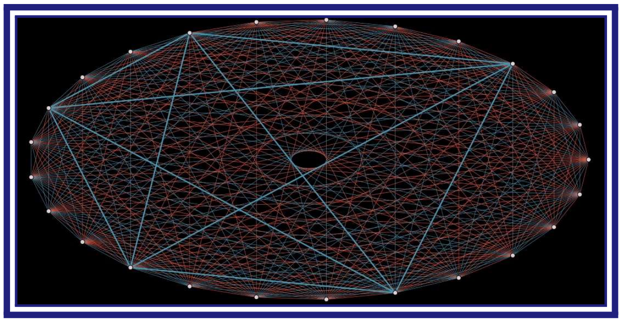
کشف مسیری تازه برای پیش‌بینی ساختار گراف‌ها توسط ریاضی‌دانان *

جوردانا سپلویچ

مترجمان: سمیه رهنما و سعید علیخانی **

چکیده: ریاضی‌دانان در تحقیقات جدید خود در تخمین مقادیری به نام اعداد رمزی، به بررسی محدودیت‌های تصادفی می‌پردازند.



اتصال ۲۵ رأس با یال‌های قرمز و آبی بدون ساخت یک «خوشه» چهارتایی از رأس‌های قرمز یا یک خوشه پنج تایی از آبی‌ها، غیرممکن است. پل چایکین/ مجله کوانتا

سال ۲۰۲۳ سالی هیجان‌انگیز در پژوهش‌های ترکیبیات بود. در اوایل سال وقتی دو مورد از بزرگ‌ترین مسائل ریاضی‌دانان در این زمینه در عرض چند ماه حل شد، آنان حیرت زده شدند. مِهتاب ساونی[1] از مؤسسهٔ فناوری ماساچوست گفت: اکنون، سومین سؤال اصلی با یک اثبات ۱۴صفحه‌ای «که کاملاً ایده‌های درستی دارد» پیش آمده است. او همچنین افزود: «این کاملاً غیرمنتظره است.» این سؤال با کمیت‌های بنیادی (که اعداد رمزی نامیده می‌شوند) سروکار دارد که محدودیت‌های اختلال احتمالی را منعکس می‌کنند. این اعداد اندازه‌ای را اندازه‌گیری می‌کنند که مجموعه‌ای از رئوس و یال‌ها(که گراف نامیده می‌شوند)، می‌توانند قبل از ایجاد الگو و ساختار به‌آن دست یابند. ریاضی‌دانان نزدیک به یک قرن است که اعداد رمزی را مطالعه می‌کنند، اما مشخص کردن آن‌ها بسیار دشوار است. در انجام این کار، آن‌ها روش‌هایی را توسعه داده‌اند که منجر به پیشرفت در رشته‌های مختلف فراتر از نظریهٔ گراف، از جمله نظریهٔ اعداد و رمزنگاری شده است. اما اثبات جدیدی که در ابتدای این ماه در فضای مجازی منتشر شد، از آن روش‌های کاملاً متمایز است. این اثبات، نه‌تنها یک مسئله را، که حل آن برای بیش از ۴۰ سال پیشرفتی نمی‌کرد، حل می‌کند، بلکه یک نقشهٔ راه جدید و نوآورانه برای چگونگی برخورد ریاضی‌دانان با مسائل رمزی در آینده ارائه می‌دهد.

برنامه‌ریزی یک مهمانی به نظریهٔ گراف می‌رسد

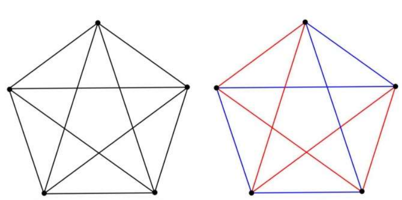
برای درک مفهوم عدد رمزی، تصور کنید که شما یک مهمانی برگزار می‌کنید. برای تضمین وجود یک گروه از افرادی که همه یکدیگر را می‌شناسند یا یک گروه از افرادی که همه غریبه هستند، چند نفر را باید دعوت کنید؟ می‌توانید این سؤال را با زبان گراف مدل‌سازی کنید. به هر فرد یک رأس اختصاص دهید. برای n نفر، n رأس دارید. هر جفت از رئوس را با یک یال وصل کنید. اگر افراد مورد نظر یکدیگر را می‌شناسند، یال را قرمز و اگر غریبه هستند آن را آبی کنید.

اعداد رمزی چه هستند؟

اعداد رمزی، میزان بزرگی گراف‌ها را قبل از آن که الگوها در آن‌ها ظاهر شوند، مشخص می‌کنند.

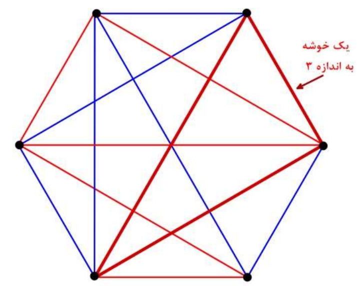
تمام ۵ رأس را دو به دو به هم متصل کنید تا یک گراف کامل ایجاد شود.

هر یال را به رنگ قرمز یا آبی رنگ کنید به نحوی که هیچ مجموعه‌ای از سه رأس وجود نداشته باشد که توسط یال‌های هم‌رنگ به یکدیگر متصل شده باشند.



[1] Mehtaab Sawhney

به هر روشی که یک گراف ۶ رأسی را رنگ‌آمیزی کنید، نمی‌توانید از ایجاد چنین مجموعه (یا خوشه) اجتناب کنید. بنابراین، عدد رمزی $r(۳,۳) = ۶$.



خوشه‌های قرمز یا آبی به اندازه‌های مختلف ایجاد نکنید. به عنوان مثال $r(۴,۳) = ۹$. چون یک گراف ۹ رأسی باید حتماً دارای یک خوشه قرمز به اندازه ۴ یا یک خوشه آبی به اندازه ۳ باشد.

مریل شرمن، نشریه کوانتا.

گروهی از آشنایان مشترک یا غریبه‌ها با ساختاری به نام خوشه نمایش داده می‌شوند: مجموعه‌ای از رئوس که با یال‌هایی همرنگ به‌هم متصل شده‌اند. عدد رمزی $r(s,t)$ حداقل تعداد افرادی است که باید دعوت کنید تا حتماً شامل یک مجموعهٔ s-تایی از آشنایان یا یک مجموعه t-تایی از غریبه‌ها باشد. به عبارت دیگر، حداقل تعداد افرادی است که جلوگیری از وجود یک مجموعه s-تایی از آشنایان یا یک مجموعه t-تایی از غریبه‌ها ناممکن شود. به زبان نظریهٔ‌گراف، یعنی در این حالت یک خوشهٔ قرمز به اندازهٔ s یا یک خوشهٔ آبی به اندازهٔ t پیدا شود.

به‌عنوان مثال، می‌دانیم که $r(۴,۵) = ۲۵$. بنابراین شما می‌توانید یک مهمانی با ۲۴ نفر برگزار کنید که برخی از آن‌ها با یکدیگر آشنا هستند، بدون اینکه یک گروه چهارنفره از آشنایان مشترک یا پنج غریبه در آن حضور داشته باشد. اما با اضافه کردن فقط یک نفر دیگر، نمی‌توانید از ایجاد حداقل یکی از این خوشه‌ها جلوگیری کنید.

در ترکیبیات، یکی از پیشرفت‌های اوایل امسال، ارائهٔ کران بالای بهتری برای «اعداد رمزی متقارن» بود، که در آن‌ها خوشه‌های قرمز و آبی به‌یک اندازه هستند. با استفاده از اعداد رمزی نامتقارن، که موضوع تحقیقات جدید است، ریاضی‌دانان اندازهٔ خوشهٔ قرمز را تعیین می‌کنند و سپس می‌پرسند که اگر اندازه خوشهٔ آبی به‌دلخواه افزایش یابد، چه اتفاقی رخ می‌دهد. ریاضی‌دانان تنها توانسته‌اند تعداد انگشت‌شماری از کوچک‌ترین اعداد رمزی را به‌طور دقیق محاسبه کنند. آن‌ها در سال ۱۹۹۵ ثابت کردند که $r(۴,۵) = ۲۵$. اما کسی مقدار $r(۴,۶)$ را نمی‌داند. به‌طور مشابه، در اوایل دهه ۱۹۸۰ آن‌ها نشان دادند که $r(۳,۹) = ۳۶$، اما $r(۳,۱۰)$ یک مسئلهٔ باز باقی مانده است. مسئله در مورد اعداد رمزی متقارن به‌همان اندازه دشوار هستند؛ برای مثال، داریم $r(۴,۴) = ۱۸$ اما مقدار $r(۵,۵)$ مشخص نیست. بنابراین، ریاضی‌دانان درعوض سعی می‌کنند اعداد رمزی را با کران‌های بالا و پائین برای آن‌ها تخمین بزنند. در دههٔ ۱۹۹۰ آن‌ها از تکنیک‌هایی برای تولید تصادفی گراف‌ها استفاده کردند تا ثابت کنند که اگر خوشهٔ قرمز ۳-تایی را ثابت گرفته و خوشهٔ آبی بزرگ‌تر و بزرگ‌تر شود، اندازهٔ عدد رمزی به‌اندازه مربع اندازهٔ خوشهٔ آبی افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر، $r(۳,t)$ تقریباً برابر با $t^۲$ است. اثبات جدید می‌پرسد وقتی اندازهٔ دستهٔ قرمز به جای ۳ روی ۴ تنظیم شود، چه اتفاقی می‌افتد. در دههٔ ۱۹۳۰ مشخص شد که $r(۴,t)$ سریع‌تر از $t^۳$ رشد نمی‌کند. اما بهترین کران پائینی که در دههٔ ۱۹۷۰ یافت شد، تقریباً $t^{\frac{۵}{۲}}$ است که به‌طور قابل توجهی کوچک‌تر است. در طول دهه‌ها تلاش‌ها برای پوشش دادن اختلاف با افزایش کران پائین یا کاهش کران بالا ناموفق بود، تا اینکه دو تن از ریاضی‌دانان یک عامل کلیدی را اضافه کردند.

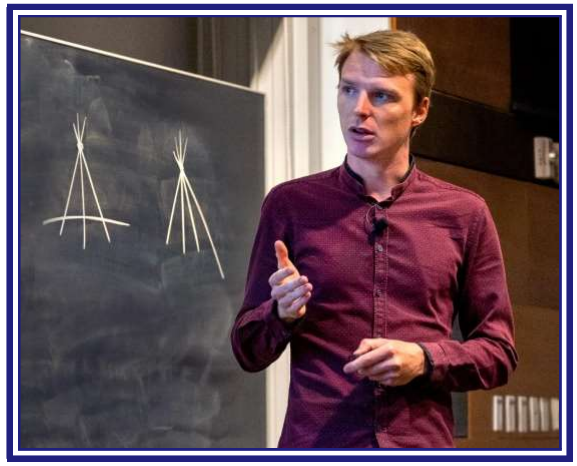
پنهانِ در معرض دید

درسال ۲۰۱۹ سام ماتئوس[۲] که در آن زمان دانشجوی کارشناسی ارشد در دانشگاه آزاد بروکسل (VUB) بود، به‌دنبال یک ایده بود. تخصص او در هندسهٔ متناهی، مطالعهٔ چیدمان نقاط، خطوط و دیگر ساختارها در فضاهای مشخص‌شده بود. با وجود اینکه این کار را جالب می‌دانست، اما از اینکه این ساختارهای هندسی چقدر سخت‌گیرانه و دقیق باید باشند، احساس محدودیت می‌کرد.

او مدتی بعد، مقاله‌ای از دو ریاضی‌دان به نام دروو موبایی[۳] از دانشگاه ایلینویز شیکاگو و ژاک ورستراته[۴] از دانشگاه سن دیه‌گوی کالیفرنیا را دید. آن‌ها در حال بازنگری در نحوهٔ برخورد با مسئله‌های رمزی بودند. درحالی‌که روش‌های قدیمی شامل تولید تصادفی گراف‌ها برای به‌دست آوردن تخمین‌های خوب از اعداد رمزی است،

[2] Sam Mattheus [3] Dhruv Mubayi [4] Jacques Verstraete

موبای و ورستریت با ساختارهای «شبه‌تصادفی» شروع کردند که تصادفی به‌نظر می‌رسند، اما این‌گونه نیستند. چیزی به‌ذهن ماتئوس خطور کرد. شاید او فکر می‌کرد دیدگاه هندسی او می‌تواند کمک کند.



سام متئوس متوجه شد که چگونه ساختارهای هندسهٔ متناهی را برای حل یک مسئلهٔ قدیمی در نظریهٔ رمزی به‌کار گیرد.

در طی چندسال بعد، درحالی‌که او کار دانش‌آموختگی خود را به پایان رساند، این ایده را در گوشهٔ ذهن خود نگه داشت. او سپس برای کمک‌هزینه تحصیلی فولبرایت[5] درخواست داد که به او اجازه می‌داد تا دورهٔ پسادکتری را با ورستراته در ایالات متحده دنبال کند. درسال ۲۰۲۲، پس از آنکه در کنار کمک‌هزینه تحصیلی، جایزهٔ فولبرایت به ماتئوس داده شد او به دانشگاه سن‌دیگوی کالیفرنیا نقل‌مکان و شروع به‌کار با ورستراته روی $r(۴,t)$ کرد. ریاضی‌دانان می‌خواستند کران پایین را برای نزدیک‌شدن به کران بالایی مشخص بالا ببرند. برای انجام این کار، آن‌ها باید گرافی با تقریباً $t^۳$ رأس می‌یافتند که هیچ خوشهٔ قرمز به اندازهٔ ۴ یا خوشهٔ آبی به اندازهٔ t نداشته باشد. برای بررسی صحت اثباتشان مسئله را اصلاح کردند. فرض کنید که هر یال آبی را به‌سادگی حذف کنیم. اکنون، هدف این شد که یک گراف بیابیم که هیچ خوشهٔ قرمزی به اندازهٔ ۴ و هیچ مجموعهٔ مستقلی به‌اندازهٔ t (یعنی مجموعه‌هایی با t رأس بدون هیچ یالی) در آن وجود نداشته باشد. کار موبایی و ورستراته درسال ۲۰۱۹ نشان داد که اگر بتوانید یک گراف شبه‌تصادفی بدون خوشهٔ قرمز به‌اندازه ۴ بسازید، سپس می‌توانید بخش‌های تصادفی از آن را بردارید تا گراف‌های کوچک‌تری به‌دست آورید که هیچ مجموعهٔ مستقل بزرگی نداشته باشند. این دقیقاً همان چیزی بود که ماتئوس و ورستراته می‌خواستند پیدا کنند. با شروع با یک گراف حتی بزرگ‌تر، آن‌ها امیدوار بودند که گرافی با تقریباً $t^۳$ رأس پیدا کنند که معیارهای آن‌ها را برآورده کند. ورستراته گفت: «در داخل این گراف‌ها، گراف‌های رمزی بهتری نهفته است.»

ژاک ورستراته گراف‌های مورد نیازش را درون گراف‌های شبه تصادفی بزرگ، پیدا کرد.

مشکل پیدا کردن ساختار شبه‌تصادفی، برای شروع مناسب بود. ریاضی‌دانان مجبور بودند قدری غیرمستقیم به آن برسند. آن‌ها با یک گراف شبه‌تصادفی شروع نکردند. آن‌ها اصلاً با یک گراف شروع نکردند. در عوض، ماتئوس موضوع عجیبی به نام واحد هرمیتی را به یاد آورد، چیزی که هندسه‌دانان شاخه متناهی با آن آشنا هستند، اما ریاضی‌دانی که در زمینهٔ ترکیبیات کار می‌کند، بعید است که هرگز با آن مواجه شود. واحد هرمیتی مجموعهٔ خاصی از نقاط روی یک منحنی است، همراه با خطوطی که از آن نقاط به ترتیب خاصی عبور می‌کنند. مهم‌تر از همه، می‌توان آن را به‌عنوان یک گراف نمایش داد که از بسیاری از خوشه‌های بزرگ که به‌ندرت همپوشانی دارند، تشکیل شده است. این گراف، شناخته شده است و خصوصیات آن

[5] Fulbright

به‌خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. اما هیچ‌گاه در زمینه مسائل رمزی مورد بررسی قرار نگرفته بود. ماتئوس گفت: «این مخصوص هندسهٔ متناهی است.» گراف ممکن است در نگاه اول مفید به‌نظر نرسد، زیرا شامل تعداد زیادی خوشه بزرگ است. اما یکی از ویژگی‌های کلیدی واحد هرمیتی این است که فقط دارای خوشه‌های به‌اندازه ۴ است که رئوس آن‌ها به‌روشی غیرمعمول در کنار هم قرار گرفته‌اند. به‌دلیل این ویژگی، برای ریاضی‌دانان نسبتاً آسان بود که خوشه‌های ناخواسته را با حذف تصادفی یال‌ها از بین ببرند و یک گراف جدید بدون خوشه به‌اندازه ۴ (اما همچنان شامل مجموعه‌های مستقل بزرگ) ایجاد کنند. ماتئوس و ورستراته، اکنون، باید ثابت کنند که این گراف شبه تصادفی است. با انجام این کار، آن‌ها در نهایت توانستند همان‌گونه که امیدوار بودند از اثبات ۲۰۱۹ استفاده کنند. آن‌ها زیرگراف‌های تصادفی با حدود t^3 رأس را درنظر گرفتند و توانستند نشان دهند که آن زیرگراف‌ها فاقد مجموعه‌های مستقل با اندازهٔ t هستند. این، اثبات را تکمیل کرد. ساونی گفت: «این ساختار بسیار زیباست». این کار به تغییر در نحوهٔ تفکر ریاضی‌دانان درباره مسائل رمزی اشاره می‌کند. دیوید کانلون[6] از مؤسسهٔ فناوری کالیفرنیا می‌گوید: «بسیار بسیار طبیعی است که سعی کنید از تصادفی بودن استفاده کرده و مسائل را پیش ببرید تا جایی که بهترین کرانی که می‌توانید را به‌دست آورید. اما آنچه که واقعاً نشان می‌دهد این است که تصادفی بودن به شما تا حدی کمک می‌کند.»

Jordana Cepelewicz, Mathematicians Discover Novel Way to Predict Structure in Graphs, Quanta magazine, June 22, 2023.

**دانشگاه یزد

[6]David Conlon