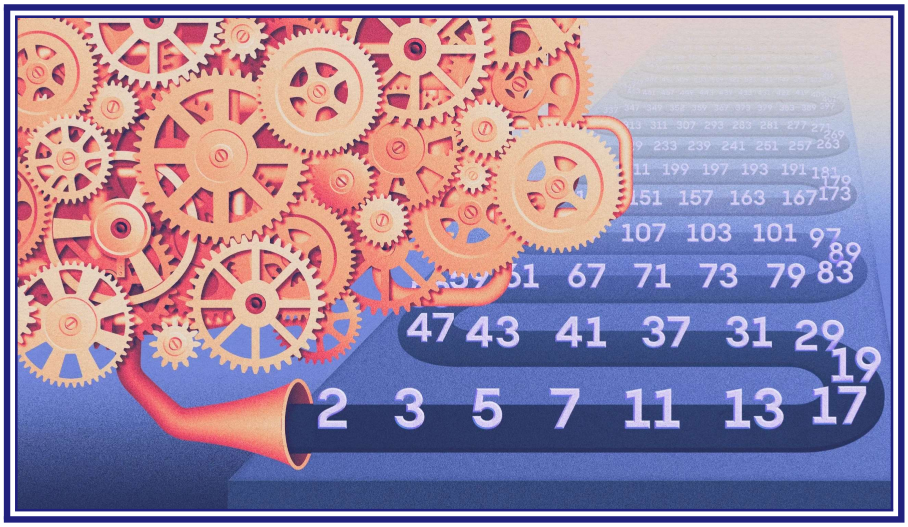
نوشته‌ها

چرا ریاضی‌دانان آنچه را که پیش‌تر می‌دانند دوباره ثابت می‌کنند؟ *

آنا کرامر

مترجم: فرشید عبدالهی**



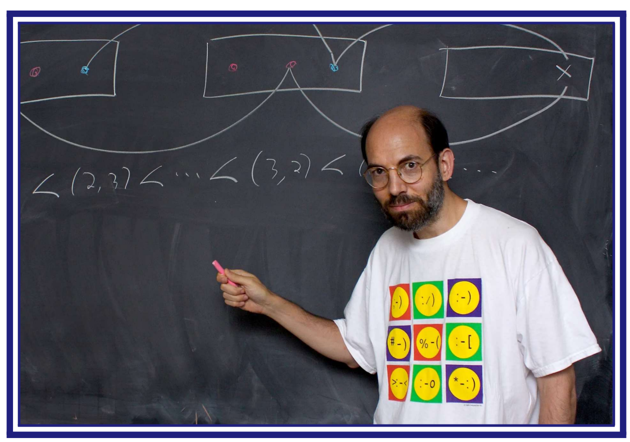
چکیده: هزاران سال است که می‌دانیم اعداد اول بی‌پایان هستند، اما اثبات‌های جدید از آن، دیدگاه‌های تازه‌ای در مورد چگونگی وابستگی قضایا به یکدیگر ارائه می‌دهند.

اولین اثباتی که بسیاری از افراد در دوران دبیرستان یاد می‌گیرند، اثبات بی‌پایان بودن مجموعهٔ اعداد اول است. این اثبات توسط اقلیدس ریاضی‌دان یونان باستان ارائه شده است. این اثبات فقط چند خط دارد و تنها از مفاهیم نه‌چندان پیچیدهٔ اعداد صحیح و ضرب آن‌ها استفاده می‌کند. اثبات او بر این واقعیت استوار است که اگر تعدادی متناهی عدد اول وجود داشته باشد، آنگاه ضرب همه آن‌ها با هم به‌اضافهٔ عدد ۱، به‌معنای وجود عدد اول دیگری است. این تناقض نشان می‌دهد که اعداد اول باید بی‌پایان باشند.

ریاضی‌دانان یک سرگرمی عجیب‌وغریب دارند: اثبات دوبارهٔ چیزهایی که پیش‌تر ثابت شده‌اند. چرا آن‌ها این کار را انجام می‌دهند؟ یک دلیل آن این است: این کار سرگرم‌کننده است و به‌مراتب مهم‌تر. ویلیام گاسارچ[1]، استادِ علوم رایانه در دانشگاه مریلند و نویسندهٔ اثبات جدیدی که در اوایل امسال به‌صورت برخط منتشر شد، گفت: «من فکر می‌کنم مرز بینِ ریاضیاتِ تفریحی و ریاضیاتِ جدی و واقعی بسیار باریک است.» اثباتِ گاسارچ[2] تنها آخرین مورد از یک زنجیرهٔ طولانی از اثبات‌های نوآورانه این قضیه قرار دارد. در سال ۲۰۱۸، رومئو مستروویچ[3] از دانشگاه مونته‌نگرو[4] تقریباً ۲۰۰ اثبات از قضیه اقلیدس را در یک بررسی تاریخی جامع جمع آوری کرد. در واقع، کل زمینهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد، که از مقادیر پیوسته برای مطالعهٔ اعداد صحیح استفاده می‌کند، به‌طور قابل توجهی در سال ۱۷۳۷ شکل گرفت، زمانی که ریاضی‌دان بزرگ لئونارد اویلر با استفاده از این واقعیت که سری بی‌نهایت $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ واگراست، دوباره ثابت کرد که

---
[1] William Gasarch [2] Gasarch [3] Romeo Meštrović [4] Montenegro

تعداد اعداد اول باید بی‌پایان باشد. کریستین الشولتز[5]، ریاضی‌دانِ دانشگاه فنی گراتس[6] اتریش و نویسندهٔ اثباتی دیگر، به‌جای استفاده از نتایج کوچکتر برای اثبات نتایج سخت - کاری که ریاضی‌دانان به‌طور معمول قضایا را از لم‌ها نتیجه می‌گیرند - برعکس عمل کرد. او گفت «من از قضیهٔ آخر فرما استفاده می‌کنم که در واقع یک نتیجهٔ غیرساده است و سپس نتیجهٔ بسیار ساده‌ای را استنتاج می‌کنم؛ برعکس کارکردن به این شکل می‌تواند ارتباطاتِ پنهان بین حوزه‌های مختلف ریاضیات را نشان دهد.» اندرو گرانویل[7]، ریاضی‌دانِ دانشگاه مونترال و نویسندهٔ دو اثبات دیگر، می‌گوید: «در جامعهٔ ریاضی‌دانان، رقابت کوچکی برای داشتن جالب‌ترین و دشوارترین اثبات وجود دارد؛ این باید جذاب باشد. اساساً انجام کاری بد و ناخوشایند هدف نیست، تنها انگیزه برای انجام دادن یک کار سخت، جذاب بودن آن است.» گرانویل می‌گوید که در این رقابت دوستانه، یک هدف جدی وجود دارد. پژوهشگران نه‌تنها به سؤالاتی که به آن‌ها ارائه می‌شوند محدود نمی‌شوند، بلکه خودشان نیز سؤالات را مطرح کرده و سعی در حل آن‌ها می‌کنند: «فرایند خلق در ریاضیات به این معنا نیست که شما فقط یک وظیفه را به یک ماشین دهید و ماشین آن را حل کند. به عبارت دیگر، در ریاضیات، افراد از آنچه که در گذشته انجام شده، برای ایجاد یک راه و روش برای توسعه ایده‌ها استفاده می‌کنند.» همان‌گونه که گاسارچ[8] می‌گوید: «تمام مقالات، از یک اثبات جدید و جذاب برای بی‌پایان بودن اعداد اول به ریاضیات جدی می‌پیوندند. روزی فقط به اعداد اول نگاه می‌کنید، و روز بعد به مفاهیم و مسائل پیچیده‌تری مانند چگالی مربع‌ها می‌پردازید.»



ویلیام گاسارچ، آخرین نفر در یک فهرست بلندبالا از ریاضی‌دانان است که با اثبات جدیدی نشان می‌دهد اعداد اول بی‌پایان هستند.

اثبات گاسارچ با این واقعیت شروع می‌شود که اگر اعداد صحیح را با تعداد متناهی از رنگ‌ها رنگ آمیزی کنید، همیشه جفتی از اعداد با همان رنگ وجود دارند که مجموع آن‌ها نیز همان رنگ است، حقیقتی که در سال ۱۹۱۶ توسط ایسای شور[9] اثبات شده بود. گاسارچ از قضیه شور استفاده کرد و نشان داد که اگر تعداد اعداد اول متناهی باشد، آنگاه یک مکعبِ کامل (یک عدد صحیح مانند ۱۲۵ که برابر است با ضرب سه بارهٔ یک عدد صحیح در خودش) وجود خواهد داشت که مجموع دو مکعب کامل دیگر است. این در حالی است که در سال ۱۷۷۰، اویلر اثبات کرده بود که هیچ مکعبی با این شرایط وجود ندارد - مورد $n = ۳$ از قضیه آخر فرما که می گوید به ازای $n > ۲$، هیچ جواب صحیحی برای $a^n + b^n = c^n$ وجود ندارد. با توجه به این تناقض، گاسارچ استدلال می کند که باید تعداد اعداد اول بی‌نهایت باشند.

گرانویل در سال ۲۰۱۷ از یک قضیه دیگر فرما استفاده کرد. گرانویل عمدتاً به قضیه بارتِل لیندرِت فان دِر واردِن[10] استناد کرد. فان دِر واردِن در سال ۱۹۲۷ نشان داد که اگر اعداد صحیح را با تعداد متناهی از رنگ‌ها، رنگ‌آمیزی کنند، همیشه زنجیره‌های بلندی از اعداد صحیح با فاصله‌های یکسان و با همان رنگ وجود دارد. مانند گاسارچ، گرانویل با فرض این که اعداد اول محدود هستند شروع کرد. سپس او از قضیه فان دِر واردِن برای پیدا کردن یک دنباله از چهار مربع کامل با فاصله‌ی یکسان، که همه با همان رنگ هستند، استفاده کرد. اما فرما اثبات کرده بود که چنین دنباله‌ای وجود ندارد؛ تناقض! چون چنین دنباله‌ای وجود ندارد، باید تعداد اعداد اول بی‌نهایت باشد. اثبات گرانویل دومین اثبات اخیر در مورد اعداد اول است که از قضیه فان دِر واردِن استفاده می‌کند - لونت الپوگه[11]، که در حال حاضر در دانشگاه هاروارد به‌عنوان پسا دکتری مشغول به کار است، نیز در سال ۲۰۱۵ در یک مقالهٔ منتشرشده در دورهٔ دانشگاهی از همین نتیجه استفاده کرده بود.

گرانویل طرفدار ویژهٔ مقالهٔ الشولتز[12] است که از قضیهٔ آخر فرما و فرض خلف که تنها تعداد متناهی عدد اول وجود دارد، استفاده می‌کند. مانند گاسارچ، الشولتز نیز از قضیهٔ شور استفاده کرد، اما به روشی متفاوت. الشولتز همچنین اثبات دومی را با استفاده از قضیهٔ کلاوس روت[13] ارائه داده است که در سال ۱۹۵۳ اثبات شده بود و می‌گوید که مجموعه‌هایی از اعداد صحیح با اندازه خاصی باید شامل گروه‌هایی از سه عدد با فاصلهٔ یکسان باشند.

[5] Christian Elsholtz [6] Graz University of Technology [7] Andrew Granville [8] Gasarch [9] Issai Schur [10] Bartel Leendert van der Waerden
[11] Levent Alpöge [12] Elsholtz [13] Klaus Roth

برخی از سؤالاتِ ریاضی عمیق‌تر و حتی کاربردی ممکن است بر این اساس حل شوند. به‌عنوان مثال، اگر در دنیایی با تعداد محدودی از اعداد اول زندگی می‌کردیم، شکستن رمزگذاری کلید عمومی که بر پایه پیچیدگی تجزیهٔ اعداد بزرگ است، بسیار آسان بود. الشولتز علاقه‌مند به بررسی این است که آیا ممکن است ارتباط عمیق‌تری بین این دو مفهوم به‌ظاهر نامرتبط وجود داشته باشد یا خیر. الشولتز می‌گوید که ممکن است ارتباط ضعیفی با قضیه اقلیدس وجود داشته باشد، که مبنایی برای اثبات بی‌پایان بودن اعداد اول است، اما او معتقد است که ممکن است پیوندهای عمیق‌تری در انتظار کشف باشند. گرانویل می‌گوید که بهترین ریاضیات می‌تواند از ترکیب عجیب‌وغریب حوزه‌ها و موضوعات مختلف رشد کند. این ریاضیات اغلب پس از سال‌ها زحمت کشیدن ریاضی‌دانان بر روی مسائل سطح پایین و سرگرم‌کننده ظاهر می‌شود. او مجذوب این واقعیت است که موضوعات به ظاهر دور و ناهماهنگ را می‌توان در نظریهٔ اعداد به‌کار برد. در یک بررسی اخیر، گرانویل اثبات زیبای ساده‌ای که در سال ۱۹۵۵ توسط هیلل فورستنبرگ[14] را که از توپولوژی نقطه‌ای استفاده می‌کرد، تمجید کرد. فورستنبرگ مانند آلپوگه[15] هنوز در کالج بود که اثبات او منتشر شد. او در زمینه‌های مختلف ریاضی به موفقیت‌های زیادی رسید. گرانویل به‌صورت شیوا پرسید: «آیا اثبات‌های جدیدِ نتیجهٔ قدیمی اقلیدس، فقط کنجکاوی هستند یا چیزی هستند که برای مدت طولانی مهم بودند؟» و در پاسخ به سؤال خود این‌گونه گفت: «نمی‌توانم به‌طور قطعی پاسخ دهم.»

*[1] Anna Kramer, Why Mathematicians Re-Prove What They Already Know, *Quanta Magazine*, 2023.

[2] Romeo Meštrović, Euclid's theorem on the infinitude of primes: a historical survey of its proofs (300 B.C.–2022) and another new proof, arXiv:1202.3670, 2023.

**دانشگاه شیراز

[14] Hillel Furstenberg [15] Alpöge