابع تحلیلی g روی زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $[۰, ۱]$ مانند A برابر ۰ است. با توجه به این که $[۰, ۱]$ فشرده است، A دارای نقطه‌ای حدی مانند $x_۰$ است. پس، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود است که $x_n \to x_۰$ و تابع تحلیلی g روی $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_۰\}$ برابر ۰ است. بنابراین، $g = ۰$. در نتیجه، $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ برای هر $z \in \mathbb{C}$. حال برای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم

$$f(x) = f(\bar{x}) = \overline{f(x)}.$$

بنابراین، $f(x) \in \mathbb{R}$.

پاسخ ۵.۲.۳۴. الف) چون هر m، ریشه همه $P_n(x)$ها برای $n \geqslant |m|$ می‌باشد، پس، $P_n(x)$ها شرط مسأله را دارا هستند. حال با برهان خلف، فرض کنید یک چندجمله‌ای درجه k مانند $Q(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\sum_{n=۱}^{\infty} P_n(x) = Q(x)$. فرض کنید $n_۰$ چنان باشد که $k - ۲ < \deg P_n = ۲n_۰ + ۱ \leqslant k$.
بنابراین،

$$\sum_{n_۰=n_۰+۱}^{\infty} P_n(x) = Q(x) - \sum_{n=۱}^{n_۰} P_n(x).$$

حال سمت راست تساوی یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر k است که حداکثر k ریشه دارد. ولی سمت چپ بیش از k ریشه دارد، زیرا اعداد $۰, ۱, ۲, \ldots, k$ ریشه‌های سمت چپ تساوی هستند.
ب) فرض کنید اعداد صحیح $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ ریشه‌های ابرچندجمله‌ای $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} P_n(x)$ باشند. برای هر عدد صحیح a، $P_n(a)$ها از جایی به بعد صفر هستند. بنابراین، برای هر دوعدد صحیح a و b عددی مانند N وجود دارد که برای $n > N$، $P_n(a) = P_n(b) = ۰$. بنابراین، چندجمله‌ای $P(x)$ وجود دارد به طوری که $P(a) = f(a)$ و $P(b) = f(b)$.
بنابراین، $b - a | f(b) - f(a)$. حال اگر برای $b \in \mathbb{Z}$، $f(b) \neq ۰$ چون برای هر j، $f(a_j) = ۰$ داریم $b - a_j | f(b)$. پس، $f(b)$ بر بی‌نهایت عدد بخش‌پذیر است که این ممکن نیست.

پاسخ ۶.۲.۳۴. الف) **راه حل اول:** مجموعه اعضای خودتوان R را با $B(R)$ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که هر ایده‌آل بیشین M حداقل نیمی از اعضای خودتوان را دارد. زیرا اگر $x = x^۲$، آن‌گاه $x(x-۱) = ۰$. پس، یا x یا $x - ۱$ عضو M هستند. بنابراین، $|M| \geqslant \frac{۱}{۲}|B(R)| > \frac{۱}{۲}\frac{۲}{۳}|R|$. لذا $|\frac{R}{M}| = |\frac{R}{M}| < ۳$، یعنی، $|\frac{R}{M}| = ۲$. پس، $۲(۱ + M) = M$. در نتیجه، $۲ \in M$، یعنی، $۲ \in J(R)$. حال از آنجا که $(۲ + B(R)) \cap B(R) \neq \varnothing$، اعضای خودتوان $e_۱$ و $e_۲$ وجود دارند که $۲ + e_۱ = e_۲$. داریم

$$\Rightarrow ۴ + ۴e_۱ + e_۱ = e_۲ = ۲ + e_۱$$
$$\Rightarrow ۲ + ۴e_۱ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(۱ + ۲e_۱) = ۰.$$

اما $۲ \in J(R)$. پس، $۱ + ۲e_۱$ وارون‌پذیر است. بنابراین، $۲ = ۰$. حال برای هر x دلخواه داریم $(x + B(R)) \cap B(R) \neq \varnothing$. لذا، $a, b \in B(R)$ وجود دارند که $x = a + b$. از آنجا که $-۱ = ۱$، داریم $x = a + b$. بنابراین، $x^۲ = a^۲ + b^۲ = a + b = x$. یعنی، x خودتوان است.

راه حل دوم: فرض کنیم مسأله درست نباشد و R را حلقه‌ای غیر بولی با کمترین تعداد خودتوان می‌گیریم که $|\frac{R}{B(R)}| < \frac{3}{2}$. اگر $e \neq 0, 1$ خودتوانی در R باشد، چون $R = Re \times R(1-e)$ پس، حداقل یکی از دو حلقه Re و $R(1-e)$ غیر بولی هستند، مثلاً Re، اما $|\frac{Re}{B(Re)}| \leqslant |\frac{R}{B(R)}| < \frac{3}{2}$ و تعداد خودتوان‌های Re حداقل یکی کمتر از تعداد خودتوان‌های R است (چون $1-e \notin Re$) که با انتخاب R تناقض دارد. بنابراین، $B(R) = \{0, 1\}$ و همچنین $|\frac{R}{B(R)}| < \frac{3}{2}$. پس، $|R| < 3$، یعنی، $|R| = 2$. در نتیجه، R بولی است که باز هم تناقض است.

راه حل سوم: فرض کنید n تعداد اعضای حلقه باشد و $B(R)$ را مجموعه اعضای خودتوان بگیرید. داریم

$$|B(R)| + |-B(R)| > \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n.$$

پس، $|B(R) \cap (-B(R))| > \frac{n}{3}$. x را عضوی دلخواه بگیرید. داریم

$$|x + [B(R) \cap (-B(R))]| + |B(R)| > \frac{n}{3} + \frac{2n}{3} = n.$$

که نتیجه می‌دهد

$$(x + [B(R) \cap (-B(R))]) \cap B(R) \neq \varnothing.$$

پس، عضو a وجود دارد که a و $-a$ و $x+a$ خودتوان هستند. داریم $a^2 = a$ و $(-a)^2 = (-a)$. در نتیجه، $a = -a$. بنابراین، $x + a = (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + a$، یا به‌عبارت‌دیگر، $x^2 = x$.

ب) به راحتی دیده می‌شود حلقه $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ یک جواب مسأله است که در آن $\mathbb{Z}_2$ها به تعداد k مرتبه در هم ضرب شده‌اند.

سی‌وپنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۵ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۰/۲/۱۴

پاسخ ۱.۱.۳۵. **راه‌حل اول:** ابتدا توجه کنید که در هر گروه، مرتبه یک عضو مانند x با مرتبه x^{-1} برابر است. پس، اگر $O(x) = k$، آن‌گاه $O(x^{-1}) = k$، یعنی، یا اعضای با مرتبه k به‌صورت جفت ظاهر می‌شوند (که امکان ندارد چون دقیقاً ۲۰۱۱ عضو با این خاصیت وجود ندارد) و یا این‌که برای یکی از این xها داریم $x^{-1} = x$. پس، $O(x) = ۲$، یعنی، مرتبه x و در نتیجه، k فقط می‌تواند ۲ باشد. از طرف دیگر $D_{۲۰۱۱}$ گروهی متناهی است که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو مرتبه ۲ دارد.

راه‌حل دوم: از آن‌جا که هر گروه دوری و k عضوی دارای $\phi(k)$ مولد است که این $\phi(k)$ مولد دارای مرتبه k هستند، به راحتی نتیجه می‌شود که تعداد اعضای از مرتبه k مضربی از $\phi(k)$ است، یعنی، $\phi(k)|۲۰۱۱$. اما $\phi(k)$ همواره زوج است، مگر این‌که $k = ۲$ و مانند حل بالا، $D_{۲۰۱۱}$ گروهی با خواص خواسته شده است.

پاسخ ۲.۱.۳۵. ابتدا نشان می‌دهیم $U \cup \{p\}$ بسته است. فرض کنیم $x \in \overline{U \cup \{p\}}$. بنابراین، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $U \cup \{p\}$ موجود است که $x_n \to x$. اگر برای بی‌نهایت n داشته باشیم $x_n = p$، آن‌گاه $x_n \to p$ و لذا، $x = p$. همچنین اگر از جایی به بعد $x_n \neq p$، آن‌گاه x_nها نهایتاً در U هستند ولذا $x \in \overline{U}$. در نتیجه، $x \notin V$ و لذا، $x \in U \cup \{p\}$.

حال تابع $f:X\to U\cup\{p\}$ را به صورت

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in U\cup\{p\} \\ \\ p & x\in V \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم این تابع پیوسته است. فرض کنیم y_n دنباله‌ای همگرا به y در X باشد. اگر برای بی‌نهایت n داشته باشیم $y_n\in V$، آن‌گاه $y\in\overline{V}$ و لذا، از جایی به بعد داریم $y_n\in V\cup\{p\}$. بنابراین، از جایی به بعد $f(y_n)=p$ و لذا، $f(y_n)\to p$. اما $f(y)=p$ زیرا $y\in V\cup\{p\}$.
اما اگر از جایی به بعد $y_n\notin V$، آن‌گاه از جایی به بعد $y_n\in U\cup\{p\}$ و چون f روی $U\cup\{p\}$ همانی است پس، $f(y_n)\to f(y)$.
f پیوسته و X همبند و فشرده است. پس، $U\cup\{p\}=f(X)$ نیز چنین است.

پاسخ ۳.۱.۳۵. چون R میدان است پس، $R[x]$ یک دامنه ایده‌آل‌های اصلی (P.I.D) است. پس، $S[x]$ هم دامنه ایده‌آل اصلی است و در نتیجه، S میدان است (توجه کنیم که در حالت جابه‌جایی و یکدار، T میدان است اگر و تنها اگر $T[x]$ دامنه ایده‌آل‌های اصلی باشد.)
حال اگر $\phi:R[x]\to S[x]$ یکریختی باشد، با توجه به این‌که عناصر وارون‌پذیر تحت یکریختی حفظ می‌شوند و با توجه به این‌که عناصر وارون‌پذیر $R[x]$ و $S[x]$ چندجمله‌ای ثابت هستند (چون R و S میدان هستند)، نتیجه می‌شود که تابع $\phi|_R:R\to S$ یکریختی بین R و S است.

پاسخ ۴.۱.۳۵. به روشنی دیده می‌شود که نادرست بودن حکم به معنی وجود یک رنگ‌آمیزی خواهد بود که در آن سه وجه همسایه هر وجه، دقیقاً به سه رنگ مختلف رنگ شده‌اند. اکنون یکی از رنگ‌ها برای مثال رنگ آبی را در نظر می‌گیریم و وجه‌های آبی را می‌شماریم. هر کدام از ۱۳۹۰ وجه دقیقاً یک وجه همسایه به رنگ آبی خواهد داشت. از طرفی هر وجه آبی دقیقاً سه بار به عنوان همسایه آبی یک وجه شمرده می‌شود. بنابراین، ۳|۱۳۹۰ که این یک تناقض است.

پاسخ ۵.۱.۳۵. فرض کنید $D=\{f_۱,f_۲,\dots\}$ در $C(X)$ چگال باشد. قرار دهید

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} \ \middle|\ f_n(x) > \frac{۱}{۲} \text{ به ازای } x \in X \text{ ی} \right\}.$$

مجموعه B تهی نیست زیرا اگر $g : X \to \mathbb{R}$ تابع ثابت یک باشد باید n ی داشته باشیم که $\rho(f_n, g) < \frac{۱}{۲}$ و برای چنین n ی به ازای هر $x \in X$، داریم $f_n(x) > \frac{۱}{۲}$.

به ازای هر $n \in B$، طبق تعریف B، نقطه‌ای مانند $x_n \in X$ وجود دارد که $f_n(x_n) > \frac{۱}{۲}$. قرار دهید $Y = \{x_n \mid n \in B\}$. ثابت می‌کنیم Y در X چگال است. اگر چنین نباشد، $x^* \in X \setminus \overline{Y}$ وجود دارد. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \min\left(۱, \frac{d(x, \overline{Y})}{d(x^*, \overline{Y})} \right).$$

به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که f پیوسته و کران‌دار است. به‌علاوه، $f(x^*) = ۱$ و برای هر $x \in Y$، داریم $f(x) = 0$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $f_n \in D$، $\rho(f, f_n) \geq \frac{۱}{۲}$. اگر $n \in B$، آن‌گاه $f_n(x_n) > \frac{۱}{۲}$ و $f(x_n) = ۰$ پس، $\rho(f, f_n) > \frac{۱}{۲}$. اگر $n \notin B$، آن‌گاه برای هر $x \in X$، به‌ویژه x^*، داریم $f_n(x) \leq \frac{۱}{۲}$. پس، با توجه به این‌که $f(x^*) = ۱$، نتیجه می‌شود که $\rho(f, f_n) \geq \frac{۱}{۲}$. پس، $f \notin \overline{D}$ و این با چگال بودن D در تناقض است.

پاسخ ۶.۱.۳۵. کافی است نشان دهیم برای هر c، اگر $c > \limsup nM_n$، آن‌گاه $c \geq \frac{۱}{\ln ۲}$. چنین c ای را در نظر بگیرید. بنابراین، برای n های به اندازه کافی بزرگ خواهیم داشت $M_n < \dfrac{c}{n}$. فرض کنید $u_n \leq \ldots \leq u_۱$ برابر با طول قطعات ایجاد شده با حذف $\{x_۱, \ldots, x_{n-۱}\}$ از بازه $[۰, ۱]$، به ترتیب از کوچک به بزرگ، باشد.

توجه کنید که برای $k = ۰, ۱, \ldots, (n-۱)$، نقاط $x_n, x_{n+۱}, \ldots, x_{n+k-۱}$ در حداکثر k تا از زیربازه‌های به طول $u_۱, \ldots, u_n$ قرار خواهد گرفت و بنابراین، با اضافه شدن آن‌ها، از بین $k+۱$ بازه به طول $u_{n-k}, \ldots, u_n$ حداقل یکی بی‌تغییر می‌ماند. بنابراین، داریم $M_{n+k} \geq u_{n-k}$. با جمع این نامساوی‌ها، داریم

$$\begin{aligned} ۱ = u_n + u_{n-۱} + \cdots + u_۱ \quad &\leq M_n + M_{n+۱} + \cdots + M_{۲n+۱} \\ &< \tfrac{c}{n} + \tfrac{c}{n+۱} + \cdots + \tfrac{c}{۲n-۱}\,. \end{aligned}$$

اما $\ln ۲ = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)$. بنابراین، $c \geq \frac{۱}{\ln ۲}$.

تبصره: کران $\frac{۱}{\ln ۲}$ بهترین کران ممکن است، یعنی، می‌توان دنباله $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ را به گونه‌ای یافت که برای آن $\limsup nM_n = \frac{۱}{\ln ۲}$.

۲.۳۵ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۰/۲/۱۵

پاسخ ۱.۲.۳۵. برای هر $۱ \leq i \leq ۱۰$ ف تابع $C_i(x) = b_i(x)b_{۲۱-i}(x)$ را در نظر بگیرید. برای هر $x \in (۰, \infty)$، داریم $C_i(x) \geq \frac{a_{۲۱-i}}{a_i}$.

کمینه $C_i(x)$ که همان $\frac{a_{۲۱-i}}{a_i}$ است در بازه $a_i \leq x \leq a_{۲۱-i}$ اختیار می‌شود. بنابراین، کمینه تابع $f(x) = \prod_{i=۱}^{۱۰} C_i(x)$ دقیقاً وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر $۱ \leq i \leq ۱۰$، داشته باشیم $a_i \leq x \leq a_{۲۱-i}$.

بنابراین، نقاطی که $f(x)$ مقدار کمینه خود را در آن‌ها اخذ می‌کند همان بازه $[a_{۱۰}, a_{۱۱}]$ است.

پاسخ ۲.۲.۳۵. ابتدا نشان می‌دهیم اگر s, r اعضای حلقه باشند و $rs = ۰$، آن‌گاه $sr = ۰$: طبق فرض، عضو x وجود دارد که $sr = (sr)^۲x = s\underbrace{rs}rx = ۰$. حال اگر $a \in R$، آن‌گاه x را چنان می‌گیریم که $a = a^۲x$. پس، $a(۱-ax) = ۰$ و طبق آن‌چه در بالا گفته شد داریم $(۱-ax)a = ۰$. پس، $a - axa = ۰$، ولذا، $a(۱-xa) = ۰$. می‌توان نتیجه گرفت که $(۱-xa)a = ۰$. پس، $a = xa^۲$.

پاسخ ۳.۲.۳۵. (برهان خلف) فرض کنید برای هر $z_۰ \in \mathbb{C}$ که $|z_۰| = ۱$، داشته باشیم $|f(z_۰) - \bar{z}| < ۱$.

با توجه به این که $\bar{z} = \frac{۱}{z}$، داریم

$$|zf(z) - ۱| < |z| = ۱.$$

تابع $zf(z) - ۱$ تحلیلی است. پس، نرم آن بیشینه خود را روی مرز ناحیه می‌گیرد، لذا، نابرابری بالا که برای نقاط روی مرز قرص واحد برقرار است، برای نقاط داخل قرص نیز برقرار است، یعنی، برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $|z| \leq ۱$ نیز داریم $|zf(z) - ۱| < ۱$. اگر z را برابر صفر قرار دهیم، داریم $۱ < ۱$ که تناقضی آشکار است.

پاسخ ۴.۲.۳۵. فرض کنید $\det[x_{ij}]_{۱\leq ij\leq n} = gh$ که g و h دو چندجمله‌ای چند متغیره هستند. نخست توجه کنید که برای i، j مشخص، برای مثال به کمک بسط دترمینان بر حسب سطر i ام، دیده می‌شود که سمت چپ بر حسب x_{ij} از درجه یک است. بنابراین، با مرتب کردن g، h به عنوان چندجمله‌ای‌هایی برحسب x_{ij} دیده می‌شود که درجه x_{ij} در یکی از h یا g برابر یک و در دیگری صفر است. پس، هر متغیر x_{ij} فقط (و بنابراین، دقیقاً) در یکی از h یا g ظاهر می‌شود. اکنون دو متغیر که همزمان در یک سطر آمده‌اند مانند x_{ik} و x_{ij} را در نظر بگیرید. اگر سمت چپ را به عنوان چندجمله‌ای بر حسب این دو متغیر مرتب کنیم و به بسط دترمینان بر حسب سطر iام توجه کنیم، دیده می‌شود که ضریب حاصل ضرب $x_{ij}x_{ik}$ صفر است. اما اگر در سمت راست x_{ik} و x_{ij} یکی در h و دیگری در g آمده باشد باز با مرتب کردن h و g به عنوان چندجمله‌ای‌های درجه یک از این دو متغیر، دیده می‌شود که ضریب $x_{ij}x_{ik}$ ناصفر است. این تناقض نشان می‌دهد که هر دو متغیر هم‌سطر همزمان در یکی از h یا g ظاهر می‌شوند. پس، همه متغیرهای یک سطر باید در یکی از h یا g بیایند. مشابه همین استدلال در مورد متغیرهای یک ستون هم صادق است. بنابراین، هر $n^۲$ متغیر در یکی از h یا g ظاهر می‌شوند و دیگری چندجمله‌ای ثابت است.

پاسخ ۵.۲.۳۵. فرض کنیم $V_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \frac{۱}{n}U$. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر بازه مانند (α,β) که $۰ < \alpha < \beta$ داریم $V_m \cap (\alpha,\beta) \neq \varnothing$. به برهان خلف، فرض می‌کنیم این مجموعه تهی باشد. بنابراین، به ازای هر $n \geq m$، داریم $U \cap (n\alpha, n\beta) = \varnothing$. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $n_۰ \geq m$ ی وجود دارد که $\frac{۱}{n_۰} < \frac{\beta-\alpha}{\alpha}$. بنابراین برای هر $n \geq n_۰$، داریم $(n+۱)\alpha < n\beta$. در نتیجه، $\bigcup_{n=n_۰}^{\infty} (n\alpha, n\beta) = (n_۰\alpha, \infty)$. پس، $U \cap (n_۰\alpha, \infty) = \varnothing$ و این با بی‌کران بودن U در تناقض است.
حال فرض کنیم $V_۰ = (۱,۲)$. طبق آنچه در بالا گفته شد داریم $V_۱ \cap V_۰ \neq \varnothing$. چون این مجموعه باز است $x_۱$ و $r_۱ < ۱$ ی موجودند که $N_{r_1}[x_1] \subseteq V_1 \cap V_0$. حال با همین استدلال می‌توان به‌صورت بازگشتی دنباله‌های $\{x_m\}$ و $\{r_m\}$ را یافت که

$$N_{r_m}[x_m] \subseteq V_m \cap N_{r_{m-۱}}(x_{m-۱}). \qquad ۰ < r_m < \frac{۱}{m} \qquad (*)$$

دنباله $\{x_m\}$ کوشی است زیرا برای هر $m \geq k$، داریم $x_m \in N_{r_k}(x_k)$ و لذا،

$$|x_m - x_k| < ۲r_k < \frac{۲}{k}.$$

حال چون $[0,\infty)$ تام است پس، xی وجود دارد که $x_m \to x$. بنابر $(*)$ داریم

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} N_{r_m}[x_m] \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} U).$$

پس، برای هر m عددی مانند $n_m \geq m$ وجود دارد که $x \in \frac{1}{n_m} U$، یا به‌طور معادل، $n_m x \in U$. این نشان می‌دهد که

$$\{n_1 x, n_2 x, n_3 x, \ldots\} \subseteq U \cap \{x, 2x, 3x, \ldots\}.$$

پاسخ ۶.۲.۳۵. می‌دانیم ماتریس A پوچ‌توان است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن صفر باشد. تابع $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(A) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$ که بیشینه روی همه مقادیر ویژه A گرفته می‌شود یک تابع شبه اثر است زیرا چندجمله‌ای‌های مشخصه AB و BA یکی هستند. پس، اگر $f(A) = 0$، آن‌گاه $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. پس، A پوچ‌توان است.

برای اثبات طرف دیگر، ابتدا توجه کنید که اگر f شبه اثر باشد، آن‌گاه برای هر A و هر S وارون‌پذیر، $f(A) = f(SAS^{-1})$. پس، می‌توان A را با یک ماتریس متشابه بدون آن‌که مقدار آن برای توابع شبه اثر تغییر کند، جایگزین کرد. (چون هر ماتریس پوچ‌توان با یک ماتریس پایین مثلثی که درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر است متشابه است.) پس، بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}.$$

قرار دهید $E_i = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1)$، یعنی، یک ماتریس قطری با درایه‌های یک روی قطر (اصلی) به جز درایه (i,i) که 0 است. در این صورت $E_1 A = A$ ولی AE_1 ماتریسی است که ستون اول آن صفر است .پس، می‌توان فرض کرد ستون اول A نیز صفر است. ملاحظه می‌شود که $E_2 A = A$ ولی AE_2 ماتریسی است که ستون دوم آن نیز صفر است. با ادامه این روش، A به ماتریسی تبدیل می‌شود که همه ستون‌های آن صفر است. پس، $f(A) = 0$.

راه‌حل دوم: برای قسمت اول می‌توان از تابع شبه اثر $f(A) = \mathrm{tr}(A^k)$ استفاده کرد. از آنجایی که

$$f(AB) = \mathrm{tr}((\mathrm{AB})^{\mathrm{k}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{B}(\mathrm{AB})^{\mathrm{k}-1}\mathrm{A}) = \mathrm{tr}((\mathrm{BA})^{\mathrm{k}}) = \mathrm{f}(\mathrm{BA})$$

این تابع، شبه اثر است. پس، اگر برای هر شبه اثر f داشته باشیم $f(A) = 0$، آن‌گاه نتیجه می‌شود که برای هر k، داریم $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{k}}) = 0$، یعنی، برای هر k، $\sum_i \lambda_i^k = 0$ و به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که برای هر i، $\lambda_i = 0$ و این این معادل پوچ‌توانی A است.

سی‌وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۶ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۱/۲/۲۶

پاسخ ۱.۱.۳۶. نشان می‌دهیم ماتریس A در شرط مسأله صدق می‌کند اگر و تنها اگر در هر سطر A دقیقاً یک درایه غیر صفر موجود باشد.
اگر در هر سطر A دقیقاً یک درایه غیر صفر باشد، آن‌گاه به وضوح A در شرط مسأله صدق می‌کند. برعکس، فرض کنید A ماتریسی باشد که در شرط مسأله صدق کند و سطر اول آن را در نظر بگیرید. اگر همه درایه‌های این سطر صفر باشند، آن‌گاه برای هر v، درایه اول Av نیز صفر است. بنابراین، در سطر اول A باید حداقل یک درایه غیر صفر موجود باشد. از طرف دیگر، اگر در سطر اول A بیش از یک درایه، مثلاً a_{1i} و a_{1j} ، غیر صفر باشند، آن‌گاه اعداد $r \neq 0$ و $s \neq 0$ را چنان می‌گیریم که

$$a_{1i}r + a_{1j}s = \sum_{t\neq i,j} a_{1t}$$

و v را نیز برداری ستونی می‌گیریم که درایه iام آن r، درایه jام آن s و مابقی درایه‌های آن -1 هستند. در این صورت همه درایه‌های v غیر صفر هستند، اما درایه اول در Av صفر است. پس، اگر A در شرایط مسأله صدق کند، آن‌گاه در سطر اول A دقیقاً یک درایه غیرصفر وجود دارد. استدلال مشابه نشان می‌دهد که در هر سطر دیگر A نیز دقیقاً یک درایه غیر صفر وجود دارد.

پاسخ ۲.۱.۳۶. می‌دانیم که اگر دو چندجمله‌ای روی یک بازه ناتباهیده برابر باشند، با هم یکی هستند.

فرض کنیم $M > ۰$ عدد حقیقی دلخواهی باشد. بازه $K = [-M, M]$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in K$ مجموعه بازی مانند U_x موجود است که تحدید f روی U_x چندجمله‌ای است. چون K فشرده است ، $x_۱$، ... و x_n ی موجودند که $K \subseteq \cup_{i=۱}^{n} U_{x_i}$. حال فرض کنیم تحدید f به U_{x_i} برابر P_i باشد و $x_۱ < x_۲ < \ldots < x_n$. در این صورت با توجه به این که $U_{x_i} \cap U_{x_{i+۱}} \neq \varnothing$ نتیجه می‌گیریم که $P_i = P_{i+۱}$. بنابراین، f روی K چندجمله‌ای است و چون M دلخواه بود، f روی کل $\mathbb{R}$ چنین است.

پاسخ ۳.۱.۳۶. فرض کنید A مجموعه بردارهایی باشد که جمع مؤلفه‌های آن‌ها برابر ۱۰ و B مجموعه بردارهایی باشد که جمع دو مؤلفه کوچک‌تر آن‌ها برابر ۱۰ باشد. نشان می‌دهیم $A \cup B$ مجموعه موردنظر است.

اگر $x = (x_۱, x_۲, x_۳) \in A$ پس، $f(x) = ۱$. حال به ازای هر گوی باز شامل x مانند B نقطه‌ای مثل $y = (y_۱, y_۲, y_۳) \in B$ وجود دارد که $y_۱ + y_۲ + y_۳ > ۱۰$. پس، $f(x_۱, x_۲, x_۳) \geq ۲$، یعنی، x یک نقطه ناپیوستگی است.

اگر $x \in B$، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $x_۱ \leq x_۲ \leq x_۳$ و $x_۱ + x_۲ = ۱۰$. پس، $f(x) = ۲$. حال هر گوی شامل x شامل نقطه‌ای مانند $y = (x_۱ + \varepsilon, x_۲ + \varepsilon, x_۳ + \varepsilon)$ است که $\varepsilon > ۰$ اما $f(y) = ۳$ زیرا جمع هر دو مؤلفه y از ۱۰ بیشتر است. پس، x نقطه ناپیوستگی است.

برای تکمیل حل مسأله کافی است ثابت کنیم f در هر نقطه خارج از A و B پیوسته است. اگر $x = (x_۱, x_۲, x_۳) \notin A \cup B$، بدون از دست رفتن کلیت، می‌توان فرض کرد $x_۱ \leq x_۲ \leq x_۳$. برای x سه حالت وجود دارد:

۱) $f(x) = ۱$. پس، $x_۱ + x_۲ + x_۳ < ۱۰$ و به وضوح f در x پیوسته است.

۲) $f(x) = ۲$. پس، $x_۱ + x_۲ < ۱۰$ و $x_۳ > ۱۰ - (x_۱ + x_۲)$. در این حالت یک همسایگی شامل x وجود دارد که برای هر $y = (y_۱, y_۲, y_۳)$ در این همسایگی $y_۱ + y_۲ < ۱۰$ و $y_۳ > ۱۰ - (y_۱ + y_۲)$. پس، $f(y) = ۲$ و لذا، f در x پیوسته است.

۳) $f(x) = ۳$. پس، جمع هر دو مؤلفه x از ۱۰ بیشتر است. بنابراین، می‌توان یک همسایگی حول x انتخاب کرد که برای هر y در آن همسایگی جمع هر دو مؤلفه y نیز بیشتر از ۱۰ باشد. پس، $f(y) = ۳$ و حکم ثابت می‌شود.

پاسخ ۴.۱.۳۶. به روش برهان خلف، فرض کنید برای یک x، حداقل دو عضو خودتوان $e_۱$ و $e_۲$ موجود باشند که در شرایط مسأله صدق کنند. عدد m را چنان می‌گیریم که $(xe_۱)^m = ۰ = (xe_۲)^m$. بنابراین، داریم $x^m = x^m(۱-e_۱)$ و در نتیجه، $(*) \quad Rx^m \subseteq R(۱-e_۱)$. از طرف دیگر عضوی وارون‌پذیر مانند $u_۱$ وجود دارد به طوری که $u_۱ = x + e_۱$، پس، $u_۱(۱-e_۱) = x(۱-e_۱)$. اگر طرفین رابطه قبل را به توان m برسانیم به دست می‌آید

$$۱ - e_۱ = u_۱^{-m} x^m \in Rx^m.$$

بنابراین، $R(۱-e_۱) \subseteq Rx^m$ که با توجه به $(*)$ نتیجه می‌شود

$$Rx^m = R(۱-e_۱).$$

یک استدلال مشابه نشان می‌دهد $Rx^m = R(۱-e_۲)$. در نتیجه، داریم $R(۱-e_۱) = R(۱-e_۲)$. پس، اعضای r و s وجود دارند به‌طوری‌که $(۱-e_۱) = r(۱-e_۲)$ و $(۱-e_۲) = s(۱-e_۱)$. بنابراین،

$$\begin{aligned} ۱ - e_۱ &= r(۱-e_۲) = r(۱-e_۲)(۱-e_۲) \\ &= (۱-e_۱)(۱-e_۲) = (۱-e_۱)(s(۱-e_۱)\ ) \\ &= s(۱-e_۱) = ۱ - e_۲. \end{aligned}$$

بنابراین، $e_۱ = e_۲$.

پاسخ ۵.۱.۳۶. الف نشان می‌دهیم دنباله $f_n(x) = \frac{۱}{x^n}$ به تابع صفر $\lhd$- همگرا است. فرض کنید $g = \frac{P}{Q} \lhd ۰$ داده شده است و ضریب‌های پیش‌روی P و Q هر دو مثبت باشد. اگر N را برابر درجه Q بگیریم، آن‌گاه چنانچه $n > N$، داریم

$$g(x) - f_n(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{۱}{x^n} = \frac{x^n P(x) - Q(x)}{x^n Q(x)} \rhd ۰.$$

زیرا ضریب پیش‌روی صورت همان ضریب پیش‌روی P و ضریب پیش‌روی مخرج همان ضریب پیش‌روی Q است. پس، $f_n \lhd g$ و به‌علاوه، به وضوح $-g \lhd ۰ \lhd f_n$ و لذا، دنباله $\{f_n\}$ به تابع ثابت صفر $\lhd$ـ همگرا است.

ب) دنباله $\{h_n\}$ را به شکل $h_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{x^{۲^k}}$ تعریف می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم این دنباله $\lhd$ ـ کوشی است. فرض کنید $g = \frac{P}{Q} \rhd ۰$ مانند قسمت قبل داده شده باشد. عدد $N > ۰$ را به نحوی انتخاب کنید که ۲^N بزرگ‌تر از درجه Q باشد. اگر $n > m > N$، آن‌گاه

$$h_n(x) - h_m(x) = \sum_{k=m+۱}^{n} \frac{۱}{x^{۲^k}} \lhd n \times \frac{۱}{n} \times \frac{P(x)}{Q(x)} = g(x).$$

در واقع، تعداد جملات جمع کم‌تر از n است و برای هر $k > m$، تابع گویای $\frac{۱}{x^{۲^k}}$ کم‌تر از $\frac{۱}{n}\frac{P(x)}{Q(x)}$ است. (استدلال، مشابه قسمت (الف) است.) اکنون نشان می‌دهیم که $\{h_n\}$ در $\mathbb{R}(x)$، $\lhd$ ـ همگرا نیست. فرض کنید $\{h_n\}$ به تابع h، $\lhd$ ـ همگرا باشد. در این صورت به‌سادگی می‌توان دید که $\{h_n(x^۲)\}$ به $h(x^۲)$ همگرا است. به‌علاوه، داریم

$$h_n(x^۲) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{x^{۲^{k+۱}}} = h_{n+۱}(x) - \frac{۱}{x}.$$

اگر در دو طرف، n را به بی‌نهایت میل دهیم، خواهیم داشت

$$h(x^۲) = h(x) - \frac{۱}{x}.$$

نشان می‌دهیم این معادله تابعی هیچ جوابی در $\mathbb{R}(x)$ ندارد. فرض کنید $h(x) = \frac{R(x)}{S(x)}$ نمایش ساده‌شده یک جواب معادله باشد. با ضرب کردن مخرج‌ها خواهیم داشت

$$xR(x^۲)S(x) = xR(x)S(x^۲) - S(x)S(x^۲).$$

واضح است که $S(x)S(x^۲)$ باید عامل x داشته باشد. فرض کنید $k \geq ۱$ بزرگ‌ترین عددی باشد که $S(x)$ به x^k بخش‌پذیر باشد. در این صورت، $S(x) = x^k T(x)$ و T و R عامل x ندارند. داریم

$$xR(x^۲)x^k T(x) = xR(x)x^{۲k}T(x^۲) - x^k T(x)x^{۲k}T(x^۲).$$

پس،

$$R(x^۲)T(x) = x^k(R(x) - x^{k-۱}T(x))T(x^۲)$$

و لذا، $R(x^۲)T(x)$ باید عامل x داشته باشد و این یک تناقض به دست می‌دهد زیرا T و R عامل x ندارند.

پاسخ ۶.۱.۳۶. روشن است که اگر P را با یک انتقال صحیح به یک متوازی‌السطوح دیگر تبدیل کنیم، آن‌گاه کمیت‌های A، B، C و D و همچنین حجم P تغییر نمی‌کنند. واضح است که می‌توان با انتقال‌های صحیح P کل فضا را پوشاند طوری که اشتراک هر دو شکل در یک وجه، یال، رأس اتفاق بیفتد و یا تهی باشد.
S را مکعب $[-R,R]^۳$ بگیرید. فرض کنید N تعداد نقاط صحیح داخل S و N' تعداد متوازی‌السطوح‌های مذکور باشد که کاملاً داخل S هستند.
لم.

الف) $\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{vol(S)}}{N} = ۱$ (منظور از $\mathrm{vol(X)}$، حجم X است.)

ب) $\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{vol(S)}}{N'} = \mathrm{vol(p)}$

ج) $\lim_{R\to\infty}\frac{N}{N'} = A + \frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۴}C + \frac{۱}{۸}D$

کافی است این لم را ثابت کنیم؛ زیرا در این صورت با تقسیم (الف) بر (ب) و سپس ضرب در (ج)، حکم نتیجه می‌شود.
قسمت (الف) واضح است. اجتماع متوازی‌السطوح‌هایی که داخل S هستند را W بنامید. حجم W برابر با $N'.\mathrm{vol(P)}$ است. بنابراین، (۱) $\mathrm{vol(S)} \geq \mathrm{N'.vol(P)}$. از طرف دیگر، d را بیشترین فاصله رئوس P در نظر بگیرید و قرار دهید $\bar{S} = [-R+d, R-d]^۳$. ادعا می‌کنیم $\bar{S} \subseteq W$. فرض کنید $x \in \bar{S}$ و Q را یک متوازی‌السطوح در نظر بگیرید که $x \in Q$. چون بیشترین فاصله رئوس Q برابر با d است و $x \in \bar{S} \cap Q$، نتیجه می‌گیریم که $Q \subseteq S$. پس، $Q \subseteq W$ و در نتیجه، $x \in W$. پس، ثابت کردیم $\bar{S} \subseteq W$ بنابراین،

$$N'\mathrm{vol(P)} \geq \mathrm{vol(\bar{S})} = (\frac{\mathrm{R-d}}{\mathrm{R}})^3\mathrm{vol(S)}. \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{vol(P)} \leq \frac{\mathrm{vol(S)}}{\mathrm{N'}} \leq (\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R-d}})^3\mathrm{vol(P)}$ و با میل دادن R به $+\infty$ قسمت (ب) ثابت می‌شود.
اثبات قسمت (ج): هر نقطه صحیح، درون یک وجه، درون یک یال و یا منطبق بر یک رأس یکی از

متوازی‌السطوح‌های مذکور است. بسته به این وضعیت عدد ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ و یا $\frac{۱}{۸}$ را به آن نقطه نسبت دهید. حال برای هر متوازی‌السطوح Q داخل S، اعداد متناظر با نقاط صحیح داخل Q را جمع بزنید و حاصل آن را در نظر بگیرید. سپس اعداد متناظر با همه متوازی‌السطوح‌های داخل S را با هم جمع بزنید. از طرفی، عدد متناظر با هر متوازی‌السطوح برابر با $A+\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۸}D$ است. پس، حاصل جمع نهایی برابر با $N'(A+\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۸}D)$ است. از طرف دیگر، برای هر نقطه صحیح داخل S، اگر عدد متناظر با آن برابر با ۲^{-i} باشد، آن‌گاه آن نقطه در دقیقاً ۲^i متوازی‌السطوح قرار دارد (این موضوع با حالت‌گیری روی i دیده می‌شود) که بعضی از آن‌ها ممکن است کاملاً داخل S نباشند. پس، حاصل جمع نهایی حداکثر برابر با N است. در نتیجه،

$$N \geq N'(A+\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۸}D) \qquad (۳)$$

به شیوه دیگر، برای هر متوازی‌السطوح Q داخل S، تنها اعداد متناظر با نقاط صحیح داخل $Q\cap\bar{S}$ را جمع بزنید و سپس حاصل جمع همه متوازی‌السطوح‌ها را هم با هم جمع بزنید. از طرفی عدد متناظر با هر متوازی‌السطوح حداکثر برابر با $A+\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۸}D$ است. پس، حاصل جمع نهایی حداکثر برابر با $N(A+\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۸}D)$ است. از طرف دیگر، هر نقطه صحیح داخل $\bar{S}$ که عدد متناظر با آن ۲^{-i} است، دقیقاً در ۲^i متوازی‌السطوح قرار دارد که همه آن‌ها کاملاً داخل Sاند. پس، حاصل جمع نهایی حداقل برابر با N'' است که N'' تعداد نقاط صحیح داخل $\bar{S}$ است. پس،

$$N'' \leq N'(A+\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۴}C+\frac{۱}{۸}D). \qquad (۴)$$

حال قسمت (ج) از روابط (۳) و (۴) و این که $\lim_{R\to\infty}\frac{N''}{N}=۱$ نتیجه می‌شود. پس، لم ثابت شد و همان‌طور که توضیح داده شد، مسأله ثابت می‌شود.

۲.۳۶ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۱/۲/۲۷

پاسخ ۱.۲.۳۶. توجه کنید که درایه ijام از ماتریس X^k برابر است با

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}} x_{ii_1}x_{i_1i_2}\dots x_{i_{k-1}j}.$$

و تنها جملات ناصفر عبارت بالا زمانی اتفاق می‌افتد که

$$A_i \subsetneqq A_{i_1} \subsetneqq \cdots \subsetneqq A_{i_{k-1}} \subsetneqq A_j.$$

بنابراین، این عدد برابر با تعداد زنجیرهای به طول $k+1$ با شروع از A_i و پایان در A_j است. حال، از آن جایی که در بین n مجموعه زنجیری به طول $n+1$ می‌تواند وجود داشته باشد. پس، همه درایه‌های X^n صفراند.

راه‌حل دوم: نخست توجه کنید که اگر A_iها به ترتیب اندازه مرتب شده باشند، یعنی، اگر

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \cdots \leq |A_n|$$

آن‌گاه برای هر $i \geq j$، قطعاً $A_i \subsetneqq A_j$ رخ نخواهد داد. پس، تنها درایه‌های بالاتر از قطر اصلی X می‌توانند ناصفر باشند و در این حالت روشن است که $X^n = 0$.

حال برای حالت دلخواه، فرض کنید $A'_1, \cdots, A'_n$ همان $A_1, \cdots, A_n$ باشند که به ترتیب اندازه مرتب شده‌اند. بنابراین، اگر X' ماتریس متناظر با A'_iها باشد، داریم $X'^n = 0$. از طرفی، اگر π جایگشتی باشد که A_iها را به A'_iها تبدیل می‌کند و P ماتریس جایگشتی نظیر π، روشن است که $X = PX'P^{-1}$. بنابراین،

$$X^n = (PX'P^{-1})^n = PX'^nP^{-1} = 0.$$

پاسخ ۲.۲.۳۶. توجه کنید تابع $\varphi : G \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ با ضابطه

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} ۱ & a & b & c \\ ۰ & ۱ & ۰ & d \\ ۰ & ۰ & ۱ & e \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\right) = (a,b,d,e)$$

یک همریختی پوشا است و

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & x \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

چون $\frac{G}{\ker\varphi}$ با $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ یکریخت است، $\frac{G}{\ker\varphi}$ آبلی بوده و در نتیجه، $G' \subseteq \ker\varphi$. اما $\ker\varphi$ یک گروه p عضوی است، پس، یا $G' = \{e\}$ (که امکان ندارد چون G غیرآبلی است) و یا $G' = \ker\varphi$.

پس، نتیجه می‌شود

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & x \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

پاسخ ۳.۲.۳۶. الف) تابع $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را به صورت $g(x_۱,\cdots,x_n)=x_۱+\cdots+x_n$ تعریف می‌کنیم. g به وضوح پیوسته است. پس، $(g\circ f)$ به‌عنوان تابعی از X به $\mathbb{R}$ نیز پیوسته است. چون X فشرده است، بیش‌ترین مقدار خود را می‌گیرد، یعنی، $x\in X$ وجود دارد که برای هر $y\in X$، $(g\circ f)(y)\leq(g\circ f)(x)$. نشان می‌دهیم که $x\in M_f$. اگر برای یک $y\in X$، $f(y)$ مؤلفه به مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی $f(x)$ باشد، آن‌گاه با توجه به این که $g(f(y))\leq g(f(x))$، نمی‌تواند هیچ‌کدام از مؤلفه‌های $f(y)$ اکیداً از مؤلفه متناظرش در $f(x)$ بیش‌تر باشد. لذا، $f(y)=f(x)$.

ب) فضای X را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ می‌گیریم که به صورت زیر تعریف شده است:

$$X=\{\circ\}\times[\circ,۱]\cup\{(x_۱,-x)|x\in[\circ,۱]\}.$$

تابع $f:X\to\mathbb{R}^۲$ را نشاندن طبیعی می‌گیریم، یعنی، $f(x,y)=(x,y)$. نشان می‌دهیم

$$M_f=\{(\circ,۱)\}\cup\{(x,-x)|x\in(\circ,۱]\}$$

که در نتیجه، چون بسته نیست، فشرده نیست. اثبات ادعای اخیر با توجه به صورت X روشن است. بیان دقیق آن چنین است: اگر $(\circ,y)\in X$ بخواهد عضو M_f باشد نباید نقطه‌ای در $f(X)$ موجود باشد که در هر دو مؤلفه بزرگ‌تر یا مساوی و در یک مؤلفه بزرگ‌تر از $(\circ,y)$ باشد. این دقیقاً در حالتی رخ می‌دهد که $y=۱$. اگر $(x,-x)\in X$ بخواهد عضو M_f باشد نیز همان وضعیت را باید داشته باشد که با توجه به شیب منفی این پاره‌خطی، همه این نقاط عضو M_f هستند مگر $(\circ,\circ)$ که به دلیل وجود $(\circ,۱)$ در X، عضو M_f نیست.

پاسخ ۴.۲.۳۶. مسأله را در حالت کلی‌تری ثابت می‌کنیم. فرض کنید $f_۱,f_۲,\ldots,f_n$ توابعی تحلیلی از V به $\mathbb{C}$ باشند به‌طوری‌که $|f_۱|+|f_۲|+\cdots+|f_n|$ ثابت باشد. نشان می‌دهیم همه f_k ها ثابت هستند.
فرض کنید $z_\circ\in U$ نقطه‌ای دلخواه باشد. به ازای هر k، عدد مختلط α_k را طوری انتخاب می‌کنیم که $\alpha_kf_k(z_\circ)$ عدد حقیقی نامنفی باشد و $|\alpha_k|=۱$. اگر $f_k(z_\circ)=\circ$ می‌توانیم α_k را برابر ۱ انتخاب کنیم و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $\alpha_k=\frac{|f_k(z_\circ)|}{f_k(z_\circ)}$.
تعریف می‌کنیم $g_k(z)=\alpha_kf_k(z)$. واضح است که شرایط مسأله برای $g_۱$، $g_۲$، $\cdots$ و g_n هم برقرار است

و به‌علاوه، $g_k(z_\circ)$ها اعداد حقیقی نامنفی هستند. داریم

$$\begin{aligned}|g_\text{۱}(z)+\cdots+g_n(z)| &\leq |g_\text{۱}(z)|+\cdots+g_n(z)| = |g_\text{۱}(z_\circ)|+\cdots+|g_n(z_\circ)| \\ &= g_\text{۱}(z_\circ)+\cdots+g_n(z_\circ) = |g_\text{۱}(z_\circ)+\cdots+g_n(z_\circ)|.\end{aligned}$$

پس، تابع $G(z)=g_\text{۱}(z)+\cdots+g_n(z)$، که بر U تحلیلی است، بیشینه نرم خود را در نقطه $z_\circ$ می‌گیرد و در نتیجه، طبق اصل بیشینه، G باید ثابت باشد و این مقدار ثابت برابر $|g_\text{۱}(z)|+\cdots+|g_n(z)|$ است. اکنون به این توجه کنید که تنها در صورتی جمع نرم n عدد مختلط با نرم جمع آن‌ها برابر است که به عنوان بردار در صفحه هم‌جهت و هم راستا باشند. پس، $\frac{g_k}{g_\text{۱}}$ (در نقاطی که $g_\text{۱}$ ناصفر است) یک عدد حقیقی نامنفی است و با توجه به تحلیلی بودن $\frac{g_k}{g_\text{۱}}$ باید مقدار آن ثابت باشد در نتیجه، $g_k=\beta_k g_\text{۱}$ که در آن $\beta_k\in\mathbb{R}^+$. با توجه به این که $G(z)=g_\text{۱}(z)(\text{۱}+\beta_\text{۲}+\cdots+\beta_n)$ تابع ثابت است و $\text{۱}+\beta_\text{۲}+\cdots+\beta_n\geq\text{۱}$، داریم $g_\text{۱}$ تابع ثابت است و این نتیجه می‌دهد که g_kها و در نتیجه، f_kها توابع ثابت هستند.

پاسخ ۵.۲.۳۶. فرض کنید Q چهار وجهی باشد که از یک دوران تصادفی چهار وجهی P به دست آمده باشد. رأس‌های Q را با اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری و پیشامدهای A_i، $i=\text{۱},\ldots,\text{۴}$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A_i : رأس iام Q در قسمت رنگ شده قرار بگیرد

از آنجایی که هر کدام از رأس‌های Q به شکل تصادفی و با توزیع یکنواخت روی سطح کره قرار گرفته است، داریم $\mathbb{P}(A_i)>\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$.

حال توجه کنید که

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcap_{i=\text{۱}}^{\text{۴}}A_i) &= \text{۱}-\mathbb{P}(\bigcup_{i=\text{۱}}^{\text{۴}}A_i^c) \\ &\geq \text{۱}-(\sum_{i=\text{۱}}^{\text{۴}}\mathbb{P}(A_i^c)) \\ &\geq \text{۱}-\sum_{i=\text{۱}}^{\text{۴}}(\text{۱}-\mathbb{P}(A_i))>\circ\end{aligned}$$

احتمال این که هر چهار رأس در قسمت رنگی قرار بگیرند اکیداً مثبت است. پس، چنین حالتی وجود دارد!

پاسخ ۶.۲.۳۶. از آنجا که $(ab)c = (ab)c$، پس، (۱) $\quad b = b(cH(c))$. حال طبق (۱)، داریم

$$(a(bH(b)))c = (a(dH(d)))c.$$

در نتیجه،

$$bH(b) = (dH(d))(cH(c)) \overset{(۱)}{=} dH(d). \qquad (۲)$$

پس، عبارت $cH(c)$ مستقل از انتخاب c است و طبق (۱) اگر قرار دهیم $e = cH(c)$، آن‌گاه e یک عضو همانی راست برای G است. حال نشان می‌دهیم قانون حذف چپ در G برقرار است. اگر $ab = ad$، آن‌گاه $(ab)c = (ad)c$. در نتیجه، $b = d(cH(c)) = d$.

از آنجا که $(ae)e = (ae)e$، داریم $e = e(eH(e))$. در نتیجه، $eH(e) = e(eH(e))$. پس از حذف e از سمت چپ $H(e) = eH(e) = e$ به دست می‌آید. بنابراین، (۳) $\quad H(e) = e$. حال توجه کنیم که رابطه $(ab)e = (ae)b$ نتیجه می‌دهد

$$b = e(bH(e)) = e(be) = eb. \quad (\text{بنا به } (۳))$$

پس، e عضو همانی دو طرفه G است.

چون e همانی دو طرفه است، پس، برای هر c و d داریم $(ed)H(d) = (ec)H(c)$ که نتیجه می‌دهد $c = d(H(d)H(H(c)))$ و با جایگذاری $d = e$ در رابطه قبل به دست می‌آید (۴) $\quad H(H(c)) = c$.

پس، $c = d(H(d)c)$، یعنی، ثابت کردیم که برای هر a و b، معادله $a = bx$ در G دارای جواب $x = H(b)a$ است. اکنون آماده هستیم که شرکت پذیر بودن G را ثابت کنیم:

برای این کار فرض می‌کنیم a، b و c عضوهای دلخواهی از G باشند و طبق آنچه گفته شد x را چنان می‌گیریم که $(a(bc))x = (ab)c$. پس، $bc = b(cH(x))$ و با استفاده از قانون حذف چپ به دست می‌آید $H(x) = e$ و بنابر (۴) در نهایت $x = H(H(x)) = H(e) = e$ به دست می‌آید. پس، $x = e$ و در نتیجه، $a(bc) = (ab)c$.

از طرف دیگر برای هر a داریم $aH(a) = e$. پس، هر عضو G وارون راست دارد و به طور مشابه می‌توان نشان داد $H(a)a = e$. بنابراین، هر عضو G دارای وارون دو طرفه است و در نتیجه، $(G, \cdot)$ یک گروه است.

سی‌وهفتمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۷ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۲/۲/۲۴

پاسخ ۱.۱.۳۷. برای هر $x \in \mathbb{R} \setminus \{\circ\}$، قرار دهید $\varepsilon = \frac{|x|}{۲}$. در این صورت

$$B_\varepsilon(x) = \left\{y \in \mathbb{R} : d(x,y) < \frac{|x|}{۲}\right\} = \{x\}.$$

برای هر $\varepsilon > \circ$، داریم

$$B_\varepsilon(\circ) = \{y \in \mathbb{R} : d(y,\circ) < \varepsilon\} = (-\varepsilon, \varepsilon).$$

چون $\circ \notin \mathbb{Q}^c$، $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^c} \{x\}$ باز است. پس، $\mathbb{Q}$ بسته است.
برای هر $\varepsilon > \circ$، بازه $\circ \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ را در نظر بگیرید. به وضوح $(-\varepsilon, \varepsilon) \nsubseteq \mathbb{Q}$، پس، $\mathbb{Q}$ باز نیست.

پاسخ ۲.۱.۳۷. چون $|G| = n$، برای هر $x \in G$، داریم

$$x^n = e. \qquad (*)$$

از طرفی بنا به قضیه اویلر، اگر a و n دو عدد طبیعی باشند که $(a,n) = ۱$، آن‌گاه $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$ که در آن φ تابع اویلر است. حال چون n فرد است، داریم $(۲,n) = ۱$. پس، بنا به قضیه اویلر $۲^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$، یعنی

$n|۲^{\varphi(n)}-۱$. بنا به $(*)$، برای هر $x\in G$، داریم $x^{۲^{\varphi(n)}-۱}=e$ و لذا، برای هر x، $x^{۲^{\varphi(n)}}=x$.

پاسخ ۳.۱.۳۷. الف) برای $k=3$ به راحتی دیده می‌شود که $x=y=۱$ جواب معادله است.

ب)قرار می‌دهیم (x,y) ب.م.م$=d$. پس، اعداد m و n طبیعی وجود دارد که $(m,n)=۱$ ب.م.م، $y=nd$ و $x=md$. با قرار دادن در معادله به دست می‌آوریم

$$m^۲d^۲-kmnd^۲+n^۲d^۲+md=۰$$

که ایجاب می‌کند $d|m$، یعنی، عدد طبیعی a وجود دارد که $m=ad$. بنابراین،

$$a^۲d^۴-kand^۳+n^۲d^۲+ad^۲=۰.$$

از حذف $d^۲$ از این معادله نتیجه می‌گیریم که $a|n^۲$. اما $(m,n)=۱$ ب.م.م و همچنین $a|m$ که ایجاب می‌کنند $a=۱$. اکنون معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$d^۲-knd+n^۲+۱=۰.$$

برای این که معادله اخیر دارای جواب‌های طبیعی باشد، باید $\Delta=k^۲n^۲-۴(n^۲+۱)$ مربع کاملی مانند $t^۲$ باشد، یعنی، $(k^۲-۴)n^۲=t^۲+۴$. حال اگر k عدد فردی باشد که بر ۳ بخش‌پذیر نیست، خواهیم داشت

$$(k^۲-۴)n^۲\equiv ۰ \pmod{۳}.$$

اما $t^۲+۴\equiv ۰ \pmod{۳}$ امکان ندارد، زیرا

$$t^۲+۴\equiv t^۲+۱\equiv ۱ \text{ یا } ۲ \pmod{۳}.$$

بنابراین، برای تمام kهای فردی که بر ۳ بخش‌پذیر نیست، معادله جواب طبیعی ندارد.

پاسخ ۴.۱.۳۷. فرض می‌کنیم $a\in R$ و a را به صورت ضرب دو عضو می‌نویسیم. سپس هر یک از آن دو

عضو را هم به صورت ضرب دو عضو دیگر R نوشته و این فرآیند را ادامه می‌دهیم. بنابراین، عضو a را می‌توان به صورت حاصلضرب ۲ عضو، سپس حاصلضرب ۴ عضو، حاصلضرب ۸ عضو و الی آخر نوشت. از آنجا که R متناهی است، عضوی چون $y \in R$ و اعداد طبیعی $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ موجودند به‌طوری‌که

$$a = y^{n_1} b_1,\ \ a = y^{n_2} b_2,\ \ a = y^{n_3} b_3,\ \ldots.$$

از طرفی مجموعه $\{y^i | i > 1\} \subseteq R$ متناهی است. پس، $i < j$ موجود است که $y^i = y^j$. حال $m > i$ را چنان می‌گیریم که $a = y^m b$. دراین صورت

$$a = y^m b = y^i y^{m-i} b = y^j y^{m-i} b = y^{j-i} y^m b = y^{j-i} a،$$

یعنی، برای هر $a \in R$ عضو t_a موجود است به‌طوری‌که $a = t_a a$. حال توجه داریم که برای عناصر دلخواه a_1 و a_2 با قرار دادن $t = t_{a_1} + t_{a_2} - t_{a_1} t_{a_2}$، داریم $ta_1 = a_1$ و $ta_2 = a_2$. چون R متناهی است با ادامه همین روند عضو $t \in R$ پیدا می‌شود که به ازای هر $a \in R$، $ta = a$.

پاسخ ۵.۱.۳۷. مجموعه $A = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid \quad z_1, z_2, \ldots, z_n \in X, \quad n \geq 1\}$ را درنظر بگیرید. برای هر $F = (z_1, \ldots, z_n) \in A$، تابع $\varphi_F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_F(x) = \frac{1}{n}(d(x, z_1) + \cdots + d(x, z_n)).$$

چون φ_F پیوسته است. پس، برد آن یک بازه بسته، کران‌دار و ناتهی مانند $[a_F, b_F]$ است.
ثابت می‌کنیم $\bigcap_{F \in A} [a_F, b_F] \neq \phi$. در این صورت برای هر $\beta \in \bigcap_{F \in A} [a_F, b_F]$ حکم برقرار است.
ادعا می‌کنیم برای هر $F = (z_1, \ldots, z_n) \in A$ و $G = (y_1, \ldots, y_m) \in A$ داریم $a_F \leq b_G$. چون

$$a_F \leq \frac{1}{n}(d(y_\ell, z_1) + \ldots + d(y_\ell, z_n)) \quad (1 \leq \ell \leq m)$$

و

$$b_F \geq \frac{1}{m}(d(z_k, y_1) + \ldots + d(z_k, y_m)) \quad (1 \leq k \leq n)$$

کافی است برای یک $1 \leq k \leq n$ و یک $1 \leq \ell \leq m$ داشته باشیم

$$\frac{1}{m}(d(z_k, y_1) + \ldots + d(z_k, y_m)) \geq \frac{1}{n}(d(y_\ell, z_1) + \ldots + d(y_\ell, z_n)).$$

در غیر این صورت، برای هر $1 \leq k \leq n$ و هر $1 \leq \ell \leq m$ باید داشته باشیم

$$\frac{1}{m}(d(z_k, y_1) + \ldots + d(z_k, y_m)) < \frac{1}{n}(d(y_\ell, z_1) + \ldots + d(y_\ell, z_n)).$$

پس،

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} d(y_\ell, z_k) > \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d(z_k, y_\ell)$$

که ممکن نیست، زیرا متریک متقارن است و در نتیجه، طرفین رابطه بالا باید برابر باشند.

پاسخ ۶.۱.۳۷. فرض کنید Q_8 گروه چهارگان‌های[1] ۸ عضوی باشد. اگر به جای هر مهره قرمز از i، آبی از j، زرد از k و سفید از -1 قرار استفاده کنیم به راحتی می‌توان دید آرایش اولیه نظیر حالت

$$k^{3737} \quad j^{3737} \quad i^{3737} = kji = i^2 = -1$$

است و حالتی که هیچ مهره‌ای نباشد نظیر ۱ است. همچنین طبق قواعد بازی حاصلضرب اولیه در Q_8 بعد از انجام هر حرکت ثابت می‌ماند. زیرا

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad j^2 = -1.$$

در نتیجه، نمی‌توان به حالت هیچ مهره رسید.

۲.۳۷ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۲/۲/۲۵

[1] Quaternion

پاسخ ۱.۲.۳۷. الف)

$$
\begin{aligned}
f(kx)-f(x) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(kx)^n - \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(k^n-۱)x^n \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} k a_{n-۱} x^n \\
&= kx\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n \\
&= kxf(x).
\end{aligned}
$$

که تساوی سوم از رابطه بازگشتی برای a_n و این مطلب که $k^\circ - ۱ = \circ$ به دست می‌آید.

ب) با توجه به قسمت (الف)

$$f(kx) = f(x)(۱+kx). \qquad (*)$$

اگر قرار دهیم $x = -\frac{۱}{k}$، عبارت داخل پرانتز در سمت راست تساوی برابر صفر خواهد بود و در نتیجه، $\circ = f(x \times -\frac{۱}{k}) = f(-۱)$. به وضوح تساوی $(*)$ نتیجه می‌دهد که اگر x ریشه تابع باشد، kx نیز ریشه تابع است. در نتیجه، $-k^n$ برای nهای مختلف ریشه f هستند.

ادعا می‌کنیم f ریشه دیگری ندارد. اگر x ریشه‌ای به جز ریشه‌های ذکر شده باشد، $\frac{x_۱}{k^n}$ برای هر n طبیعی نیز ریشه است. عبارت داخل پرانتز در سمت راست معادله هیچ وقت صفر نمی‌شود و در نتیجه، هر عددی که ریشه f باشد، $\frac{۱}{k}$ آن نیز ریشه f است. اما چون $k > ۱$، $\frac{x_۱}{k^n}$ وقتی n به بینهایت میل کند به صفر میل می‌کند و از پیوستگی f، نتیجه می‌شود که $f(\circ) = \circ$. اما $f(\circ) = a_\circ = ۱ \neq \circ$. پس، f ریشه‌ای به جز موارد ذکر شده ندارد.

پاسخ ۲.۲.۳۷. راه‌حل اول : با فرض $A^۲ = I$، چندجمله‌ای کمین A، چندجمله‌ای $x^۲ - ۱$ را عاد می‌کند. بنابراین، چندجمله‌ای کمین A به‌طور کامل روی $\mathbb{R}$ تجزیه می‌شود و ریشه تکراری ندارد. بنابراین، A

قطری‌پذیر است، یعنی، ماتریس وارون‌پذیر P روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$PAP^{-۱} = \begin{bmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix}$$

که در آن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

از شرط $A^{۲} = I$ نتیجه می‌شود $\alpha, \beta \in \{۱, -۱\}$ و از شرط $\det A = ۱$ نتیجه می‌شود α, β یا هر دو برابر با ۱ یا هردو برابر با ۱− هستند. بنابراین، ماتریس A دو انتخاب دارد: $A = I$ و $A = -I$.

راه‌حل دوم : فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. از آنجا که هر ماتریس در چندجمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند، داریم

$$A^{۲} - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I = ۰،$$

یعنی، $\operatorname{tr}(A)A = (۱ + \det(A))I$. با جایگذاری داریم

$$(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ + ad - bc & ۰ \\ ۰ & ۱ + ad - bc \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

در نتیجه، $a^{۲} + bc = ۱ = d^{۲} + bc$. پس، $a = \pm d$. اما حالت $a = -d$ ممکن نیست، چرا که به همراه $\det(A) = ۱$ نتیجه می‌دهد $a^{۲} + bc = -۱$ که با $a^{۲} + bc = ۱$ تناقض دارد. پس، $a = d$ و دوباره از رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود $۲ad = ۱ + ad - bc$، یعنی، $ad + bc = ۱$ و با توجه به رابطه $ad - bc = \det(A) = ۱$، نتیجه می‌گیریم $ad = ۱$. از طرف دیگر $(*)$ نتیجه می‌دهد $bd = dc = ۰$ که با ضرب طرفین در a بدست می‌آید $b = c = ۰$. پس، $A = \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ و چون $A^{۲} = I$،

داریم $a^{۲} = ۱$، یعنی، $a = \pm ۱$. بنابراین، برای A فقط دو انتخاب وجود دارد: $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$.

پاسخ ۳.۲.۳۷. چون f از پایین کران‌دار است. پس، $\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^{۲}} f(x)$ یک عدد حقیقی است. دنباله $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ موجود است که $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$.

برای هر $n, m \geq ۱$، قرار دهید $x = x_n$، $y = x_m$، $\lambda = \frac{۱}{۲}$. داریم

$$\alpha \leq f(\frac{x_n + x_m}{۲}) \leq \frac{۱}{۲} f(x_n) + \frac{۱}{۲} f(x_m) - \frac{۱}{۴} \|x_n - x_m\|^{۲}.$$

پس، $\|x_n - x_m\|^{۲} \leq \frac{۱}{۲}(f(x_n) - \alpha) + \frac{۱}{۲}(f(x_m) - \alpha)$ و با میل دادن m و n به سمت $+\infty$ نتیجه می‌شود که دنباله $\{x_n\}$ کشی است. چون $\mathbb{R}^{۲}$ کامل است، $x \in \mathbb{R}^{۲}$ موجود است که $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$. ولی f پیوسته است (هر تابع محدب روی $\mathbb{R}^{۲}$ پیوسته است). بنابراین،

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)،$$

یعنی، f مقدار کمینه خود را در x می‌گیرد.

حال اگر f در x' نیز مقدار کمینه خود را اتخاذ کند، آن‌گاه

$$\alpha \leq f(\frac{x + x'}{۲}) \leq \frac{۱}{۲} f(x) + \frac{۱}{۲} f(x') - \frac{۱}{۴} \|x - x'\|^{۲} = \alpha - \frac{۱}{۴} \|x - x'\|^{۲}.$$

پس، $\frac{۱}{۴} \|x - x'\|^{۲} \leq ۰$، یعنی، $x = x'$.

پاسخ ۴.۲.۳۷. چون f تحلیلی است. پس، تابع $\overline{f(\bar{z})}$ نیز تحلیلی است. با تغییر متغیر $z = e^{it}$ داریم

$ie^{it}dt = dz$. پس، $dt = \frac{dz}{iz}$. بنابراین، اگر γ دایره واحد به مرکز مبدا باشد، بنا به فرمول انتگرال کشی داریم

$$\int_{۰}^{۲\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{-it})}dt = \int_{\gamma} \frac{f(z)\overline{f(\overline{z})}}{iz}dz = \frac{۲\pi i}{i}f(۰)\overline{f(۰)} = ۲\pi|f(۰)|^{۲} \geq ۲\pi \geq ۴.$$

پاسخ ۵.۲.۳۷. ابتدا گزاره زیر را اثبات می‌کنیم:

اگر $y \subseteq X$ و $|Y| \geq ۲$، آن‌گاه عضوی از S وجود دارد که شامل تمام اعضای Y به جز دقیقاً یکی از آن‌ها است.

اثبات به استقرا روی $|Y|$ انجام می‌شود. برای $|Y| = ۲$ با توجه به خاصیت S، نتیجه روشن است. برای $|Y| > ۲$، عضوی از Y مانند $y_۱$ را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض استقرا، عضوی مانند A از S وجود دارد که شامل تمام اعضای $Y - \{y_۱\}$ به جز عضوی مانند $y_۲$ است. اگر $y_۱ \in A$، باشد، همان عضو مطلوب S است. اگر $y_۱ \notin A$، عضوی از S مانند B وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از $y_۱$ یا $y_۲$ می‌باشد. اکنون عضو $A \cup B$ از S شامل تمام اعضای Y به جز دقیقاً یکی از $y_۱$ یا $y_۲$ خواهد بود.

حال اگر گزاره فوق را برای $A_۰ = X$ به کار ببریم، عضوی از S مانند $A_۱$ وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از اعضای X نیست که نام آن را $x_۱$ می‌گذاریم. برای $i < n - ۱$، فرض کنید $A_۱, \ldots, A_i$ و $x_۱, \ldots, x_i$ چنان انتخاب شده باشد که A_i شامل تمام اعضای $A_{i-۱}$ به جز x_i باشد. حال $A_{i+۱}$ را طوری از S انتخاب می‌کنیم که شامل تمام اعضای A_i به جز یکی از آن‌ها باشد که نام آن را $x_{i+۱}$ می‌گذاریم. اعضای $A_۱, \ldots, A_{n-۱}$ که به این صورت انتخاب می‌شوند، متمایزند، زیرا برای $۱ < i < n$، داریم $x_i \notin A_i$. اما $x_i \in \cap_{j<i} A_j$. همچنین $|A_i| \geq n - i$. بنابراین، داریم

$$\sum_{A \in S} |A| \geq |A_۱| + \cdots + |A_{n-۱}| \geq n - ۱ + \cdots + ۲ + ۱ = \frac{n(n-۱)}{۲}.$$

پاسخ ۶.۲.۳۷. فرض کنید گروه G مثال نقضی برای حکم با کمترین تعداد عضو باشد. نتیجه می‌شود، همه زیرگروه‌های بیشین G، آبلی هستند. نشان می‌دهیم هر زیرگروه بیشین M از G غیرنرمال است. در واقع اگر M نرمال باشد، با درنظر گرفتن عضو $a \in G \backslash M$ نتیجه می‌شود $G = \langle M, a \rangle$، یعنی، گروه تولید شده به‌وسیله a و M برابر با G می‌شود. حال عضو $g \in M$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که فرض کرده‌ایم M نرمال است، نتیجه می‌شود $aga^{-۱} \in M$. اگر $aga^{-۱} \neq g$ با قرار دادن $h = aga^{-۱}$ نتیجه می‌شود

عناصر با خواص ذکر شده وجود دارند که متناقض با فرض خلف است. اگر برای هر $g \in M$، $aga^{-1} = g$ در این صورت $G = \langle M, a \rangle$ آبلی می‌شود که متناقض با فرض است. پس، هر زیرگروه بیشین از G غیر نرمال است.

نشان می‌دهیم $Z = Z(G)$ (مرکز G) زیرمجموعه هر زیرگروه بیشین M از G است. در غیر این صورت خواهیم داشت $ZM = G$ و G آبلی می‌شود که متناقض با فرض است. از اینجا نتیجه می‌شود برای هر دو زیرگروه بیشین متمایز M و M' از G داریم $M \cap M' = Z$. در واقع، هر عضو $M \cap M'$ با توجه به آبلی بودن M و M' با همه عناصر M و M' جابجا می‌شود. بنابراین، با هر عضو $G = \langle M, M' \rangle$ جابجا می‌شود. پس، در مرکز G قرار دارد.

حال گروه $H = G/Z$ را در نظر می‌گیریم. دقت کنید که H گروه از مرتبه اول نیست. پس، دارای زیرگروه بیشین غیربدیهی است. با توجه به مطالب بالا، اشتراک هر دو زیرگروه بیشین متمایز H بدیهی است. فرض کنید $N_۱, \ldots, N_s$ همه زیرگروه‌های بیشین و نامزدوج از H باشند و قرار می‌دهیم

$$h = |H|, \quad h_i = |N_i|, \quad i = ۱, \ldots, s.$$

تعداد زیرگروه‌های بیشین از H که با N_i مزدوج هستند برابر با h/h_i است و تعداد اعضای غیرهمانی در هر زیرگروه مزدوج با N_i برابر با $h_i - ۱$ است. بنابر این با شمارش اعضای H به صورت اجتماع زیرگروه‌های بیشین به رابطه

$$h = ۱ + \sum_{i=۱}^{s} h(h_i - ۱)/h_i \qquad (*)$$

می‌رسیم. ادعا می‌کنیم $s = ۱$. در واقع اگر $s \geq ۲$، رابطه $(*)$ به تناقض زیر منجر می‌شود:

$$h \geq ۱ + h(\frac{h_۱ - ۱}{h_۱} + \frac{h_۲ - ۱}{h_۲}) \geq ۱ + h.$$

بنابراین، $s = ۱$. پس،

$$h = ۱ + h(h_۱ - ۱)/h_۱.$$

که نتیجه می‌دهد $h = h_۱$ که تناقض است.

سی‌وهشتمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۸ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۳/۲/۲۳

پاسخ ۱.۱.۳۸. به روش برهان خلف، فرض کنیم $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ اعداد گنگ باشند که مجموع هر دوتای متمایز آن‌ها گویا است. پس، $x_۱+x_۲$، $x_۱+x_۳$ و $x_۲+x_۳$ هر سه گویا هستند. بنابراین، $x_۱$ هم گویا است چون $x_۱=\frac{۱}{۲}\Big((x_۱+x_۲)+(x_۱+x_۳)-(x_۲+x_۳)\Big)$.

پاسخ ۲.۱.۳۸. ادعا می‌کنیم هر زیرمجموعه از X بسته است. فرض کنیم A زیرمجموعه دلخواهی از X و $x\in\overline{A}$ باشد. پس، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A وجود دارد که $x_n\to x$. اما با توجه به فرض مسأله داریم $x\in\{x_n : n\geq ۱\}\subseteq A$. در نتیجه، $x\in A$. لذا، A بسته است.

اکنون فرض کنیم $x_۰$ عضوی از X باشد. چون $\{x_۰\}$ و $X\setminus\{x_۰\}$ بسته و مجزا[۱] هستند. پس، منفک، یعنی، از هم جدا شده‌اند.[۲] بنابراین، با توجه به همبند بودن X باید داشته باشیم $X\setminus\{x_۰\}=\varnothing$. در نتیجه، $X=\{x_۰\}$

پاسخ ۳.۱.۳۸. فرض کنید R جا به جایی و یکدار، $|R|=p^۳$ و $|zd(R)|$ توانی از p باشد. اگر R متناهی باشد، آن‌گاه هر عضو یا یکه است یا مقسوم‌علیه صفر است. به روش برهان خلف، فرض می‌کنیم $M_۱$ و

[2]disjoint
[2]separated

$M_۲$ دو ایده‌آل بیشین R باشند. واضح است که $|M_۱| \leq p^۲$ و $|M_۲| \leq p^۲$ هر دو توانی از p هستند. اگر $M_۱ \cap M_۲ = (۰)$، آن‌گاه بنا به قضیه باقیمانده چینی $R \simeq \frac{R}{M_۱} \times \frac{R}{M_۲}$. در این حالت تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر R، یعنی $|zd(R)|$، توانی از p نخواهد بود، چون در این صورت خواهیم داشت

$$|zd(R)| = |\frac{R}{M_۱} \times (۰)| + |(۰) \times \frac{R}{M_۱}| - ۱.$$

پس، $M_۱ \cap M_۲ \neq (۰)$ و لذا، $|M_۱ \cap M_۲| = p$. در نتیجه، $|M_۱| = |M_۲| = p^۲$. بنابراین،

$$|M_۱ \cup M_۲| = |M_۱| + |M_۲| - ۱ \geq p^۲ + p^۲ - p = ۲p^۲ - P = ۲(۲p - ۱) > p^۲.$$

اما اعضای $M_۱ \cup M_۲$ مقسوم‌علیه صفر هستند که تناقض است .

پاسخ ۴.۱.۳۸. الف) برای $x \in X$ و $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $a_n = d(x, f^n(x))$. برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، داریم

$$\begin{aligned} ۰ \leq a_{m+n} &= d(x, f^{m+n}(x)) \\ &\leq d(x, f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+m}(x)) \\ &= d(x, f^n(x)) + d(x, f^m(x)) \\ &= a_n + a_m. \end{aligned}$$

با تقسیم n بر m، اعداد صحیح q و r موجودند به‌طوری‌که $n = mq + r$ و $۰ \leq r < m$. $a_n \leq qa_m + a_r$ نتیجه می‌دهد که $\frac{a_n}{n} \leq \frac{qm}{n} \frac{a_m}{m} + \frac{ar}{n}$. چون $۰ \leq \frac{qm}{n} \leq ۱$ و $a_r \leq \max\{a_۱, a_۲, \dots, a_{m-۱}\}$، اگر n به بینهایت میل کند، آن‌گاه برای هر $m \geq ۱$، خواهیم داشت

$$۰ \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

حال اگر m به بینهایت میل کند، خواهیم داشت

$$۰ \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{m \to +\infty} \frac{a_m}{m}،$$

پس، $\varphi(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{d(x, f^n(x))}{n}$ موجود است.

ب) برای هر $x, y \in X$ و هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$d(x, f^n(x)) \leq d(x, y) + d(y, f^n(y)) + d(f^n(y), f^n(x)) = ۲d(x, y) + d(y, f^n(y)).$$

با تقسیم دوطرف بر n و حد گرفتن وقتی $n \to +\infty$ خواهیم داشت $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. با تعویض جای x و y داریم $\varphi(y) \leq \varphi(x)$. پس، $\varphi(x) = \varphi(y)$.

پاسخ ۵.۱.۳۸. برای دو گروه G و H تعداد همریختی‌های از G به H را با $h_G(H)$ و تعداد همریختی‌های پوشای از G به H را با $h^s_G(H)$ نمایش می‌دهیم.

به کمک مفروضات مسأله، ابتدا نشان می‌دهیم که $h^s_{G_۱}(H) = h^s_{G_۲}(H)$. این حکم را با استقرا روی مرتبه H ثابت می‌کنیم.

اگر $|H| = ۱$، در این صورت $h^s_{G_۱}(H) = h^s_{G_۲}(H) = ۱$.

اگر $|H| > ۱$، در این صورت $H_۱, H_۲, \ldots, H_m$ را زیرگروه‌های سره H می‌گیریم.

داریم

$$h_{G_۱}(H) = h^s_{G_۱}(H) + \sum_{i=۱}^{m} h^s_{G_۱}(H_i) \qquad (۱)$$

و

$$h_{G_۲}(H) = h^s_{G_۲}(H) + \sum_{i=۱}^{m} h^s_{G_۲}(H_i) \qquad (۲).$$

با توجه به مفروضات مسأله $h_{G_۱}(H) = h_{G_۲}(H)$ و از فرض استقرا برای $i = ۱, \ldots, m$، داریم $h^s_{G_۱}(H_i) = h^s_{G_۲}(H_i)$. بنابراین، روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌دهند $h^s_{G_۱}(H) = h^s_{G_۲}(H)$.

به ویژه، نتیجه می‌شود که یک همریختی پوشا از $G_۱$ به $G_۲$ و برعکس وجود دارد. بنابراین، $|G_۱| = |G_۲|$.

بنابراین، همریختی‌های پوشا از $G_۱$ به $G_۲$، یک‌به‌یک هم هستند و در نتیجه، $G_۱ \simeq G_۲$.

پاسخ ۶.۱.۳۸. فرض کنید σ جایگشتی تصادفی روی اعداد $\{۱,\dots,n\}$ باشد. قرار دهید

$$X_{ij} = \begin{cases} ۱ & a_{ij} = \sigma(j) \\ ۰ & a_{ij} \neq \sigma(j) \end{cases}.$$

می‌توان دید که اگر ماتریس A_σ این گونه تعریف شده باشد که ستون $\sigma(j)$ - ام A_σ برابر با ستون j ـ ام A باشد، آن‌گاه داریم

$$K(A_\sigma) = \sum_{i,j=۱}^{n} X_{ij}.$$

اما $\mathbb{E}[X_{ij}] = \mathbb{P}(X_i, j = ۱) = \frac{۱}{n}$ و در نتیجه، طبق خطی بودن امید ریاضی داریم

$$\mathbb{E}[K(A_\sigma)] = \sum_{i,j=۱}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}] = n.$$

بنابراین، جایگشتی مانند σ وجود دارد که $K(A_\sigma) \leq n$.

۲.۳۸ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۳/۲/۲۴

پاسخ ۱.۲.۳۸. کافی است نشان دهیم که هر زیرگروه از G که توسط ۳ عضو a، b و c تولید شده باشد توسط ۲ عضو هم تولید می‌شود. قرار می‌دهیم $H = \langle a,b \rangle$ و $K = \langle c \rangle$. اگر H دوری باشد، مسأله حل است و اگر چنین نباشد، آن‌گاه $K \ncong H$، زیرا K دوری است. همچنین $H \nsubseteq K$. چون زیرگروه یک گروه دوری، باید دوری باشد، طبق فرض، $K \subseteq H$. پس، $c \in H$ و لذا، $c = a^{-۱}abb^{-۱} \in \langle a,b \rangle$. در واقع c برحسب a و b بیان شده است. پس، زیرگروه $\langle a,b,c \rangle$ توسط a و b هم تولید می‌شود.

پاسخ ۲.۲.۳۸. بله. قرار دهید $a_n=\cos n$ و $b_n=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})$ در این صورت

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right| &= \left|\mathrm{Re}(\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{ik}})\right|\\ &= \left|\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i(n+1)}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1})\right|\\ &\le \left|\frac{e^{i(n+1)}-e^{i}}{e^{i}-1}\right|\\ &\le \frac{2}{|e^{i}-1|}\\ &= \frac{2}{\sqrt{(1-\cos 1)^{2}+\sin^{2}1}}.\end{aligned}$$

از طرفی $\{b_n\}$ نزولی است. زیرا

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \tfrac{1}{n+1}(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\tfrac{1}{\sqrt{n}}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}})\\ &< \tfrac{1}{n+1}((1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\tfrac{1}{\sqrt{n}})+\tfrac{1}{n}(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\tfrac{1}{\sqrt{n}}))\\ &= b_n.\end{aligned}$$

چون $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ و b_n دنباله میانگین‌های چزاروی آن است، داریم $b_n\to 0$. اکنون حکم از فرمول جمع‌بندی آبل نتیجه می‌شود.

پاسخ ۳.۲.۳۸. رئوس را بر حسب درجه‌شان به ترتیب نزولی $V_1,\ldots,V_{2n}$ بنامید. فرض کنید حکم برقرار نباشد، یعنی، $\deg V_1>\deg V_{2n}$. حال قرار دهید $A=\{V_1,\ldots,V_n\}$ و $B=\{V_{n+1},\ldots,V_{2n}\}$. اگر l تعداد یال‌های بین رئوس A و رئوس B باشد و e_A و e_B به ترتیب تعداد یال‌های بین رئوس A و تعداد یال‌های بین رئوس B باشد، داریم

$$\deg V_1+\cdots+\deg V_n=2e_A+l$$

و

$$\deg V_{n+۱} + \cdots + \deg V_{۲n} = ۲e_B + l.$$

با توجه به نحوه شماره‌گذاری و این فرض که $\deg V_۱ > \deg V_{۲n}$، داریم $۲e_A + l > ۲e_b + l$. در نتیجه، $e_A > e_B$ که خلاف فرض است.

پاسخ ۴.۲.۳۸. پایه‌ای مانند $\{w_۱, \ldots, w_m\}$ از W را در نظر بگیرید. هر عضو $x \in W \cap P$ را می‌توان به صورت

$$x = x_۱ w_۱ + \cdots + x_m w_m \ , \ x_i \in F \tag{۱}$$

نوشت. همچنین می‌توان نوشت

$$w_i = \mu_{i۱} e_۱ + \cdots + \mu_{in} e_n, \quad \mu_{ij} \in F, \quad i = ۱, \ldots, m \tag{۲}$$

و

$$x = \lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i = ۰, ۱. \tag{۳}$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) به دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \mu_{۱۱} x_۱ + \mu_{۲۱} x_۲ + \cdots + \mu_{m۱} x_m = \lambda_۱ \\ \mu_{۱۲} x_۱ + \mu_{۲۲} x_۲ + \cdots + \mu_{m۲} x_m = \lambda_۲ \\ \vdots \\ \mu_{۱n} x_۱ + \mu_{۲n} x_۲ + \cdots + \mu_{mn} x_m = \lambda_n \end{cases}$$

می‌رسیم. رتبه این دستگاه با توجه به روابط (۲) برابر با m است. بنابراین، $x_۱, \ldots, x_m$ از m تا از این معادلات

به طور کامل به دست می‌آیند و چون طرف دوم این m معادله حداکثر ۲^m انتخاب دارد، حداکثر ۲^m جواب برای $(x_۱, \dots, x_m)$ به دست می‌آید و از رابطه (۱)، حکم نتیجه می‌شود.

پاسخ ۵.۲.۳۸. اگر $a = b$، آن‌گاه $۲a^۲ + ۱ = ca^۲$ که ایجاب می‌کند $a = ۱$ و $c = ۳$. اگر $a \neq b$ بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $b < a$. فرض کنید (a, b, c) جوابی با $b < a$ و با کمترین مقدار ممکن برای $a + b$ باشد. اگر قرار دهیم $a' = b$ و $b' = bc - \alpha$، آن‌گاه (a', b', c') نیز جوابی از معادله خواهد بود. از طرفی داریم

$$b' = bc - a = \frac{b^۲ + ۱}{a} \leq \frac{b(b + ۱)}{a} \leq a' \qquad (*)$$

و همچنین $a' = b < a$ و $۰ < a' < b$. چون $a' + b' < a + b$ و با توجه به این که $a + b$ کمترین مقدار ممکن در بین جواب‌های با $b < a$ بوده است، لازم می‌آید که $b' = a'$. حال (a', b', c) جوابی از معادله با $a' = b'$ است که مانند بالا ایجاب می‌کند $c = ۳$.

پاسخ ۶.۲.۳۸. مرز $\mathbb{D}$ فشرده و تابع $z \mapsto \mathrm{Re}(\bar{z} f(z))$ پیوسته است. پس،

$$۰ < m = \min \{\mathrm{Re}(\bar{z} f(z)) : |z| = ۱\}.$$

اکنون برای هر z که $|z| = ۱$ اعداد مختلط $\bar{z} f(z)$ و $\bar{z} f(z) - m$ دارای بخش‌های موهومی برابرند در حالی که بخش حقیقی عدد دوم کوچک‌تر است. پس،

$$|\bar{z} f(z) - m| < |\bar{z} f(z)|.$$

با ضرب دو طرف در $|z|$ که $|z| = ۱$ است، داریم

$$|f(z) - mz| < |f(z)|.$$

اکنون بنابه قضیه روشه، تعداد ریشه‌های $f(z)$ با تعداد ریشه‌های $g(z) = mz$ درون $\mathbb{D}$ برابر است، یعنی، f دقیقاً یک ریشه دارد و آن ریشه ساده است.

سی‌ونهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۳۹ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۴/۲/۲۲

پاسخ ۱.۱.۳۹. فرض کنید f تابعی باشد که برای هر $x \in X$ ، داشته باشیم $f(\{x\}) = ۰$ ، در این صورت، برای هر $A \in P(X)$ خواهیم داشت $f(A) = ۰$. زیرا در غیر اینصورت، فرض کنید A مجموعه‌ای با کمترین تعداد عضو ممکن باشد که $f(A) \neq ۰$ و $y \in A$، در این صورت داریم

$$f(A \setminus \{y\}) + f(\{y\}) = f(A).$$

در نتیجه، $f(A \setminus \{y\}) = ۱$ که با انتخاب A در تناقض است. بنابراین، در این حالت f تابع ثابت صفر است. اکنون فرض کنیم برای یک $a \in X$ داشته باشیم $f(\{a\}) = 1$. اگر $b \in X$ و $b \neq a$، آن‌گاه

$$۱ \geq f(\{a,b\}) = f(\{a\}) + f(\{b\}) = ۱ + f(\{b\}).$$

پس، $f(\{b\}) = ۰$. اکنون ادعا می‌کنیم که تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(A) = \begin{cases} ۱ & a \in A \\ ۰ & a \notin A \end{cases}$$

اگر $a \in A$، آن‌گاه
$$f(A) = f(A \setminus \{a\}) + f(\{a\}) \geq ۱.$$
پس، $f(A) = ۱$. اگر $a \notin A$، آن‌گاه
$$۱ \geq f(A \cup \{a\}) = f(A) + f(\{a\}) = f(A) + ۱.$$
پس، $f(A) = ۰$. با عضوگیری می‌توان به سادگی مشاهده کرد که تابع f با ضابطه فوق در شرط مسأله صدق می‌کند. پس، علاوه بر تابع ثابت صفر، برای هر $a \in X$ یک چنین تابعی وجود دارد، یعنی، تعداد $n+۱$ تابع با این خاصیت موجود است.

پاسخ ۲.۱.۳۹. فرض کنید $B_r(a)$ گوی مورد نظر باشد. اگر نقطه a خارج از خم γ باشد، هر تابع تحلیلی g پاسخ مسأله است. زیرا هر دو طرف معادله برابر صفر است.
اگر نقطه a درون خم γ باشد، با توجه به فرمول انتگرالی کشی و بسط تیلور تابع f، برای هر $z \in B_r(a)$ داریم
$$f(z) = \sum_{x=۰}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$
و
$$a_n = \frac{۱}{۲\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots.$$
کافی است قرار دهیم $g(z) = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n \sqrt{n+۱}(z-a)^n$. از آنجا که $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n+۱}} = ۱$، شعاع همگرایی این سری نیز حداقل برابر r است، یعنی، g روی گوی $B_r(a)$ تحلیلی است و برای هر n داریم
$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^n} dz = ۲\pi i\, a_{n-۱} \sqrt{n} = \int_\gamma \frac{\sqrt{n} f(z)}{(z-a)^n} dz.$$

پاسخ ۳.۱.۳۹. فرض می‌کنیم $f \neq g$. اگر $f = ۰$، آن‌گاه به ازای هر $r \in R$، داریم $|g(r)| = |f(r)| = ۰$. لذا، $g = ۰$ که تناقض است زیرا $f \neq g$. پس، $f \neq ۰$ و به طریق مشابه $g \neq ۰$. ادعا می‌کنیم
$$f(۱) = g(۱) = ۱.$$

داریم $f(۱)^۲ = f(۱ \times ۱) = f(۱)$. در نتیجه، $f(۱)(۱ - f(۱)) = ۰$، یعنی، $f(۱) = ۰$. اگر $f(۱) = ۰$، آن‌گاه به ازای هر $r \in R$، $f(r) = ۰$. لذا، $f = ۰$ که تناقض است. پس، $f(۱) = g(۱) = ۱$. حال به ازای هر $r \in R$، داریم

$$\begin{cases} |f(r)| = |g(r)| \\ \\ |f(r+۱)| = |g(r+۱)| \end{cases}$$

لذا، $|f(r)+۱| = |g(r)+۱|$. بنابراین، $|f(r)+۱|^۲ - |f(r)|^۲ = |g(r)+۱|^۲ - |g(r)|^۲$. در نتیجه، $۲\,\mathrm{Re}(f(r)) = ۲\mathrm{Re}(g(r))$. پس، به ازای هر $r \in R$، داریم $\mathrm{Re}(f(r)) = \mathrm{Re}(g(r))$. با توجه به این‌که $|f(r)| = |g(r)|$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $r \in R$، $f(r) = g(r)$ یا $f(r) = \overline{g(r)}$.
حال اگر قرار دهیم:

$$A = \{r \in R \mid f(r) = g(r)\}$$

و

$$B = \left\{r \in R \mid f(r) = \overline{g(r)}\right\},$$

آن‌گاه A و B زیرگروه‌های $(R,+)$ بوده و $R = A \cup B$ و لذا، $A = R$ یا $B = R$. اگر $A = R$، آن‌گاه $f = g$ که تناقض است. پس، $B = R$ و لذا، $f = \overline{g}$.

پاسخ ۴.۱.۳۹. فرض کنید $f_۱$ و $f_۲$ دو تابع خوب و g یک تابع پیوسته باشد. چون

$$\begin{aligned} &\{x \in X : (f_۱(x) + f_۲(x))g(x) = ۰\} \\ &\subseteq \left\{x \in X : f_۱(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\right\} \cup \left\{x \in X : f_۲(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\right\} \end{aligned}$$

و مجموعه سمت چپ یک مجموعه بسته است، کافی است ثابت کنیم، برای هر تابع خوب f مجموعه $\left\{x \in X : f(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\right\}$ فشرده است.

فرض کنید

$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{۱}{t} & t\geq \frac{۱}{۲}\\ ۲ & t<\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

در اینصورت $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است و $\varphi(t)t=۱$ اگر و تنها اگر $t\leq\frac{۱}{۲}$. اکنون

$$\left\{x\in X: f(x)g(x)\geq\frac{۱}{۲}\right\}=\{x\in X:\varphi(f(x)g(x))g(x)f(x)=۱\}.$$

چون $\varphi(fg)g$ پیوسته و f خوب است. پس، این مجموعه فشرده است.

پاسخ ۵.۱.۳۹. چون تابع $\sin x$ بر فاصله $(۰,\pi)$ مثبت است و $\int_۰^\pi f(x)\sin x dx=۰$، لازم می‌آید که f ریشه ای مانند $x_۰$ در این فاصله داشته باشد. داریم

$$\int_۰^\pi f(x)\sin(x-x_۰)dx=\int_۰^\pi f(x)(\sin x\cos x_۰-\cos x\sin x_۰)dx=۰.$$

در نتیجه،

$$\int_۰^{x_۰} f(x)(\sin(x-x_۰)+\int_{x_۰}^\pi f(x)\sin(x-x_۰)=\int_۰^\pi f(x)\sin(x-x_۰)dx=۰.$$

حال اگر $x_۰$ تنها ریشه f در فاصله $[۰,\pi]$ باشد،

الف) اگر f در قبل و بعد از $x_۰$ همواره مثبت باشد، آن‌گاه $\int_۰^\pi f(x)\sin x dx>۰$؛

ب) اگر f در قبل و بعد از $x_۰$ همواره منفی باشد، آن‌گاه $\int_۰^\pi f(x)\sin x dx<۰$؛

ج) اگر f قبل از $x_۰$ منفی و بعد از $x_۰$ مثبت باشد، آن‌گاه $\int_۰^\pi f(x)\sin(x-x_۰)xd>۰$ و $\int_۰^{x_۰} f(x)\sin(x-x_۰)>۰$. پس، $\int_۰^\pi f(x)\sin x dx>۰$؛

د) اگر f قبل از $x_۰$ مثبت و بعد از $x_۰$ منفی باشد، آن‌گاه مشابه حالت قبل $\int_۰^\pi f(x)\sin xd<۰$.

اما هیچ‌کدام امکان پذیر نیست.

پاسخ ۶.۱.۳۹. ادعا می‌کنیم که جواب $\left[\frac{n}{۲}\right]$ است. وقتی که $n = ۲m$ زوج باشد، زیرفضای

$$V = \{(w_۱, w_۱ i, \ldots, w_m, w_m i) : i \in \mathbb{C}\}$$

و وقتی که $n = ۲m + ۱$ زیرفضای

$$V\, \{(w_۱, w_۱ i, \ldots, w_m, w_m i, ۰) : w_i \in \mathbb{C}\}$$

زیرفضایی از بعد $\left[\frac{n}{۲}\right]$، دارای خاصیت مطلوب هستند.

برای تکمیل اثبات، کافی است ثابت کنیم که هیچ زیرفضای W از $\mathbb{C}^n$ از بعد بزرگتراز $\frac{n}{۲}$، مشمول در مجموعه $\left\{(z_۱, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_۱^۲ + \cdots + z_n^۲ = ۰\right\}$ نیست. فرض کنید W چنین زیرفضایی باشد. بنابراین، برای هر $u \in W$ داریم $u \cdot u = ۰$. در اینجا ضرب دو بردار $u = (a_۱, \ldots, a_n)$ و $v = (b_۱, \ldots, b_۲)$، را $u \cdot v = a_۱ b_۱ + \ldots + a_n b_n$ تعریف می‌شود. ادعا می‌کنیم برای هر $u, v \in W$، داریم $u \cdot v = ۰$. این مطلب از رابطه $۰ = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v\cdot v + ۲u\cdot v$ نتیجه می‌شود. قرار می‌دهیم

$$W' = \{u \in \mathbb{C}^n : u \cdot w = ۰ \forall w \in W\}.$$

بنابراین، $W \subseteq W'$. همچنین داریم $\dim W + \dim W' = n$.

(کافی است پایه $w_۱, \ldots, w_m$ از W درنظر گرفته شود، در اینصورت

$$W' = \{u = (z_۱, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : u \cdot w_۱ = ۰, \ldots, u \cdot w_m = ۰\}.$$

بنابراین، یک دستگاه خطی m معادله و n مجهول بدست می‌آید و با بکار بردن قضیه رتبه داریم $\dim W' = n - m$.)

اما چون $W \subseteq W'$، داریم

$$n = \dim W + \dim W' \geq ۲ \dim W.$$

پس، $\dim W \leq \frac{n}{۲}$.

۲.۳۹ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۴/۲/۲۳

پاسخ ۱.۲.۳۹. فرض کنید $X = \left\{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{۰\}$ و

$$d(x,y) = \begin{cases} x+y & x \neq y \text{ اگر} \\ ۰ & x = y \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت، (X,d) یک فضای متریک است که ۰ نقطه حدی آن است. همچنین، برای هر $x \in X$ و $r > ۰$، گوی باز $B_r(x)$ یا یک مجموعه تک عضوی است و یا $N \geq ۱$ وجود دارد که $B_r(x) = \left\{\frac{۱}{n} : n \geq N\right\} \cup \{۰, x\}$. در هر دو حالت گوی باز $B_r(x)$ یک مجموعه بسته است.

پاسخ ۲.۲.۳۹. قرار می‌دهیم $I = \left\{a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n \,\middle|\, n \geq ۲, a_i \in F\right\}$. نشان می‌دهیم I یک ایده‌آل R است که اصلی نیست. در حقیقت اگر I اصلی باشد و توسط $f(x)$ تولید شود و چون $x^۲ \in I = (f(x))$، آن‌گاه $g(x) \in R$ موجود است که $x^۲ = g(x)f(x)$. چون $\deg f(x) \geq ۲$، لذا $g(x) = a$ ثابت است و در نتیجه، $x^۲ = af(x)$. بنابراین، $I = (x^۲)$. اما به وضوح $x^۳ \notin (x^۲)$ ولی $x^۳ \in I$ که تناقض است.

پاسخ ۳.۲.۳۹. راه‌حل‌های بسیاری برای این کار وجود دارد. برای مثال ابتدا قرار می‌دهیم

$$۲!, ۲, ۳!, ۳, ۴!, ۴, \ldots$$

یعنی، این دنباله برای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ به‌صورت $a_{۲n-۱} = (n+۱)!$ و $a_{۲n} = n+۱$ تعریف می‌شود. معلوم است که در این دنباله هیچ دو جمله‌ای متوالی نسبت به هم اول نیستند. زیرا دوجمله متوالی به‌صورت $k!, k$ و یا $k, (k+۱)!$ با $k \geq ۲$ می‌باشند. همچنین توجه می‌کنیم که در دنباله فوق اگر هر زیردنباله از جملات زوج راحذف کنیم، مجدداً در دنباله باقیمانده هیچ دو جمله متوالی نسبت به هم اول نخواهند بود زیرا، پس از حذف تعدادی از جملات زوج، جملات فردی از دنباله $\{a_n\}$ که اکنون پشت سرهم قرار می‌گیرند،

به‌صورت فاکتوریل می‌باشند.

به‌علاوه، هر عدد طبیعی بزرگتر از یک، اگر به‌صورت فاکتوریل نباشد تنها یک بار و اگر به‌صورت فاکتوریل باشد، دقیقاً دوبار در دنباله $\{a_n\}$ ظاهر می‌شود: بار اول در یک جمله فرد و بار بعدی در یک جمله زوج.

حال کافی است جملات زوج دنباله $\{a_n\}$ را که به صورت فاکتوریل هستند حذف کنیم تا دنباله‌ای بدست آید که هر عدد طبیعی بزرگتر از یک در آن یکبار ظاهر شده و هیچ دو جمله‌ای متوالی نسبت به هم اول نیستند.

پاسخ ۴.۲.۳۹. اگر G دارای یک عضو از مرتبه $۲p$ باشد، آن‌گاه حداقل $\varphi(۲p) = p - ۱$ عضو از مرتبه $۲p$ و حداقل $\varphi(p) = p - ۱$ عضو از مرتبه p خواهد داشت و حکم ثابت می‌شود. بنابراین، می‌توان فرض کرد که G هیچ عضوی از مرتبه $۲p$ ندارد.

فرض کنید $a \in G$ یک عضو از مرتبه p باشد. گروه P تولید شده بوسیله a را درنظر می‌گیریم. اگر P در G نرمال نباشد، در این صورت، یک عضو $g \in G$ وجود خواهد داشت به‌طوری‌که $P \neq gPg^{-۱}$. در این صورت

$$|P \cup gPg^{-۱}| = |P| + |gPg^{-۱}| - |P \cap gPg^{-۱}| = ۲p - ۱.$$

بنابراین، اگر عضو همانی در $P \cup gPg^{-۱}$ را کنار بگذاریم، حداقل $۲p - ۲$ عضو از مرتبه p در G وجود خواهند داشت و حکم ثابت می‌شود.

بنابراین، می‌توان فرض کرد که P در G نرمال است. فرض کنید $b \in G$، یک عضو از مرتبه ۲ باشد. از نرمال بودن P نتیجه می‌شود که $i \in \{۱, ۲, \cdots, p - ۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $bab^{-۱} = a^i$. از این رابطه، $b^۲ab^{-۲} = a^{i^۲}$ بدست می‌آید. بنابراین، $a = a^{i^۲}$. در نتیجه، $i = ۱$ یا $i = p - ۱$. اگر $i = ۱$ در اینصورت $ab = ba$ یک عضو از مرتبه $۲p$ است که تناقض است. پس، $i = p - ۱$. در نتیجه، خواهیم داشت

$$bab^{-۱} = a^{-۱}. \qquad (*)$$

فرض کنید $H = \{۱, x, y, z\}$ یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ در G باشد.

با توجه به $(*)$ داریم $xax^{-۱} = a^{-۱}$، $yay^{-۱} = a^{-۱}$ و $zaz^{-۱} = a^{-۱}$. بنابراین، خواهیم داشت

$$a^{-۱} = zaz^{-۱} = (xy)a(xy)^{-۱} = xa^{-۱}x^{-۱} = a$$

که ممکن نیست.

پاسخ ۵.۲.۳۹. قرار دهید

$$X_n = \begin{cases} ۱ & f(n) = ۰ \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|A|] &= \mathbb{E}[\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[X_n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_n = ۱) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[U_n = -n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[U_۰ = -n] = ۱. \end{aligned}$$

پاسخ ۶.۲.۳۹. فرض کنید $\mathscr{A}$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی A از X باشد که $f(A) \subseteq A$ و A اشتراکی از گوی‌های بسته باشد. خانواده $\mathscr{A}$، با ترتیب $\supseteq$ یک مجموعه مرتب جزئی است و از قضیه اشتراکی کانتور نتیجه می‌شود که اشتراک هر زنجیر از اعضای $\mathscr{A}$ عضو $\mathscr{A}$ است. پس، بنابه لم زُرن، $\mathscr{A}$ دارای عضو کمین است. فرض کنید $A_۰$ یک عضو کمین $\mathscr{A}$ باشد. ادعا می‌کنیم که $A_۰$ تک عضوی است، یعنی، f نقطه ثابت دارد. اگر $A_۰$ دارای بیش از یک عضو باشد، یک $r > ۰$ کمتر از قطر $A_۰$ وجود دارد که مجموعه $A_۱ = \{a \in A_۰ \mid A_۰ \subseteq D_r(a)\}$ ناتهی باشد. با کمک عضوگیری و این‌که f طولپا است نتیجه می‌شود که

$$A_۱ = A_۰ \cap \{D_r(a) \mid a \in A_۰\}.$$

پس، $A_۱$ نیز اشتراکی از گوی‌های بسته است و $f(A_۱) \subseteq A_۱$، یعنی، $A_۱ \in \mathscr{A}$. پس، $A_۱ = A_۰$. از طرف دیگر، برای هر $x, y \in A_۱$، داریم $x \in D_r(y)$، یعنی، $d(x,y) \le r$. پس، $\operatorname{diam} A_۱ \le r < \operatorname{diam} A_۰$ و این یک تناقض است.

چهلمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۰ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۵/۶/۳

پاسخ ۱.۱.۴۰. از بسط سمت چپ رابطه خودتوان بودن $e+f$، یعنی، $(e+f)^۲ = e+f$ داریم $e+ef+fe+f = e+f$. بنابراین، $ef+fe = ۰$. به عبارت دیگر، $ef = -fe$. در نتیجه،

$$ef = e^۲f = e(ef) = e(-fe) = -(ef)e = -(-fe)e = fe^۲ = fe،$$

یعنی، e و f باهم جابه جا می شوند. پس، $(ef)^۲ = e^۲f^۲ = ef$، یعنی، ef خودتوان است.

پاسخ ۲.۱.۴۰. فرض کنید $m = p_۱^{\alpha_۱}\dots p_k^{\alpha_k}$ و $n = p_۱^{\beta_۱}\dots p_k^{\beta_k}$، تجزیه m و n به حاصلضرب اعداد اول باشد، یعنی، $p_۱,\dots,p_k$ اعداد اول متمایز و $\alpha_۱,\dots,\alpha_k,\beta_۱,\dots,\beta_k$ اعداد صحیح و نامنفی باشند. پس،

$$\begin{aligned} d(m,n) = \log\tfrac{\sqrt{mn}}{(m,n)} \quad &= \log\prod_{i=۱}^{k} p_i^{\frac{\alpha_i+\beta_i}{۲}-\min\{\alpha_i,\beta_i\}} \\ &= \sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{۲}|\alpha_i-\beta_i|\log p_i. \end{aligned}$$

اکنون از خواص قدرمطلق، هر سه ویژگی تابع متر به سادگی نتیجه می‌شود.

پاسخ ۳.۱.۴۰. قرار می دهیم $p_n(x) = x^n + \ldots + x - ۱$. باتوجه به مقادیر $p_n(۰)$ و $p_n(۱)$ نتیجه می شود که $u_n \in (۰, ۱]$. همچنین $\{u_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای اکیداً نزولی است، زیرا داریم

$$u_{n+۱}^{n+۱} + \ldots + u_{n+۱} - ۱ = u_n^n + \cdots + u_n - ۱ = ۰.$$

تابع $p_n(x)$ روی اعداد نامنفی اکیداً صعودی است و $p_n(u_{n+۱}) = u_{n+۱}^n + \cdots + u_{n+۱} - ۱ < p(u_n)$. بنابراین، $u_{n+۱} < u_n$. از کران‌داری و یکنوایی دنباله $\{u_n\}_{n\geq ۱}$، همگرایی این دنباله نتیجه می‌شود. به‌علاوه،

$$\begin{aligned} u_n^n + \cdots + u_n - ۱ &= ۰ \\ \frac{u_n^{n+۱} - ۱}{u_n - ۱} &= ۲ \\ u_n^{n+۱} &= ۲u_n - ۱. \end{aligned}$$

با توجه به این‌که برای $n \geq ۳$، $u_n < u_۲ < u_۱ = ۱$، نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{n+۱} = ۰$. با حد گیری از طرفین تساوی قبل به دست می آوریم $\lim\limits_{n\to+\infty} ۲u_n - ۱ = ۰$، پس، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{۱}{۲}$.

پاسخ ۴.۱.۴۰. راه‌حل اول: کافی است نشان دهیم اگر $a^۲ = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$. فرض کنید $a^۲ = ۰$ و قرار دهید $S = \{m۱_R + na : m, n \in \mathbb{Z}\}$. S زیرحلقه یکدار و جابه‌جایی R است و $(|S|, |U(S)|) = ۱$.
چون S جابه‌جایی است، $\mathrm{Nil(S)}$، مجموعه عناصر پوچتوان S، ایده‌آل است. بنابراین، $|\mathrm{Nil(S)}| \mid |S|$. همچنین $۱ + \mathrm{Nil(S)}$ زیرگروه $U(S)$ است. در نتیجه، $|۱ + \mathrm{Nil(S)}| \mid |U(S)|$.
چون $|\mathrm{Nil(S)}| = |۱ + \mathrm{Nil(S)}|$ و $(|S|, |U(S)|) = ۱$، داریم $|\mathrm{Nil(S)}| = ۱$، یعنی، $\mathrm{Nil(S)} = \{۰\}$ پس، $a = ۰$.

راه‌حل دوم: فرض کنید $a^۲ = ۰$ و $a \neq ۰$. فرض کنید n مرتبه جمعی a باشد، یعنی، $na = ۰$. پس، $n \neq ۱$. فرض کنید p یک عامل اول n باشد. قرار دهید $b = \frac{n}{p}a$. در این صورت $b^۲ = ۰$ و $b \neq ۰$ و $pb = ۰$. بنابراین،

$$(۱ + b)^p = = ۱ + pb + b \text{ توانهای بالاتر } = ۱.$$

پس، $b+۱$ یک عضو وارون‌پذیر مرتبه p در $U(R)$ است. بنابراین، $p \mid |U(R)|$. همچنین، طبق فرض $p \mid |R|$ که تناقض است.

پاسخ ۵.۱.۴۰. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم دایره در صفحه مختلط و به مرکز مبدأ مختصات است. نقاط نظیر $P_۱,\dots,P_n$ در صفحه مختلط را با $z_۱,\dots,z_n$ نمایش داده و قرار می‌دهیم $g(z)=\Pi_{i=۱}^{n}(z-z_i)$. ادعا می کنیم حداقل یکی از مقادیر z_i برابر با صفر است. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت، جمله ثابت چندجمله‌ای $g(z)$ غیر صفر است.

این جمله ثابت برابر با $\alpha=(-۱)^n z_۱\cdots z_n$ است. با یک دوران می توانیم فرض کنیم که قسمت حقیقی α مثبت است.

حال فرض کنید $w_۱,\dots,w_n$، ریشه‌های n ام واحد باشند. برای $۰\leq k\leq n$ داریم

$$w_۱^k+w_۲^k+\cdots+w_n^k=\begin{cases} n & k=۰ \text{ یا } n \\ ۰ & ۱\leq k\leq n-۱ \end{cases}$$

با جایگذاری w_iها در چندجمله‌ای $g(z)$ و جمع زدن این مقادیر خواهیم داشت

$$\sum_{i=۱}^{n} g(w_i)=n+n\alpha.$$

حال از فرض مسئله بدست می‌آوریم

$$\mid \sum_{i=۱}^{n} g(w_i)\mid\leq\sum_{i=۱}^{n}\mid g(w_i)\mid\leq n.$$

لذا $|n+n\alpha|\leq n$ که با فرض این‌که قسمت حقیقی α مثبت است در تناقض است. در نتیجه، حداقل یکی از z_iها برابر با صفر است. با حذف این نقطه، همچنان شرط سوال برای بقیه نقاط برابر است. بنابراین، با تکرار این استدلال، نتیجه می‌شودکه همه z_i ها برابر با صفر هستند.

پاسخ ۶.۱.۴۰. برای هر $a,b\in\mathbb{R}^۲$، تابع $g_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $g_{a,b}(t)=f(ta+b)$ تعریف می‌کنیم.

لم ۱. برای هر $x_{\circ} \in \mathbb{R}^{۲}$، حداقل یک $u \in \mathbb{R}^{۲}$ وجود دارد به‌طوری‌که تابع $g_{u,x_{\circ}}$ ثابت است، یعنی، از هر نقطه در صفحه خطی می‌گذرد که تحدید f به آن تابع ثابت است.

اثبات لم ۱. تعریف می‌کنیم

$$A = \left\{ u \in \mathbb{R}^{۲} : u \neq \circ, g_{u,x_{\circ}} \text{ صعودی است } \right\}$$

و

$$B = \left\{ u \in \mathbb{R}^{۲} : u \neq \circ, g_{u,x_{\circ}} \text{ نزولی است } \right\}.$$

ادعا می‌کنیم $A \cap B \neq \varnothing$. فرض کنیم این طور نباشد، یعنی، $A \cap B = \varnothing$. حال طبق فرض مسئله ، $\mathbb{R}^{۲} - \{\circ\} = A \cup B$. از طرفی به دلیل پیوستگی f، مجموعه‌های A و B بسته هستند. چون اگر برای مثال $u_n \in A$ و $u_n \to u$، آن‌گاه برای هر $t_۱ \leq t_۲$، داریم

$$g_{u,x_{\circ}}(t_۱) = \lim_{n\to\infty} g_{u_n,x_{\circ}}(t_۱) \leq \lim_{n\to\infty} g_{u_n,x_{\circ}}(t_۲) \leq g_{u,x_{\circ}}(t_۲).$$

پس، $u \in A$. همچنین A و B هر دو ناتهی هستند، چون اگر $u \in A$، آن‌گاه$-u \in B$. حال چون $\mathbb{R}^{۲} - \{\circ\}$ همبند است، چنین چیزی ممکن نیست. پس، فرض غلط است و در نتیجه، $A \cap B \neq \varnothing$. حال اگر $u \in A \cap B$، تابع $g_{u,x_{\circ}}$ هم صعودی و هم نزولی است و در نتیجه، ثابت است.

لم ۲. اگر تحدید f به دو خط متقاطع $L_۱$ و $L_۲$ ثابت باشد، آن‌گاه f روی دامنه‌اش تابع ثابت است.

اثبات لم ۲. فرض کنید $x_{\circ}$ نقطه تقاطع دو خط فوق باشد. پس، f روی هر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ ثابت و برابر $f(x_{\circ})$ است. حال برای هر نقطه $y \in \mathbb{R}^{۲}$، خطی رسم کنید که دو خط فوق را در نقاط $y_۱$ و $y_۲$ قطع کند و y بین $y_۱$ و $y_۲$ باشد. اکنون بنابر فرض مسئله، $f(y)$ باید بین $f(y_۱)$ و $f(y_۲)$ باشد ولی از طرفی $f(y_۱) = f(y_۲) = f(x_{\circ})$. پس، $f(y) = f(x_{\circ})$ و در نتیجه، f تابع ثابت است.

حال به مسئله اصلی باز می‌گردیم:

بنابر لم ۱، از هر نقطه $x_{\circ}$ خطی می‌گذرد که تحدید f به آن، تابع ثابت است و بنابر لم ۲، اگر f تابعی ثابت نباشد، این خطوط گذرنده از $x_{\circ}$های مختلف، موازی هستند. پس، یا f تابعی ثابت است (که در آن صورت نیز حکم مسئله برقرار است) و یا بردار ناصفر $u_{\circ}$ وجود دارد که تحدید f به هر خط موازی $u_{\circ}$، ثابت است. حال v را برداری واحد و عمود بر $u_{\circ}$ در نظر بگیرید و تعریف کنید $h(t) = f(tv)$. اکنون برای هر $x \in \mathbb{R}^{۲}$،

داریم

$$f(x)=f\big((x.v)v+[x-(x.v)v]\big)$$

ولی از آن‌جا که $x-(x.v)v$ عمود بر v و در نتیجه، موازی u_0 است، داریم

$$f(x)=f((x.v)v)=h(x.v).$$

۲.۴۰ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۵/۶/۴

پاسخ ۱.۲.۴۰. قرار دهید $S=\langle I,A,B\rangle$. از قضیه کیلی-همیلتون به ازای هر ماتریس X از مرتبه ۲، اعداد a و b ای وجود دارد که $X^{2}+aX+bI=0$. پس، اگر $X\in S$، آن‌گاه $X^{2}\in S$. در نتیجه، $(A+B)^{2},A^{2},B^{2}\in S$. بنابراین، $BA=(A+B)^{2}-A^{2}-B^{2}-AB\in S$.

پاسخ ۲.۲.۴۰. می‌دانیم که از هر دو نقطه روی کره، دقیقاً یک دایره عظیمه می‌گذرد. (کافی است اشتراک کره با صفحه‌ای را در نظر بگیریم که از این دو نقطه و مرکز کره می‌گذرد.) حال دو نقطه از این پنج نقطه را در نظر گرفته و دایره عظیمه‌ای که از این دو نقطه می‌گذرد را رسم می‌کنیم که کره را به دو نیم کره بسته تقسیم می‌کند که در مرز مشترک‌اند. یکی از این نیم کره‌ها شامل حداقل دو نقطه از سه نقطه باقیمانده است که نیم کره مطلوب ما است.

پاسخ ۳.۲.۴۰. می‌نویسیم $b_k\leq(a_k-a_{k+1})+c_k$. با جمع زدن این جملات از $k=1$ تا $k=n$ داریم

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\leq a_1-a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}c_k.$$

پس، $\sum_{k=1}^{n}b_k\leq a_1+\sum_{k=1}^{n}c_k$. با میل دادن $n\to+\infty$ و با توجه به همگرایی سری $\sum_{k=1}^{+\infty}c_k$، همگرایی سری $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ ثابت می‌شود.

اکنون نامساوی‌های $b_k \leq (a_k - a_{k+۱}) + c_k$، از عدد $k = n$ تا عدد $k = m > n$ جمع می زنیم. داریم

$$\sum_{k=n}^{m} b_k \leq a_n - a_{m+۱} + \sum_{k=n}^{m} c_k$$

و یا

$$a_{m+۱} \leq a_n + \sum_{k=n}^{m} c_k - \sum_{k=n}^{m} b_k.$$

ابتدا وقتی $m \to +\infty$ حد می‌گیریم. داریم

$$\lim_{m\to+\infty} a_{m+۱} \leq a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} c_k - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k.$$

پس، دنباله $\{a_m\}$ کران‌دار است. اکنون وقتی $n \to +\infty$ حد می‌گیریم. داریم

$$\lim_{m\to+\infty} a_{m+۱} \leq \liminf_{m\to+\infty} a_n + ۰ - ۰$$

و این نشان می‌دهد که $\{a_n\}$ همگرا است.

پاسخ ۴.۲.۴۰. لم ۱. دقیقاً یک عدد حقیقی α وجود دارد که $\cos\alpha = \alpha$ و $\alpha \in (۰, \frac{\pi}{۲})$.

اثبات لم ۱. بنابر قضیه مقدار میانی، حداقل یک α در بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ با خاصیت بالا وجود دارد. از طرفی چون $\cos x$ در بازه $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ نزولی است، دقیقاً یک نقطه ثابت در این بازه دارد. همچنین برای $x \in [-\frac{\pi}{۲}, ۰)$، داریم $\cos x \geq ۰ > x$. برای $x < -\frac{\pi}{۲}$، داریم $x < -۱ < \cos x$ و برای $x > \frac{\pi}{۲}$، داریم $x > ۱ > \cos x$.

پس، $\cos x = x$ دقیقاً یک جواب دارد و آن جواب در بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ است.

فرض کنیم تابع f وجود داشته باشد.

لم ۲. برای α مذکور در لم (۱)، داریم $f(\alpha) = \alpha$.

اثبات لم ۲. داریم $f(f(\alpha)) = \cos\alpha = \alpha$. در نتیجه، $f(f(f(\alpha))) = f(\alpha)$ و از آنجا که $(f \circ f) = \cos$، پس، $\cos f(\alpha) = f(\alpha)$، یعنی، $f(\alpha)$ نیز یک نقطه ثابت $\cos x$ است. پس، بنابر لم(۱)، $f(\alpha) = \alpha$.

لم ۳. تابع f روی بازه $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ یک به یک است.

اثبات لم ۳. فرض کنید برای $x_۲ \neq x_۱$ در بازه $[۰, \frac{\pi}{۲}]$، داشته باشیم $f(x_۱) = f(x_۲)$، آن‌گاه

$\cos x_۱ = f(f(x_۱)) = f(f(x_۲)) = \cos x_۲$ که این با یک به یک بودن تابع $\cos x$ روی $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ در تناقض است.

حال به حل مسئله اصلی باز می‌گردیم:

بنابر لم (۳)، f روی $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ یک به یک است و چون پیوسته است، باید اکیداً یکنوا باشد. از آنجا که $f(\alpha) = \alpha$ و $\alpha \in (\circ, \frac{\pi}{۲})$، بنابر پیوستگی f، $\varepsilon > \circ$ وجود دارد که

$$\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon, f(\alpha - \varepsilon) \in (\circ, \frac{\pi}{۲}).$$

حالت اول: $f\big|_{[\circ, \frac{\pi}{۲}]}$ اکیداً صعودی است. داریم

$$\begin{aligned}
\alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad f(\alpha - \varepsilon) < f(\alpha + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \quad f(f(\alpha - \varepsilon)) < f(f(\alpha + \varepsilon)) \\
&\Rightarrow \quad \cos(\alpha - \varepsilon) < \cos(\alpha + \varepsilon).
\end{aligned}$$

که این با نزولی بودن $\cos x$ روی $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ در تناقض است.

حالت دوم:

$f\big|_{[\circ, \frac{\pi}{۲}]}$ اکیداً نزولی است. داریم

$$\begin{aligned}
\alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad f(\alpha - \varepsilon) > f(\alpha + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \quad f(f(\alpha - \varepsilon)) < f(f(\alpha + \varepsilon)) \\
&\Rightarrow \quad \cos(\alpha - \varepsilon) < \cos(\alpha + \varepsilon).
\end{aligned}$$

که باز هم با نزولی بودن $\cos x$ روی $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ در تناقض است.

پاسخ ۵.۲.۴۰. برخلاف، فرض کنیم که برای یک $n > ۱$، $۲^n - ۱ | ۳^n - ۱$. اولاً n باید عددی فرد باشد، زیرا اگر $n = ۲m$، آن‌گاه (پیمانه ۳) $۲^n = ۲^{۲m} \equiv ۱$. پس، $۳ | ۲^n - ۱$ در حالی که $۳ \nmid ۳^n - ۱$. قرار می‌دهیم $n = ۲m + ۱$ و در این صورت (پیمانه $۲^n - ۱$) $۳^n \equiv ۱$. همچنین اگر p عامل اولی از $۲^n - ۱$

باشد، نیز خواهیم داشت

$$۳^n = ۳^{۲m+۱} \equiv ۱(p \text{ پیمانه }). \qquad (*)$$

چون $p \neq ۳$، عدد صحیح x وجود دارد که $۳x \equiv ۱(p \text{ پیمانه })$. با ضرب همنهشتی $(*)$ در $x^{۲m}$ داریم $(x^m)^۲ \equiv ۳ (p \text{ پیمانه})$، یعنی، ۳ یک مانده مربعی به پیمانه p است. بنابر یکی از خواص معروف قانون تقابل مربعی، p باید به صورت $۱۲k \pm ۱$ باشد. اکنون $۲^n - ۱$ حاصلضربی از اعداد به‌صورت $۱۲k \pm ۱$ است. پس، خود نیز باید به‌صورت $۱۲k \pm ۱$ باشد.

به وضوح $۲^n - ۱ = ۱۲k - ۱$ امکان ندارد و نیز اگر $۲^n - ۱ = ۱۲k + ۱$، آن‌گاه $۲^n = ۲(۶k + ۱)$. در این صورت، باید $k = ۰$ و $n = ۱$ باشد که با فرض مسئله در تناقض است.

پاسخ ۶.۲.۴۰. فرض کنید H یک زیرگروه نامتناهی و غیرنرمال G باشد. پس، $g \in G$ وجود دارد که $gH^{-۱}g \nsubseteq H$. عضو $ghg^{-۱} = x \in gHg^{-۱} \setminus H$ را در نظر بگیرید. در این صورت $gxg^{-۱} \notin \langle x \rangle$ زیرا اگر $gxg^{-۱} = x^n$، آن‌گاه $x = g^{-۱}x^n g = (g^{-۱}xg)^n = h^n \in H$ که تناقض است. پس، $gxg^{-۱} \notin \langle x \rangle$، یعنی، $\langle x \rangle$ نرمال نیست.

اگر $gHg^{-۱} \setminus H$ نامتناهی باشد چون برای $x \in gHg^{-۱} \setminus H$، $\langle x \rangle$ غیرنرمال است و چون تعداد زیرگروه‌های غیرنرمال متناهی است، اعضای متمایز $x_۱$ و $x_۲$ و ... وجود دارند به‌طوری‌که

$$\langle x_۱ \rangle = \langle x_۲ \rangle = \langle x_۳ \rangle = \cdots .$$

بنابراین، $\langle x_۱ \rangle$ دارای تعداد نامتناهی مولد است. ولی هر گروه دوری فقط تعدادی متناهی مولد دارد و این تناقض است.

بنابراین، $|gHg^{-۱} \setminus H| < +\infty$. حال قرار دهید $gHg^{-۱} \cap H = K$ و $\alpha \in gHg^{-۱} \setminus H$. داریم

$$\alpha K \subseteq gHg^{-۱} = (gHg^{-۱} \setminus H) \cup K.$$

چون $gHg^{-۱} \setminus H$ متناهی و αK نامتناهی است، داریم $\alpha K \cap K \neq \varnothing$. پس $\alpha K = K$ و لذا، $\alpha \in H$ و این یک تناقض است.

چهل‌ویکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۱ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۶/۶/۱۴

پاسخ ۱.۱.۴۱. طبق فرض $x+y=(x+y)^{۲}=x^{۲}+xy+yx+y^{۲}=xy+yx$. در نتیجه، $xy=x(x+y)=x(xy+yx)=xyx$. پس، $xy=xyx=xyxx=۰$. به‌طورمشابه $yx=۰$. بنابراین، $x+y=xy+ux=۰$.

پاسخ ۲.۱.۴۱. گزاره را رد می‌کنیم. قرار دهید $f(x)=x^{۲}-۱$. در این صورت برای هر x داریم $f''(x)=۲\geq ۰$. همچنین $(f\circ f(x))=x^{۴}-۲x^{۲}$. که نتیجه می‌دهد $(f\circ f)''(۰)=-۴$. پس، گزاره غلط است.

پاسخ ۳.۱.۴۱. توجه کنید که $۱۳۹۶=۴\times ۳۴۹$ و ۳۴۹ یک عدد اول است. چون $G-Z(G)$ اجتماعی از همدسته‌های $Z(G)$ است، $|Z(G)|\leq|G-Z(G)|$ که نشان می‌دهد $Z(G)$ و در نتیجه، G متناهی است. حال از آنجا که $|Z(G)|$ مقسوم‌علیهی از $|G|$ است و $|G-Z(G)|=|G|-|Z(G)|$، نتیجه می‌گیریم که $|Z(G)|\mid |G-Z(G)|=۱۳۹۶=۴\times ۳۴۹$. حال حالت‌های زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:

(a) $|Z(G)|=۱$ و $|G|=۱۳۹۷$ در این صورت $|G/Z(G)|=۱۳۹۷=۱۱\times ۱۲۷$. چون $۱۱\nmid ۱۲۷-۱$ پس، $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه، G آبلی است که تناقض است.

(b) $|Z(G)|=۲$ و $|G|=۱۳۹۸$ در این صورت $|G/Z(G)|=۶۹۹=۳\times ۲۳۳$. چون

$3 \nmid 233 - 1$، $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه، G آبلی است که تناقض است.

(c) $|Z(G)| = 4$ و $|G| = 1400$. گروه $\mathbb{Z}_4 \times D_{350}$ مثالی از چنین گروهی است.

(d) $|Z(G)| = 349$ و $|G| = 5 \times 349$ در این صورت $|G/Z(G)| = 5$. پس، $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه، G آبلی است که تناقض است.

(e) $|Z(G)| = 2 \times 349$ و $|G| = 6 \times 349$. در این صورت $|G/Z(G)| = 3$. پس، $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه، G آبلی است که تناقض است.

(f) $|Z(G)| = 4 \times 349$ و $|G| = 8 \times 349$. در این صورت $|G/Z(G)| = 2$. پس، $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه، G آبلی است که تناقض است.

پاسخ ۴.۱.۴۱. فرض کنید $f(x)$ از درجه n باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد متمایز r_1 و r_2 تمام ریشه‌های دو چندجمله‌ای $f(x) - r_1$ و $f(x) - r_2$ حقیقی و با تکرری بیش از یک باشند. با تجزیه این دو چندجمله‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) - r_1 = a(x - x_1)^{d_1} \dots (x - x_k)^{d_k} \quad \text{و} \quad f(x) - r_2 = a(x - x'_1)^{d'_1} \dots (x - x'_{k'})^{d'_{k'}}.$$

با توجه به این‌که $r_1 \neq r_2$، این دو چندجمله‌ای ریشه مشترکی ندارند. همچنین چون توان‌ها حداقل ۲ هستند، داریم $k, k' \leq \frac{n}{2}$. از طرف دیگر، داریم

$$(x - x_1)^{d_1 - 1} \dots (x - x_k)^{d_k - 1} \mid (f(x) - r_1)' = f'(x)$$

و

$$(x - x'_1)^{d'_1 - 1} \dots (x - x'_{k'})^{d'_{k'} - 1} \mid (f(x) - r_2)' = f'(x).$$

دو چندجمله‌ای سمت چپ روابط قبل، از درجه‌های $n - k$ و $n - k'$ هستند. همچنین، این دو چندجمله‌ای عامل مشترکی ندارند. در نتیجه، $f'(x)$ بر حاصلضرب این دو چندجمله‌ای نیز بخش‌پذیر است ولی درجه چندجمله‌ای حاصلضرب برابر با $2n - (k + k')$ است که حداقل مقدار n دارد و با این‌که $f'(x)$ از درجه $n - 1$ است در تناقض است.

پاسخ ۵.۱.۴۱. برای $n \geq ۲$، اعداد طبیعی k_n را طوری انتخاب می‌کنیم که $k_n \geq n$ و

$$\left(\frac{n}{n-۱}\right)^{k_n} > \phi(n+۱).$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$f(z) = \phi(۲) + \sum_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{z}{n-۱}\right)^{k_n}.$$

چون $k_n \geq n$، شعاع همگرایی این سری بی‌نهایت است و در نتیجه، f تابعی تحلیلی است.
حال توجه کنید که برای $x \leq ۲$، داریم $f(x) > \phi(۲) \geq \phi(x)$، و برای $x > ۲$، اگر قرار دهیم $[x] = n_۰$، آن‌گاه

$$f(x) \geq \left(\frac{n_۰}{n_۰-۱}\right)^{k_{n_۰}} > \phi(n_۰+۱) \geq \phi(x).$$

پاسخ ۶.۱.۴۱. فرض کنید $P(۰,۰) \neq ۰$. قرار می‌دهیم $p = (x_۱, y_۱)$ و $q = (x_۲, y_۲)$. داریم

$$\begin{aligned}
P(x_۱ - x_۲, y_۱ - y_۲) &= \sum_{i,j=۰}^{n} a_{i,j}(x_۱ - x_۲)^i (y_۱ - y_۲)^j \\
&= \sum_{i,j=۰}^{n} a_{i,j} \sum_{k=۰}^{i} \binom{i}{k} x_۱^k (-x_۲)^{i-k} \sum_{l=۰}^{j} \binom{j}{l} y_۱^l (-y_۲)^{j-l} \\
&= \sum_{k,l=۰}^{n} x_۱^k y_۱^l \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=l}^{n} a_{i,j} \binom{i}{k} \binom{j}{l} (-x_۲)^{i-k} (-y_۲)^{j-l}.
\end{aligned}$$

عبارت قبل را می‌توان ضرب داخلی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^{(n+۱)^۲}$ در نظر گرفت که یکی تابعی تنها از نقطه $p = (x_۱, y_۱)$ و دیگری تابعی تنها از نقطه $q = (x_۲, y_۲)$ است. کافی است بردار $u(p) \in \mathbb{R}^{(n+۱)^۲}$ را با درایه‌های $u_{k,l}(p) = x_۱^k y_۱^l$ و بردار $v(q) \in \mathbb{R}^{(n+۱)^۲}$ را با داریه‌های

$$v_{k,l}(q) = \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=l}^{n} a_{i,j} \binom{i}{k} \binom{j}{l} (-x_۲)^{i-k} (-y_۲)^{j-l}$$

در نظر بگیریم. (با یک ترتیب دلخواه ولی یکسان برای هر دوی u و v، درایه k,lام را به یکی از مکان‌های ۱، ۲، ... و $(n+۱)^۲$ نسبت دهید.) به سادگی می‌توان دید که $P(x_۱ - x_۲, y_۱ - y_۲) = \langle u(p), v(q) \rangle$.
حال با توجه به فرض سوال، نتیجه می‌شود که برای هر دو نقطه متمایز p و q در A دو بردار $u(p)$ و $v(q)$

بر یکدیگر عمودند. به کمک این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه $\{u(p) : p \in A\}$ مستقل خطی است، زیرا اگر $\sum_{p\in A} c_p u(p) = ۰$، آن‌گاه برای هر $p \in A$ با ضرب داخلی بردار $v(p)$ در طرفین و با توجه به ناصفر بودن

$$P(۰,۰) = \langle u(p), v(p)\rangle$$

نتیجه می‌شود که c_p صفر است. بنابراین، با توجه به بعد فضای $\mathbb{R}^{(n+۱)^۲}$ نتیجه می‌شود که $|A| \le (n+۱)^۲$ که با فرض در تناقض است و حکم اثبات می‌شود.

۲.۴۱ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۶/۶/۱۵

پاسخ ۱.۲.۴۱. این ۴۱ عدد را با شروع از یک عدد دلخواه به ترتیب $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۴۱}$ نام‌گذاری می‌کنیم. همچنین فرض کنید اعداد a_i و a_j غیرمتوالی با ویژگی مورد نظر یافت نشوند. از فرض مسئله می‌دانیم که برای هر $۱ \le i \le ۴۱$، داریم $a_i|a_{i+۱}$ یا $a_{i+۱}|a_i$. (فرض می‌کنیم $a_{۴۲} = a_۱$) همچنین اگر $a_i|a_{i+۱}$، آن‌گاه داریم $a_{i+۲}|a_{i+۱}$. چون اگر $a_{i+۲}|a_{i+۱}$، آن‌گاه $j = i$ و $j = i + ۲$ در حکم مسئله صدق می‌کنند. بدون از دست رفتن کلیت، فرض کنید $a_۱|a_۲$ (حالت دیگر مشابه است.) در این صورت خواهیم داشت $a_۳|a_۲$ و $a_۳|a_۴$ ... $a_{۴۱}|a_{۴۰}$ و $a_{۴۱}|a_۱$. این نتیجه می‌دهد $a_{۴۱}|a_۲$ که با فرض در تناقض است و حکم اثبات می‌شود.

پاسخ ۲.۲.۴۱. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $a \in A$، آن‌گاه اعداد بزرگتر از a نیز در A هستند. پس، A دو حالت دارد. یا نیم‌بازه‌ای به شکل $(a_۰, \infty)$ است و یا نیم‌بازه‌ای به شکل $[a_۰, \infty)$.

فرض کنیم $A = [a_۰, \infty)$. در این صورت برای هر $r > \varepsilon > ۰$ داریم $\cup_{i=۱}^{n} B_{a_۰-\varepsilon}(x_i) \neq X$. به طور خاص، برای هر عدد طبیعی $k > \frac{۱}{r}$ اگر قرار دهیم $\varepsilon = \frac{۱}{k}$ نتیجه می‌شود که y_k ای وجود دارد که برای هر $i = ۱, \ldots, n$، داریم $d(x_i, y_k) > a_۰ - \frac{۱}{k}$.

اکنون چون X فشرده است، دنباله $\{y_k\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{y_{k_j}\}$ دارد که به عضوی از X چون y همگراست. اکنون با توجه به این‌که $d(x_i, y) = \lim_{j\to\infty} d(x_i, y_{k_j})$، نتیجه می‌گیریم $d(x_i, y) \le a_۰$ که این با فرض $a_۰ \in A$ در تناقض است. پس، فرض خلف باطل است و در نتیجه، $A = (a_۰, \infty)$ که حکم را نتیجه می‌دهد.

(راه حل دوم) فرض کنید $t \in A$. واضح است که همه اعداد بزرگتر از t هم در A هستند. حال توجه کنیم که

$$X = \bigcup_k \Big(\bigcup_{i=۱}^{n} B_{t-\frac{۱}{k}}(x_i)\Big).$$

اما چون X فشرده است، اعداد $k_۱$، ...، k_l وجود دارند که

$$X = \left(\bigcup_{i=۱}^{n} B_{t-\frac{۱}{k_۱}}(x_i)\right) \cup \cdots \cup \left(\bigcup_{i=۱}^{n} B_{t-\frac{۱}{k_l}}(x_i)\right) = \bigcup_{i=۱}^{n} B_{t-\frac{۱}{s}}(x_i)$$

و s بیشترین عدد از میان اعداد $k_۱$، ... و k_l است. پس، $t-\frac{۱}{s} \in A$. در نتیجه، $(t-\frac{۱}{s}, +\infty) \subseteq A$، یعنی، A باز است.

پاسخ ۳.۲.۴۱. فرض کنید بین اعضای S، عضو T چنان باشد که $\ker T$ بیشترین بعد را دارد. چون $T^۲ \in S$ و $\ker(T) \subseteq \ker(T^۲)$، داریم $\ker(T) = \ker(T^۲)$. ادعا می‌کنیم $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{۰\}$. زیرا اگر $v = Tw \in \ker(T) \cap \operatorname{Im}(T)$، آن‌گاه $\{۰\} = Tv = T^۲w$. پس، $w \in \ker(T^۲) = \ker(T)$، یعنی، $v = Tw = ۰$. حال چون $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V)$، نتیجه می‌شود که $\ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T) = V$.

پاسخ ۴.۲.۴۱. بدون کم شدن از کلیت، مکعب $[۰,۱]^۳$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\gamma(t) = (\gamma_۱(t), \gamma_۲(t), \gamma_۳(t))$ با $۰ \le t \le ۱$ نمایشی برای خم با ویژگی‌های مورد نظر باشد. همچنین به سادگی می‌توان γ را با خمی قطعه به قطعه مشتق‌پذیر (یا یک چندضلعی) تقریب زد که طول کمتر یا مساوی داشته باشد و ویژگی‌های پرسش را حفظ کند. پس، بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که γ خمی قطعه به قطعه مشتق‌پذیر (یا یک چند ضلعی) است.
با در نظر گرفتن تصویر خم روی محور x نتیجه می‌شود $\int_۰^۱ |\gamma_۱'(t)|\,\mathrm{d}t \ge ۲$. زیرا تصویر خم γ به روی محور xها خمی پیوسته و بسته است که از نقاط صفر و یک نیز می‌گذرد. بنابراین، حداقل طول آن دو است. به طور مشابه برای $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ نیز این نابرابری برقرار است. به‌علاوه، با توجه به این‌که همواره خم روی سطح مکعب قرار دارد نتیجه می‌شود که برای نقاط مشتق‌پذیری γ حداقل یکی از مقادیر $\gamma_i'(t)$، $i = ۱,۲,۳$ صفر

است. از نامساوی $\sqrt{a^۲+b^۲}\geq \frac{a+b}{\sqrt{۲}}$ و صفر بودن حداقل یکی از مقادیر $\gamma_i'(t)$ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{\gamma_۱'^۲(t)+\gamma_۲'^۲(t)+\gamma_۳'^۲(t)}\geq \frac{|\gamma_۱'(t)|+|\gamma_۲'(t)|+|\gamma_۳'(t)|}{\sqrt{۲}}.$$

با انتگرال‌گیری از طرفین بدست می‌آوریم،

$$\int_۰^۱ |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\geq \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sum_{i=۱}^{۳}\int_۰^۱ |\gamma_i'(t)|\,\mathrm{d}t\geq ۳\sqrt{۲}.$$

بنابراین، حداقل طول ممکن برای خم γ برابر با $۳\sqrt{۲}$ است. مثلث متساوی‌الاضلاعی که اضلاع آن قطرهای سه وجه مکعبی است که از مبدا می‌گذرند در شرایط مسئله صدق می‌کند و طولی برابر با $۳\sqrt{۲}$ دارد.

پاسخ ۵.۲.۴۱. الف) نشان می‌دهیم $\min(S)=\frac{۵}{۲}$ و $\max(S)=۱۰$. ابتدا نشان می‌دهیم

$$[۵,۲۰,۵,۲۰,\ldots]=\frac{۵}{۲} \quad \text{و} \quad [۲۰,۵,۲۰,۵\ldots]=۱۰$$

قرار می‌دهیم $a_k=[\underbrace{۵,۲۰,۵,۲۰,\ldots}_{k}]$. دقت کنید که دنباله $\{a_{۲k}\}$ دنباله‌ای صعودی است و در بازه $I_۰$ قرار دارد. همچنین دنباله $\{a_{۲k+۱}\}$ دنباله‌ای نزولی است و در بازه $I_۰$ قرار دارد. پس، این دو دنباله همگرا هستند. حد آن‌ها را a و a' می‌نامیم، a و a' باید در معادله $x=۲+\frac{۵}{۲+\frac{۲۰}{x}}$ صدق کنند که تنها جواب مثبت آن، $\frac{۵}{۲}$ است. پس، $a=a'=\frac{۵}{۲}$ و در نتیجه، $\lim_{k\to\infty}a_k=\frac{۵}{۲}$. با استدلالی مشابه، اگر $b_k=[\underbrace{۲۰,۵,۲۰,۵,\ldots}_{k}]$، حد دنباله $\{b_k\}$ جواب معادله $x=۲+\frac{۲۰}{۲+\frac{۵}{x}}$ است که برابر با ۱۰ است. حال کافی است نشان دهیم اگر $[n_۱,n_۲,\ldots]$ موجود باشد در بازه $[\frac{۵}{۲},۱۰]$ است. با توجه به این‌که مقدار x_kها نسبت به $n_۱,n_۳,\ldots$ صعودی و نسبت به $n_۲,n_۴,\ldots$ نزولی است، x_k در بازه $[a_k,b_k]$ قرار دارد. در نتیجه، $\lim_{k\to\infty}x_k$ در بازه $[\frac{۵}{۲},۱۰]$ است.

ب) تعریف می‌کنیم $J_۰=[\frac{۵}{۲},۱۰]$ و $I_۰=[۲,۱۲]$. همچنین تعریف می‌کنیم

$$f(x)=۲+\frac{۵}{x} \quad \text{و} \quad g(x)=۲+\frac{۲۰}{x}.$$

توجه کنید که f و g توابع اکیداً نزولی هستند و هر یک از بازه‌های $I_۰$ و $J_۰$ را به زیرمجموعه‌ای از خودشان

می‌نگارند. بنابراین، $g(J_{\circ})=[۴,۱۰]$ و $f(J_{\circ})=[\frac{۵}{۲},۴]$.

لم ۱. فرض کنید $۲\leqslant a\leqslant b$. در این صورت،

$$(f\circ g)(b)-(f\circ g)(a)\leqslant \frac{۲۵}{۱۴۴}(b-a)،$$
$$(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\leqslant \frac{۲۵}{۸۱}(b-a)،$$
$$(g\circ g)(b)-(g\circ g)(a)\leqslant \frac{۲۵}{۳۶}(b-a)،$$
$$(g\circ f)(b)-(g\circ f)(a)\leqslant \frac{۱۰۰}{(۲a+۵)(۲b+۵)}(b-a).$$

اثبات لم ۱. داریم $(f\circ g)(x)=\frac{۹x+۴۰}{۲x+۲۰}=\frac{۹}{۲}-\frac{۲۵}{x+۱۰}$. بنابراین،

$$|(f\circ g)(a)-(f\circ g)(b)|=\frac{۲۵|a-b|}{(a+۱۰)(b+۱۰)}.$$

با توجه به این‌که $a,b\geqslant ۲$ نتیجه می‌شود $|(f\circ g)(a)-(f\circ g)(b)|\leqslant\frac{۲۵}{۱۴۴}|a-b|$. همچنین داریم $(f\circ f)(x)=\frac{۹x+۱۰}{۲x+۵}=\frac{۹}{۲}-\frac{۲۵}{۴x+۱۰}$ که به‌طورمشابه با توجه به این‌که $a,b\geqslant ۲$، نتیجه می‌شود که $|(f\circ f)(a)-(f\circ f)(b)|\leqslant\frac{۲۵}{۸۱}|a-b|$. بنابراین $(g\circ g)(x)=\frac{۱۲x+۲۰}{x+۱۰}=۱۲-\frac{۱۰۰}{x+۱۰}$ که با توجه به این‌که $a,b\geqslant ۲$ نتیجه می‌شود $|(g\circ g)(a)-(g\circ g)(b)|\leqslant\frac{۲۵}{۳۶}|a-b|$. همچنین داریم $(g\circ f)(x)=\frac{۲۴x+۱۰}{۲x+۵}=۱۲-\frac{۵۰}{۲x+۵}$ که نتیجه می‌دهد

$$|(g\circ f)(a)-(g\circ f)(b)|=\frac{۱۰۰|a-b|}{(۲a+۵)(۲b+۵)}.$$

لم ۲. فرض کنید $h_۱,h_۲,\ldots\in\{f,g\}$ و قرار دهید $I_k=(h_۱\circ h_۲\circ\cdots\circ h_k)(I_{\circ})$. در این صورت $I_{\circ}\supset I_۱\supset I_۲\supset\cdots$ و $\cap I_k\subseteq J_{\circ}$ و $|I_k|\to ۰$.

اثبات لم ۲. فرض کنید $I_k=[x_k,y_k]$. داریم $I_{۲k}=(e_۱\circ e_۲\circ\cdots\circ e_k)(I_{\circ})$ که $e_i\in\{f\circ f,f\circ g,g\circ f,g\circ g\}$. با توجه به صعودی بودن e_iها، دنباله $\{x_{۲k}\}$ صعودی و دنباله $\{y_{۲k}\}$ نزولی است. همچنین توجه کنید که $x_{۲k}\geqslant[\underbrace{۵,۲۰,۵,۲۰,\ldots}_{۲k}]$ و $y_{۲k}\leqslant[\underbrace{۲۰,۵,۲۰,۵,\ldots}_{۲k}]$. پس، $\lim x_{۲k}$ و $\lim y_{۲k}$ در بازه $J_{\circ}$ هستند. فقط می‌ماند ثابت کنیم $|I_k|\to ۰$.

فرض کنید $|I_k|\to\alpha>۰$. از آن‌جا که $\lim x_{۲k}\geqslant\frac{۵}{۲}$ و $y_k\geqslant x_k+\alpha$، عدد $k_{\circ}$ وجود دارد که برای $k>k_{\circ}$، داریم $(۲x_{۲k}+۵)(۲y_{۲k}+۵)>۱۰۱$ بنابراین از لم (۱) برای $k>k_{\circ}$ نتیجه می‌شود که

$|(f\circ g)(I_{2k})| \leqslant \frac{25}{144}|I_{2k}|$ ،$|(g\circ f)(I_{2k})| \leqslant \frac{100}{101}|I_{2k}|$. از طرفی، از لم (۱) نتیجه می‌شود
$|(f\circ f)(I_{2k})| \leqslant \frac{25}{81}|I_{2k}|$ و $|(g\circ g)(I_{2k})| \leqslant \frac{25}{36}|I_{2k}|$. بنابراین، برای $k > k_0$، داریم
$|I_{2k+2}| \leqslant \frac{100}{101}|I_{2k}|$. پس، $I_{2k} \to 0$ که با فرض در تناقض است.

اکنون می‌توانیم نشان دهیم برای هر دنباله $n_1, n_2, \ldots \in \{5, 20\}$، دنباله $\{x_k\} = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ همگراست. برای هر k، اگر $n_k = 5$، قرار می‌دهیم $h_k = f$ و اگر $n_k = 20$، قرار می‌دهیم $h_k = g$ و بازه‌های I_k را مانند لم (۲) تعریف می‌کنیم. در این صورت برای هر $n \geqslant k$، $x_n \in I_k$. پس، از لم ۲ نتیجه می‌شود که دنباله $\{x_k\}$ کوشی و در نتیجه، به عددی در J_0 همگراست.

ج) باید ثابت کنیم برای هر $x \in J_0$، دنباله $\{n_k\} \in \{5, 20\}$ وجود دارد که $x = [n_1, n_2 \ldots]$. دنباله $\{n_k\}$ را به طور استقرایی می‌سازیم. قرار می‌دهیم $y_1 = x$. در مرحله kاُم، اگر $y_k \leqslant 4$، قرار می‌دهیم $n_k = 5$ و $h_k = f$ و اگر $y_k \geqslant 4$، قرار می‌دهیم $n_k = 20$ و $h_k = g$. سپس تعریف می‌کنیم $y_{k+1} = h_k^{-1}(y_k)$ و همین کار را ادامه می‌دهیم. با توجه به نحوه تعریفِ y_kها، داریم $y_k \in I_0$. اکنون اگر تعریف کنیم $I_k = (h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_k)(I_0)$، از آن‌جا که $x = (h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_k)(y_{k+1})$، داریم $x \in I_k$ و همچنین $x_k \in I_k$. پس، $x_k \to x$.

پاسخ ۶.۲.۴۱. راه حل اول: به روش برهان خلف، فرض کنید I ایده‌آلی باشد که $M = I[x]$، در این صورت $R[x]/M = R[x]/I[x] \cong R/I[x]$. سمت راست رابطه قبل، یک حلقه چندجمله‌ای است و واضح است که در حلقه‌های چندجمله‌ای، اشتراک همه ایده‌آل‌های غیر صفر، برابر با صفر است. پس، در سمت چپ رابطه قبل هم باید اشتراک همه ایده‌آل‌های غیرصفر برابر با صفر باشد. اما هر ایده‌آل ناصفر حلقه $R[x]/M$ به شکل N/M است که $M \subsetneqq N$. بنابراین، $f \in N$. در نتیجه، $f+M$ متعلق به اشتراک تمام ایده‌آل‌های ناصفر $R[x]/M$ است که تناقض است.

راه حل دوم: فرض کنید $\deg(f(x)) = n$ و $M = I[x]$. قرار دهید $L = M + \langle x^{n+1}\rangle$ در این صورت L ایده‌آل $R[x]$ است و $M \subsetneqq L$ (زیرا $x^{n+1} \in L \setminus M$). همچنین $f \notin L$ چرا که در غیر این صورت، اگر $f \in L$، آن‌گاه $f(x) = g(x) + x^{n+1}h(x)$ که $g(x) \in M$ و چون $\deg f(x) = n$، نتیجه می‌شود $h(x) = 0$. پس، $f(x) = g(x) \in M$ که تناقض است. بنابراین، $f \notin L$ که با بیشین بودن M تناقض دارد.

چهل‌ودومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۲ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۷/۴/۱۹

پاسخ ۱.۱.۴۲. چنین تابعی وجود ندارد. فرض کنید $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ یک تابع باشد. قرار می‌دهیم $A=f^{-1}(1)$. از دو مجموعه A و $\mathbb{N}\setminus A$ دست‌کم یکی نامتناهی است. اما تصویر A برابر با $\{1\}$ است و تصویر $\mathbb{N}\setminus A$ نیز عدد یک را ندارد.

پاسخ ۲.۱.۴۲. عکس نقیض حکم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید X ناهمبند و $X=A\cup B$ یک جداسازی برای آن باشد. در این‌صورت برای هر $x\in X$، داریم $d(x,A)=0$ و $d(x,B)>0$، و یا $d(x,A)>0$ و $d(x,B)=0$. حال فرض کنید دو زیرمجموعه ناتهی $A,B\subseteq X$ موجودند به‌طوری‌که برای هر $x\in X$، داریم $d(x,A)\neq d(x,B)$. قرار می‌دهیم

$$A_1=\left\{x\in X \;\middle|\; d(x,A)<d(x,B)\right\}$$

و

$$B_1=\left\{x\in X \;\middle|\; d(x,A)>d(x,B)\right\}.$$

در این‌صورت به وضوح $X=A_1\cup B_1$ یک جداسازی است.

پاسخ ۳.۱.۴۲. فرض کنید I ایده‌آل دو طرفه نباشد. لذا $r \in R$ وجود دارد که $rI \nsubseteq I$. در نتیجه، $rI+I$ یک ایده‌آل راست و به طور سره شامل I است. بنابراین، با توجه به فرض بیشین بودن I داریم، $rI+I=R$ و لذا، $a,b \in I$ موجودند که $ra+b=۱$. در نتیجه، برای هر $x \in I$، داریم $x=(xr)a+xb \in I^۲$، یعنی، $I \subseteq I^۲$. از طرفی واضح است که $I^۲ \subseteq I$. پس، $I^۲=I$.

پاسخ ۴.۱.۴۲. با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز داریم

$$\begin{aligned}\int_۰^۱ xf''(x)dx &= \int_۰^۱ xdf' = xf'(x)]_۰^۱ - \int_۰^۱ f'(x)dx \\ &= f'(۱) - ۰ - (f(۱)-f(۰)) = f'(۱).\end{aligned}$$

از طرف دیگر بنا به نامساوی کوشی- شوارتز، داریم

$$\left(\int_۰^۱ xf''(x)dx\right)^۲ \leq (\int_۰^۱ x^۲dx)(\int_۰^۱ f''(x)^۲dx) = \frac{۱}{۳}\int_۰^۱ f''(x)^۲dx.$$

بنابراین، $f'(۱)^۲ \leq \frac{۱}{۳}\int_۰^۱ f''(x)^۲dx$.

پاسخ ۵.۱.۴۲. اثبات را با استقرا انجام می‌دهیم. برای $n=۱$ روشن است که $|A|=\lfloor t \rfloor+۱$ و حکم برقرار است. فرض کنید حکم برای n درست باشد. قرار می‌دهیم

$$A=\left\{(u_۱,\dots,u_{n+۱}) \in \mathbb{Z}^{n+۱} : u_۱,\dots,u_{n+۱} \geq ۰, \sum_{j=۱}^{n+۱}\frac{u_j}{j} \leq t\right\}.$$

با بازنویسی رابطه به شکل $\sum_{j=۱}^{n}\frac{u_j}{j} \leq t-\frac{u_{n+۱}}{n+۱}$ و با تغییر مقادیر $u_{n+۱}$ از $k=۰$ تا $k=\lfloor t(n+۱)\rfloor$ و استفاده از فرض استقرا داریم،

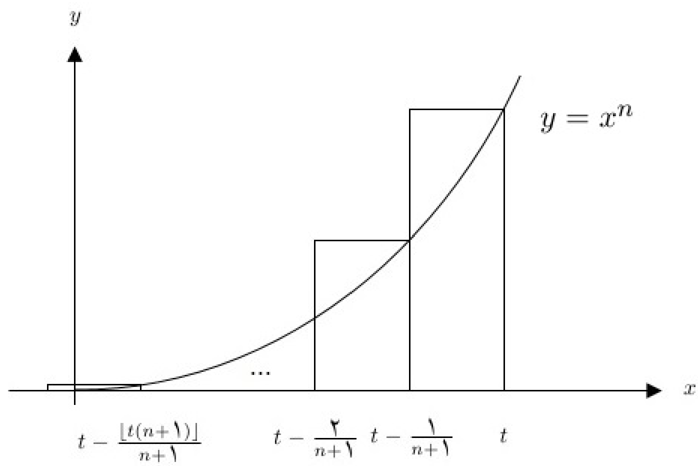
$$|A| > \sum_{k=۰}^{\lfloor t(n+۱)\rfloor}\left(t-\frac{k}{n+۱}\right)^n.$$

با توجه به شکل بعد می‌توان برای سری سمت راست کران پایین مناسبی بر حسب انتگرال تابع x^n روی بازه

$[\circ, t]$ بدست آورد و در نتیجه،

$$\sum_{k=\circ}^{\lfloor t(n+\mathsf{1})\rfloor} \left(t-\frac{k}{n+\mathsf{1}}\right)^n \geq (n+\mathsf{1})\int_\circ^t x^n\,\mathrm{d}x = t^{n+\mathsf{1}}.$$

حکمِ استقرا اثبات می‌شود.



پاسخ ۶.۱.۴۲. برای راحتی، اعضای G/N را با $\bar{x}$ نشان می‌دهیم که در آن $x \in G$. فرض کنید $p^r = o(\bar{x}) = o(\bar{y})$، باید نشان دهیم عنصر $\Theta \in Aut(G/N)$ موجود است به‌طوری‌که $\Theta(\bar{x}) = \bar{y}$.

اگر $r = \circ$، Θ را همانی در نظر می‌گیریم. فرض کنید $r \geq \mathsf{1}$، $o(x) = p^n$ و $o(y) = p^m$. با توجه به تقارن می‌توان فرض کرد $m \geq n$. بنابراین، اگر قرار دهیم $b = y^{p^{m-n}}$ و از رابطه $o(t^i) = \frac{o(t)}{(o(t),i)}$ استفاده کنیم، داریم $o(b) = p^n = o(x)$. لذا طبق مفروضات مسئله ، عنصر $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ موجود است به‌طوری‌که $\sigma(x) = b$. حال با توجه به شرط بیان شده روی N، نگاشت $\bar{\sigma} : G/N \to G/N$ با تعریف $\bar{\sigma}(\bar{x}) = \overline{\sigma(x)}$ در $\mathrm{Aut}(G/N)$ قرار دارد و همچنین داریم $\bar{\sigma}(\bar{x}) = \bar{b}$. لذا $o(\bar{x}) = o(\bar{b})$ و از آنجا $p^r = \frac{p^r}{(p^r, p^{m-n})}$. در نتیجه، $m = n$، یعنی، $b = y$ و $\bar{\sigma}(\bar{x}) = \bar{y}$.

۲.۴۲ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۷/۴/۲۰

پاسخ ۱.۲.۴۲. برای هر $x,y \in B$ که $x \neq y$ داریم

$$d(x,y) = (1 - ||x||) + (1 - ||y||) > 1 - ||x||$$

پس، $B_{1-||x||}(x) = \{x\}$، یعنی، تمام نقاط B تنها هستند.

پاسخ ۲.۲.۴۲. قرار دهید $A = \left\{\frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ و $B = \left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, \text{فرد } b\right\}$. به راحتی دیده می‌شود که A و B دو زیرگروه سره $\mathbb{Q}$ هستند. اگر $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$، آن‌گاه $q = 2^m c$ که c فرد است. چون $(c, 2^m) = 1$، اعداد $x,y \in \mathbb{Z}$ موجودند که $cx + 2^m y = p$. در نتیجه، $\frac{p}{q} = \frac{x}{2^m} + \frac{y}{c} \in A + B$، یعنی، $Q = A + B$.

پاسخ ۳.۲.۴۲. راه‌حل اول: برای مثال فرض کنید $g(x)$ تابعی غیر ثابت، نامنفی و پیوسته در بازه $[1,2]$ باشد که $g(1) = g(2) = 0$. برای هر $2^n \leq x < 2^{n+1}$ که $n \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $f(x) = (-1)^n g(x)$. این تابع پیوسته است و با توجه به این‌که برای هر عدد مثبت x، x و $2x$ در دو بازه متوالی به شکل $[2^n, 2^{n+1})$ قرار می‌گیرند شرط $f(x)f(2x) \leq 0$ نتیجه می‌شود.

راه‌حل دوم: تابع $f(x) = \sin(\pi \log_2(x))$ یک مثال با ویژگی‌های سوال است.

پاسخ ۴.۲.۴۲. توجه کنید که $\varphi(2I) = 2\varphi(I)$. همچنین داریم

$$\varphi(I) = \varphi(2I + (-I)) = \varphi(2I) + \varphi(-I) = 2\varphi(I) + \varphi(-I).$$

در نتیجه، $\varphi(0) = \varphi(I + (-I)) = \varphi(I) + \varphi(-I) = 0$. پس، برای هر P وارون‌پذیر، $\varphi(P) + \varphi(-P) = 0$. فرض کنید $f(x) = \det(A - xI)$ و $g(x) = \det(B + xI)$. عدد حقیقی $\lambda \neq 0$ را طوری بگیرید که ریشه $f(x)$ و $g(x)$ نباشد. در این صورت $A - \lambda I$ و $B + \lambda I$ وارون پذیرند.

پس، طبق فرض

$$\varphi(A) = \varphi(A - \lambda I + \lambda I) = \quad \varphi(A - \lambda I) + \varphi(\lambda I)،$$

$$\varphi(B) = \varphi(B + \lambda I - \lambda I) = \quad \varphi(B + \lambda I) + \varphi(-\lambda I).$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \varphi(A) + \varphi(B) \quad &= \varphi(A - \lambda I) + \varphi(\lambda I) + \varphi(-\lambda I) + \varphi(B + \lambda I) \\ &= \varphi(A - \lambda I) + \varphi(B + \lambda I) = \varphi(A - \lambda I + B + \lambda I) \\ &= \varphi(A + B). \end{aligned}$$

پاسخ ۵.۲.۴۲. **راه‌حل اول: لم.** ثابت $C > ۰$ وجود دارد که برای هر $۰ < x < y$ داریم

$$\frac{(y-x)^{\beta}}{y^{\alpha}} < C\left(x^{\beta-\alpha} - y^{\beta-\alpha}\right).$$

اثبات لم. اگر قرار دهیم $t = \frac{y}{x}$، آن‌گاه کافی است ثابت کنیم برای هر $t > ۱$،

$$f(t) = \frac{(t-۱)^{\beta}}{t^{\alpha} - t^{\beta}} < C$$

چون $\alpha > \beta$،

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = ۰$$

همچنین بنابر قضیه هوپیتال، داریم

$$\lim_{t \to ۱^{+}} f(t) = \lim_{t \to ۱^{+}} \frac{\beta(t-۱)^{\beta-۱}}{\alpha t^{\alpha-۱} - \beta t^{\beta-۱}} = ۰.$$

پس، $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t \to ۱^{+}} f(t) = ۰$ و چون f روی $(۱, \infty)$ پیوسته است. بنابراین، کران‌دار است. پس، عدد $C > ۰$ وجود دارد که برای هر $t > ۱$، $f(t) < C$.

حال به اثبات مسئله اصلی بازمی‌گردیم. بنابر لم بالا برای هر k داریم

$$\sum_{n=۲}^{k} \frac{(x_n - x_{n-۱})^{\beta}}{x_n^{\alpha}} \leq \sum_{n=۲}^{k} C(x_{n-۱}^{\beta-\alpha} - x_n^{\beta-\alpha}) = C(x_۱^{\beta-\alpha} - x_k^{\beta-\alpha}) < Cx_۱^{\beta-\alpha}.$$

پس، مجموع‌های جزئیِ سری، کران‌دار هستند و چون سری نامنفی است، همگرا است.

راه‌حل دوم: داریم

$$\frac{(x_n - x_{n-۱})^{\beta}}{x_n^{\alpha}} \leq \frac{(x_n - x_{n-۱})x_n^{\beta-۱}}{x_n^{\alpha}} = \frac{x_n - x_{n-۱}}{x_n^{\alpha-\beta+۱}}.$$

حال با توجه به این‌که تابع $\frac{۱}{x^{\alpha-\beta+۱}}$ نزولی است، داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(x_n - x_{n-۱})^{\beta}}{x_n^{\alpha}} &\leq \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{x_n - x_{n-۱}}{x_n^{\alpha-\beta+۱}} \\ &\leq \int_{x_۱}^{\infty} \frac{۱}{x^{\alpha-\beta+۱}} = \frac{۱}{\alpha-\beta} x_۱^{(\beta-\alpha)}.\end{aligned}$$

پاسخ ۶.۲.۴۲. راه‌حل اول: قبل از هر چیز توجه کنید که اگر خانواده $A_۱, A_۲, \ldots$ در شرایط مسئله صدق کنند، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار است:

- ✓ با قرار دادن $i = j$ نتیجه می‌شود که $|A_i| = i$.
- ✓ اگر j بر i بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $A_i \cap A_j$ دقیقا i عضو دارد و چون A_i خود، i عضوی است، بنابراین $A_i \cap A_j = A_i$.
- ✓ برای دو عدد دلخواه i و j، $A_i \cap A_j$ یک مجموعه (i,j) عضوی است که در آن (i,j) نشان‌دهنده بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک i و j است. حال $A_{(i,j)}$ از یک سو طبق نکته اول یک مجموعه (i,j) عضوی است و از طرفی طبق نکته دوم زیرمجموعه هر دو مجموعه A_i و A_j است. پس، $A_i \cap A_j = A_{(i,j)}$.

حال مجموعه‌های مورد نظر را به شکل استقرایی می‌سازیم. ابتدا قرار می‌دهیم $A_۱ = \{۱\}$ و فرض کنید مجموعه‌های $A_۱, \ldots, A_{n-۱}$ به‌طوری‌که ساخته شده باشند که در شرایط مسئله صدق کنند. قصد داریم مجموعه n عضوی A_n را به گونه‌ای بسازیم که $A_k \cap A_n$ برای هر $k < n$، (k,n) عضوی باشد.

فرض کنید عوامل اول n برابر با $p_1, \ldots, p_m$ باشند. با توجه به نکته دوم واضح است که $A_{\frac{n}{p_j}}$ زیرمجموعه‌ای از A_n است. بنابراین، باید داشته باشیم

$$A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}} \subseteq A_n.$$

در ادامه تعداد اعضای $A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}$ را محاسبه می‌کنیم. می‌توان این مجموع را مستقیم به کمک اصل شمول و عدم شمول محاسبه کرد یا به عنوان روشی دیگر، می‌توان برای هر $1 \leq j \leq m$، B_j را برابر با اعدادی از یک تا n قرار داد که بر p_j بخش‌پذیرند. در این صورت، واضح است که برای هر l، داریم

$$|B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_l}| = \frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_l}} = |A_{\frac{n}{p_{i_1}}} \cap \ldots \cap A_{\frac{n}{p_{i_l}}}|.$$

بنابراین، طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد اعضای $A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}$ برابر با تعداد اعضای $B_1 \cup \ldots \cup B_m$ است و مجموعه آخر برابر با اعدادی از یک تا n هستند که نسبت به n اول نیستند. لذا، تعدادی برابر با $n - \varphi(n)$ دارند.

حال فرض کنید t بزرگترین عدد در $A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ باشد تعریف می‌کنیم:

$$A_n = (A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}) \cup \{t+1, \ldots, t+\varphi(n)\}.$$

با توجه به محاسبه قبل A_n، n عضو دارد. بنابراین، برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم برای هر $k < n$، مجموعه $A_k \cap A_n$، (k, n) عضو دارد. داریم

$$\begin{aligned} A_k \cap A_n = A_k \cap (A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}) &= (A_k \cap A_{\frac{n}{p_1}}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{\frac{n}{p_m}}) \\ &= A_{(k, \frac{n}{p_1})} \cup \ldots \cup A_{(k, \frac{n}{p_m})}. \end{aligned}$$

حال توجه کنید که برای هر j، $(k, \frac{n}{p_j}) | (k, n)$ و لذا، $A_{(k, \frac{n}{p_j})} \subseteq A_{(k,n)}$ همچنین شاخص jای یافت می‌شود که $(k, \frac{n}{p_j}) = (k, n)$ (توجه کنید که $k < n$) و بنابراین، $A_{(k, \frac{n}{p_1})} \cup \ldots \cup A_{(k, \frac{n}{p_m})} = A_{(k,n)}$.

راه‌حل دوم: عدد طبیعی n را دلخواه بگیرید. فرض کنید تجزیه n به عوامل اول به شکل $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$

باشد. قرار می‌دهیم،

$$A_n = \left\{ p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} : 0 \le \beta_1 \le p_1^{\alpha_1} - 1, \dots, 0 \le \beta_k \le p_k^{\alpha_k} - 1 \right\}.$$

نشان می‌دهیم $A_1, A_2, \dots$ در شرایط مسئله صدق می‌کنند. فرض کنید i و j دو عدد طبیعی دلخواه باشند. می‌نویسیم،

$$i = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{و} \quad j = p_1^{\alpha'_1} \dots p_k^{\alpha'_k},$$

که $\alpha_j, \alpha'_j \ge 0$ برای هر $1 \le j \le k$. با توجه به تعریف، می‌توان نشان داد اشتراک A_i و A_j مجموعه اعدادی به شکل $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ که $0 \le \beta_j \le \min\left\{ p_j^{\alpha_j} - 1, p_j^{\alpha'_j} - 1 \right\}$ برای هر $1 \le j \le k$ هستند. در نتیجه، تعداد اعضای $A_i \cap A_j$ برابر است با،

$$p_1^{\min\left\{\alpha_1, \alpha'_1\right\}} \dots p_k^{\min\left\{\alpha_k, \alpha'_k\right\}}$$

که این نیز برابر با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک i و j است.

چهل‌وسومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۳ پاسخ‌های نوبت اول ۱۳۹۸/۶/۱۲

پاسخ ۱.۱.۴۳. برای هر $x > ۰$، تابع $g(x) = f^{۲}(x)$ یک تابع صعودی، پیوسته و کران‌دار است، زیرا

$$g'(x) = f'(x)f'(f(x)) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}} \times \frac{ad-bc}{(cf(x)+d)^{۲}} \geq ۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f^{۲}(x) = f(\frac{a}{c}).$$

همچنین اگر $x \leq g(x)$، آن‌گاه بنا بر صعودی بودن g، داریم $g(x) \leq g^{۲}(x) \leq g^{۳}(x) \leq \dots$. پس، دنباله $x, g(x), \dots$ صعودی و کران‌دار و در نتیجه، همگرا است. حال اگر $x > g(x)$، آن‌گاه $x > g(x) > g^{۲}(x) > \cdots$ نزولی، کران‌دار و همگرا است.

پاسخ ۲.۱.۴۳. چون $f \circ g$ دوسویی است، الزاماً g یک‌به‌یک و f پوشا است. اگر g پوشا نباشد، برد آن یک بازه باز $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ است که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و حداقل یکی از a یا b عدد حقیقی است. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ باشد. تابع g پیوسته و یک‌به‌یک است. لذا، اکیداً یکنواست. فرض کنید g یک تابع صعودی باشد. پس، $\lim_{x\to-\infty} g(x) = a$ ولی f نیز پیوسته است. بنابراین، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f \circ g)(x) = f(a)$.
از طرفی $f \circ g$ نیز دوسویی و پیوسته است. پس، اکیداً یکنواست. بنابراین، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f \circ g)(x)$ برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. این تناقض نشان می‌دهد که g نیز پوشاست، پس، g دوسویی و $f = (f \circ g) \circ g^{-۱}$ نیز دوسویی است.

پاسخ ۳.۱.۴۳. فرض کنید e یک عضو خودتوان R باشد. در این صورت

$$(۲e-۱)^۲ = ۴e^۲ - ۴e + ۱ = ۱.$$

پس، $۲e-۱$ وارون‌پذیر است. پس، $x(۲e-۱) = (۲e-۱)x$. در نتیجه، $۲(xe-ex) = ۰$ و چون ۲ مقسوم‌علیه صفر نیست، نتیجه می‌شود که $xe = ex$.

پاسخ ۴.۱.۴۳. **لم.** اگر $x \in C_r(x_۰) \setminus \overline{B}_r(x_۰)$، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$d(x,x_۰) = r,\ B_{\frac{۱}{n}}(x) \cap \overline{B}_r(x_۰) = \varnothing.$$

اثبات لم. چون $x \in C_r(x_۰)$، داریم $d(x,x_۰) \leq r$ و چون $x \notin B_r(x_۰)$، داریم $d(x,x_۰) \not< r$. پس، $d(x,x_۰) = r$. حال چون $x \notin \overline{B_r}(x_۰)$، وجود دارد $\varepsilon > ۰$ که $B_\varepsilon(x) \cap \overline{B}_r(x_۰) = \varnothing$. اکنون n را عددی بزرگ‌تر از $\frac{۱}{\varepsilon}$ بگیرید. حال تعریف می‌کنیم

$$I = \left\{ r > ۰ \mid \overline{B_r(x_۰)} \neq C_r(x_۰) \right\}.$$

اگر

$$I_n = \left\{ r > ۰ :\ \exists x \in X, d(x,x_۰) = r, B_{\frac{۱}{n}}(x) \cap \overline{B}_r(x_۰) = \varnothing \right\}،$$

آن‌گاه $I = \bigcup_{n=۱}^{\infty} I_n$

حال کافی است ثابت کنیم برای هر n، I_n متناهی است. فرض کنیم این‌طور نباشد، پس، دنباله $r_۱, r_۲, \ldots$ در I_n وجود دارد که $r_i \neq r_j$. حال بنابر تعریف I_n، برای هر i، $x_i \in X$ وجود دارد که $d(x_i,x_۰) = r_i$ و $B_{\frac{۱}{n}}(x_i) \cap \overline{B_r}(x_۰) = \varnothing$. بنابر فشردگی X، وجود دارد زیردنباله‌ای از دنباله x_i به طوری‌که به x^* میل می‌کند. پس، وجود دارند j و kای که $d(x_j,x_k) < \frac{۱}{n}$. بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $r_j < r_k$. از آنجا که $d(x_j,x_۰) = r_j < r_k$ ، داریم $x_j \in B_{r_k}(x_۰)$. از طرفی چون $d(x_j,x_k) < \frac{۱}{n}$، داریم $x_j \in B_{\frac{۱}{n}}(x_k)$. پس، $B_{\frac{۱}{n}}(x_k) \cap \overline{B_{r_k}}(x_۰) \neq \varnothing$ که تناقض است.

پاسخ ۵.۱.۴۳. راه حل اول: گراف جهت‌دار $\bar{G} = (X,E)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x,y) \in E \Longleftrightarrow x \neq y \ \text{ و } \ T(x) = y.$$

واضح است که درجه خروجی هر رأس حداکثر ۱ است. همچنین مجموعه یال‌های ورودی به هر رأس شمارا است، زیرا برای هر رأس x، مجموعه همه رأس‌هایی که از آن‌ها به x یال جهت‌دار داریم همان $T^{-۱}(x)$ است. اگر قرار دهیم $A = T^{-۱}(x)$، آن‌گاه با توجه به فرض مسئله $A\backslash T(A) = A\backslash \{x\}$ شمارا است و لذا، A شمارا است. توجه کنید که

$$Z = \left\{x \ \middle|\ T(x) \neq x\right\} = \left\{x \ \middle|\ \deg^{+}(x) = ۱\right\}.$$

(درجه خروجی $= \deg^{+}(x)$).

حال S را یک مجموعه مستقل بیشین در $G[Z]$ (زیرگراف القایی روی Z) در نظر بگیرید. توجه کنید که $Z \subseteq N^{+}(S) \cup N^{-}(S) \cup S$ از طرفی $S \cap T(S) = \varnothing$. پس، با توجه به فرض، $S = S \setminus T(S)$ شمارا است. بنابراین، با توجه به شمارا بودن درجه خروجی و ورودی هر رأس، $N^{+}(S)$ و $N^{-}(S)$ نیز شمارا هستند و لذا، Z نیز شمارا است.

راه حل دوم: قرار دهید $A = \left\{D \subseteq X \ \middle|\ \forall p,q \in D \ \ T(p) \neq q\right\}$. در این صورت $(A,\subseteq)$ در شرایط لم زُرن صدق می‌کند. پس، عضو بیشینی مانند $D_{۰}$ دارد. داریم

$$\left\{x \in X \ \middle|\ T(x) \neq x\right\} \subseteq T(D_{۰}) \cup T^{-۱}(D_{۰}) \cup D_{۰}.$$

از طرفی چون $D_{۰}$ شمارا است، $T^{-۱}(D_{۰})$ و $T(D_{۰})$ نیز شمارا هستند. بنابراین، حکم اثبات شده است.

لم. اگر $x \in X$، آن‌گاه $T^{-۱}(\{x\})$ شمارا است.

اثبات لم. $A = T^{-۱}(\{x\})$ در اینصورت $T(A) \subseteq \{x\}$. پس، $A \setminus T(A) \supseteq A \setminus \{x\}$ شماراست و لذا، A شماراست.

پاسخ ۶.۱.۴۳. فرض کنید $G \trianglelefteq \langle x\rangle$. نشان می‌دهیم اگر K زیرگروه دوری شامل x باشد، آن‌گاه $K \trianglelefteq G$. زیرا برای هر $g \in G$، $\langle x\rangle = \langle x\rangle \cap \langle gxg^{-۱}\rangle \subseteq K \cap gKg^{-۱}$. پس، $K \cap gKg^{-۱} \neq e$. در نتیجه،

طبق فرض، $K \subseteq gKg^{-۱}$، یعنی، K نرمال است.

چون $xy = yx$ و $(o(x), o(y)) = ۱$ نتیجه می‌شود $\langle x\rangle\langle y\rangle = \langle xy\rangle$. پس، طبق آنچه که گفته شد $\langle xy\rangle$ در G نرمال است و چون $\langle y\rangle$ زیرگروه مشخصه $\langle xy\rangle$ است، داریم $\langle y\rangle \trianglelefteq G$.

۲.۴۳ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۳۹۸/۶/۱۳

پاسخ ۱.۲.۴۳. $\mathbb{Z}$ را با متریک اقلیدسی درنظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های فشرده عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های متناهی. تعداد زیرمجموعه‌های متناهی نیز شمارا است. از طرفی همه زیرمجموعه‌ها بسته هستند و تعداد همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ ناشمارا است.

پاسخ ۲.۲.۴۳. فرض کنیم e عضو همانی باشد. طبق فرض مسئله عضوی مانند y وجود دارد که $x^۲y = e = yx^۲$، یعنی، $x(xy) = e = (yx)x$. پس، x یک وارون چپ و یک وارون راست داشته و در نتیجه، وارون‌پذیر است.

اگر $AB = e = B'A$، آن‌گاه $B = B'$، زیرا $B = eB = (B'A)B = B'(AB) = B'e = B'$.

پاسخ ۳.۲.۴۳. راه حل اول:

$$\begin{aligned} ۲^{۱۳۹۸} + ۱ &= ۲^{۱۳۹۸} + ۲^{۷۰۰} + ۱ - ۲^{۷۰۰} \\ &= (۲^{۶۹۹} + ۱)^۲ - ۲^{۷۰۰} = (۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱)(۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱). \end{aligned}$$

از طرفی $\left(۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱, ۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱\right) = ۱$ زیرا اگر داشته باشیم $r|۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱$ و $r|۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱$، آن‌گاه

$$r|۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱ - (۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱) = ۲^{۳۵۱}.$$

بنابراین، r باید توانی از ۲ باشد و $r|۲^{۶۹۹}+۲^{۳۵۰}+۱$. لذا، $r=۱$. همچنین

$$۲^{۱۳۹۸}+۱ \overset{۵}{\equiv} (۲^{۲})^{۶۹۹}+۱ \overset{۵}{\equiv} (-۱)^{۶۹۹}+۱ \overset{۵}{\equiv} ۰.$$

بنابراین، $۵|۲^{۱۳۹۸}+۱$. اما

$$۲^{۱۳۹۸}+۱ \overset{۲۵}{\equiv} (۲^{۱۰})^{۱۳۹}\cdot ۲^{۸}+۱ \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)^{۱۳۹}\cdot ۶+۱ \equiv -۵.$$

پس، $۲۵ \nmid ۲^{۱۳۹۸}+۱$. حال می‌دانیم که $۵|۲^{۱۳۹۸}+۱$ و $۵^{۲} \nmid ۲^{۱۳۹۸}+۱$،

$$(۲^{۶۹۹}+۲^{۳۵۰}+۱, ۲^{۶۹۹}-۲^{۳۵۰}+۱)=۱$$

و

$$۲^{۱۳۹۸}+۱=(۲^{۶۹۹}+۲^{۳۵۰}+۱)(۲^{۶۹۹}-۲^{۳۵۰}+۱).$$

در نتیجه، $۲^{۱۳۹۸}+۱$ دارای حداقل سه عامل اول است.

راه حل دوم: می‌نویسیم

$$\begin{aligned} ۲^{۱۳۹۸}+۱ &= (۲^{۶})^{۲۳۳}+۱ \\ &= (۲^{۶}+۱)((۲^{۶})^{۲۳۲}-(۲^{۶})^{۲۳۱}+\cdots-۲^{۶}+۱). \end{aligned}$$

داریم $۲^{۶}+۱=۶۵=۵\times ۱۳$ و $۲^{۶}\overset{۶۵}{\equiv}-۱$. پس،

$$\begin{aligned} (۲^{۶})^{۲۳۲}-(۲^{۶})^{۲۳۱}+\cdots-۲^{۶}+۱ &\overset{۶۵}{\equiv} \underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{۲۳۳} \\ &= ۲۳۳ \overset{۶۵}{\equiv} ۳۸ \end{aligned}$$

بنابراین، جمله اخیر عامل ۵ و ۱۳ ندارد. پس، لزوماً بر یک عدد اول دیگر بخش‌پذیر است.

پاسخ ۴.۲.۴۳. قرار دهید $f(x)=\mathrm{tr}((\mathrm{A}+\mathrm{xB})^{\mathrm{k+1}})$. با توجه به این‌که هر ترکیب خطی A و B پوچتوان است و این‌که اثر هر ماتریس پوچتوان نیز صفر است، نتیجه می‌شود که f به عنوان تابعی از x متحد با صفر است. همچنین واضح است که f یک چندجمله‌ای برحسب x می‌باشد. پس، تمام ضرایب آن صفر می‌باشد (توجه کنید که میدان F لزوماً نامتناهی است).

ازآنچه گفته شد نتیجه می‌شود که ضریب x هم باید برابر با صفر باشد. اما ضریب x برابر است با

$$\mathrm{tr}(\mathrm{BA^k}+\mathrm{ABA^{k-1}}+\cdots+\mathrm{A^kB})$$

که به وضوح برابر است با $(k+۱)\mathrm{tr}(\mathrm{A^kB})$. توجه کنید که همواره داریم $\mathrm{tr}(\mathrm{CD})=\mathrm{tr}(\mathrm{DC})$. بنابراین، $(k+۱)\mathrm{tr}(\mathrm{A^kB})=0$ و چون F میدانی با مشخصه صفر است داریم $\mathrm{tr}(\mathrm{A^kB})=0$.

پاسخ ۵.۲.۴۳. فرض کنید $\theta_۱,\theta_۲\in[۰,۲\pi]$ دو زاویه دلخواه باشند. قرار دهید

$$g(z)=f(ze^{i\theta_۱})-f(ze^{i\theta_۲}).$$

روشن است که تابع $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ نیز تحلیلی و $g(۰)=۰$. پس، تابع

$$h(z)=\begin{cases}\frac{g(z)}{z}, & z\neq ۰\\ g'(۰), & z=۰\end{cases}$$

نیز روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است. بنابه فرض، برای هر $|z|=۱$، داریم

$$|h(z)|=|g(z)|\leq ۱.$$

برای هر $r\in(۰,۱]$ و هر $|z|=r$ از اصل بیشینه نتیجه می‌شود که $|h(z)|\leq ۱$. ولی در این حالت $|h(z)|=\frac{|g(z)|}{r}$، یعنی، برای هر $|z|=r$، داریم $|g(z)|\leq r$.

پاسخ ۶.۲.۴۳. C را خانواده همه مجموعه‌های کمین در $F_۱ \cup F_۲$ در نظر بگیرید، قرار دهید $G_۱ = F_۱ \cap C$ و $G_۲ = F_۲ \cap C$.

حالت اول: $G_۱ \neq \varnothing$ و $G_۲ = \varnothing$ (به طور مشابه، برای حالت $G_۱ = \varnothing$ و $G_۲ \neq \varnothing$ اثبات قابل ارائه است.)

$g \in G_۱$ و $x \in g$ را دلخواه در نظر بگیرید. x را سفید، اعضای واقع در $g \setminus \{x\}$ را آبی و اعضای واقع در $\{۱, ۲, \ldots, n\} \setminus g$ را قرمز رنگ‌آمیزی کنید.

حال عضو دلخواه $e \in F_۱ \cup F_۲$ را که $|e| \geq ۳$ در نظر بگیرید. اگر e شامل x باشد که حکم بدیهی است. اگر e شامل x نباشد، آن‌گاه $e \nsubseteq g \setminus \{x\}$ زیرا g در $F_۱ \cup F_۲$ کمین است. همچنین $e \nsubseteq \{۱, \ldots, n\} \setminus g$ زیرا اگر $e \subseteq \{۱, \ldots, n\} \setminus g$، آن‌گاه $e' \in G_۱$ که $e' \subseteq e$ وجود دارد و لذا، $e' \cap g = \varnothing$ ولی این تناقض است زیرا $e', g \in F_۱$.

حالت دوم: $G_۱ \neq \varnothing$ و $G_۲ \neq \varnothing$.

$g_۱ \in G_۱$ و $g_۲ \in G_۲$ را چنان در نظر بگیرید که $|g_۱ \cup g_۲|$ کمترین ممکن باشد. $x \in g_۱ \setminus g_۲$ و $y \in g_۱ \setminus g_۲$ را نیز انتخاب کنید. این کار امکان پذیر است، زیرا $g_۱$ و $g_۲$ در $F_۱ \cup F_۲$ کمین هستند و $G_۱$ و $G_۲$ نیز مجزا هستند. x و y را سفید، اعضای $g_۱ \cup g_۲ \setminus \{x, y\}$ را آبی و اعضای $\{۱, ۲, \ldots, n\} \setminus (g_۱ \cup g_۲)$ را قرمز رنگ‌آمیزی کنید.

برای عضو دلخواه $e \in F_۱ \cup F_۲$ که $|e| \geq ۳$، اگر e شامل x یا y باشد که حکم بدیهی است. همچنین با توجه به انتخاب $g_۱$ و $g_۲$، رابطه $e \subseteq g_۱ \cup g_۲ \setminus \{x, y\}$ نیز ممکن نیست. فرض کنید $e \subseteq g_۱ \cup g_۲ \setminus \{x, y\}$. اگر $e \in F_۱$، آن‌گاه $|e \cup g_۲| < |g_۱ \cup g_۲|$ و اگر $e \in F_۲$، آن‌گاه $|e \cup g_۱| < |g_۱ \cup g_۲|$ که این با انتخاب $g_۱$ و $g_۲$ در تناقض است.

اگر $e \subseteq \{۱, \ldots, n\} \setminus (g_۱ \cup g_۲)$، آن‌گاه $e \cap g_۱ = e \cap g_۲ = \varnothing$. لذا از آنجا که $g_i \in F_i$، داریم $e \notin F_۱$ و $e \notin F_۲$ که این نیز ممکن نیست.

چهل‌وچهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۴ پاسخ‌های نوبت اول ۱۴۰۱/۲/۱۹

پاسخ ۱.۱.۴۴. از $AB = (AB)^{۲}$ نتیجه می‌شود $(BA)^{۳} = (BA)^{۲}$. بنابراین، ماتریس قطری BA در معادله $x^{۳} - x^{۲} = ۰$ صدق می‌کند. این نشان می‌دهد که تمام درایه‌های روی قطر ماتریس BA، در معادله فوق صدق می‌کنند. لذا، BA یک ماتریس قطری با درایه‌های ۰ و ۱ است. بنابراین، BA خودتوان است.

پاسخ ۲.۱.۴۴. فرض کنید تابعی با ویژگی مورد نظر وجود دارد. برای هر $m,n \in \mathbb{Z}$ مجموعه $A_{m,n}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$A_{m,n} = f^{-۱}([n, n+۱]) \cap [m, m+۱].$$

ادعا می‌کنیم برای هر $m,n \in \mathbb{Z}$، مجموعه $A_{m,n}$ متناهی است.

اگر برای $m,n \in \mathbb{Z}$، مجموعه $A_{m,n}$ شامل دنباله‌ای مانند $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ با جملات متمایز باشد، آن‌گاه به دلیل فشردگی $[m, m+۱]$ می‌توان زیردنباله‌ای همگرا از جملات این دنباله مانند $\{y_j\}_{j=۱}^{\infty}$ انتخاب کرد. همچنین به دلیل فشردگی $[n, n+۱]$ می‌توان زیردنباله‌ای از $\{y_j\}_{j=۱}^{\infty}$ مثل $\{z_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یافت که $\{f(z_i)\}_{i=۱}^{\infty}$ نیز همگرا باشد که این با فرض مسئله تناقض دارد.

حال توجه کنید که اجتماع همه مجموعه‌های به صورت $A_{m,n}$ برای m و n های صحیح مجموعه‌ای شمارا

خواهد بود، اما از سوی دیگر به وضوح $\mathbb{R}=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}A_{m,n}$ و این با ناشمارا بودن مجموعه اعداد حقیقی تناقض دارد.

پاسخ ۳.۱.۴۴. ابتدا مشاهده می‌کنیم که $|f(x)|$ تابعی پیوسته و Q مجموعه‌ای فشرده است. پس، $|f(x)|$ در نقطه‌ای مانند $a\in Q$ بیشینه خواهد شد. حال نشان می‌دهیم که نقطه‌ای مانند $b\in Q$ با درایه‌های ۰ و ۱ وجود دارد طوری که $|f(b)|\geq|f(a)|$. برای این منظور دنباله زیر از نقاط Q را به طور استقرایی می‌سازیم:

$$a=a_{۰},a_{۱},a_{۲},\dots,a_n=b$$

به‌طوری که $|f(a_{۰})|\leq|f(a_{۱})|\leq\cdots\leq|f(a_n)|$. برای $i\geq ۱$، اگر $a_{i-۱}=(r_{۱},r_{۲},\dots,r_n)$، آن‌گاه a_i را به این شکل تعریف می‌کنیم a_i در تمام درایه‌ها به جز درایه i-ام برابر با $a_{i-۱}$ بوده و در درایه i-ام برابر نقطه بیشینه $|g_i|$ در بازه $[۰,۱]$ باشد که g_i به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$g_i(s)=f(r_{۱},r_{۲},\dots,r_{i-۱},s,r_{i+۱},\dots,r_n).$$

دقت کنید چون g_i خطی است، بیشینه $|g_i|$ در نقطه $s=۰$ یا $s=۱$ رخ می‌دهد. پس، بنابر انتخاب a_i به روشنی داریم $|f(a_i)|\geq|f(a_{i-۱})|$. همچنین روشن است که در گام i-ام، تمام درایه‌های اول تا i-ام a_i اعداد ۰ یا ۱ هستند. در نهایت، برای هر $x\in Q$ خواهیم داشت $|f(x)|\leq|f(a_{۰})|\leq|f(a_n)|$. همچنین درایه‌های a_n همگی ۰ یا ۱ هستند.

پاسخ ۴.۱.۴۴. قبل از اثبات حکم اصلی لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم. فرض کنید $\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که برای هر $k\in\mathbb{N}$، $x_k>\sum\limits_{j=k+۱}^{\infty}x_j$. در این صورت مجموع‌های به صورت $\sum\limits_{j\in A}x_j$ برای زیرمجموعه‌های مختلف A از اعداد حقیقی، متمایز هستند.

اثبات لم. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی باشند که $A\neq B$. k را کوچک‌ترین عضو $A\triangle B$ بگیرید ($A\neq B$ نتیجه می‌دهد $A\triangle B$ ناتهی است). به دلیل تقارن فرض می‌کنیم $k\in A$ و $k\notin B$. به‌علاوه، فرض کنید $C=A\cap\{۱,۲,\dots,k-۱\}$. چون k کوچک‌ترین عضو $A\triangle B$ است،

$C = B \cap \{۱, ۲, \ldots, k-۱\}$. حال داریم

$$\sum_{j\in B} x_j \le \sum_{j\in C} x_j + \sum_{j=k+۱}^{\infty} x_j < \sum_{j\in C} x_j + x_k \le \sum_{j\in A} x_j.$$

و اثبات لم به اتمام می‌رسد.
حال برای مسئله اصلی به برهان خلف، فرض کنید دنباله، بینهایت جمله مثبت داشته باشد. با توجه به همگرایی سری $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$، جملات دنباله به صفر میل می‌کنند. پس، می‌توان دنباله $n_۱ < n_۲ < \cdots$ را یافت که برای هر k، $۰ < a_{n_{i+۱}} < \frac{۱}{۲} a_{n_i}$. با این نحوه تعریف برای هر i، داریم

$$\sum_{j=k+۱}^{\infty} a_{n_j} < a_{n_k}(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots) = a_{n_k}.$$

پس، بنابر لم، مجموع‌های به صورت $\sum\limits_{j\in A} a_j$ برای زیرمجموعه‌های مختلف $A \subseteq \{n_۱, n_۲, \ldots\}$ متمایز هستند. چون تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه نامتناهی $\{n_۱, n_۲, \ldots\}$، ناشمارا است، پس تعداد ناشمارایی مجموع متمایز داریم. از سوی دیگر با توجه به شمارا بودن تعداد اعداد گویا، حداکثر تعداد شمارایی از این مجموع‌ها برابر عددی گویا می‌شود و برای تعداد ناشمارایی از زیرمجموعه‌های $A \subseteq \{n_۱, n_۲, \ldots\}$ مجموع $\sum\limits_{j\in A} a_j$ عددی گنگ است که با فرض مسئله ، یعنی، شمارا بودن تعداد زیرمجموعه‌های با جمع گنگ تناقض دارد.

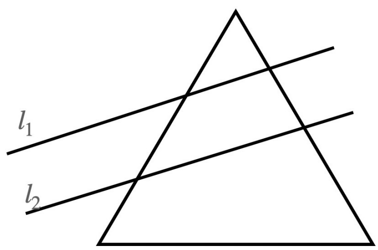
پاسخ ۵.۱.۴۴. کافی است نشان دهیم $K = C \cap Z(G) \neq \{e\}$، زیرا در این صورت $[C:K] < \infty$ و $[G:Z(G)] \le [G:K] = [G:C][C:K] < \infty$. قرار دهید $\mathrm{N}_G(T) = N$. در این صورت $N = (N \cap C)T$. چون $T \neq N$، بنابراین، $N \cap C$ زیرگروه نابدیهی C می‌باشد و لذا، زیرگروه $N \cap C$ دوری و با شاخص متناهی در C است. اگر x مولد $(N \cap C)$ باشد، مرتبه x نامتناهی است و تابع $f: T \to T$ با ضابطه $f(t) = xtx^{-۱}$ یک خودریختی T می‌باشد. چون T متناهی است، مرتبه f به عنوان عضوی از گروه خودریختی‌های T متناهی است. اگر $f^n = id_T$، آن‌گاه به ازای هر $t \in T$ داریم $t = f^n(t) = x^n t x^{-n}$. بنایراین x^n با هر عضو T جابه‌جا می‌شود. همچنین x^n با هر عضو C نیز جابه‌جا می‌شود. بنابراین، با هر عضو $G = CT$ نیز جابه‌جا می‌شود. در نتیجه، $e \neq x^n \in Z(G) \cap C = K$.

پاسخ ۶.۱.۴۴. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله ، فرض کنیم $\|v_۱\| = ۱$. ابتدا بردار $v_۱$ را در نظر

گرفته و آن را به یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^3$ گسترش می‌دهیم. کافی است حکم مسئله را به جای بردارهای v_1, v_2, v_3 برای مولفه‌های v_1, v_2, v_3 در راستای v_1 در آن پایه متعامد اثبات کنیم. فرض کنیم v'_2 و v'_3 به ترتیب تصویر عمودی v_2 و v_3 در راستای v_1 باشند. با توجه به این‌که به‌ازای هر $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ ،

$$\| p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 \| \geq \| p_1 v_1 + p_1 v'_2 + p_3 v'_3 \|$$

کافی است حکم را برای v_1, v'_2, v'_3 به جای v_1, v_2, v_3 اثبات کنیم. پس، بدون کاسته شدن از کلیت مسئله ، می‌توان فرض کرد که v_2, v_3 در راستای v_1 هستند. مکان هندسی نقاطی مانند (p_1, p_2, p_3) از فضا که اولا مجموعشان برابر ۱ باشد و ثانیا $p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = \alpha v_1$ باشد عبارت از کل ابر صفحه $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ یا یک خط است. در حالتی که α در بازه $(-c, c)$ تغییر کند، این مکان هندسی یا کل ابرصفحه یا ناحیه محدود بین دو خط موازی l_1, l_2 است. حال با توجه به این‌که نقطه p به صورت همگن از سادک احتمالاتی انتخاب شده است، احتمال اینکه $\|p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3\| \leq c$ برابر با نسبت مساحت اشتراک سادک احتمالاتی و ناحیه محصور بین l_1, l_2 به مساحت کل سادک احتمالاتی است.



بیشینه مساحت اشتراک متعلق به ساختار شکل بالا است و مقدار مساحت در این حالت مطابق شکل عبارت است از:

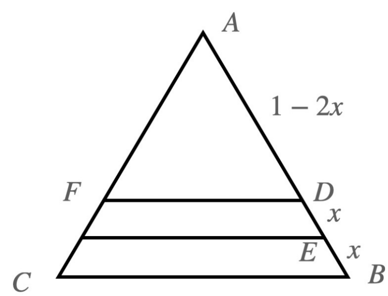
$$\begin{aligned} S(BCFD) &= S(ABC) - S(ADF) \\ &= S(ABC)(1 - \frac{S(ADF)}{S(ABC)}) \\ &= S(ABC)(1 - (1 - 2x)^2). \end{aligned}$$

از طرف دیگر، مقدار x با توجه به این‌که مقدار $p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3$ بر روی پاره خط BC برابر با $-cv_1$ و بر روی پاره خط DF برابر cv_1 است، از رابطه تالس در هندسه اقلیدسی قابل محاسبه است. در حقیقت، در

نقطه‌ی وسط BD، یعنی E، مقدار $p_۱v_۱+p_۲v_۲+p_۳v_۳$ برابر ۰ است و لذا، $xv_۱+(۱-x)v_۲=۰$.
از آنجا که در این شکل، $v_۲=-cv_۱$، لذا $x=\frac{c}{c+۱}$. با جایگذاری در رابطه بالا داریم

$$S(BCFD)=S(ABC)(۱-(۱-۲\frac{c}{c+۱})^۲)\leq ۴cS(ABC).$$

و از اینجا حکم بدست می‌آید.



۲.۴۴ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۴۰۱/۲/۲۰

پاسخ ۱.۲.۴۴. جواب مسئله m است. فرض کنید $X=\{p_۱,p_۲\dots,p_n\}$ مجموعه‌ای n عضوی متشکل از افراد این جمع باشد. مجموعه $T=\{q_۱,\dots,q_m\}$ را مجموعه‌ای m عضوی از افرادی بگیرید که دو به دو دشمن هستند. فرض کنید $d(p,q)$ نشان دهنده فاصله دو شخص p و q باشد. برای هر i که $۱\leq i\leq m$ زیرمجموعه X_i از X را به این شکل تعریف کنید:

$$X_i=\left\{p\in X \;\middle|\; d(p,q_i)\leq ۱\right\}.$$

چون T بزرگترین زیرمجموعه متشکل از افراد دو به دو با هم دشمن در X است، هر عضو از X باید با حداقل یکی از اعضای T دوست باشد. پس، $X=\cup_{i=۱}^{n}X_i$. همچنین می‌توان نشان داد برای هر $i\neq j$، داریم $X_i\cap X_j=\varnothing$. زیرا در غیر این صورت اگر p متعلق به $X_i\cap X_j$ باشد، آن‌گاه به کمک نامساوی مثلث داریم

$$۲\geq d(q_i,p)+d(p,q_j)\geq d(q_i,q_j)>۳$$

که تناقض است. اثبات دوست بودن افراد یک دسته نیز مشابه است. زیرا اگر $\{p,q\} \subseteq X_i$، و p و q دشمن باشند، آن‌گاه

$$۳ < d(p,q) \leq d(p,q_i) + d(q,q_i) \leq ۲$$

که تناقض است. حالا فرض کنید p و q در دو دسته متفاوت باشند. پس، مثلاً $p \in X_i$ و $q \in X_j$ که $i \neq j$. ثابت می‌کنیم p و q دشمن هستند. اگر p و q دوست باشند، داریم $d(p,q) \leq ۱$ و به کمک نامساوی مثلث داریم

$$d(q_i,q_j) \leq d(p,q_i) + d(p,q) + d(q,q_j) \leq ۳$$

که با فرض دشمن بودن q_i و q_j در تناقض است.

پاسخ ۲.۲.۴۴. فرض کنید $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ یک همریختی پوشا باشد. اگر $f(H) = \{۰\}$، آن‌گاه $H \subseteq \mathrm{Ker(f)}$ و در نتیجه، $[G:\mathrm{Ker(f)}] \leq [G:H] < \infty$ که با $G/\mathrm{Ker(f)} \cong \mathbb{Z}$ تناقض دارد. بنابراین، $f(H)$ یک زیرگروه ناصفر از $\mathbb{Z}$ است. بنابراین، به ازای یک عدد صحیح و نامنفی m داریم $f(H) = m\mathbb{Z}$. در نتیجه، ضابطه $g(h) = \frac{f(h)}{m}$ یک همریختی پوشا از H به $\mathbb{Z}$ را مشخص می‌کند.

پاسخ ۳.۲.۴۴. بنابر فرض، عدد صحیح $k_۰$ وجود دارد که برای هر $x > ۲^{k_۰}$، داریم $\frac{f(۲x)}{f(x)} > ۲^{\alpha-۱}$. تعریف می‌کنیم

$$I_k = \int_{۲^k}^{۲^{k+۱}} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx.$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $x = ۲y$ داریم

$$I_{k+۱} = ۲^{۱-\alpha} \int_{۲^k}^{۲^{k+۱}} \frac{f(۲y)}{y^\alpha}\, dy.$$

پس، برای $k > k_۰$،

$$I_{k+۱} > ۲^{۱-\alpha} \int_{۲^k}^{۲^{k+۱}} \frac{۲^{\alpha-۱} f(y)}{y^\alpha}\, dy = I_k$$

بنابراین، دنباله I_k از جایی به بعد صعودی و مثبت است و در نتیجه، $\sum_k I_k = \infty$.

پاسخ ۴.۲.۴۴. زیرمجموعه‌ای k-عضوی مانند B متعلق به $\mathscr{F}$ است هرگاه B با حداقل دو تا از A_iها اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه T را به شکل زیر تعریف کنید:

$$T = \left\{x : x \in A_i \cap A_j \text{ for } ۱ \leq i \neq j \leq t+۱\right\}.$$

بدیهی است که $|T| \leq \frac{(t+۱)k}{۲}$. اگر B یک زیرمجموعه k-عضوی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشد که $B \cap T \neq \varnothing$، آن‌گاه B در $\mathscr{F}$ قرار دارد. تعداد چنین Bهایی برابر است با

$$\binom{n}{k} - \binom{n-|T|}{k}.$$

حال ممکن است زیرمجموعه‌های k-عضوی مانند B' وجود داشته باشند که $B' \cap T = \varnothing$ اما برای $۱ \leq i \neq j \leq t+۱$ داشته باشیم $B' \cap A_i \neq \varnothing$ و $B' \cap A_j \neq \varnothing$. در نتیجه، B' در $\mathscr{F}$ قرار دارد. تعداد چنین B'هایی حداکثر برابر است با

$$\sum_{i \neq j} |A_i \setminus T||A_j \setminus T| \binom{n-۲}{k-۲}.$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $|T| = \lfloor \frac{(t+۱)k}{۲} \rfloor$.

در این حالت همه A_iها بجز حداکثر یکی، زیرمجموعه T هستند. پس، در این حالت زیرمجموعه‌های k عضوی از نوع B' وجود ندارد و

$$|\mathscr{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-\lfloor \frac{(t+۱)k}{۲} \rfloor}{k}.$$

در این حالت حکم اثبات شد.

حالت دوم: $|T| < \lfloor \frac{(t+۱)k}{۲} \rfloor$.

در این حالت زیرمجموعه‌های k عضوی از نوع B' حداکثر برابر است با

$$\sum_{i<j} |A_i \setminus T||A_j \setminus T| \binom{n-۲}{k-۲} \leq \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲}.$$

پس،

$$|\mathscr{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-|T|}{k} + \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲}.$$

دقت کنید که

$$\binom{n-|T|}{k} - \binom{n-\lfloor\frac{(t+۱)k}{۲}\rfloor}{k} \geq \binom{n-|T|}{k} - \binom{n-|T|-۱}{k} \geq \binom{n-|T|-۱}{k-۱}.$$

پس،

$$|\mathscr{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-\lfloor\frac{(t+۱)k}{۲}\rfloor}{k} - \binom{n-|T|-۱}{k-۱} + \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲}.$$

اما چون n به اندازه کافی نسبت به t,k بزرگ است به راحتی می‌توان نشان داد که

$$-\binom{n-|T|-۱}{k-۱} + \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲} < ۰.$$

پاسخ ۵.۲.۴۴. فرض کنید A یک مجموعه پوچ‌گرا و J ایده‌ال تولید شده توسط A در حلقه R باشد.

فرض خلف: J مجموعه پوچ‌گرا نیست.

در این صورت دنباله $f_۱, f_۲, \cdots$ در J وجود دارد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، رابطه $f_۱ \cdots f_n \neq ۰$ برقرار است. اگر قرار دهیم $\Lambda = \{I \lhd R : \forall n \in \mathbb{N}, f_۱ \cdots f_n \notin I\}$، آن‌گاه $\{۰\} \in \Lambda$ و بنابر لم زُرن، Λ عضو بیشینی مانند B دارد.

ادعا: $x \in R \backslash B$ وجود دارد که $xA \subseteq B$.

اولاً $A \nsubseteq B$، زیرا در غیر این صورت $J \subseteq B$ و بنابراین، $f_۱ \in B$ که ممکن نیست. لذا، $a_۱ \in A \backslash B$ وجود دارد. اگر $a_۱ A \subseteq B$، ادعا ثابت می‌شود و گرنه $a_۲ \in A$ وجود دارد که $a_۱ a_۲ \notin B$. اگر $a_۱ a_۲ A \subseteq B$ ادعا ثابت می‌شود. در غیر این صورت مانند قبل ادامه می‌دهیم. حال چون A یک مجموعه پوچ‌گرا است، پس از تعداد متناهی مرحله، این روند متوقف می‌شود و ادعا ثابت می‌شود.

چون $x \notin B$، از بیشین بودن B در Λ نتیجه می‌شود عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $f_۱ \cdots f_n \in B + Rx$.

از طرفی $xJ \subseteq B$. بنابراین، $f_۱ \cdots f_n f_{n+۱} \in f_{n+۱}(B+Rx) \subseteq B + Rxf_{n+۱} \subseteq B$ که تناقض به‌دست می‌دهد.

پاسخ ۶.۲.۴۴. ثابت می‌کنیم بازه مذکور در حکم، بازه‌ای به شکل $[r_\circ, r_۱]$ است که تشکیل شده است از rهایی که اعداد ۱ و e^r و $e^{\alpha r}$ در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $\alpha > ۱$. اثبات در حالت‌های $۱ > \alpha > \circ$ و $\circ > \alpha$ مشابه است. در حالت $\alpha > ۱$ تعریف می‌کنیم

$$r_\circ = \inf\{r : ۱ < e^r + e^{\alpha r}\} \quad \text{و} \quad r_۱ = \sup\{r : e^{\alpha r} < ۱ + e^r\}.$$

به وضوح $r_\circ < \circ < r_۱$. ثابت می‌کنیم بازه مذکور در حکم، بازه $[r_\circ, r_۱]$ است. تعریف می‌کنیم

$$S = \{\mathrm{Re}(z) : g(z) = \circ\}.$$

برای هر zای که $g(z) = \circ$، از نابرابری مثلث نتیجه می‌شود

$$۱ \leq e^{Re(z)} + e^{\alpha \mathrm{Re}(z)} \quad \text{و} \quad e^{\alpha \mathrm{Re}(z)} \leq ۱ + e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

پس، $r_\circ \leq \mathrm{Re}(z) \leq r_۱$. در نتیجه، $S \subseteq [r_\circ, r_۱]$ که نتیجه می‌دهد $\bar{S} \subseteq [r_\circ, r_۱]$.
حال فرض کنیم $r \in [r_\circ, r_۱]$. اکنون اعداد ۱، e^r و $e^{\alpha r}$ در نابرابری مثلث صدق می‌کنند و در نتیجه، مثلثی با آن اضلاع وجود دارد. پس، اعداد حقیقی $\theta_۱$ و $\theta_۲$ وجود دارند که

$$۱ + e^{r + i\theta_۱} + e^{\alpha r + i\theta_۲} = \circ$$

تعریف می‌کنیم

$$h(z) = ۱ + e^{z + i\theta_۱} + e^{\alpha z + i\theta_۲}$$

فرض کنیم $\varepsilon_\circ > \circ$ به نحوی باشد که r تنها ریشه h در $B_{\varepsilon_\circ}(r)$ باشد. حال برای هر $\circ < \varepsilon < \varepsilon_\circ$، تعریف می‌کنیم

$$\rho = \min_{\partial B_\varepsilon(r)} |h(z)| > \circ.$$

لم. فرض کنید α عددی گنگ و θ عددی دلخواه باشد. در این صورت برای هر $\delta > \circ$ اعداد صحیح m و n وجود دارند که $|\theta - m\alpha - n| < \delta$.

بنابر این لم، اعداد صحیح m و n وجود دارند که $\left|\frac{\theta_۲-\alpha\theta_۱}{۲\pi}-m\alpha-n\right|<\delta$. حال تعریف می‌کنیم

$$\phi(z)=g(z+i(\theta_۱+۲m\pi)).$$

داریم

$$\begin{aligned}|h(z)-\phi(z)| &= \left|e^{\alpha z+i\theta_۲}-e^{\alpha z+i(\alpha\theta_۱+۲m\alpha\pi)}\right|\\ &= |e^{\alpha z}|\left|e^{i(\theta_۲-\alpha\theta_۱-۲m\alpha\pi)}-۱\right|\\ &\le ۲\pi\delta|e^{\alpha z}|.\end{aligned}$$

که در آن از نابرابری مقدماتی $\left|e^{i\theta}-۱\right|\le|\theta|$ استفاده کرده‌ایم. حال $\delta>۰$ را عددی می‌گیریم که برای هر $z\in\partial B_\varepsilon(r)$، داشته باشیم $۲\pi\delta|e^{\alpha z}|<\rho$. در این صورت برای هر $z\in\partial B_\varepsilon(r)$ خواهیم داشت $|h(z)-\phi(z)|<|h(z)|$. پس، بنابر قضیه روشه، تعداد ریشه‌های h و ϕ داخل $B_\varepsilon(r)$ برابر است. پس، ϕ ریشه‌ای مانند z دارد که $|z-r|<\varepsilon$ و در نتیجه، $|\mathrm{Re}(z)-r|<\varepsilon$. حال با توجه به تعریف ϕ نتیجه می‌شود که g نیز ریشه‌ای دارد که $|\mathrm{Re}(z)-r|<\varepsilon$. چون استدلال بالا برای هر $۰<\varepsilon<\varepsilon_۰$ برقرار است. نتیجه می‌گیریم که $r\in\bar{S}$.

چهل‌وپنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۵ پاسخ‌های نوبت اول ۱۴۰۲/۴/۲۷

پاسخ ۱.۱.۴۵. اگر در رابطه صورت مسئله مقدار a,b را برابر قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{f(a)}^{a} f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t.$$

در نتیجه،

$$\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

ادعا می‌کنیم $f(0) = 0$. اگر $f(0) > 0$، برای هر $t \in (0, f(0))$، داریم $f(0) < f(t)$. پس،

$$0 = \int_0^{f(0)} f(t)\mathrm{d}t > \int_0^{f(0)} f(0)\mathrm{d}t = f(0)^2 > 0$$

که تناقض است. به همین ترتیب اگر $f(0) < 0$، برای هر $t \in (f(0), 0)$، داریم $f(t) < f(0)$. بنابراین،

$$0 = \int_{f(0)}^{0} f(t)\mathrm{d}t < \int_{f(0)}^{0} f(0)\mathrm{d}t = -f(0)^2 < 0.$$

که تناقض است. پس، نتیجه می‌گیریم $f(0) = 0$.

از سوی دیگر، با توجه به اکیداً صعودی بودن f برای هر $x > 0$، داریم $f(x) > f(0) = 0$ و برای هر $x < 0$، داریم $f(x) < f(0) = 0$. حال اگر $f(a) \neq a$، چون $\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t = 0$ و برای همه مقادیر

t بین a و $f(a)$، علامت $f(t)$ با a یکسان است، مقدار انتگرال نمی‌تواند برابر صفر باشد که تناقض است. پس، برای هر a، $f(a)=a$.

پاسخ ۲.۱.۴۵. نکته ۱. G دوری نیست زیرا هر گروه دوری و نامتناهی دارای زیرگروه نابدیهی و نامتناهی است.

نکته ۲. اگر H زیرگروه نابدیهی از G باشد و K یک زیرگروه G و به‌طور سره شامل H باشد، آن‌گاه $G=K$ زیرا اگر $K\neq G$، آن‌گاه $|K| \mid |H| \neq ۱$ و لذا، $H=K$.

الف) اگر $e\neq x\in G$، آن‌گاه طبق نکته (۱)، $y\in G$ وجود دارد که $y\notin\langle x\rangle$ و لذا

$$\langle e\rangle \neq \langle x\rangle \subsetneqq \langle x,y\rangle.$$

پس، طبق نکته (۲)، $G=\langle x,y\rangle$.

ب) اگر N زیرگروه نرمال نابدیهی از G باشد و $a\notin N$، آن‌گاه $\langle e\rangle\neq N\subsetneqq\langle a\rangle N$ و لذا، طبق نکته (۲)، داریم $G=\langle a\rangle N$، بنابراین، $|G|\leq|\langle a\rangle|\,|N|<+\infty$ که خلاف فرض است.

پاسخ ۳.۱.۴۵. با برهان خلف، فرض کنید حداقل n عدد اول متمایز به صورت $\frac{a_i}{a_j}$ قابل نوشتن باشند. فرض کنید این اعداد اول $p_۱,\dots,p_n$ باشند. گراف n رأسی G با رئوس $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ را به صورت زیر می‌سازیم: به ازای هر عدد اول p_i، می‌دانیم که دو عدد مانند a_j و a_k که $۱\leq j,k\leq n$ وجود دارند به‌طوری‌که $p_i=\frac{a_j}{a_k}$. ممکن است تعداد جفت اعداد a_j و a_k با این خاصیت، بیش از یک جفت باشد. در این صورت فقط یک جفت از این اعداد را در نظر گرفته و در گراف G آن‌ها را به یکدیگر متصل می‌کنیم. بنابراین، گراف G شامل n یال و n رأس است و لذا، حتما یک دور مانند $a_{i_۱},\dots,a_{i_m}$ دارد. حال دقت کنید که حاصلضرب $\frac{a_{i_۱}}{a_{i_۲}}\times\frac{a_{i_۲}}{a_{i_۳}}\times\cdots\frac{a_{i_m}}{a_{i_۱}}$ از یک طرف برابر ۱ است و از طرف دیگر برابر است با حاصلضرب m عدد که هر کدام یا یک عدد اول هست یا وارون یک عدد اول و همگی این اعداد اول نیز متمایز هستند. این تناقض، درستی حکم مسئله را نشان می‌دهد.

پاسخ ۴.۱.۴۵. برای هر $m \geq ۱$، با استقرا ثابت می‌شود که

$$f(xa^m) = xa^{m-۱}xa^{m-۲}\cdots axf(x).$$

فرض کنید $n = \mathrm{o}(a)$. برای هر $x \in G$، با استفاده از تساوی بالا برای $m = n$ و حذف $f(x)$ نتیجه می‌شود

$$xa^{n-۱}xa^{n-۲}\cdots ax = e. \quad (*)$$

حال با فرض $x = e$، داریم $a^{\frac{n(n-۱)}{۲}} = e$ و لذا، $n \big| \frac{n(n-۱)}{۲}$ که نتیجه می‌دهد n فرد است. قرار دهید $n = ۲k + ۱$. اگر $e \neq x \in G$ و $x^۲ = e$ (و یا $x = x^{-۱}$)، آن‌گاه طبق رابطه $(*)$

$$\left(xa^{۲k}x\cdots xa^{k+۱}\right)x\left(a^k x\cdots ax\right) = e.$$

قرار می‌دهیم $g = xa^{۲k}x\cdots xa^{k+۱}$. با توجه به این‌که $(a^i)^{-۱} = a^{n-i}$، داریم $g^{-۱} = a^k x\cdots ax$ و لذا، $gxg^{-۱} = e$ یا $x = e$، که ممکن نیست. بنابراین، G عنصری از مرتبه ۲ ندارد و طبق قضیه کوشی، $|G|$ فرد است.

پاسخ ۵.۱.۴۵. تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(a) = \inf\left\{ f(x) + d(x,a) \;\middle|\; x \in X \right\}.$$

ادعا می‌کنیم تابع g خاصیت مورد نظر را دارد. برای هر $a, b \in X$، توجه کنید که

$$f(x) + d(x,a) \leq f(x) + d(x,b) + d(b,a).$$

با گرفتن کمینه از طرفین نابرابری، داریم $g(a) \leq g(b) + d(b,a)$. به عبارت دیگر، $g(a) - g(b) \leq d(a,b)$. به دلیل تقارن a,b در رابطه اخیر، به طور مشابه $g(b) - g(a) \leq d(a,b)$

نیز برقرار است. بنابراین، برای هر $a, b \in X$

$$|g(a) - g(b)| \leq d(a,b).$$

برای اثبات ویژگی دیگر g، توجه کنید که از یک طرف $g(a) \leq f(a) + d(a,a) = f(a)$ و از طرف دیگر، برای هر $a, x \in X$،

$$f(x) - f(a) \geq -d(x,a) - ۱$$

که ایجاب می‌کند

$$f(x) + d(x,a) \geq f(a) - ۱.$$

اگر در این رابطه a را ثابت بگیریم و از سمت بزرگ‌تر روی همه $x \in X$ کمینه بگیریم، طبق تعریف g، نتیجه می‌شود $g(a) \geq f(a) - ۱$. بنابراین، $f(a) \geq g(a) \geq f(a) - ۱$ و اثبات تمام است.

پاسخ ۶.۱.۴۵. حالت کلی‌تر حکم را با فرض این‌که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ برابر با d باشد ثابت می‌کنیم. به عبارت دیگر، ثابت می‌کنیم می‌توان ماتریس $n \times n$ که سطر اول آن به شکل $[a_۱ \ldots a_n]$ و دترمینان آن برابر d باشد، پیدا کرد. اثبات به کمک استقرا روی n خواهد بود:

پایه استقرا: حکم برای $n = ۲$ برقرار است، زیرا اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $(a_۱, a_۲)$ برابر d باشد، آن‌گاه اعداد صحیحی چون s و t وجود دارند که داریم $sa_۱ + ta_۲ = d$. کافی است ماتریس $\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ -t & s \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

حال فرض کنیم حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای n نیز برقرار است. اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}$ برابر با e باشد، آن‌گاه می‌توان ماتریسی $(n-۱) \times (n-۱)$ مانند $B_{n-۱}$ یافت که سطر اول آن به شکل $[a_۱ a_۲ \ldots a_{n-۱}]$ و دترمینان آن برابر e باشد. بنابراین، $B_{n-۱}$

به شکل زیر خواهد بود:

$$B_{n-۱} = \left[\begin{array}{cccc} a_۱ & a_۲ & \cdots & a_{n-۱} \\ \hline & & & \\ & A_{(n-۲)\times(n-۱)} & & \\ & & & \end{array}\right]$$

که در آن $A_{(n-۲)\times(n-۱)}$ یک ماتریس $(n-۲)\times(n-۱)$ با درایه‌های صحیح است. با توجه به این‌که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a_n و e برابر d است، می‌توان اعداد صحیحی مانند s,t یافت که ماتریس

$$B_n = \left[\begin{array}{cccc|c} a_۱ & a_۲ & \cdots & a_{n-۱} & a_n \\ \hline & & & & ۰ \\ & A_{(n-۲)\times(n-۱)} & & & \vdots \\ & & & & ۰ \\ \hline s\frac{a_۱}{e} & s\frac{a_۲}{e} & \cdots & s\frac{a_{n-۱}}{e} & t \end{array}\right]$$

دارای دترمینان d باشد.

۲.۴۵ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸

پاسخ ۱.۲.۴۵. فرض کنید که این کار امکان‌پذیر باشد. اشتراک قرص به شعاع کوچکتر از ۱ با دایره به شعاع ۱ یک کمان است. اگر دو قرص با شعاع کمتر از ۱ قرص بزرگتر را بپوشانند حداقل یکی از آن‌ها باید شامل یک نیم‌دایره به شعاع ۱ باشد، یعنی، باید شامل دو نقطه متقاطر و در نتیجه، به فاصله ۲ باشد که غیرممکن است.

پاسخ ۲.۲.۴۵. به برهان خلف، فرض کنید f تابعی ثابت نباشد. پس، $f(z)-f(\circ)$ که تابعی تحلیلی است که به ازای $z=\circ$ مقدار صفر می‌گیرد. چون f ثابت نیست، عدد صحیح $k\geq ۱$ و تابع تحلیلی g وجود دارد که $g(\circ)\neq\circ$ و $f(z)-f(\circ)=z^kg(z)$. در این صورت تساوی صورت مسئله به شکل زیر در می‌آید:

$$f(\circ)+z^kg(z)=f(\circ)+(z-z^۲)^kg(z-z^۲).$$

با کم کردن $f(\circ)$ از طرفین رابطه بالا و تقسیم بر z^k خواهیم داشت

$$g(z)=(۱-z)^kg(z-z^۲).$$

اگر از طرفین رابطه اخیر که توابعی تحلیلی بر حسب z هستند مشتق بگیریم، داریم

$$g'(z)=(۱-z)^k(۱-۲z)g'(z-z^۲)-k(۱-z)^{k-۱}g(z-z^۲)$$

که با جای‌گذاری $z=\circ$ به صورت زیر در می‌آید:

$$g'(\circ)=g'(\circ)-kg(\circ)$$

که نتیجه می‌دهد $kg(\circ)=\circ$ که با توجه به $k\geq ۱$ و $g(\circ)\neq\circ$ ممکن نیست. این تناقض نشان می‌دهد که f باید تابعی ثابت باشد.

پاسخ ۳.۲.۴۵. قرار دهید $A=[a_{ij}]$ و $B=A+A^t$. لذا $B^t=B$، از طرفی طبق فرض مسئله $B^۲=B$.

بنابراین، $BB^t = B$. حال اگر $B = [b_{ij}]$ و $v_1, \cdots, v_n$ بردارهای سطری B باشند، آن‌گاه

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{2} \langle \sum_i v_i, \sum_j v_j \rangle = \frac{1}{2} \left| \sum_i v_i \right|^2 \geq 0.$$

پاسخ ۴.۲.۴۵. فرض کنید $I_1 = (a_1, b_1), I_2 = (a_2, b_2), \ldots$ همه بازه‌های باز در اعداد حقیقی باشند که هر دو سر آن‌ها اعداد گویا است (این بازه‌ها به دلیل شمارا بودن اعداد گویا، شمارا هستند). طول بازه I_i را با ℓ_i نمایش می‌دهیم.

نشان می‌دهیم می‌توان دنباله $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ از ± 1 و زیردنباله $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$ از اعداد طبیعی را به گونه‌ای انتخاب کرد که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\alpha_j}{j} \in I_k.$$

اثبات این حکم به وضوح حکم مسئله (چگال‌بودن $\{x_1, x_2, \ldots\}$) را نتیجه می‌دهد.

دنباله‌های $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ و $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ را به شکل استقرایی می‌سازیم. به این صورت که فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k}$ تعیین شده باشد به‌طوری‌که برای هر $i \leq k$، $x_{n_i} \in I_i$. اگر $x_{n_k} \in I_{k+1}$، $n_{k+1} = n_k$ شرط مسئله را برای $k+1$ برآورده می‌کند. اگر $x_{n_k} \leq a_{k+1}$، ابتدا عدد $m > m_k$ را به گونه‌ای می‌یابیم که $\frac{1}{m} < \ell_{k+1}$ و $\alpha_{n_k+1}, \ldots, \alpha_m$ را برابر -1 تعریف می‌کنیم. به این ترتیب، داریم $x_m \leq a_{k+1}$. حال n_{k+1} را کوچک‌ترین عدد طبیعی می‌گیریم که

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n_{k+1}} > a_{k+1} - x_m. \quad (*)$$

از آن‌جا که سری $\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j}$ واگراست عدد n_{k+1} با این خاصیت وجود دارد. ادعا می‌کنیم $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. اولاً طبق $(*)$،

$$x_{n_{k+1}} = x_m + \sum_{j=m+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{j} > x_m + (a_{k+1} - x_m) = a_{k+1}$$

و چون n_{k+1} کوچک‌ترین عددی است که خاصیت $(*)$ را دارد، داریم

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n_{k+1}-1}\leq a_{k+1}-x_m.$$

چون $\frac{1}{n_{k+1}}<\frac{1}{m}<\ell_{k+1}$ نتیجه می‌گیریم که

$$x_{n_{k+1}}=x_m+\sum_{j=m+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{j}+\frac{1}{n_{k+1}}<x_m+(a_{k+1}-x_m)+\ell_{k+1}=a_{k+1}+\ell_{k+1}=b_{k+1},$$

و اثبات $x_{n_{k+1}}\in I_{k+1}$ به اتمام می‌رسد.

اثبات در حالت $x_{n_k}\geq b_{k+1}$ مشابه است. ابتدا $\alpha_{n_k+1},\dots,\alpha_m$ را برابر $+1$ تعریف می‌کنیم ($\frac{1}{m}<\ell_{k+1}$). سپس α_iهای بعدی را برابر -1 تعریف می‌کنیم تا به عدد مناسبی مانند n_{k+1} برسیم به‌طوری که $x_{n_{k+1}}\in I_{k+1}$. با توجه به این که با انتخاب هر علامت -1 مقدار x_i به اندازه عددی کم‌تر از ℓ_{k+1} کوچک می‌شود و همچنین با توجه به واگرا بودن سری $\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{j}$ حتماً، چنین عدد n_{k+1} یافت می‌شود.

پاسخ ۵.۲.۴۵. فرض کنید که P ماتریسی باشد که x را روی W تصویر می‌کند. دقت کنید $P^2x=Px$ و می‌توان ثابت کرد که $\mathrm{Im}(P)+\mathrm{Ker}(P)=\mathbb{R}^n$ و $P=P^t$. همچنین رتبه $\mathrm{Im}(P)$ برابر k است. چون $Pw=w$، برای هر عضو $w\in W$ و برای هر عضو v متعلق به زیرفضای عمود W در $\mathbb{R}^n$، یعنی $W^\perp$، داریم $Pv=0$. بنابراین، P دارای k مقدار ویژه ۱ و $n-k$ مقدار ویژه ۰ است. بنابراین،

$$\mathrm{tr}(P)=\sum_{i=1}^{n}P_{ii}=k.$$

امید ریاضی مسئله به شکل زیر محاسبه می‌شود:
اگر $x=(x_1,\dots,x_n)$ یک بردار تصادفی با طول n و با درایه‌های ±1 در فرض مسئله باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{dist}(x,W)^2)&=\mathbb{E}((d(x,Px))^2)\\&=\mathbb{E}((x-Px).(x-Px))\\&=\mathbb{E}(x^tx-x^tP^tPx)&&\text{(از تعریف ضرب داخلی)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(x^t x - x^t P^۲ x) && (P^t = P \text{ چون}) \\
&= \mathbb{E}(x^t x - x^t P x) && (P^۲ = P \text{ چون}) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} x_i P_{ij} x_j)) \\
&= \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(x_i^۲) - \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} \mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) && (\text{بنا بر خطی بودن امید ریاضی}) \\
&= n - \sum_{i=۱}^{n} P_{ii} && (\text{از توضیح پایین}) \\
&= n - k. && (\sum_{i=۱}^{n} P_{ii} = k \text{ چون})
\end{aligned}
$$

دقت کنید که اگر $i \neq j$ داریم $\mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) = P_{ij}\mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(x_j) = ۰$ و اگر $i = j$ داریم

$$\mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) = P_{ii}\mathbb{E}(x_i^۲) = P_{ii}.$$

پاسخ ۶.۲.۴۵. طبق فرض، عناصر $p \in P$ و $q \in Q$ وجود دارند که $ab = p + q$. قرار دهید $f(x) = (x-a)(x-b) - p = x(x-(a+b)) + q$. طبق فرض، $f(x)$ ریشه‌ای مانند α در R دارد، یعنی، $f(\alpha) = ۰$. در این صورت $(\alpha - b)(\alpha - a) = p \in P$ و چون P ایده‌آل اول است، $\alpha - a \in P$ یا $\alpha - b \in P$. همچنین $\alpha(\alpha - (a+b)) = -q \in Q$ و چون Q نیز ایده‌آل اول است، $\alpha \in Q$ یا $\alpha - (a+b) \in Q$. پس، یکی از چهار حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱) $\alpha - a \in P$ و $\alpha \in Q$، در این صورت $a = \alpha - (\alpha - a) \in P + Q$؛

۲) $\alpha - a \in P$ و $\alpha - (a+b) \in Q$، در این صورت $b = \alpha - a - (\alpha - (a+b)) \in P + Q$؛

۳) $\alpha - b \in P$ و $\alpha \in Q$، در این صورت $b = b - \alpha + \alpha \in P + Q$؛

۴) $\alpha - b \in P$ و $\alpha - (a+b) \in Q$، در این صورت $a = \alpha - b - (\alpha - (a+b)) \in P + Q$.

بنابراین، حکم ثابت می‌شود.

چهل‌وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

۱.۴۶ پاسخ‌های نوبت اول ۱۴۰۳/۲/۱۱

پاسخ ۱.۱.۴۶. با استفاده از مفروضات مسئله

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۴}+x_{n+۵}+x_{n+۶})=\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+x_{n+۳})=۷.$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۶})=۱۴.$$

از آنجا که

$$x_{n+۷}=\left(x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۷}\right)-\left(x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۶}\right)$$

نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty}x_n=۳-۱۴=-۱۱$ که این به‌طور خاص نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+x_{n+۳})=-۳۳$$

که با فرض مسئله در تناقض است.

پاسخ ۲.۱.۴۶. طبق فرض $x^{۲}+y^{۲}=(x+y)^{۲}=x^{۲}+xy+yx+y^{۲}$ که نتیجه می‌دهد برای هر x,y در R داریم $xy=-yx$. با فرض $x=y$ داریم $x^{۲}=-x^{۲}$. بنابراین،

$$(xy)(xy)=x(yx)y=-x^{۲}y^{۲}=x^{۲}y^{۲}.$$

پاسخ ۳.۱.۴۶. فرض کنید برای عضوی مانند $w\in\Omega$، m_w تعداد E_iهایی باشد که w در آن‌ها قرار دارد. بنابراین، اگر $w\in E_i$، داریم $m_w\le a_i$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i}&=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{w\in E_i}\frac{\mathbb{P}(w)}{a_i}\\&=\sum_{w\in\Omega}\sum_{E_i\ni w}\frac{\mathbb{P}(w)}{a_i}\\&=\sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(w)\sum_{E_i\ni w}\frac{۱}{a_i}\\&=\sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(w)\frac{m_w}{a_i}\\&\le\sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(w)\\&=۱.\end{aligned}$$

پاسخ ۴.۱.۴۶. فرض کنید H,K دو زیرگروه G باشند به‌طوری‌که $|H|\mid|K|$. بنابراین، طبق فرض $|H\cap K|=|H|$. در نتیجه، $H\subseteq K$. بنابراین، اگر $|H|=|K|$، آن‌گاه $H=K$. همچنین هر زیرگروه G نرمال است زیرا $|gHg^{-۱}|=|H|$. اگر N زیرگروه نرمال G باشد، آن‌گاه هر زیرگروه G/N به شکل H/N می باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned}\text{(ب.م.م)}(|H/N|,|K/N|)&=\text{(ب.م.م)}\left(\frac{|H|}{|N|},\frac{|K|}{|N|}\right)=\frac{\text{(ب.م.م)}(|H|,|K|)}{|N|}\\&=\frac{|H\cap K|}{|N|}=|H\cap K/N|=|H/N\cap K/N|.\end{aligned}$$

در نتیجه، G/N نیز همین خاصیت را دارد. حال حکم را با استقرا روی G ثابت می‌کنیم:

برای $|G| = ۱$ حکم بدیهی است. فرض کنید $|G| > ۱$، عدد p یک عامل اول $|G|$ و a یک عضو مرتبه p در G باشد. بنابراین، $N = \langle a \rangle \lhd G$ و گروه G/N، طبق فرض استقرا، دوری است. اگر $G/N = \langle bN \rangle$، آن‌گاه $G = MN$ که در آن $M = \langle b \rangle$. قرار دهید $m = |M|$. اگر $p \mid m$، آن‌گاه $N \subseteq M$ و $G = MN = M$ دوری است. اگر $p \nmid m$، آن‌گاه $aba^{-۱}b^{-۱} \in M \cap N = \{e\}$. بنابراین، $ab = ba$. در نتیجه،

$$G = MN \cong M \times N \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{mp}$$

دوری است.

پاسخ ۵.۱.۴۶. به برهان خلف، فرض کنید X مجموعه‌ای ناشمارا باشد. خاصیت بیان‌شده در صورت مسئله (پوشش مجموعه با دنباله‌ای از گوی‌های با شعاع داده‌شده) را خاصیت $(*)$ می‌نامیم.

ادعای ۱. اگر (X,d) یک فضای متریک کامل دارای خاصیت $(*)$ باشد، هر زیرمجموعه بسته ناتهی $Y \subseteq X$ نیز (با متریک القایی) خاصیت $(*)$ را دارد.

اثبات ادعای ۱. می‌دانیم که هر زیرمجموعه بسته از یک فضای متریک کامل، خود کامل است. پس، تنها باید برقراری خاصیت $(*)$ را برای Y ثابت کنیم.

برای دنباله $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲, \ldots$ از اعداد مثبت، طبق خاصیت $(*)$ برای X، دنباله $x_۱, x_۲, \ldots$ از اعضای X یافت می‌شود که $X = \bigcup_i B_{\varepsilon_i/۲}(x_i)$. حال دنباله $y_۱, y_۲, \ldots$ از Y را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $B_{\varepsilon_i/۲}(x_i) \cap Y \neq \varnothing$، y_i را نقطه دلخواهی در این اشتراک می‌گیریم، و اگر $B_{\varepsilon_i/۲}(x_i) \cap Y = \varnothing$، y_i را برابر عضو دلخواهی از Y می‌گیریم. با این تعریف، اگر $B_{\varepsilon_i/۲}(x_i) \cap Y \neq \varnothing$، آن‌گاه $B_{\varepsilon_i/۲}(x_i) \subseteq B_{\varepsilon_i}(y_i)$. پس، $Y \subseteq \bigcup_i B_{\varepsilon_i}(y_i)$. بنابراین، Y نیز خاصیت $(*)$ را دارد.

ادعای ۲. برای هر فضای متریک کامل ناشمارای X با خاصیت $(*)$، $z_* \in X$ یافت می‌شود که هر گوی باز به مرکز z_* شامل تعداد ناشمارا نقطه از X باشد.

اثبات ادعای ۲. طبق $(*)$ برای دنباله ثابت $\varepsilon_i = ۱$. می‌توان تعداد شمارا گوی باز به شعاع ۱ یافت که اجتماع آن‌ها X را بپوشاند. چون X ناشماراست، دست‌کم یکی از این گوی‌ها مانند $\overline{B_۱(z_۰)}$ ناشماراست. طبق ادعای قبلی $\overline{B_۱(z_۰)}$ خاصیت مسئله را دارد. طبق خاصیت $(*)$ برای این مجموعه و دنباله ثابت

$\varepsilon_i = \frac{1}{2}$ می‌توان گوی $\overline{B_{1/2}(z_1)}$ را یافت که شامل تعداد ناشمارا نقطه باشد. با ادامه همین روند و به صورت استقرایی، می‌توان دنباله $z_0, z_1, z_2, \dots$ از اعضای X یافت که برای هر n، $B_{1/2^{n+1}}(z_n)$ ناشمارا باشد و $d(z_n, z_{n+1}) < 1/2^n$. بنابراین، دنباله $\{z_n\}_{n\geq 1}$ کوشی است و چون X کامل است به عضوی مانند z_* هم‌گراست که خاصیت مورد نظر را دارد.

ادعای ۳. برای هر فضای متریک کامل ناشمارای X با خاصیت $(*)$ و هر $r > 0$ دو گوی بسته مجزا با شعاع کم‌تر از r در X یافت می‌شود که هر یک شامل تعداد ناشمارا نقطه باشند.

اثبات ادعای ۳. طبق ادعای قبلی $z_* \in X$ یافت می‌شود که هر گوی باز حول آن شامل تعداد ناشمارا نقطه باشد. برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $B_n = B_{1/n}(z_*)$ و $A_n = \overline{B_n} \setminus B_{n+1}$. به وضوح A_iها مجموعه‌ای بسته و مجزا هستند و اجتماع‌شان $\overline{B_1} \setminus \{z_*\}$ است. بنابراین، $n_0 \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود که A_{n_0} ناشمارا باشد. حال طبق ادعای (۲)، $z'_* \in A_{n_0}$ وجود دارد که هر گوی باز به مرکز آن ناشمارا باشد. پس، برای $s < \min\left\{\frac{1}{2}d(z_*, z'_*), r\right\}$، $\overline{B_s(z_*)}$ و $\overline{B_s(z'_*)}$ شرط مسئله را دارد.

حال برای اثبات حکم اصلی ابتدا به کمک ادعای (۳) برای $r = \frac{1}{2}$ گوی‌های بسته و مجزای S_1, S_2 را می‌یابیم که هر دو شعاع کم‌تر از $\frac{1}{2}$ دارند. سپس بنا به ادعای (۱)، S_1 و S_2 هر یک فضاهای متریک کامل با خاصیت $(*)$ هستند. به کمک ادعای (۳) برای $r = \frac{1}{4}$، می‌توان گوی‌های بسته و مجزای $S_{11}, S_{12} \subseteq S_1$ و $S_{21}, S_{22} \subseteq S_2$ یافت که همگی شعاع کم‌تر از $\frac{1}{4}$ دارند. به همین ترتیب، به صورت استقرایی و با استفاده از ادعاهای بالا، برای هر $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ می‌توان گوی‌های بسته مجزای $S_{i_1\cdots i_n 1}, S_{i_1\cdots i_n 2} \subseteq S_{i_1\cdots i_n}$ یافت که شعاع کم‌تر از $1/2^n$ دارند.

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$، ε_n را عددی مثبت بگیرید که از نصف فاصله دوبه‌دوی مجموعه‌های $S_{i_1\cdots i_n}$ کم‌تر باشد. طبق فرض مسئله، برای دنباله $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$، می‌توان نقاط $x_1, x_2, \dots$ از اعضای X را یافت که اجتماع $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ها X را بپوشانند. با توجه به تعریف ε_i، برای هر n، $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ حداکثر با یکی از مجموعه‌های به صورت $S_{i_1\cdots i_n}$ اشتراک دارد.

حال دنباله $j_1, j_2, \dots \in \{1, 2\}$ را به صورت استقرایی می‌سازیم که $S_{j_1 j_2\cdots j_n} \cap B_{\varepsilon_n}(x_n) = \varnothing$. فرض کنید $j_1, \dots, j_{n-1}$ ساخته شده باشد. در این صورت $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ دست‌کم با یکی از دو مجموعه $S_{j_1\cdots j_{n-1}1}$ و $S_{j_1\cdots j_{n-1}2}$ اشتراک تهی دارد. اگر با $S_{j_1\cdots j_{n-1}1}$ اشتراک تهی داشته باشد، قرار می‌دهیم $j_n = 1$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $j_n = 2$.

حال چون

$$\cdots \subseteq S_{j_1\cdots j_{n-1} j_n} \subseteq S_{j_1\cdots j_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq S_{j_1}$$

برای هر n، $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ با اشتراک گوی‌های بالا اشتراک ندارد. از طرفی چون قطر $S_{j_1\dots j_{n-1}j_n}$ با افزایش n به صفر میل می‌کند و فضای متریک X کامل است، اشتراک همه این مجموعه‌ها نقطه یکتایی مانند x_* است. چون $S_{j_1j_2\dots j_n}\cap B_{\varepsilon_n}(x_n)=\varnothing$ و $x_*\in S_{j_1j_2\dots j_n}$. پس، $x_*\notin B_{\varepsilon_n}(x_n)$ و این با فرض این‌که اجتماع $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ها X را می‌پوشاند تناقض دارد.

پاسخ ۶.۱.۴۶. حکم را در حالت کلی برای n عدد دوبه‌دو متمایز $x_1,\dots,x_n$ اثبات می‌کنیم. نشان می‌دهیم که می‌توان با $2n-1$ سوال، شاخص k را یافت که $x_k=\min\{x_1,\dots,x_n\}$ و با کمتر از این تعداد سوال، الزاما نمی‌توان شاخص (اندیس) k را یافت. برای قسمت اول، این مراحل را در نظر بگیرید. در هر گام، کوچکترین عدد از بین ℓ جمله‌ای که تا کنون بررسی شده اند را در نظر می‌گیریم و دو بار با جمله $(\ell+1)$ام دنباله مقایسه می‌کنیم. اگر هر دو بار یک نتیجه حاصل شد، یعنی، نتیجه مقایسه قطعا درست است و سپس شاخص جمله کوچکتر را به عنوان شاخص کوچکترین جمله بین $\ell+1$ جمله اول دنباله در نظر گرفته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. اگر حاصل دو مقایسه متفاوت بود، یعنی، دقیقا یکی از دو مقایسه درست و دیگری اشتباه بوده است. لذا، در این حالت مقایسه سومی را انجام می‌دهیم و طبق فرض، می‌دانیم نتیجه مقایسه سوم قطعا صحیح است. در چنین وضعیتی می‌دانیم که از الان به بعد تمام مقایسه‌ها صحیح خواهند بود. لذا، بعد از این مرحله دیگر نیازی به انجام دوباره یک مقایسه نیست. پس، اگر در یک مرحله نیاز به سه مقایسه داشتیم در تمام مقایسه‌های بعدی می‌توانیم با یک بار مقایسه کردن، شاخص کوچکترین جمله دنباله تا آن مرحله را بیابیم. پس، در کل تعداد $2(n-1)+1=2n-1$ مقایسه انجام شده است و شاخص کوچکترین عضو نیز پیدا می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که با تعداد کمتری سوال نمی‌توان الزاما شاخص کوچکترین عضو دنباله را پیدا کرد. برای این بخش یک گراف جهت‌دار بدین صورت می‌سازیم. مجموعه رأس‌های این گراف را برابر با $\{x_1,\dots,x_n\}$ می‌گیریم. هرگاه بین دو جمله x_i و x_j مقایسه‌ای انجام شود، بین این دو جمله (که رأس‌هایی از گراف هستند) یک یال جهت دار رسم می‌کنیم. جهت این یال از رأسی که در نتیجه، مقایسه کوچکتر اعلام شده است به سمت رأسی که بزرگتر اعلام شده است خواهد بود.

ادعا: اگر شاخص کوچکترین جمله دنباله پس از انجام تعدادی مقایسه به صورت یکتا مشخص شود، آن‌گاه هر رأسی غیر از رأس متناظر کوچکترین جمله، حداقل باید دو یال ورودی داشته باشد.

برهان ادعا: فرض کنید رأس متناظر کوچکترین جمله، x_p باشد. فرض کنید رأس دیگری مانند x_q وجود داشته باشد که درجه ورودی آن حداکثر ۱ است. حال اگر یال ورودی به x_q به اشتباه بیان شده باشد (به عبارتی نتیجه مقایسه برای دو سر این یال، به غلط گزارش شده باشد)، آن‌گاه هیچ مسیر جهت‌داری از x_p به

x_q (پس از در نظر گرفتن جهت اصلاح شده آن یال) وجود ندارد و لذا، نمی‌توان الزاما x_p را کوچکترین جمله دنباله دانست زیرا دلیلی وجود ندارد که x_q از x_p کمتر باشد و این تناقض است. از آنجایی که هر رأس x_i به جز x_p دست کم دو یال ورودی دارد پس، تعداد یال‌ها (تعداد سوال‌ها) حداقل برابر با $۲(n-۱)$ خواهد بود. حال نشان می‌دهیم بجز این $۲(n-۱)$ یال، دست کم یک یال دیگر هم باید وجود داشته باشد. فرض کنید $x_{p'}$ دومین جمله کوچک این دنباله باشد. در این صورت تنها دلیلی که می‌تواند ما را از این که « x_p از $x_{p'}$ کوچکتر است» مطمئن کند این است که x_p و $x_{p'}$ به صورت مستقیم مقایسه شده باشند. حال اگر تعداد دفعاتی که x_p و $x_{p'}$ مقایسه شده باشند دقیقا دو بار بوده باشد، آن‌گاه ممکن است یکی از دو مقایسه درست گزارش شده و مقایسه دیگری به صورت اشتباه گزارش شده باشد. (یعنی یک یال از x_p به $x_{p'}$ و یال دیگر در جهت برعکس باشد) که در این صورت نمی‌توان با اطمینان اعلام کرد که x_p کوچکتر است. پس، دست کم سه مقایسه بین این دو لازم است که بتوان با اطمینان x_p را به عنوان رأس متناظر کوچکترین جمله اعلام کرد. دراین‌صورت درجه ورودی رأس x_p برابر با ۱ خواهد بود که به همراه سایر $۲n-۲$ یال دیگر باعث می‌شود که گراف دست کم $۲n-۱$ یال داشته باشد، یعنی، $۲n-۱$ سوال الزامی است.

۲.۴۶ پاسخ‌های نوبت دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲

پاسخ ۱.۲.۴۶. اگر t را کوچکتر یا مساوی $\min\{a_۱,\dots,a_n,b_۱,\dots,b_n\}$ بگیریم داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}(a_i-t)\leq\sum_{i=۱}^{n}(b_i-t).$$

بنابراین،

$$\sum_{i=۱}^{n}a_i\leq\sum_{i=۱}^{n}b_i.$$

همچنین اگر t را بزرگتر یا مساوی $\max\{a_۱,\dots,a_n,b_۱,\dots,b_n\}$ بگیریم داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}t-a_i\leq\sum_{i=۱}^{n}t-b_i.$$

بنابراین،

$$\sum_{i=۱}^{n}b_i\leq\sum_{i=۱}^{n}a_i$$

پس، حکم ثابت می‌شود.

پاسخ ۲.۲.۴۶. اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ همه مقادیر ویژه A با احتساب تکرار باشند، آن‌گاه $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ همه مقادیر ویژه A^2 با احتساب تکرار و $\lambda_1 - \lambda_1^2, \dots, \lambda_n - \lambda_n^2$ همه مقادیر ویژه $A - A^2$ با احتساب تکرار هستند. چون $A - A^2$ پوچتوان است تمام مقادیر ویژه آن صفرند پس، به ازای هر i، $\lambda_i - \lambda_i^2 = 0$. در نتیجه، $\lambda_i = \lambda_i^2$. بنابراین، چندجمله‌ای مشخصه A، یعنی $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$، با چندجمله‌ای مشخصه A^2، یعنی $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i^2)$، برابر است.

پاسخ ۳.۲.۴۶. تابع $\varphi : X \to [0, +\infty)$ با ضابطه $\varphi(x) = d(x, T(x))$ را در نظر بگیرید. با توجه به پیوستگی تابع T و متریک d، φ تابعی پیوسته است. به دلیل فشردگی X، نقطه $x_* \in X$ وجود دارد که

$$\varphi(x_*) = \min\{\varphi(x) \ : \ x \in X\}$$

حال اگر $\varphi(x_*) > 0$، $T(x_*) \neq x_*$ و طبق فرض مسأله می‌توان عدد $n \in \mathbb{N}$ را یافت که

$$d(T^n(x_*), T^n(T(x_*)) < d(x_*, T(x_*)).$$

پس، $\varphi(T^n(x_*)) < \varphi(x_*)$ که با کمینه بودن $\varphi(x_*)$ تناقض دارد. بنابراین، $\varphi(x_*) = 0$ که نتیجه می‌دهد $d(x_*, T(x_*)) = 0$ و به‌طور معادل، $T(x_*) = x_*$.

پاسخ ۴.۲.۴۶. فرض کنید $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ و اعضای $\mathscr{F}$ دو به دو فاصله حداقل ۱ و حداکثر $n - 1$ داشته باشند. مجموعه $\mathscr{F}$ را به دو زیرمجموعه $\mathscr{F}^*$ و $\mathscr{F}'$ افراز می‌کنیم. زیرمجموعه $\mathscr{F}^*$ متشکل از همه بردارهایی در $\mathscr{F}$ است که حداقل یکی از مولفه‌های آن‌ها $*$ است و زیرمجموعه $\mathscr{F}'$ متشکل از همه بردارهایی در $\mathscr{F}$ است که هیچ کدام از مولفه‌های آن‌ها $*$ نیست.

برای هر بردار $\mathbf{x}$ در $\mathscr{F}^*$ دو بردار متمایز $\overset{0}{\mathbf{x}}$ و $\overset{1}{\mathbf{x}}$ را به صورت زیر می‌سازیم: بردار $\overset{0}{\mathbf{x}}$ ($\overset{1}{\mathbf{x}}$) برداری است که با قرار دادن ۰ (۱) به‌جای مولفه‌های $*$ در $\mathbf{x}$ بدست می‌آید.

ادعا: اگر $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ و $\mathbf{y} \in \mathscr{F}^*$، آن‌گاه $\left\{\mathbf{\mathring{y}}, \mathbf{y}^{۱}\right\} \cap \left\{\mathbf{\mathring{x}}, \mathbf{x}^{۱}\right\} = \varnothing$

برهان ادعا: چون $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ و فاصله $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ حداقل ۱ است پس، مولفه‌ای مانند i وجود دارد که درایه‌های i-ام $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ یکی ۰ و دیگری ۱ هستند. لذا، با توجه به تعریف، روشن است که درایه‌های i-ام $\mathbf{\mathring{x}}$ و $\mathbf{x}^{۱}$ یکسان بوده و متفاوت از درایه‌های i-ام $\mathbf{\mathring{y}}$ و $\mathbf{y}^{۱}$ هستند. پس، صحت ادعا تایید می‌شود.

در نتیجه، با شمارش تعداد اعضای مجموعه $\bigcup_{x \in \mathscr{F}^*} \left\{\mathbf{\mathring{x}}, \mathbf{x}^{۱}\right\}$ ، داریم

$$۲|\mathscr{F}^*| \leq |\{۰,۱\}^n \setminus \mathscr{F}'| = ۲^n - |\mathscr{F}'|.$$

از طرف دیگر، با توجه به تعریف مجموعه $\mathscr{F}$، از بین هر بردار در $\{۰,۱\}^n$ و متمم آن، فقط یکی می‌تواند در $\mathscr{F}'$ باشد. (منظور از متمم یک بردار $\mathbf{x}$ با مولفه‌های ۰ و ۱ ، بردار یکتایی مانند $\mathbf{y}$ با مولفه‌های ۰ و ۱ است که فاصله $\mathbf{y}$ با $\mathbf{x}$ برابر n باشد.) بنابراین، $|\mathscr{F}'| \leq ۲^{n-۱}$.

اکنون داریم

$$\begin{aligned} ۲|\mathscr{F}| = ۲(|\mathscr{F}^*| + |\mathscr{F}'|) &\leq ۲^n - |\mathscr{F}'| + ۲|\mathscr{F}'| \\ &\leq ۲^n + |\mathscr{F}'| \\ &\leq ۲^n + ۲^{n-۱} \\ &= ۶ \times ۲^{n-۲}. \end{aligned}$$

برای اثبات این‌که مجموعه‌ای از بردارها وجود دارد که کران $۳ \times ۲^{n-۲}$ برای آنها اتفاق می‌افتد همه بردارهای n تایی را در نظر بگیرید که مولفه اول و دوم آن‌ها به شکل $(*,۰),(۰,۱),(۱,۱)$ هستند و مولفه‌های سوم تا n ام آنها ستاره ندارد (فقط ۰ یا ۱ در این مولفه‌ها بیاید). تعداد همه این بردارها برابر با $۳ \times ۲^{n-۲}$ است.

پاسخ ۵.۲.۴۶. کافی است ثابت کنیم

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{۰}^{۲\pi} \ln|P(re^{it})| \mathrm{d}t = \ln r^n. \qquad (*)$$

در این صورت طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال می‌توان عدد $2\pi \leq t_* \leq 0$ را یافت که

$$\ln|P(re^{it_*})| = \ln r^n.$$

بنابراین، $z_* = re^{it_*}$ شرط مسأله را دارد.

برای اثبات رابطه $(*)$ تعریف می‌کنیم

$$f(z) = (z - r^2 z_1)\cdots(z - r^2 z_n).$$

توجه کنید که برای هر $1 \leq i \leq n$، $|r^2 z_i| = r^2$. پس، $f(z)$ هیچ ریشه‌ای در مجموعه زیر ندارد:

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}.$$

این نتیجه می‌دهد که تابع $\ln|f(z)|$ روی C_r تابعی همساز است و لذا،

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it})|\mathrm{d}t = \ln|f(0)| = \ln\left(r^{2n}|z_1\cdots z_n|\right) = 2n\ln r$$

از طرف دیگر برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $z \in \mathbb{C}$ که $|z| = r$،

$$\begin{aligned}
|z - r^2 z_i|^2 &= (z - r^2 z_i)(\bar{z} - r^2 \bar{z}_i) \\
&= |z|^2 + r^4|z_i|^2 - r^2 z_i\bar{z} - r^2\overline{z_i}z \\
&= r^2(1 + r^2 - z_i\bar{z} - \overline{z_i}z) \\
&= r^2(z - z_i)(\bar{z} - \bar{z}_i) \\
&= r^2|z - z_i|^2.
\end{aligned}$$

حال چون $P(z) = (z - z_1)\cdots(z - z_n)$ پس، برای هر z که $|z| = r$، داریم

$$|f(z)| = |z - r^2 z_1|\cdots|z - r^2 z_n| = r^n|z - z_1|\cdots|z - z_n| = r^n|P(z)|.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\ln|P(re^{it})|\mathrm{d}t &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\ln(r^{-n}|f(re^{it})|)\mathrm{d}t\\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\ln|f(re^{it})|\mathrm{d}t - n\ln r\\ &= n\ln r.\end{aligned}$$

پاسخ ۶.۲.۴۶. ایده‌آل I را برابر مجموع تمام ایده‌آل‌های کمین R در نظر بگیرید. اگر $\Sigma = \{J \lhd R : I \cap J = ۰\}$، آن‌گاه طبق لم زُرن Σ عضو بیشینی مثل K دارد. توجه کنید $IK \subseteq I \cap K = ۰$ که نتیجه می‌دهد $IK = ۰$. قرار دهید $J = I \bigoplus K$، نشان می‌دهیم J در R بزرگ است. اگر L یک ایده‌آل ناصفر باشد و $J \cap L = ۰$، آن‌گاه $L \nsubseteq J$ و لذا $L \nsubseteq K$. بنابراین، $K + L \notin \Sigma$. در نتیجه، $I \cap (K + L) \neq ۰$. حال اگر $۰ \neq i = l + k \in I \cap (K + L)$، آن‌گاه $l = i - k \in J \cap L = ۰$. بنابراین، $l = ۰$ و $i = k \in I \cap K = ۰$ که تناقض است. این نشان می‌دهد که J یک ایده‌آل بزرگ در R است. طبق فرض مسئله، J شامل عنصری مانند x است که مقسوم‌علیه صفر نیست. قرار دهید $x = i + k$ به‌طوری‌که $i \in I$ و $k \in K$. اگر A یک ایده‌آل کمین R باشد، آن‌گاه $۰ \neq xA \subseteq A$ نتیجه می‌دهد $xA = A$. بنابراین، $xI = I$. در نتیجه، $e \in I$ وجود دارد که $xe = i$. چون $ek \in IK = ۰$، داریم $xe = (i + k)e = ie = xe^{۲}$. پس، $x(e - e^{۲}) = ۰$ که نتیجه می‌دهد $e = e^{۲}$. واضح است که $Re \subseteq I$. برای هر $a \in I$ عنصر $z \in I$ وجود دارد که $a = xz$. بنابراین، $a = (i + k)z = iz = exz \in Re$. در نتیجه، $I = Re$.

نمایه