درگیرکردن دانشجویان از طریق مسابقات ریاضی*

بلا باجنوک*

ترجمه: کیوان شمشمی و سعید علیخانی**

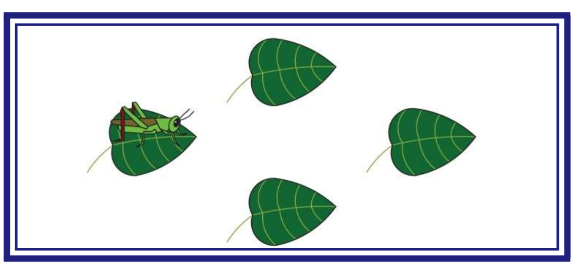
من خوش‌شانس بودم که در مجارستان بزرگ شدم، کشوری با تاریخ طولانی و برجسته در مسابقات ریاضی. مانند بسیاری از دوستانم، من نیز به‌شدت درگیر این مسابقات بودم. ما تمرین کردن برای مسابقات و درگیری با یک مسئلهٔ زیبا یکی پس از دیگری را دوست داشتیم و از شرکت در مسابقات لذت می‌بردیم، حتی زمانی که در نهایت برنده نمی‌شدیم. دوست داشتیم در جامعه‌ای باشیم که هنوز گرم و صمیمی بود. من از آن زمان تاکنون در مسابقات ریاضی شرکت کرده‌ام و مفتخر هستم که در سال ۲۰۱۷ از من خواسته شد تا مدیر برنامهٔ مسابقات ریاضیات آمریکا (AMC) از انجمن ریاضی آمریکا (MAA) شوم. درحالی‌که برندگان مسابقات ما - به‌ویژه کسانی که در المپیاد بین‌المللی ریاضی (IMO) شرکت می‌کنند – شهرت زیادی دریافت می‌کنند، اهداف ما تشویق دانش‌آموزان به مشارکت در ریاضیات در سراسر کشور و کشف، توسعه و پرورش استعدادها به‌طور گسترده‌تر است.

با مشارکت بیش از ۳۰۰۰۰۰ دانش‌آموز در هر سال، این مسابقه بزرگ‌ترین برنامهٔ انجمن ریاضی آمریکا است. مسابقات با امتحانات AMC ۸، AMC ۱۰ و AMC ۱۲ آغاز می‌شود که به‌ترتیب برای دانش‌آموزان کلاس ۸ یا پائین‌تر، کلاس ۱۰ یا پائین‌تر و کلاس ۱۲ یا پائین‌تر مجاز است. براساس عملکرد آن‌ها در این مسابقاتِ چندگزینه‌ای، تقریباً ۶۰۰۰ دانش‌آموز دعوت می‌شوند تا در آزمون ریاضیات دعوتی آمریکا (AIME) یک امتحان سه‌ساعته چالش‌برانگیز که در آن نمرهٔ پاسخ به هریک از ۱۵ مسئله، یک عدد صحیح نامنفی زیر ۱۰۰۰ است، شرکت کنند. این سری رقابت‌ها با المپیاد ریاضی ایالات متحده (USAMO) و المپیاد ریاضی جوانان ایالات متحده (USAJMO) که به‌حدود ۵۰۰ دانش‌آموز پیشنهاد می‌شود، به اوج خود می‌رسد. این المپیادها از سبک IMO پیروی می‌کنند: آن‌ها از دانش‌آموزان می‌خواهند که اثبات‌های دقیق برای سه مسئله را در هر دو روز متوالی با زمان مجاز چهارونیم ساعت در روز ارائه دهند. امیدواریم که مسابقاتِ ما به دانش‌آموزان - و معلمان و جامعه - به‌طور کلی زیبایی و قدرت ریاضیات را نشان دهد، معمولاً فراتر از آنچه که در کلاس‌های ریاضی معمولی می‌بینند.

طرح مسائل مناسب برای AMC یک کار بسیار چالش‌برانگیز است. حتی در سطوح اولیه که مسائل، نزدیک به برنامهٔ درسی استاندارد مدرسه باقی می‌ماند، ما مسائلی را که یک پرسشگری شاعرانه و جذاب دارند را هدف می‌گیریم. طرح مسائل زیبا - در عین‌حال هنوز ابتدایی - در سطح المپیاد به‌طور ویژه‌ای چالش‌برانگیز است. بااین‌حال، سال‌به‌سال، مجموعه‌ای از مسائل مبتکرانه و فریبنده طرح می‌شوند که هرکسی که در این زمینه ذوقی داشته باشد، ترغیب می‌شود که آن‌ها را حل کند. فراتر از مسابقات، ما امیدواریم که مسائل ما فرصت‌های یادگیری را برای دانش‌آموزان فعلی و آینده، معلمان آن‌ها و هرکسی که علاقه‌مند به ریاضیات است، فراهم کند. ما در اینجا سه مثال ارائه می‌کنیم: یکی از امتحان AMC ۸، یکی از رقابت AIME و دیگری از المپیاد ریاضی ایالات متحده آمریکا.

مسئلهٔ ۲۵ مسابقهٔ AMC ۸ (طرح شده توسط سیلوا چانگ)

یک ملخ روی چهار برگ می‌پرد، در هر نوبت به یکی از سه برگ دیگر با احتمال برابر. بعد از چهار پرش احتمال بازگشت ملخ به برگی که از آن شروع کرده است، چقدر است؟



چهاربرگ و یک ملخ

انواع مختلفی از روش‌ها برای حل این مسئله وجود دارد: راهنمای راه‌حل رسمی، چهار مورد از آن‌ها را از شمارش تا بازگشت فهرست

*Béla Bajnok

می‌کند و به‌علاوه روش‌هایی مانند برنامه‌نویسی پویا یا توابع مولد نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. البته مسائل مناسب با رویکردهای متعدد برای شرکت‌کنندگان در آن زمان مفید است، و این امر به معلمان اجازه می‌دهد تا دربارهٔ روش‌هایی را که برای دانش‌آموزان جدید هستند، بحث کنند.

مسئلهٔ اول مسابقهٔ AIME ۱ (طرح شده توسط دیوید التیزیو)

چندجمله‌ای‌های درجه دوم $P(x)$ و $Q(x)$ به‌ترتیب دارای ضرایب پیشرو ۲ و ۲- هستند. نمودارهای هر دو چندجمله‌ای از دو نقطهٔ $(16, 54)$ و $(20, 53)$ عبور می‌کنند. مقدار $P(0) + Q(0)$ را بیابید.

البته این مسئله را می‌توان با پیداکردن دو چندجمله‌ای درجهٔ دوم که شرایط این مسئله را برآورده می‌کنند، حل کرد، اما این مدتی طول می‌کشد و پاسخ‌ها به‌طور مشخص مطلوب نیستند. رویکرد هوشمندانه (شاید توسط خود سؤال پیشنهاد شود) تمرکز کردن روی چندجمله‌ای $P(x) + Q(x)$ است که خطی است، چراکه نمودار آن از نقاط $(16, 108)$ و $(20, 106)$ عبور می‌کند و معادلهٔ آن برابر است با $-\frac{x}{2} + 116$ و درنتیجه $P(0) + Q(0) = 116$ است.

یکی از چالش‌هایی که ما در هنگام طرح سؤالات‌مان داریم این است که بتوانیم دانش‌آموزانی را دست‌چین کنیم که پس از آن به مسابقات بعدی راه یابند و عناوین و جوایز را کسب کنند، درحالی‌که سؤالات باید به‌گونه‌ای باشند که برای همه قابل‌فهم باشند. سه ساعت ممکن است برای رقابت AIME طولانی به‌نظر برسد، اما زمان، یک عامل مهم برای بسیاری از شرکت کنندگان است، بنابراین توانایی حل سریع ساده‌ترین مسائل یک مزیت بزرگ است.

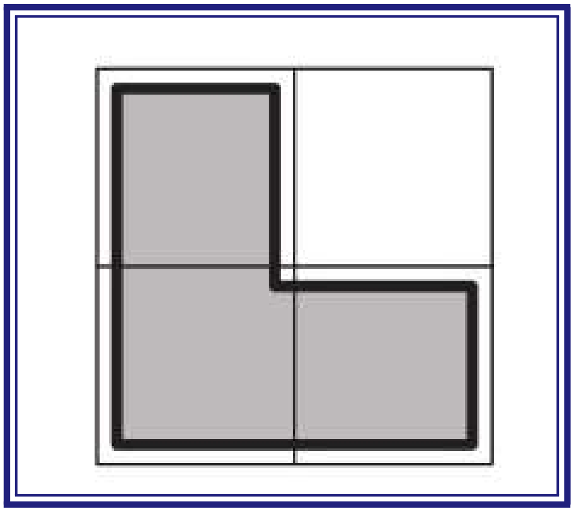
مسئله سوم مسابقهٔ USAMO (طرح شده توسط الکس ژای و شوناک کیشور)

فرض کنید $n \geq 2$ عددی صحیح باشد. یک صفحه $n \times n$ در ابتدا خالی است. هر دقیقه، شما می‌توانید یکی از دو حرکت را انجام دهید:

• اگر یک منطقه ترومینو L- شکل، از سه سلول بدون‌سنگ در صفحه وجود داشته باشد (شکل زیر را ببینید؛ چرخش مجاز نیست)، می‌توانید یک سنگ را در هریک از این سلول‌ها قرار دهید.

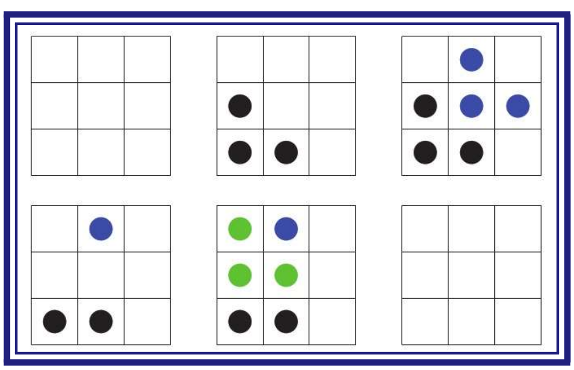
• اگر تمام سلول‌های یک ردیف یا ستون دارای سنگ باشند، می‌توانید تمام سنگ‌ها را از آن ردیف یا ستون حذف کنید.

به ازای کدام عدد صحیح نامنفی n ممکن است که پس از تعدادی حرکت، صفحه از سنگ‌ها خالی شود؟



منطقهٔ ترومینو

این مسئله یکی از چالش‌برانگیزترین مسائل در تاریخ USAMO بود: تنها هفت دانش‌آموز که امتحان دادند توانستند آن را حل کنند. راه‌حل این سؤال، از آنچه که اخیراً روش چندجمله‌ای نامیده می‌شود، استفاده می‌کند که براساس این واقعیتِ ساده است که چندجمله‌ای‌ها تعداد محدودی ریشه دارند (توجه داشته باشید که می‌توان این واقعیت را با جبر پایه‌ای اثبات کرد). این روش اخیراً نقش‌های جالب و زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر بازی کرده است و ما هیجان‌زده بودیم که آن را در این مسئله زیبا به‌کار گیریم. زیاد سخت نیست که دید هرگاه n بر ۳ بخش‌پذیر است، صفحهٔ خالی قابل‌دستیابی است. صفحه را به زیرصفحه‌های ۳ در ۳ تقسیم کنید. در هر زیرصفحهٔ ۳ در ۳، فرایندِ نشان داده‌شده در شکل زیر را دنبال کنید.



خالی کردن صفحه زمانی‌که n بر ۳ بخش‌پذیر است

می‌توانیم از روش چندجمله‌ای استفاده کنیم تا ثابت کنیم که زمانی‌که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست، هیچ روشی کارساز نخواهد بود. با برجا گذاشتن کمی رمز و راز، ما فقط در اینجا اثبات حالت $n = 4$

را نشان خواهیم داد؛ همچنین این رویکرد باعث می‌شود خوانندگان تشویق شوند که فکر کنند که چگونه این n، به n دیگری که بر ۳ بخش‌پذیر نیست، تعمیم می‌یابد (و زمانی‌که n بر ۳ بخش‌پذیر است، چرا استدلال شکست می‌خورد). ما تک‌جمله‌ای‌ها را در ۱۶ مربع از صفحهٔ ۴ در ۴ همان‌گونه که در شکل زیر نشان داده شده است، قرار می‌دهیم.

3	y^3	xy^3	x^2y^3	x^3y^3
2	y^2	xy^2	x^2y^2	x^3y^2
1	y	xy	x^2y	x^3y
0	1	x	x^2	x^3
	0	1	2	3

برچسب‌گذاری سلول‌های یک صفحهٔ ۴ در ۴

حرکات خود را به‌شرح زیر پیگیری می‌کنیم: هنگامی‌که سنگ‌ها بر روی صفحه قرار می‌گیرند، ارزش‌های آن‌ها را اضافه می‌کنیم و هنگامی‌که سنگ‌ها از صفحه برداشته می‌شوند، ارزش‌های آن‌ها را کم می‌کنیم. اکنون، روشی را فرض کنید که به‌طور غیرمستقیم، منجربه یک صفحهٔ خالی می‌شود؛ به‌طورخاص، فرض کنید که در این روش، یک ترومینو داریم که گوشه پائین سمت چپ آن در موقعیت (i,j)، به اندازه $t_{i,j}$ بار اضافه شده است؛ ستون iاُم، c_i، بار خالی شده؛ و سطر jاُم r_j بار خالی شده است. با توجه به گفته‌هایمان باید داشته باشیم

$$T(x,y) - C(x,y) - R(x,y) = 0,$$

که

$$T(x,y) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} t_{i,j} x^i y^j (1 + x + y),$$

$$C(x,y) = \sum_{i=0}^{3} x^i (1 + y + y^2 + y^3),$$

$$R(x,y) = \sum_{j=0}^{3} y^i (1 + x + x^2 + x^3).$$

اکنون، مجموعهٔ $D = \{-1, -i, i\}$ را درنظر بگیرید و مشاهده کنید که $C(x,y)$ و $R(x,y)$ هردو برای تمامی $x \in D$ و $y \in D$ برابر با صفر هستند، اما $1 + x + y$ هیچ‌گاه برای هیچ x و yای برابر با صفر نیست. پس باید برای هر $x \in D$ و $y \in D$، داشته باشیم

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} t_{i,j} x^i y^j = 0.$$

این یک تناقض است، زیرا چندجمله‌ای $P(x,y)$ برحسب هر دو متغیر x و y از درجهٔ حداکثر ۲ است و بنابراین نمی‌تواند بیش از دو مقدار از هر متغیر داشته باشد که این چندجمله‌ای برابر با صفر شود.

برنامهٔ AMC بدون چهار هیئت تحریریهٔ قابل توجهٔ ما که امتحانات ما را هرساله ایجاد می‌کنند، امکان‌پذیر نخواهد بود: آن‌ها مسائل را پیشنهاد می‌کنند، همهٔ موارد ارسالی را بررسی و رتبه‌بندی می‌کنند، مسائل را برای امتحانات انتخاب کرده و با دقت این مسائل و راه‌حل‌های آن‌ها را ویرایش می‌کنند. آن‌ها همچنین در شکل‌گیری سیاست‌های کلی AMC و تمرینات به ما کمک می‌کنند. نزدیک به ۱۸۰ نفر از سراسر کشور و از خارج از کشور هستند، شامل افرادی از دانشگاه، دبیرستان، تجارت، و صنعت. دارای طیف وسیعی از سنین، از لیسانس گرفته تا ریاضی‌دانان بازنشسته؛ و دارای تنوع قابل‌توجهی از تخصص ریاضی و فرهنگی است. من از این گروه از افراد بااستعداد، متنوع و موفق بی‌نهایت سپاسگزار هستم. هرکسی که علاقه‌مند به پیوستن به ما است را تشویق می‌کنم که با من تماس بگیرد.

*Béla Bajnok, Engaging students through math competitions, Notices of the American Mathematical Society, Jan 2024, 35-37.

**دانشگاه یزد