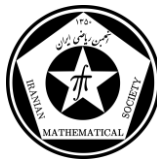


تجزیه و تحلیل پس‌بهینگی در به‌گزینی خطی نیمه‌متناهی

میگل آ. گوبرنا - مارکو آ. لوپنز

ترجمه: دکتر میرکمال میرنیا
استاد دانشگاه تبریز

سرشناسه:	گوبرنا، میگل آ.	Goberna, Miguel A.
عنوان و نام پدیدآور:	تجزیه و تحلیل پس‌بهبینی در به‌گزینی خطی نیمه‌متناهی / میگل آ. گوبرنا، مارکو آ. لوپنز؛ ترجمه میرکمال میرنیا.	
مشخصات نشر:	مشهد: انتشارات واژگان خرد، کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران، ۱۴۰۳.	
مشخصات ظاهری:	۱۸۰ ص.	ISBN: 978-600-8878-63-6
شابک:		
وضعیت فهرست‌نویسی:	فیبا.	
یادداشت:	عنوان اصلی: Post-optimal analysis in linear semi-infinite optimization, 2014.	
موضوع:	بهبینه‌سازی ریاضی نظریه دوگانی (ریاضیات)	Mathematical optimization Duality theory (Mathematics)
شناسه افزوده:	لوپنز، مارکو آ.	López, Marco A.
شناسه افزوده:	میرنیا، میرکمال، ۱۳۲۵ - مترجم	
رده‌بندی کنگره:	QA۴۰۲/۵	
رده‌بندی دیویی:	۵۱۹/۶	
شماره کتابشناسی ملی:	۹۶۳۸۶۶۵	



مشهد، آبکوه، چهارراه کلاهدوز، شماره ۴۵۲

E-mail: vkhpub@gmail.com

تجزیه و تحلیل پس‌بهبینی در به‌گزینی خطی نیمه‌متناهی

میگل آ. گوبرنا - مارکو آ. لوپنز

ترجمه: دکتر میرکمال میرنیا

ویراستار ادبی: هانیه اسدپور فعال مشهد

ناشر: انتشارات واژگان خرد با همکاری کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران

شمارگان: ۵۰ نسخه، چاپ اول بهار ۱۴۰۳ - ۱۸۰ صفحه وزیری

چاپ و صحافی: گلگونه

قیمت: رایگان

تمام حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به نویسنده و انجمن ریاضی ایران است

فهرست مطالب

۱۳	۱	مقدماتی در باب به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی
۱۳	۱-۱	به‌یگی و یکتایی
۲۴	۲-۱	دوگانی
۲۹	۳-۱	روش‌های عددی
۳۰	۱-۳-۱	روش‌های گسسته‌سازی شبکه
۳۱	۲-۳-۱	روش‌های صفحه‌برش مرکزی
۳۴	۳-۳-۱	روش‌های کاهش
۳۷	۴-۳-۱	روش‌های نقطه‌شدنی
۴۳	۲	مسئله‌های به‌گزینی خطی نقینی نیمه-نامتناهی
۴۴	۱-۲	پنج نمونه برای بررسی مسئله‌های نقینی LSIO
۴۴	۱-۱-۲	شیوه تصادفی
۴۴	۲-۱-۲	شیوه فازی
۴۷	۳-۱-۲	شیوه بازدهی
۴۸	۴-۱-۲	شیوه استوار
۴۹	۵-۱-۲	شیوه پارامتری
۵۷	۲-۲	قالب‌بندی انتخاب سبد سهام اوراق بهادار نقینی
۶۳	۳	به‌گزینی خطی استوار نیمه-نامتناهی
۶۴	۱-۳	قیده‌های نقینی

۷۳	هدف نقیینی	۲-۳
۷۷	تجزیه و تحلیل حساسیت	۴
۷۸	پیشیدن تابع هدف	۱-۴
۸۴	پیشیدن طرف راست	۲-۴
۸۷	پیشیدن تابع هدف و طرف راست	۳-۴
۹۱	تجزیه و تحلیل پایداری کیفی	۵
۹۱	پایداری بدون تحدید	۱-۵
۱۰۷	تحدید پایداری به دامنه مجموعه شدنی	۲-۵
۱۰۸	خوش-وضع بودن و بد-وضع بودن	۳-۵
۱۱۳	تجزیه و تحلیل کمی پایداری	۶
۱۱۳	پایداری کمی نگاشت‌های مجموعه‌ای	۱-۶
۱۲۰	پایداری کمی نگاشت مجموعه شدنی	۲-۶
۱۲۰	فاصله تا بد-وضع نسبت به سازگاری	۱-۲-۶
۱۲۴	ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی F	۲-۲-۶
۱۲۹	آرام بودن F	۳-۲-۶
۱۳۳	پایداری کمی نگاشت مجموعه بهینه	۳-۶
۱۳۳	فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به حل‌پذیری	۱-۳-۶
۱۳۵	ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی S	۲-۳-۶
۱۳۸	آرام بودن S	۳-۳-۶
۱۴۷	فهرست مراجع	
۱۶۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۷۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۷۶	نمایه	

پیشگفتار مؤلفان

به‌گزینی نیمه-نامتناهی خطی (LSIO) به مسئله‌های به‌گزینی خطی می‌پردازد که در آن‌ها یا بعد فضای تصمیم‌گیری یا تعداد قیدها (اما نه هر دو) بی‌نهایت است. یکی از ویژگی‌های متداول این نوع مسئله‌های به‌گزینی این است که از کران‌دار بودن (به‌عنوان مثال، متناهی بودن مقدار بهینه) نتیجه نمی‌شود که مسئله حل‌پذیر (یعنی وجود یک جواب بهینه) است. در اکثر موارد کاربرد LSIO، داده‌هایی که مسئله نمادین را مشخص می‌کنند نقینی (نایقینی) هستند که در نتیجه کاربر باید با توجه به ماهیت داده‌ها، حجم محاسبات موردنیاز برای حل مسئله‌های کمکی، سخت‌افزار و نرم‌افزار موجود و غیره در بین قالب‌های مختلف عدم قطعیت، به‌عنوان مثال، قالب‌های استوار، قالب‌های پارامتری، قالب‌های احتمالی یا قالب‌های فازی، یکی را انتخاب کند. قالب‌های پارامتری مبتنی بر جایگذاری مسئله نمادین در یک فضای توپولوژیکی مناسب از مسئله‌های پریشیده‌شده قابل قبول به نام فضای پارامترها هستند. از تجزیه و تحلیل حساسیت برآوردهایی از تأثیر یک پریشیدگی مشخص مسئله نمادین بر مقدار بهینه به دست می‌آید. از تجزیه و تحلیل پایداری کیفی شرایطی به دست می‌آید که پریشیدگی‌های به‌اندازه کافی کوچک از مسئله نمادین تحت آن شرایط تنها تغییرات کوچکی را در مقدار بهینه، مجموعه بهینه و مجموعه شدنی ایجاد می‌کند. تجزیه و تحلیل پایداری کمی، به‌نوبه خود، فواصل دقیق و تقریبی را در فضای پارامترها، از مسئله نمادین تا خانواده‌های مهم از مسئله‌ها (به‌عنوان مثال، از یک مسئله کران‌دار تا مسئله‌های حل‌پذیر) و کران‌های خطا (لیپ‌شیتسی) به دست می‌دهد که به تجزیه و تحلیل پیچیدگی روش‌های عددی مربوط می‌شوند.

از این شرح مختصر درباره تجزیه و تحلیل پس بهینگی در LSIO می‌توان «چه می‌شد اگر» به پرسش‌های مربوط به قضیه‌های پایداری و حساسیت پاسخ داد که اثبات آن‌ها معمولاً حذف می‌شوند درحالی‌که استفاده از آن‌ها به وسیله نظرات و مثال‌های مناسب شرح داده می‌شود. هدف این است که برای بررسی بیشتر توسط فارغ‌التحصیلان و دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضیات علاقه‌مند به به‌گزینی و نیز

پژوهشگران در زمینه به‌گزینی و زمینه‌های مرتبط (پیچیدگی‌های الگوریتمی) یک راهنما باشد. به‌علاوه، این مبحث می‌تواند ابزار مفیدی برای پژوهشگرانی باشد که در زمینه‌هایی کار می‌کنند که قالب‌های LSIO به یک روش طبیعی در محیط‌های نامشخص (مانند مهندسی و مالی) به‌وجود می‌آیند.

این کتاب به شرح زیر تنظیم شده است. فصل ۱ یادآور مقدمات لازم دربارهٔ نظریه و روش‌های LSIO، ارائه شده به‌طور مفصل در رسالهٔ ما، به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی [۱۰۲] در سال ۱۹۹۸ منتشر شده است و برخی از مفاهیم مربوط به جواب‌های مکمل مورد استفاده در تجزیه و تحلیل حساسیت را جمع‌آوری و مروری مختصر از روش‌های عددی را به‌روزرسانی می‌کند. مزایا و معایب پنج رویکرد مختلف نسبت به LSIO نقیینی (نایقینی) در فصل ۲ مورد بحث قرار می‌گیرد که با استفاده از مسئلهٔ اوراق بهادار با بازدهٔ نقیینی شرح داده می‌شوند. وضعیت فعلی آن قالب‌هایی که به‌طور وسیع در نشریه‌های مربوط به LSIO ظاهر می‌گردند در فصل‌های بعدی شرح داده می‌شوند: دربارهٔ شیوهٔ استوار برای به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی (فصل ۳)، تجزیه و تحلیل حساسیت (فصل ۴)، تجزیه و تحلیل پایداری کیفی (فصل ۵) و تجزیه و تحلیل پایداری کمی (فصل ۶). مطالب بررسی شده در فصل‌های ۳، ۴ و ۶ پس از سال ۱۹۹۸ منتشر شده است، در حالی که بخشی از محتوای فصل ۵ قبلاً به‌طور مفصل در [فصل‌های ۶ و ۱۰، [۱۰۲]]، تجزیه و تحلیل شده بودند. فصل‌های ۳-۵ را می‌توان به‌طور مستقل بعد از فصل‌های مقدماتی ۱ و ۲ مطالعه کرد، در حالی که فصل ۵ شامل مقدمات مورد نیاز فصل ۶ است. یادآوری‌های پایان هر بخش، پیشینه‌ها و تعمیم‌های قضیه‌ها و روش‌های آشکار شده را مرور می‌کند، در حالی که آخرین یادآوری هر فصل چند مسئله حل نشده را بیان می‌کند. مؤلفان می‌خواهند از پژوهشگران بسیاری که در مقالات مشترک ذکر شده در این کتاب تشکر کنند: ج. آمایا^۱، ای. آندرسن^۲، آ. اوسلندر^۳، پی. بوش^۴، ام. جی. کانواس^۵، آ. دانیلیدیس^۶، ان. دینه^۷، آ. آ. دونتچف^۸، آ. فرر^۹، وی. ای. گایا^{۱۰}، اس. گومز^{۱۱}، اف. گوئرا^{۱۲}، آ. هانتوت^{۱۳}، وی. جیاکومار^{۱۴}، وی.

-
1. J. Amaya
 2. E. Anderson
 3. A. Auslender
 4. P. Bosch
 5. M. J. Cánovas
 6. A. Daniilidis
 7. N. Dinh
 8. A. Dontchev
 9. A. Ferrer
 10. V.E. Gaya
 11. S. Gomez
 12. F. Guerra
 13. A. Han
 14. V. Jeyakumar

جورنت^۱، دی. کلاته^۲، آ. کروگر^۳، ام. لاریکوئتا^۴، جی. ی. لی^۵، ر. لوچتی^۶، جی. ای. مارتینز-لگاز^۷، جی. آ. میرا^۸، بی. موردوخویچ^۹، جی. پارا^{۱۰}، ام. ال. رودریگز^{۱۱}، ج. استیل^{۱۲}، تی.کیو. سان^{۱۳}، ت. ترلاکی^{۱۴}، ام. ترا^{۱۵}، ام. آی. تودوروف^{۱۶}، اف. جی. تولدو^{۱۷}، ج. تورگروسا^{۱۸}، وی. ان. ورا دو سریو^{۱۹}، جی. ویسنت-پرز^{۲۰}، ام. ووله^{۲۱}، سی. زالینسکو^{۲۲} و از تمامی آن‌هایی که بسیار از آن‌ها آموخته‌ایم. قدردانی ویژه ما نیز به ام. جی. کانوواس، جی. پارا، ام. آی. رودریگز، ام. ترا، اف. جی. تولدو و ای. ورچر^{۲۳}، برای حمایت آن‌ها در خواندن دقیق نسخه خطی و پیشنهاداتی برای بهبود به دانشجویان ما در رشته ریاضیات در آلیکانته^{۲۴}، آ. ناوارو^{۲۵}، و آر. کمپوی^{۲۶} به خاطر ترسیم برخی از شکل‌ها و به شرکت‌کنندگان در دوره دکتری بر اساس جزوه تدریسی یکی از مؤلفین در دانشگاه ملی سان لوئیس^{۲۷} در آرژانتین در آوریل ۲۰۱۳ تدریس شد که نظرات و انتقادات او به ما کمک کرد تا کیفیت نسخه خطی را بهبود بخشیم.

میگل آ. گوبرنا و مارکو آ. لوپنز^{۲۸}

آلیکانته، اسپانیا - اکتبر ۲۰۱۳

-
1. V. Jornet
 2. D.Klatte
 3. A. Kruger
 4. M. Lariqueta
 5. G.Y. Li
 6. R. Lucchetti
 7. J. E. Martinez-Lgaz
 8. J. A. Mira
 9. B.Mordukhovich
 10. J. Parra
 11. M. M. L Rodriguez
 12. G. Still
 13. T.Q. Son
 14. T. Terlaky
 15. M. Théra
 16. M. I. Todrov
 17. F.J.Toledo
 18. G. Torregrosa
 19. V.N. Vera de Serio
 20. J. Vicente-Pérez
 21. M. Volle
 22. C. Zallinscu
 23. E. Vercher
 24. Alicante
 25. A. Navrro
 26. R. Campoy
 27. Universidad Nacional de San Luis
 28. Miguel A. Goberna, Marco A. López

پیشگفتار مترجم

«به نام او که صفت‌پذیر نیست.»

پیش از همه لازم است درباره کلمه «به‌گزینی» اشاره کنم که اولین بار در ایران در زمان تعطیلی دانشگاه، کتاب «روش‌های عددی برای به‌گزینی نامقید» را با همکاری مرحوم دکتر هدایتی ترجمه کردیم که در پایان توسط دانشگاه به صورت درس‌نامه چاپ شده است. اما با ناباوری در جامعه ریاضی به نادرستی کلمه «Optimization» را «بهینه‌سازی» رواج داده‌اند، در صورتی که در ریاضی فرض بر این است که یک تابع در دامنه خود (متناهی یا نامتناهی) در یک یا چند نقطه، بیشینه یا کمینه (بهینه) است و هدف عبارت است از یافتن (گزینش) نقطه (نقاطی) که تابع در آن بهینه (کمینه یا بیشینه) می‌شود و امید است که از این واژه «به‌گزینی به جای بهینه‌سازی» در این جامعه استفاده شود. اما درباره به‌گزینی، هرچند طبیعت همواره به‌گزینی انجام می‌دهد، تا جایی که تاریخ گواهی می‌دهد، اقلیدس با مطرح کردن کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه یا کوتاه‌ترین فاصله از یک نقطه در خارج از یک خط راست تا آن خط چیست، مسئله به‌گزینی را مطرح کرد، هرچند در حال حاضر این پرسش باید به شکل «کوتاه‌ترین فاصله ممکن...» پیرایش شود، چون اگر فردی در ساحل یک رودخانه عریض با آب روان سریع قرار داشته باشد و بخواهد به طرف دیگر ساحل روبه‌روی خود برود، با علم به اینکه یک دهنه پل در فاصله هرچند کم بر روی این رودخانه مستقر است، بنابراین کوتاه‌ترین فاصله ممکن به روشنی خط راست نخواهد بود و بدین ترتیب به‌گزینی مقید مطرح می‌شود. حال برحسب اینکه تابع مورد نظر و یا قیدها خطی یا غیرخطی باشند، مسئله به‌گزینی خطی LO یا NLP مطرح می‌شود که تعداد متغیرها (مجهولات) متناهی هستند که توسط جرج دانتریگ در زمان جنگ جهانی دوم بنا به نیاز روز، مسئله LO را مطرح کرد و روش حل آن را نیز ارائه داد. اما به دنبال آن، این مسئله مطرح شد که اگر یک مسئله LO حل شده باشد، آنگاه داده‌های مسئله چگونه می‌توانند متناسب با شرایط

حاضر تغییر کنند تا جواب بهینه همچنان بهینه بماند که با عنوان تحلیل حساسیت یا پس‌بهینگی مطرح شد و مورد پژوهش قرار گرفت که در این زمینه کتاب‌های زیادی به زبان‌های غیرفارسی چاپ شده‌اند و همچنان با تغییراتی چاپ می‌شوند و در ایران نیز چندین کتاب ترجمه‌ای در این زمینه چاپ شده‌اند و مورد استفاده پژوهشگران علمی یا عملی، مانند مهندسين یا اقتصاددانان قرار می‌گیرند. از طرفی معمولاً در عمل به مسئله‌هایی برخورد می‌کنیم که در آن، تابع هدف غیرخطی و یا قیدهای آن‌ها غیرخطی هستند که برای حل آن‌ها با استفاده از روش‌های آنالیزی به صورت خطی تقریب و به صورت تکراری حل می‌شوند. روشن است هرچه تعداد متغیرها و یا قیدها زیادتر در نظر گرفته شوند انتظار پاسخ بهتر را خواهیم داشت تا جایی که مسئله به‌گزینی نیمه-نامتناهی، تعداد متغیرها یا تعداد قیدها نامتناهی باشند، معرفی شده‌اند که در آن هر دو، تعداد متغیرها و یا تعداد قیدها، نامتناهی هستند و به‌طور طبیعی با حل این‌گونه مسئله‌ها، همان پرسش نظیر به‌گزینی خطی، تحلیل حساسیت یا پس‌بهینگی، مطرح می‌شود که موضوع روز است. متأسفانه با اینکه مقاله‌های زیادی در این زمینه منتشر شده‌اند ولی تعداد کمی کتاب در این زمینه به زبان‌های غیرفارسی وجود دارند که تا جایی که اطلاع دارم هیچ کتابی در زمینه به‌گزینی نیمه-نامتناهی و نیز پس‌بهینگی به فارسی موجود نیست. وجود کتاب در دست ترجمه را از طریق منابع مندرج در پایان مقاله‌ها آگاهی یافتم و تنها کتابی را که توانستم به آن دسترسی پیدا کنم کتاب حاضر است.

بد نیست اشاره شود که متن اصلی کتاب دارای موارد اشتباه‌های شاید تایپی و نیز مطالب نادرست علمی است که پیرایش شده آن‌ها را تحت عنوان «نکته» نوشته‌ام.

در پایان یادآور می‌شوم یک ویژگی این کتاب این است که یک یا دو پرسش بدون پاسخ را مطرح کرده است که دانشجویان تحصیلات تکمیلی یا پژوهشگران علاقه‌مند می‌توانند این‌ها را حل و منتشر کنند. به‌ویژه اینکه تا جایی که اطلاع دارم، حداقل دو دانشگاه در ایران دارای دانشجوی Ph.D در زمینه به‌گزینی نیمه-نامتناهی هستند. در نتیجه به‌خاطر معرفی این موضوع برای جوانان علاقه‌مند به علم یا عمل (انواع زمینه مهندسی از جمله کشاورزی...) تصمیم به ترجمه این کتاب گرفته‌ام تا بتوانم ضمن ادای دین به این جوانان علاقه‌مند و خلاق، این پیام را نیز داده باشم که باور داشته باشند که سن، بازنشستگی، ناسالم بودن جسمی مانع نمی‌شوند که در پرسش از طرف دانشجویان فعلی یا قبلی ساکت بمانم. خالی از لطف نیست که پس از تکمیل ترجمه این کتاب، کتابی دیگر از همین مؤلفین تحت عنوان «به‌گزینی نیمه-نامتناهی» را یافتم که چاپ آن تقریباً به چند سال قبل برمی‌گردد که مصمم هستم پس از عرضه کتاب فعلی، آن را هم ترجمه کنم و به‌نحوی در دسترس علاقه‌مندان قراردهم.

در پایان از مدیران دانشگاه تبریز، به‌ویژه دانشکده علوم ریاضی سپاسگزارم که جو را طوری حفظ کردند که افراد مرتبط با آن‌ها خود را مجبور کنند از مطالعه دور نمانند.

سرانجام از همسرم نهایت سپاسگزاری را دارم که تمام و کمال بدون هیچ کمکی از طرف من، زندگی را به‌نحوی شایسته اداره می‌کند.

لازم به ذکر است که مشتاقانه پذیرای تذکر درباره نقص نگارش علمی و ادبی هستم و با کمال میل آن‌ها را در ویرایش‌های احتمالی بعدی اعمال خواهم کرد.

میرکمال میرنیا

بیستم اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

مقدماتی در باب به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی

۱-۱ بهینگی و یکتایی

به‌گزینی خطی معمولی (یا متناهی)، به‌گزینی خطی نامتناهی و به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی (به‌اختصار LO، LIO و LSIO) در باب مسئله‌های به‌گزینی بحث می‌کند که بعد فضای تصمیم و تعداد قیدهای در آن به‌ترتیب، هر دو متناهی، هر دو نامتناهی و دقیقاً یکی از آن‌ها متناهی باشد. با کمی استثنا (همانند چند کاربرد رایج گردآوری‌شده در [فصل ۲، [۱۰۲]]، از بین آن‌ها ج. دانتزیگ^۱ یک نمونه را در رسالهٔ دکترای خود معرفی کرد. رساله دربارهٔ استنتاج آماری در ۱۹۳۶ شروع شد و با جنگ جهانی دوم یا با چند کار جدید همچون [۱۹۰]) متوقف گردید. بیشتر مسئله‌های برآمده در عمل، با تعداد بسیار زیاد متغیر تصمیم هستند، به طوری که می‌توان آن‌ها را به صورت

$$P : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle \quad (1-1)$$

$$\text{s.t. } \langle a(t), x \rangle \geq b(t), \quad t \in T,$$

بیان کرد که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ در آن مبنای ضرب داخلی اقلیدسی در \mathbb{R}^n است و T عبارت است از یک مجموعه نامتناهی و داده‌ها متشکل هستند از یک مجموعه از سه‌تایی‌های مرتب مانند $(c, a, b) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^T \times \mathbb{R}^T$. مسئله LSIO مانند P را پیوسته می‌گوییم هرگاه T عبارت باشد از

یک فضای فشرده توپولوژیکی هاوسدورف، $b \in \mathcal{C}(T)$ (فضای خطی از توابع حقیقی پیوسته روی T) و $a = (a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot)) \in \mathcal{C}(T)^n$ همچنین، مسئله P در (۱-۱) را به شکل ماتریسی

$$P : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad (2-1)$$

$$\text{s.t. } a_t^T x \geq b(t), \quad t \in T,$$

می‌نویسیم که c^T در آن عبارت است از ترانواده بردار ستونی $c \in \mathbb{R}^n$. مجموعه فضای شدنی مسئله P به صورت $F = \{x \in \mathbb{R}^n : a_t^T x \geq b_t, t \in T\}$ نشان داده می‌شود. به روشنی، F عبارت است از یک مجموعه بسته محدب (و برعکس، با توجه به یک پیامد از قضیه جداسازی، هر مجموعه بسته محدب عبارت است از مجموعه جواب برخی دستگاه خطی).

با معرفی تابع معروف به تابع حاشیه‌ای $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$ به صورت

$$g(x) = \sup_{t \in T} \{b_t - a_t^T x\}, \quad (3-1)$$

به صورت یک مسئله به‌گزینی معمولی با تابع هدف خطی تنها با یک قید مانند

$$P : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

$$\text{s.t. } g(x) \leq 0$$

درمی‌آید. منحنی نمایش، بالای منحنی نمایش و پایین منحنی نمایش g به ترتیب عبارت‌اند از

$$\text{gph } g := \{(x, g(x)) : g(x) \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{epi } g := \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x) \leq \lambda\},$$

و

$$\text{hypo } g := \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x) \geq \lambda\}.$$

اگر $F \neq \emptyset$ آنگاه g عبارت است از یک تابع محدب سره. بدین ترتیب دامنه تابع g عبارت است از مجموعه محدب ناتهی

$$\text{dom } g := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < +\infty\}.$$

از محدب بودن تابع g ، محدب بودن مجموعه‌های زیرتراز تابع g ، یعنی $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \lambda\}$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ ، شبه‌محدب بودن تابع g ، نتیجه می‌شود.

متأسفانه، قالب‌بندی دوباره P به صورت یک مسئله به‌گزینی محدب معمولی تنها وقتی مفید است که P پیوسته باشد، به دو دلیل که به تجزیه و تحلیل نظری و بررسی عددی P مربوط می‌شود:
۱. به دست آوردن اطلاعات هندسی از مجموعه شدنی F از g دشوار است.

۲. محاسبه زیردیفرانسیل محدب g در یک نقطه مانند $x \in F$ ؛

$$\partial g(x) := \{u \in \mathbb{R}^n : g(y) \geq g(x) + u^T(y - x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\},$$

سخت است (به [۱۲۸] و منابع درج شده در آن مراجعه کنید).

توجه داشته باشید که اگر مسئله P پیوسته باشد، آنگاه از دستور والادیر^۱ خواهیم داشت:

$$\partial g(x) := \text{conv}\{-a_t : g(x) = b_t - a_t^T x, t \in T\}.$$

در سراسر این فصل، P عبارت است از یک مسئله معلوم LSIO با داده‌های ثابت. در اینجا قرار می‌دهیم $\nu(P) := \inf_{x \in F} c^T x$ (با این قرارداد که $\inf \phi = +\infty$) و $S := \{x \in F : c^T x = \nu(P)\}$ که به ترتیب عبارت‌اند از مقدار بهینه و مجموعه بهینه P . روشن است که مجموعه F محدب و بسته است و S عبارت است از وجه آشکار مجموعه شدنی F ، ولی (برخلاف مسئله LO) ممکن است داشته باشیم، $S = \emptyset$ حتی اگر داشته باشیم $\nu(P) \in \mathbb{R}$.

اینک چند نماد همانند نمادها در کورتانک^۲ [۱۶۱] را معرفی می‌کنیم. فضای خطی از دنباله‌های متناهی تعمیم‌یافته را با $\mathbb{R}^{(T)}$ نشان می‌دهیم که اعضای آن عبارت‌اند از توابع $\lambda \in \mathbb{R}^T$ که در همه جا صفر است، به جز در تعداد متناهی از نقاط روی T . برای چند دهه است که نماد $\mathbb{R}^{(T)}$ مربوط به متغیرهای دوگان برنامه ریزی نیمه-نامتناهی به صورت استاندارد به کار می‌رود و در [۷۱] رواج داده شده است. فرض کنید \mathbb{R}_+ و \mathbb{R}_{++} (و \mathbb{R}_- و \mathbb{R}_{--}) به ترتیب عبارت باشند از اعداد حقیقی نامنفی و اعداد حقیقی مثبت (نامثبت و منفی). مخروط مثبت در $\mathbb{R}^{(T)}$ را با $\mathbb{R}_+^{(T)}$ و عضو خنثی در $\mathbb{R}^{(T)}$ را با 0_T نمایش می‌دهیم. ابتدا، نمادهای مربوط به مجموعه‌های پایه‌ای به کاررفته در این کتاب را معرفی می‌کنیم که عبارت‌اند از:

$$\text{conv } X := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t x_t : x_t \in X \quad \forall t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \quad \sum_{t \in T} \lambda_t = 1 \right\},$$

1. Valadier
2. Kortanek

$$\text{cone } X := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t x_t : x_t \in X \quad \forall t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \right\},$$

$$\text{aff } X := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t x_t : x_t \in X \quad \forall t \in T, \lambda \in \mathbb{R}^{(T)}, \sum_{t \in T} \lambda_t = 1 \right\},$$

و

$$\text{span } X := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t x_t : x_t \in X \quad \forall t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{(T)} \right\}.$$

به مفهوم پوسته محدب، پوسته مخروطی محدب (با مبدأ)، پوسته تخت (آفینی) و پوسته خطی یک زیرمجموعه ناتهی مانند X از یک فضای خطی $\text{int } X$ ، $\text{bd } X$ و $\text{cl } X$ به معنی درون، مرز و بست یک زیرمجموعه مانند X از یک فضای توپولوژیکی هستند. بنابر تعریف، اگر $X = \emptyset$ ، آنگاه تمامی پوسته‌های جبری تهی خواهند بود به استثنای پوسته مخروطی محدب، که یک مجموعه تک‌عضوی، بردار صفر، است. نرم اقلیدسی، نرم خطی و نرم سوپریمم در \mathbb{R}^n را به ترتیب با $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ با گوی‌های بسته واحد \mathbb{B}_1 ، \mathbb{B}_2 و \mathbb{B}_∞ و فاصله نظیر را به ترتیب با $d_1(\cdot, \cdot)$ ، $d_2(\cdot, \cdot)$ و $d_\infty(\cdot, \cdot)$ نشان می‌دهیم. نماد $\|\cdot\|$ برای یک نرم کلی به کار می‌رود، در صورتی که $d(\cdot, \cdot)$ فاصله نظیر آن را نشان می‌دهد و بردار صفر در \mathbb{R}^n را با 0_n نشان می‌دهیم.

اگر $\phi \neq X \subset \mathbb{R}^n$ با توپولوژی القاشده به وسیله نرم اقلیدسی در نظر گرفته شود آنگاه $\text{rint } X$ و $\text{rbd } X$ نمایانگر درون نسبی و مرز نسبی X هستند (یعنی درون و مرز X نسبت به توپولوژی القاشده به وسیله \mathbb{R}^n در $\text{aff } X$). اگر X عبارت باشد از یک مجموعه محدب بسته، آنگاه مخروط دورشونده X عبارت خواهد بود از $0^+ X := \{v \in \mathbb{R}^n : c + v \in X \quad \forall c \in X\}$ که بر مجموعه تمامی حدهایی به شکل $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu_r x_r$ منطبق می‌شود که در آن داریم $\mu_r \in \mathbb{R}_+$ ، $x_r \in X$ ، $r = 1, 2, \dots$ و $\mu_r \downarrow 0$. به علاوه $\dim X = \dim \text{aff } X$ نشان‌دهنده بعد یک مجموعه محدب مانند X است، $X^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : x^T y \geq 0, \forall x \in X\}$ عبارت است از قطب مثبت یک مخروط محدب مانند X و $X^\perp := X^\circ \cap (-X^\circ)$ عبارت است از زیرفضای متعامد بر یک زیرفضای خطی مانند X . خطی بودن $\text{lin } X$ از یک مخروط محدب مانند X عبارت است از بزرگ‌ترین زیرفضای خطی موجود در X و $(X \cap (\text{lin } X))^\perp$ عبارت است از مخروط نوک‌دار X (که 0_n یک نقطه فرین آن است).

مجموعه‌های در ادامه را با P یا با دستگاه قیدی آن، $\sigma = \{a_t^T x \geq b_t, t \in T\}$ ، متناظر می‌کنیم:

- پوستهٔ محدب داده‌های قیدی:

$$C := \text{conv}\{(a_t, b_t), t \in T\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

- مخروط گشتاور اول:

$$M := \text{cone}\{a_t, t \in T\} \subset \mathbb{R}^n$$

- مخروط گشتاور دوّم:

$$N := \text{cone}\{(a_t, b_t), t \in T\} = \mathbb{R}_+ C \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

- مخروط مشخصه:

$$K := N + \text{cone}\{(0_n, -1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

به‌روشنی داریم $M = \text{Proj}_{\mathbb{R}^n}(N) = \text{Proj}_{\mathbb{R}^n}(K)$ که $\text{Proj}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ عبارت است از نگاشت تصویر روی \mathbb{R}^n ، یعنی $\text{Proj}_{\mathbb{R}^n}(x, x_{n+1}) = x$. می‌گوییم σ ناسازگار است هرگاه داشته باشیم $F = \emptyset$ و آن را به‌طور قوی ناسازگار می‌گوییم هرگاه در یک حالت خاص، برخی زیردستگاه‌های متناهی از σ ناسازگار باشند. مخروط مشخصه K و بست آن، $\text{cl } K$ (هر دو برحسب داده‌ها بیان می‌شوند) به‌ترتیب، همهٔ اطلاعات مربوط به σ و F را دریافت می‌کنند. با توجه به مخروط‌های گشتاور، سازگاری σ با N توصیف می‌شود و حال‌آنکه کران‌دار بودن F با M توصیف می‌شود.

قضیهٔ ۱-۱-۱ (وجودی). یک دستگاه مانند σ ناسازگار است اگر و تنها اگر $(0_n, 1) \in \text{cl } K$ و به‌طور قوی ناسازگار است اگر و تنها اگر $(0_n, 1) \in K$.

اگر به‌جای K قرار دهیم N ، آنگاه قضیهٔ ۱-۱-۱ برقرار خواهد بود. برای نسخهٔ LSIO از لم معروف فرکاس^۱ این‌گونه نیست. به یاد آورید که یک نامساوی مانند $w^T x \geq \gamma$ را پیامد یک دستگاه سازگار σ می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in F$ داشته باشیم $w^T x \geq \gamma$.

قضیهٔ ۲-۱-۱ (لم فرکاس ناهمگن). فرض کنید σ عبارت باشد از یک دستگاه خطی سازگار. در این صورت، یک نامساوی خطی مانند $w^T x \geq \gamma$ عبارت است از پیامد σ اگر و تنها اگر داشته باشیم $(w, \gamma) \in \text{cl } K$.

دو دستگاه سازگار $\sigma = \{a_t^T x \geq b_t, t \in T\}$ و $\bar{\sigma} = \{\bar{a}_t^T x \geq b_t, t \in T\}$ معادل هستند اگر و تنها اگر مجموعه جواب‌های یکسان داشته باشند، یعنی اگر $F = \bar{F}$. به عبارت دیگر، دو نمایش جایگزین از یک مجموعه محدب بسته مانند F را تشکیل بدهند. برطبق قضیه ۱-۱-۲ خواهیم داشت [قضیه ۵.۱۰، [۱۰۲]]:

• σ و $\bar{\sigma}$ معادل هستند اگر و تنها اگر داشته باشیم $\text{cl } K = \text{cl } \bar{K}$. به علاوه، همان‌طور که در

[فصل‌های ۵ و ۹ [۱۰۲]] نشان داده شده است، برقراری $F \neq \phi$ معادل است با

$$\bullet \quad (0_n, -1) \in \text{int cl } K = \text{int } K \Leftrightarrow M = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{کران‌دار بودن.}$$

• یک مجموعه محدب چندوجهی $\Leftrightarrow \text{cl } K$ چندوجهی است.

• بعد کامل $\Leftrightarrow \text{cl } K$ نوک‌دار است.

• یک چندگونه تخت (خطی) \Leftrightarrow مخروط نوک‌دار $\text{cl } K$ عبارت باشد از مخروط $\{(0_n, -1)\}$

فرض کنید $s(x, t) := \langle a(t), x \rangle - b(t)$ ، $t \in T$. با تابع کمکی $s(x, \cdot)$ در $x \in \mathbb{R}^n$ می‌توان شدنی بودن آن را بررسی کرد: داریم $x \in F$ اگر و تنها اگر $s(x, \cdot)$ روی T نامنفی باشد. مجموعه صفرهای تابع کمکی در X را مجموعه قیدهای فعال (قیدهای تساوی) در $x \in \mathbb{R}^n$ می‌نامند:

$$T(x) := \{t \in T : s(x, t) = 0\}.$$

بنابراین، محاسبه $T(x)$ به مسئله یافتن مجموعه بهینه مسئله کمینه کردن جامع نامقید مانند $\inf_{x \in T} s(x, t)$ منجر می‌شود. اگر تابع کمکی متحد با صفر نباشد و تمامی ضرایب در دستگاه قیدی σ عبارت باشند از توابع تحلیلی از شاخص t ، آنگاه مجموعه $T(x)$ متناهی خواهد بود. اگر این ضرایب چندجمله‌ای باشند، آنگاه محاسبه $T(x)$ شامل حل یک معادله جبری می‌شود.

مخروط جهت‌های شدنی و مخروط فعال در $x \in F$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$D(F; x) := \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \theta > 0, x + \theta d \in F\}$$

و

$$A(x) := \text{cone}\{a_t, t \in T(x)\}.$$

اگر برای $t \in T(x)$ و برداری مانند $d \in \mathbb{R}^n$ یک عدد مانند $\theta > 0$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $x + \theta d \in F$ آنگاه خواهیم داشت:

[نکته: دستور در متن اصلی پیرایش شده است. مترجم]

اگر $b_t + a_t^T \theta d = a_t^T(x + \theta d) \geq b_t$ را به طرفین اضافه کنیم، آنگاه چون $t \in T(x)$ پس داریم $a_t^T x - b_t = 0$ و از این رو $a_t^T \theta d \geq 0$ یا $a_t^T d \geq 0$. بنابراین، $D(F; x) \subset A(x)^\circ$ و چون (با توجه به لم فرکاس مربوط به مخروط) داریم $\text{cl } A(x) = A(x)^\circ$ ، پس خواهیم داشت:

$$A(x) \subset \text{cl } A(x) \subset D(F; x)^\circ. \quad (۴-۱)$$

اینک چهار قید کیفی (یکی محلی و سه‌تای دیگر جامع) را معرفی می‌کنیم که در چهارچوب‌های مختلف (بهینگی، دوگانی و پایداری) مفید هستند. می‌گوییم که برای P (یا σ) داریم:

- کیفیت قیدی محلی فرکاس-مینکوسکی^۱ (به اختصار LFMCQ) در $x \in F$ برقرار است، اگر هر پیامد σ که در X به صورت تساوی برقرار است، عبارت باشد از پیامد یک زیر دستگاه متناهی از σ یا به طور معادل (با توجه به قضیه ۱-۱-۲) اگر $D(F; x)^\circ \subset A(x)$ که خود با توجه به (۴-۱)، معادل است با $D(F; x)^\circ = A(x)$.

- کیفیت قیدی فرکاس - مینکوسکی (به اختصار FMCQ) اگر هر پیامد σ عبارت باشد از پیامد یک زیردستگاه متناهی یا به طور معادل (با توجه به قضیه ۱-۱-۲)، اگر K بسته باشد.

- کیفیت قیدی اسلیتر^۲ (SCQ) اگر نقطه‌ای مانند $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ (به نام نقطه اسلیتر) موجود باشد به طوری که برای هر $t \in T$ داشته باشیم $a_t^T \hat{x} \geq b_t$ یا به طور معادل، اگر $\hat{x} \in F$ و $T(\hat{x}) = \emptyset$.

- کیفیت قیدی قوی اسلیتر (SSCQ) اگر نقطه‌ای مانند $x \in \mathbb{R}^n$ (به نام نقطه SS) و عددی مانند $\varepsilon > 0$ موجود باشند به طوری که برای هر $t \in T$ داشته باشیم $a_t^T \hat{x} \geq b_t + \varepsilon$ یا به طور معادل، اگر داشته باشیم $\nu(P_{SS}) > 0$ ، که در آن

$$P_{SS} : \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}} y$$

$$\text{s.t.} \quad a_t^T x \geq b_t + y, \quad t \in T.$$

مشاهده می‌شود که مسئله P_{SS} در LSIO پیوسته است اگر و تنها اگر P پیوسته باشد و نیز برای بررسی شرط $\nu(P_{SS}) > 0$ ، نیازی نیست که مسئله P_{SS} تا حد به دست آوردن بهینگی حل شود. همچنین، توجه داشته باشید که اگر به جای هر قید $a_t^T x \geq b_t$ در σ ، بی‌نهایت قید به صورت $ka_t^T \geq kb_t - 1$

1. Minkowsky
2. Slater

$k \in \mathbb{N}$ ، قرار بدهیم، نمایش خطی دیگری از F به دست می‌آید به طوری که نقاط F (حتی نقاط F bd) عبارت خواهند بود از نقطه SS با $\varepsilon = 1$. وجود دستگاه‌هایی که هر قید آن در هر جواب شدنی غیرفعال باشد، یک ویژگی نامطلوب LSIO در مقایسه با LO است (روش‌های جهت شدنی از $T(x_k)$ در نقطه تکرار فعلی x_k استفاده می‌کند). این حالت ناخوشایند پیش نخواهد آمد اگر σ پیوسته باشد و شامل نامساوی بدیهی $0_n^T x \geq 0$ نباشد که $\text{int } F$ در این حالت عبارت است از مجموعه نقاط اسلیتر (نتیجه ۵.۹.۱ از [۱۰۲]). به روشنی خواهیم داشت:

$$SSCQ \Rightarrow SCQ.$$

به علاوه، اگر مسئله P پیوسته و SCQ برقرار باشد، آنگاه مجموعه محدب

$$\text{conv}(C \cup \{(0_n, -1)\}) = \text{conv} \{(a_t, b_t), t \in T; (0_n, -1)\}$$

شامل 0_{n+1} نمی‌شود و بنابراین $K = \mathbb{R}_+ \text{conv}(C \cup \{(0_n, -1)\})$ بسته است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{پیوسته } P \\ \text{برقرار است } SCQ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{FMCQ برقرار است} \Rightarrow \text{برقرار است } x \in F \text{ در هر LFMCO}$$

اگر $\bar{x} \in F$ در شرط کاروش-کهن-تاگر^۱ (KKT) به صورت

$$c \in A(\bar{x}) \quad (5-1)$$

صدق کند، آنگاه با توجه به (۴-۱) خواهیم داشت $c \in D(F; \bar{x})^\circ$ که در نتیجه، برای هر $x \in F$

خواهیم داشت $0 \leq c^T(x - \bar{x})$ ، یعنی $\bar{x} \in S$. در واقع، $c \in D(F; \bar{x})^\circ \Leftrightarrow \bar{x} \in S$.

اینک فرض می‌کنیم تابعی مانند $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موجود باشد به طوری که $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{(T)}$

عبارت باشد از یک نقطه عطف تابع لاگرانژی P به صورت

$$L(x, \lambda) := c^T x + \sum_{t \in T} \lambda_t (b_t - a_t^T x),$$

یعنی، فرض می‌کنیم که برای هر $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{(T)}$ داریم:

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}). \quad (6-1)$$

برای یک نقطه معلوم مانند $s \in T$ ، برای هر $s \in T$ و $t \neq s$ از اولین نامساوی در (۶-۱) با $\bar{\lambda}_t = \lambda_t$ خواهیم داشت $b_s - a_s^T \bar{x} \leq 0$ و در نتیجه $\bar{x} \in F$. به علاوه، برای یک نقطه معلوم مانند $x \in F$ خواهیم داشت:

$$c^T \bar{x} = L(\bar{x}, 0_T) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) = c^T x + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t (b_t - a_t^T x) \leq c^T x,$$

که در نتیجه از (۶-۱) نیز خواهیم داشت $\bar{x} \in S$.

مشاهده می‌شود که از اولین نامساوی در (۶-۱) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t (b_t - a_t^T \bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) - L(\bar{x}, 0_T) \geq 0$$

که با توجه به $\bar{x} \in F$ ، شرط مکملی

$$\bar{\lambda}_t (b_t - a_t^T \bar{x}), \quad t \in T \quad \text{برای هر } t \in T \quad (۷-۱)$$

به دست می‌آید.

یک مسئله LSIO مانند P را در نظر بگیرید به طوری که $\bar{x} \in S \neq F$ که به $c \neq 0_n$ منجر می‌شود. اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ به جای هر قید $a_t^T x \geq b_t$ قرار داده شود $ka_t^T x \geq kb_t - 1$ ، آنگاه یک مسئله دیگر LSIO با همان مجموعه شدنی F و بردار ارزش c را خواهیم داشت که در نتیجه همچنان مجموعه بهینه برابر S است و هر نقطه شدنی، یک نقطه SS خواهد بود. برای سادگی، فرض می‌کنیم این حالت برای مسئله P در ابتدا برقرار باشد. در این صورت، خواهیم داشت $c = 0_n \Rightarrow (۵-۱)$ (تناقض است) در حالی که داریم $L(\cdot, \bar{\lambda}) = \langle c, \cdot \rangle \Rightarrow (۷-۱) \Rightarrow (۶-۱)$ و با توجه به نامساوی دوم در (۶-۱)، برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم $c^T \bar{x} \leq c^T x$ که یعنی $c \in (\mathbb{R}^n)^\circ = \{0_n\}$. همچنین، از آن نتیجه می‌شود $c = 0_n$. بنابراین، شرایط (۵-۱) و (۶-۱) برای بهینگی \bar{x} کافی هستند، ولی لازم نیستند؛ مگر اینکه یک شرط مشخص مانند CQ برقرار باشد.

قضیه ۱-۱-۳ (بهینگی). اگر LFMCC در $\bar{x} \in F$ برقرار باشد، آنگاه گزاره‌های در ادامه معادل هستند:

۱. $\bar{x} \in S$.

۲. $c \in A(\bar{x})$.

۳. یک تابع مانند $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موجود است به طوری که $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ یک نقطه زینی تابع لاگرانژی L است.

اگر اطلاعات مربوط به مجموعه شدنی F از یک مسئله سازگار به وسیله مخروط مشخصه K به دست آید، آنگاه همین نقش را مخروط گشتاور درباره مجموعه بهینه S بازی می‌کند. در واقع، S کران‌دار است اگر و تنها اگر $c \in \text{int } M$ [به‌عنوان مثال نتیجه ۹.۳.۱ در [۱۰۲] را ببینید].

یکتایی جواب بهینه، یک ویژگی مفید LO است که با آن می‌توان قضیه‌های مربوط به تجزیه و تحلیل حساسیت رایج را مورد استفاده قرار داد. یک ویژگی قوی‌تر دارای همین نقش در مسئله LSIO است: یک عضو مانند $\bar{x} \in F$ به‌طور قوی یک جواب یکتا از مسئله P است اگر عددی مانند $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in F$ داشته باشیم:

$$c^T x \geq c^T \bar{x} + \alpha \|x - \bar{x}\|_p \quad (۸-۱)$$

به‌روشنی، از (۴-۱) نتیجه می‌شود $S = \bar{x}$.

قضیه ۴-۱-۱ (یکتایی). نقطه $\bar{x} \in F$ عبارت است از یک جواب یکتای قوی برای مسئله P اگر و تنها اگر داشته باشیم $c \in \text{int } D(F; \bar{x})^\circ$.

بنابراین، برای یک نقطه معلوم $\bar{x} \in F$ ، اگر $c \in \text{int } A(\bar{x})$ ، آنگاه \bar{x} با توجه به (۴-۱) به‌طور قوی یکتاست و عکس‌گزاره برقرار است اگر LFMCC در \bar{x} برقرار باشد.

در سراسر این کتاب، برای تشریح منظور خود از یک مثال ساده استفاده می‌کنیم که در ادامه می‌آید. به‌خاطر سادگی قیدهای آن، می‌توان یک عبارت صریح (ولی نسبتاً پیچیده) مربوط به تابع حاشیه‌ای نظیر g را به دست آورد.

مثال ۱.۱ مسئله پیوسته LSIO به صورت

$$P : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$x_1 \geq 0 \quad (t = 2), \quad x_2 \geq 0 \quad (t = 3)$$

را با بردارهای مختلف ارزش c در نظر بگیرید. داریم $F = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : \|x\|_p \leq 1\}$

$$g(x) = \begin{cases} \max\{\|x\|_p - 1, -x_1, -x_2\}, & x \in \mathbb{R}_+^2, \\ \max\{x_1 - 1, -x_2\}, & x \notin \mathbb{R}_+^2, x_2 \leq x_1, \\ \max\{x_2 - 1, -x_1\}, & x \notin \mathbb{R}_+^2, x_2 > x_1, \end{cases}$$

$$N = K = \text{cone} \left\{ - \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

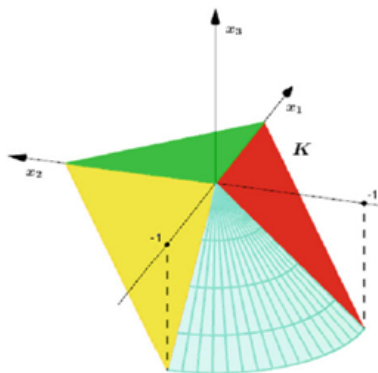
(شکل ۱-۱ را ببینید) که تصویر آن روی \mathbb{R}^2 عبارت است از $M = \mathbb{R}^2$. به‌خاطر بسته بودن K ، مسئله P در هر نقطهٔ شدنی، در FMCQ و LFMCQ صدق می‌کند. به‌علاوه نقطهٔ $\hat{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ یک نقطهٔ اسلیتر است، که در نتیجه هم SCQ و هم SSCQ برقرار هستند.

(الف) اگر $c = (1, 1)$ ، آنگاه $S = \{x^1\}$ با $x^1 = 0_2$ به‌طور قوی یکتاست. در واقع داریم $c \in \text{int } A(\bar{x}) = \mathbb{R}_{++}^2$ با $D(F; x^1) = A(x^1) = \mathbb{R}_+^2$.
 (ب) اگر $c = (-1, -1)$ ، آنگاه $S = \{x^2\}$ با $x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ به‌طور قوی یکتا نیست. در اینجا $D(F; x^2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 0\} \cup \{0_2\}$ و $A(x^2) = \mathbb{R}_+ c$ (شکل ۱-۲ هر دو مخروط را نشان می‌دهد که به x^2 انتقال یافته‌اند).

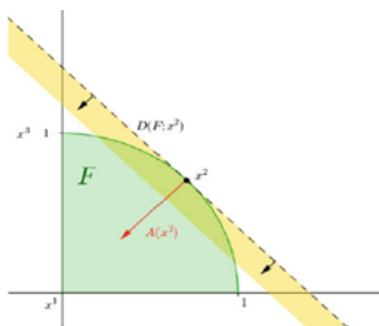
(ج) اگر $c = (1, 0)$ ، آنگاه $S = \{0\} \times [0, 1]$. فرض کنید $x^3 = (0, 1) \in S$ در اینجا داریم $D(F; x^3) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 < 0\} \cup \{0_2\}$ و $A(x^3) = \text{cone}\{(0, -1), (1, 0)\}$.

شکل ۱-۳ منحنی نمایش تابع کمکی در x^i ، $(\cdot, s(x^i, \cdot))$ ، $i = 1, 2, 3$ را نشان می‌دهد. وجود جواب قوی به‌طور یکتا یک مشخصه برحسب ارتباط بین c و K را بیان می‌کند (نتیجهٔ ۱۰۴ را ببینید).

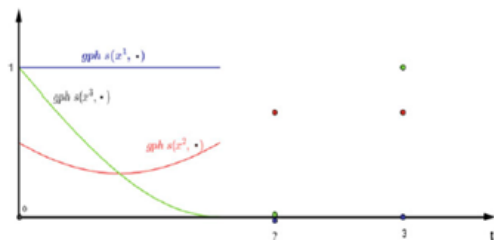
یادآوری ۱-۱-۵ (پیشینه‌ها و تعمیم‌ها). برهان‌های قضیهٔ ۱-۱-۱ و قضیهٔ ۱-۱-۲ را می‌توانید به‌ترتیب در [۱۰۲ قضیهٔ ۴.۴] و [۳۰۱ قضیهٔ ۳.۱] ببینید. همان‌طور که در [۷۱] نشان داده شده است، هر دو قضیه برای به‌گزینی محدب نامتناهی (به‌اختصار CIO) برقرار هستند. قضیهٔ ۱-۱-۳ و قضیهٔ ۱-۱-۴ ابتدا در [۱۹۹] ثابت شده بودند. همچنین قضیه‌های ۷.۱ و ۱۰.۵ در [۱۰۲] را ببینید. همچنین، نسخه‌های بسیاری دربارهٔ قضیهٔ بهینگی در CIO وجود دارند. مثلاً [۷۱، ۷۲، ۱۷۵] را ببینید.



شکل ۱-۱ مخروط مشخصه



شکل ۲-۱ مخروط‌های فعال و جهت‌های شدنی



شکل ۳-۱ توابع کمکی $x^i, i = 1, 2, 3$

۲-۱ دوگانگی

اگر $c \in M$ ، آنگاه تابعی مانند $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موجود است به طوری که $\sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c$. در این صورت برای هر $x \in F$ خواهیم داشت:

$$c^T x = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t^T x \geq \sum_{t \in T} \lambda_t b_t. \quad (9-1)$$

مسئله دوگان هار مربوط به P عبارت است از بیشینه‌سازی کران پایین برای $c^T x$ حاصل از (۹-۱) به صورت

$$D : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$$

$$\text{s.t. } \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c.$$

مجموعه‌های شدنی، بهینه D و مقدار بهینه آن را به ترتیب با F^D ، S^D و $\nu(D)$ نشان می‌دهیم (با این قرارداد که $\sup \phi = -\infty$). توجه داشته باشید که D یک مسئله LSIO است؛ زیرا دارای تعداد متناهی قید و بی‌نهایت متغیر تصمیم است. با توجه به نحوه ساختن نامساوی دوگان ضعیف، همواره داریم $\nu(D) \leq \nu(P)$. توجه داشته باشید که $F^D \neq \phi$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $c \in M$. با طرح‌های کلی که در ادامه می‌آید، می‌توان دوگان دیگر مسئله LSIO را برای مسئله P ارائه کرد. برای نمونه، مسئله دوگان لاگرانژی P عبارت است از مسئله به‌گزینی نامقید به شکل

$$D_L : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda).$$

چون

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{t \in T} \lambda_t b_t + \langle c - \sum_{t \in T} \lambda_t b_t, x \rangle \right)$$

$$= \begin{cases} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t, & \lambda \in F^D \text{ اگر} \\ -\infty, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پس مقادیر بهینه و مجموعه‌های بهینه D و D_L بر هم منطبق می‌شوند، یعنی $\nu(D) = \nu(D_L)$ و $S^D = S^{D_L}$.

دو مسئله $D - P$ را می‌توان برحسب مخروط مشخصه K ، دوباره به صورت هندسی بیان کرد. درحقیقت، از یک طرف D عبارت است از بیشینه‌سازی آخرین مختص، x_{n+1} روی مجموعه

$$\left\{ \sum_t \lambda_t (a_t, b_t), \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \right\} = \text{cone}\{(a_t, b_t), t \in T\} = N,$$

یا به‌طور معادل، روی مجموعه $K = N + (0_n, -1)$ ، به‌شرطی که داشته باشیم $\sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c$.

بنابراین

$$D_G : \sup_{y \in \mathbb{R}} \{y : (c, y) \in K\}$$

در $\nu(D) = \nu(D_G)$ صدق می‌کند و حال آنکه اگر داشته باشیم $S^D \neq \theta$ ، آنگاه خواهیم داشت $S^{D_G} = \nu(D)$ ، یعنی $\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = c\} \cap K$ عبارت است از یک نیم‌خط بسته. از طرف دیگر، به‌ازای یک عدد مانند $\alpha \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت $\alpha \leq \nu(P)$ اگر و تنها اگر $c^T x \geq \alpha$ عبارت باشد از پیامد σ ، اگر و تنها اگر (با توجه به لم فرکاس) $(c, \alpha) \in \text{cl } K$. بدین ترتیب، به‌ازای

$$P_G : \sup_{y \in \mathbb{R}} \{y : (c, y) \in \text{cl } K\}$$

خواهیم داشت $\nu(P) = \nu(P_G)$ و $S^{P_G} = \{\nu(P)\}$ با این شرط که $\nu(P) \in \mathbb{R}$ حتی اگر $S = \phi$. البته، فضای تصمیم برای هر دو مسئله D_G و P_G عبارت‌اند از خط حقیقی. دوگانگی ضعیف، $\nu(D_G) \leq \nu(P_G)$ در اینجا ناشی از برقراری $K \subset \text{cl } K$ است و بنابراین مجموعه بهینه حداکثر یک عضو دارد.

مسئله دوگان پیوسته از یک مسئله پیوسته LSIO مانند P عبارت است از

$$D_c : \sup_{\mu \in C_+^T} \int_T b_t d\mu(t) \\ \text{s.t.} \int_T a_t d\mu(t) = c,$$

که در آن نمایانگر مخروط اندازه‌های منظم نامنفی بورل روی T است. چون $\mathbb{R}_+^{(T)}$ را می‌توان به‌صورت یک زیرمجموعه از $C_+^T(T)$ متشکل از اندازه‌های نامنفی اتمی نگاه کرد و $P - D_C$ در دوگانگی ضعیف، $\nu(D) \leq \nu(D_C) \leq \nu(P)$ ، صدق می‌کند، پس هر شرطی که یک شکاف صفر دوگانگی را برای $P - D_C$ تضمین کند، یک شکاف صفر دوگانگی را برای $P - D_C$ نیز تضمین خواهد کرد (با دستیابی مقدار بهینه دوگان D_C هرگاه $\nu(D)$ حاصل شود). بنابراین، مسئله دوگان D از مسئله P را در کل این کتاب در نظر می‌گیریم.

از قضیه‌های اصلی دوگانگی مسئله LSIO شرایطی به‌دست می‌آیند که شکاف صفر دوگانگی را با دستیابی مقدار بهینه دوگان یا اولیبه تضمین می‌کند هرگاه داشته باشیم $F^D \neq \emptyset \neq F$. این وضعیت‌ها را به‌ترتیب دوگانگی قوی اینفمکس (infmax) و دوگانگی قوی برعکس مینسوپ (minsup) می‌نامند. قضیه دوگانگی اینفمکس (یا قوی) عبارت است از یک پیامد سراسر از ارتباط بین زوج‌های $P - D$ و $P_G - D_G$.

قضیه ۱-۲-۶ (دوگانی). فرض کنید $F \neq \emptyset \neq F^D$. در این صورت خواهیم داشت:
 ۱. اگر مجموعه K بسته باشد، آنگاه $\nu(P) = \nu(D) \in \mathbb{R}$ و $\nu(P) \neq \emptyset$ و $S^D \neq \emptyset$.

۲. اگر $c \in \text{rint } M$ ، آنگاه $\nu(P) = \nu(D) \in \mathbb{R}$ و عبارت است از مجموع یک مجموعه محدب ناتهی فشرده با یک زیرفضای خطی.

یک زوج شدنی مانند $S(x, \lambda) \in F \times F^D$ را یک جواب مکملی زوج اولیه-دوگان $P - D$ می‌گویند اگر داشته باشیم:

$$\text{supp } x \cap \text{supp } \lambda = \emptyset,$$

که در آن

$$\text{supp } x := \{t \in T : a_t^T x > b_t\} \quad \text{و} \quad \text{supp } \lambda := \{t \in T : \lambda_t > 0\}$$

را به ترتیب مجموعه‌های پشتیبان x و λ می‌گویند.

در [۱۱۰] نشان داده شده است که یک زوج مانند $(x, \lambda) \in F \times F^D$ عبارت خواهد بود از یک جواب مکملی $P - D$ اگر و تنها اگر $\nu(P) = \nu(D)$ و (x, λ) عبارت باشد از یک جواب بهینه اولیه-دوگان، یعنی $(x, \lambda) \in S \times S^D$. به علاوه، برای یک نقطه مفروض $x \in F$ یک تابع مانند $\lambda \in F^D$ موجود باشد به طوری که (x, λ) یک جواب مکملی $P - D$ باشد اگر و تنها اگر x عبارت باشد از یک جواب بهینه برخی زیرمسئله‌های متناهی P . یک سه‌تایی مرتب $(B, N, Z) \in (F^T)^3$ را یک افزاز بهینه برای P می‌نامند اگر یک جواب مکملی مانند (x, λ) موجود باشد به طوری که داشته باشیم $N = \text{supp } \lambda$ ، $B = \text{supp } x$ و $Z = T \setminus (B \cup N)$. در این صورت، اعضای ناتهی (B, N, Z) یک افزاز T را تشکیل می‌دهد (اگر سه مجموعه ناتهی باشند، آن را یک سه‌افرازه می‌گویند). یک افزاز مانند $(\bar{B}, \bar{N}, \bar{Z})$ بیشینه است اگر داشته باشیم:

$$\bar{B} = \cup_{x \in S} \text{supp } x, \quad \bar{N} = \cup_{\lambda \in S^D} \text{supp } \lambda \quad \text{و} \quad \bar{Z} = T \setminus (\bar{B} \cup \bar{N}).$$

یکتایی افزاز بهینه عبارت است از یک پیامد سرراست از تعریف. اگر یک زوج جواب بهینه مانند $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times S^D$ موجود باشد به طوری که $\text{supp } \bar{x} = \bar{B}$ و $\text{supp } \bar{\lambda} = \bar{N}$ ، آنگاه این افزاز بیشینه را افزاز بیشینه-بهینه می‌نامند. بنابراین، اگر $S = \{\bar{x}\}$ ، $S^D = \{\bar{\lambda}\}$ و $\nu(D) = \nu(P)$ ، آنگاه $(\text{supp } \bar{x}, \text{supp } \bar{\lambda}, T \setminus (\text{supp } \bar{x} \cup \text{supp } \bar{\lambda}))$ عبارت است از افزاز بیشینه بهینه.

اگر $(\bar{B}, \bar{N}, \bar{Z})$ یک افراز بهینه باشد به طوری که $\bar{Z} = \emptyset$ ، آنگاه افراز بیشینه-بهینه خواهد بود. ممکن است افراز بیشینه-بهینه موجود نباشد.

مثال ۲.۱ مسئله LSIO از مثال ۱.۱ به صورت

$$P(c) : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$x_1 \geq 0 (t=2), \quad x_2 \geq 0 (t=3),$$

را برای سه مقدار مختلف $c \in \mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید. در مثال ۱.۱ مشاهده کرده‌ایم که K بسته است و $M = \mathbb{R}^2$. بنابراین، برطبق قضیه دوگانی، برای هر $c \in \mathbb{R}^2$ خواهیم داشت $\nu(P) = \nu(D)$ با $S \neq \emptyset$ فشرده و $S^D \neq \emptyset$.

(الف) $c = (1, 1)$. داریم $S = \{0_2\}$ و از حل دستگاه

$$\left\{ \sum_{t \in T} (a_t, b_t) = (c, \nu(D)), \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \right\}$$

نتیجه می‌شود $S^D = \lambda^1$ با $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = 1$ و برای هر $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ خواهیم داشت $\lambda_t^1 = 0$. چون $\text{supp } 0_2 = [0, \frac{\pi}{4}]$ و $\text{supp } \lambda^1 = \{2, 3\}$ ، پس $([0, \frac{\pi}{4}], \{2, 3\}, \emptyset)$ عبارت است از افراز بیشینه-بهینه.

(ب) فرض کنید $c = (-1, -1)$. در اینجا داریم $S = \{x^2\}$ با $x^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ که در نتیجه خواهیم داشت $\nu(D) = \nu(P) = -\sqrt{2}$. یکتایی D از ارتباط بین S^D و S^{DG} و مخروط مشخصه K نتیجه می‌شود. درحقیقت داریم

$$K \cap (\{c\} \times \mathbb{R}) = \{(-1, -1, -\sqrt{2} - \gamma) : \gamma \geq 0\}.$$

و $\mathbb{R}_+(-1, -1, -\sqrt{2})$ عبارت است از یک شعاع فرین K که مولد یکتای آن عبارت است از $(a_{\frac{\pi}{4}}, b_{\frac{\pi}{4}})$. بدین ترتیب $S^D = \{\lambda^2\}$ با $\lambda_{\frac{\pi}{4}}^2 = \sqrt{2}$ و برای هر $t \neq \frac{\pi}{4}$ داریم $\lambda_t^2 = 0$. (مشاهده می‌شود که دو برابر کردن قید نظیر $t = \frac{\pi}{4}$ ، چیزی در مسئله اولیه عوض نمی‌شود ولی S^D مجموعه تک عضوی نخواهد بود). چون $\text{supp } x^2 = T \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ و $\text{supp } \lambda^2 = \{\frac{\pi}{4}\}$ ، پس $(T \setminus \{\frac{\pi}{4}\}, \{\frac{\pi}{4}\}, \emptyset)$ عبارت است از افراز بیشینه-بهینه.

(ج) $c = (1, 0)$. اینک داریم $[0, 1] \times \{0\}$ ، درحالی‌که $S^D = \{\lambda^3\}$ با $\lambda^3 = 1$ و درغیراین صورت $\lambda_t^3 = 0$. در اینجا داریم $\text{supp } \lambda^3 = \{2\}$ ، درحالی‌که برای $x \in S$ داده شده، ممکن است داشته باشیم $\text{supp } x = [0, \frac{\pi}{4}]$ یا $\text{supp } x = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}$ یا $\text{supp } x = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}$ از این رو، افزایش‌های بهینه عبارت‌اند از: $([0, \frac{\pi}{4}], \{2\}, \{3\})$ ، $([0, \frac{\pi}{4}], \{2\}, \emptyset)$ و $([0, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}, \{2\}, \{3\})$ و $([0, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}, \{2\}, \emptyset)$ افزایش بهینه است.

یادآوری ۱-۲-۷ (پیشینه‌ها و تعمیم‌ها). مقاله‌های اساسی روی دوگانی هار در دهه‌های ۱۹۶۰ [۵۹]، [۶۰] چاپ شده بودند. همان‌گونه که در [۷۲] نشان داده شد، مسئله‌های D و D_L نیز با مسئله دوگان با دیدگاه روکافلر [۲۰۵] معادل هستند که مجموعه شدنی عبارت است از $\mathbb{R}^{(T)}$. اثبات‌های قضیه ۱-۲-۶ (۱) و تعمیم آن برای دوگان لاگرانژی در CIO را می‌توان به‌ترتیب در [قضیه ۸.۱ در ۱۰۲] و [۲۶] یافت. همان‌طور که در [یادآوری ۶ در ۱۰۷] مشاهده شد، توجه به دوگانی مینسوپ کاملاً جدید است. یک تعمیم قضیه ۱-۲-۶ (۲) برای دوگان لاگرانژی در CIO در [۱۰۷] پیشنهاد شده است.

۳-۱ روش‌های عددی

این فصل مقدماتی را با یک شرح مختصر از چند روش عددی مربوط به حل مسئله LSIO، P در (۱-۱) به پایان می‌بریم. خواننده نمی‌تواند هیچ روش کارایی را برای حل یک مسئله LSIO انتظار داشته باشد؛ وگرنه می‌توانستیم مقدار بهینه هر مسئله به‌گزینی مانند

$$P_1 : \inf_{x \in X} f(x)$$

را از حل مسئله معادل LSIO به‌صورت

$$P_2 : \inf_{y \in \mathbb{R}} -y$$

$$\text{s.t. } y \geq f(x), x \in X,$$

به‌دست آوریم به‌طوری‌که $\nu(P_1) = -\nu(P_2)$. به‌بیان دقیق‌تر، اگر \bar{x} یک جواب بهینه مسئله P_1 باشد، آنگاه $f(\bar{x})$ یک جواب بهینه مسئله P_2 خواهد بود و برعکس، اگر \bar{y} یک جواب بهینه مسئله P_2 باشد، آنگاه مجموعه بهینه مسئله P_1 عبارت است از مجموعه شاخص‌های فعال مسئله P_2 در $y = \bar{y}$. اشکال اصلی روش‌های نیمه-نامتناهی (خطی و غیرخطی) این حقیقت است که بررسی شدنی بودن یک نقطه معلوم مانند $x \in \mathbb{R}^n$ به محاسبه مقدار بهینه $v(Q(\bar{x}))$ از مسئله‌ای به نام زیرتراز در $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

به‌شکل

$$Q(\bar{x}) : \inf_{t \in T} s(\bar{x}, t) = \inf_{t \in T} \{ \langle a(t), \bar{x} \rangle - b(t) \}$$

نیاز دارد که یک مسئله به‌گزینی جامع است. حتی بیشتر از این نیاز، برخی از الگوریتم‌ها به محاسبه مجموعه $T(\bar{x})$ از کمینه جامع $Q(\bar{x})$ نیاز دارند که فقط وقتی ممکن است که فرض‌های قوی روی T و s اعمال شوند، مثلاً $s(\bar{x}, t)$ عبارت باشد از یک تابع چندجمله‌ای از T و t عبارت باشد از یک بازه با بعد متناهی.

۱-۳-۱ روش‌های گسسته‌سازی شبکه

روش‌های گسسته‌سازی با حل یک دنباله از مسئله‌های LO، یک دنباله از نقاط را در \mathbb{R}^n تولید می‌کنند که به یک جواب بهینه مسئله P همگرا شود. این مسئله‌ها معمولاً زیرمسئله‌های مسئله P به‌شکل

$$P(T_k) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x, \text{ s.t. } a_t^T x \geq b_t, \quad t \in T_k \text{ برای هر } k$$

هستند که $1 \leq k, T_k$ ، در آن عبارت است از یک زیرمجموعه ناتهی و متناهی از T . یک عدد کوچک مانند $\varepsilon > 0$ (به نام دقت) را انتخاب کنید تا پایان دادن متناهی را تضمین کند.

گام k : فرض کنید T_k معلوم باشد.

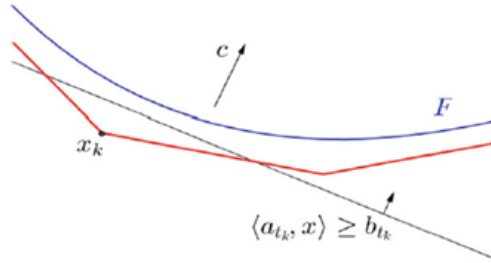
۱. یک جواب مانند x_k از مسئله $P(T_k)$ را محاسبه کنید.

۲. اگر نقطه x_k با دقت ε شدنی باشد، یعنی برای هر $t \in T$ داشته باشیم $a_t^T x_k \geq b_t - \varepsilon$ ، آنگاه پایان، وگرنه به‌جای T_k قرار دهید T_{k+1} .

به‌روشنی، نقطه x_k قبل از بهینگی نشدنی است در روش‌های گسسته‌سازی شبکه، دنباله‌هایی از شبکه‌ها مانند $(T_k)_{k=0}^{\infty}$ را انتخاب کنید (معمولاً برای هر k داشته باشیم $T_k \subset T_{k+1}$) شیوه‌های دیگر گسسته‌سازی دنباله $(T_k)_{k=0}^{\infty}$ عبارت است از تولید آن به‌صورت استقرایی. برای نمونه، شیوه کلی رایج صفحه‌برش، مرکب است از اختیار کردن $T_{k+1} = T_k \cup \{t_k\}$ برای برخی $t_k \in T$ (همانند شکل ۱-۴) یا برای یک شاخص مانند $t'_k \in T_k$ قرار دهید $\{t'_k\}$ (اگر یک قاعده حذف گنجانیده شود).

همگرایی روش‌های گسسته‌سازی به این واقعیت نیاز دارد که مسئله P باید پیوسته باشد که خود، همگرایی روش صفحه‌برش کلی را در این حالت تضمین می‌کند و حال آنکه روش‌های گسسته‌سازی شبکه، علاوه بر آن، به‌فرض چگال بودن روی P (درواقع روی T) نیاز دارد: مجموعه T عبارت است از اجتماع

یک مجموعه‌ی متناهی مانند U با مجموعه‌ی فشرده‌ی دیگر مانند V به‌طوری‌که داشته باشیم $V = \text{cl}(\text{int } V)$. در این حالت، دنباله‌ی شبکه‌ها بایستی برای تمامی مقادیر k در $U \subset T_k$ صدق کند.



شکل ۴-۱ برش شدنی بودن

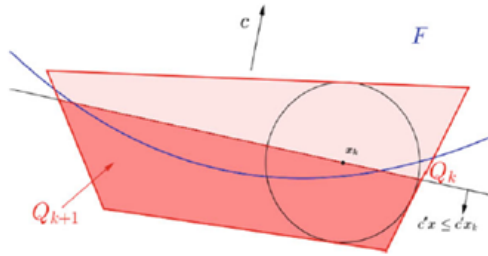
با توجه به شرط آخری، مسئله‌های مثال ۱۰۱ را در نظر بگیرید که پیوسته هستند و $T = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{2, 3\}$ با $U = \{2, 3\}$ و $V = [0, \frac{\pi}{4}]$ صدق می‌کند. اگر T_k عبارت باشد از یک شبکه در T به‌طوری‌که $U \subset T_k$ ، آنگاه مجموعه‌ی شدنی F حداقل در یکی از جهت‌های $(-1, 0)$ یا $(0, -1)$ دور می‌شود و $P(T_k)$ در حالت (الف) بی‌کران است که در نتیجه ممکن است دنباله‌ی $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ موجود نباشد. برعکس، اگر برای هر k داشته باشیم $U \subset T_k$ ، آنگاه برای هر k خواهیم داشت $x_k = 0$ و $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in S$.

اشکال‌های اصلی این روش‌ها عبارت‌اند از جمع شدن نامطلوب در نزدیکی S (مگر اینکه مسئله P دارای یک جواب بهینه‌ی قوی یکتا باشد) و افزایش یافتن اندازه‌ی مسئله‌های کمکی $P(T_k)$ (مگر اینکه قاعده‌های حذفی اجرا شود). این روش‌ها تنها برای مجموعه‌های باشاخص با بعد پایین کارا هستند، یعنی T در برخی فضای اقلیدسی قرار داشته باشد و داشته باشیم $\dim \text{aff } T \leq 3$ (وگرنه تعداد اعضای مجموعه‌ی T_k ، $|T_k|$ خیلی سریع با افزایش k رشد می‌کند). برای نمونه، اگر داشته باشیم $T = \prod_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i]$ از افزایش‌های دوتایی متوالی از بازه‌های $[\alpha_i, \beta_i]$ ، $i = 1, \dots, m$ ، تشکیل شده باشد، آنگاه خواهیم داشت $|T_{k+1}| = (2^k + 1)^m > 2^{km}$ ، $k = 1, 2, \dots$. برای جزئیات بیشتر به [فصل ۱۱ در ۱۰۲] و [۱۷۸] و منابع در آن‌ها مراجعه کنید.

۲-۳-۱ روش‌های صفحه‌ی برش مرکزی

روش‌های صفحه‌ی برش مرکزی، هر گام را با یک چندوجهی کران‌دار شامل یک مجموعه‌ی زیرتر از P شروع می‌کند و یک مرکز معین از این چندوجهی کران‌دار را محاسبه می‌کند. سپس این چندوجهی کران‌دار با

یکپارچه کردن دستگاه مشخص‌کننده آن یا یک برش شدنی (اگر این مرکز نشدنی باشد) با یک برش تابع هدف (درغیراین صورت) به‌روز درآورده می‌شود. فرض کنید $\epsilon > 0$ عبارت باشد از یک دقت معلوم.



شکل ۵-۱ برش تابع هدف

گام k : فرض کنید که Q_k یک چندوجهی کران‌دار شامل برخی مجموعه زیرتراز از مسئله P باشد.

۱. یک مرکز مانند x_k از Q_k را محاسبه کنید.

۲. اگر $x_k \notin F$ ، آنگاه قرار دهید

$$Q_{k+1} = \{x \in Q_k : a_t^T x \geq b_t\},$$

که در آن T در T در $a_t^T x_k < b_t$ صدق می‌کند و قرار دهید $k = k + 1$. وگرنه ادامه دهید،

۳. اگر $c^T x_k \leq \min_{x \in Q_k} c^T x + \epsilon$ ، آنگاه پایان. وگرنه قرار دهید

$$Q_{k+1} = \{x \in Q_k : c^T x \leq c^T x_k\}$$

و $k = k + 1$.

با توجه به بند ۱، یک شرط روشن برای وجود Q_k عبارت است از کران‌دار بودن S . اینک فرض می‌کنیم که $Q_k = \{x \in \mathbb{R}^n : c_i^T x \geq d_i, i \in I\}$ ، که مجموعه I متناهی است و برای هر $i \in I$ ، $c_i \neq 0_n$. اگر مرکز هندسی انتخاب شود (مثل انتخاب در [۲۱]) آنگاه شعاع بزرگ‌ترین گوی مربوط به نرم $\|\cdot\|_2$ درون Q_k عبارت است از $\max_{x \in Q_k} \min_{i \in I} d_\Psi(x, H_i)$ ، که در آن داریم $H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : c_i^T x = d_i\}$. چون برای $i \in I$ داریم $d_\Psi(x, H_i) = \frac{c_i^T x - d_i}{\|c_i\|_2}$ ، بنابراین، این مسئله کمکی معادل است با $\min_{x \in Q_k} \max_{i \in I} -d_\Psi(x, H_i)$ و نیز با مسئله LO به صورت

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}} y$$

$$s.t. \quad c_i^T x - d_i + \|c_i\|_2 y \geq 0, \quad i \in I$$

$$c_i^T x \geq d_i, i \in I.$$

از طریقی دیگر، اگر مرکز تحلیلی (همانند انتخاب در [۱۹۲]) انتخاب شود، آنگاه مسئله کمکی متشکل است از محاسبه یک کمینه‌ساز جامع $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ که f در آن عبارت است از یک تابع جریمه مربوط به Q_k (یعنی یک تابع مانند f که اگر $x \rightarrow bd(Q_k)$ ، آنگاه داشته باشیم $f(x) \rightarrow +\infty$) مثلاً، تابع جریمه لگاریتمی $f(x) = \sum_{i \in I} \log(c_i^T x - d_i)$ با این شرط که داشته باشیم $x \in \text{int } Q_k$ وگرنه داشته باشیم $f(x) = +\infty$.

اگر نقطه x_k نشدنی باشد، آنگاه مورد ۲ یک برش شدنی را به چندوجهی کران‌دار Q_k (برخی قیدهای مسئله P که در x_k نقض می‌شود) اضافه می‌کند، در صورتی که ε -بهینگی x_k در بند ۳ بررسی می‌شود که اگر نتیجه منفی بود، آنگاه یک برش تابع هدف را به Q_k اضافه می‌کند. یک برش تابع هدف در شکل ۱-۵ نشان داده شده است.

معمولاً، این روش‌ها دنباله‌هایی از نقاط شدنی و نشدنی را تولید می‌کنند که قاعده‌های توقف را برای ε -بهینگی فراهم می‌آورد و در یک نقطه شدنی پیش از بهینگی پایان می‌یابد. برای نمونه، روش پیشنهادی در [۶۵]، در هر گام یک نقطه نشدنی همراه با یک نقطه شدنی تولید می‌شود، نتیجه‌ای که با انتقال نقطه نشدنی فعلی به سمت یک نقطه ثابت اسلیتر با طول گامی که به‌آسانی قابل محاسبه است.

به‌ویژه، الگوریتم موسوم به تولید قید نقطه درونی در [۱۹۲] با الهام از روش ارائه‌شده در [۱۸۲]، با انتخاب یک نقطه در نزدیکی مسیر مرکزی P_k و افزودن به قیدهای نقض‌شده P_k ، گسسته‌سازی فعلی P_k (به‌عنوان یک مسئله دوگان مسئله معین LO در چهارچوب استاندارد مثلاً D_k تعبیر شد) از مسئله P را به‌روزرسانی می‌کند، سپس بعد کامل مجموعه شدنی جدید F_{k+1} بهبود داده می‌شود و مسیر مرکزی به‌روز درمی‌آید. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که پارامتر جریمه به اندازه کافی کوچک شده باشد، یعنی شکاف دوگانی به صفر نزدیک شود. این الگوریتم نقاط شدنی مسئله P را تولید نمی‌کند (که در نتیجه یک روش نقطه درونی نخواهد بود) ولی پس از تولید تعداد متناهی قید به یک جواب ε -بهینه خواهد رسید. با این فرض که مسئله P پیوسته و F با بعد کامل و کران‌دار است پژوهشگران کران‌های پیچیدگی را برحسب تعداد گام‌های نیوتن موردنیاز و تعداد کل قیدهای موردنیاز برای همگرایی کل الگوریتم ارائه داده‌اند.

روش‌های برش صفحه و گسسته‌سازی از نقص ذکرشده پیشین برخوردار هستند. همگرایی روش‌های صفحه برش مرکزی به پیوستگی مسئله P همراه با کران‌دار بودن مجموعه S ، یعنی $c \in \text{int } M$ نیاز دارد. به‌علاوه، الگوریتم تولید قید نقطه درونی نیازمند فرض قوی‌تر است و آن این است که مجموعه F یک بدنه محدب باشد (یعنی یک مجموعه فشرده محدب با بعد کامل)، یعنی نوک‌دار بودن $\text{cl } K$ (یعنی شامل هیچ

خطی نباشد). به یاد آورید که مخروط‌های M و $cl K$ برحسب داده‌ها مشخص می‌شوند. تمامی این شرایط در مسئلهٔ مربوط به مثال ۱۰۱ برقرارند. در پایان، روشن شد که اجرای کارای روش‌های صفحهٔ برش از نظر محاسباتی سریع‌تر از روش گسسته‌سازی به‌وسیلهٔ شبکه‌های مربوطه است، اما به فرض‌های قوی‌تر نیاز دارد.

۳-۳-۱ روش‌های کاهش

روش‌های کاهش که قبلاً از تقریب چبیشف شناخته شده بود، یک دستگاه غیرخطی حاصل از شرایط بهینگی را به‌جای مسئلهٔ P قرار می‌دهد.

با توجه به شرایط مناسب (قضیهٔ ۳-۱-۱) را به یاد آورید، اگر \bar{x} یک کمینه‌ساز مسئلهٔ P باشد، آنگاه شاخص‌هایی مانند $\bar{t}_j \in T(\bar{x})$ ، $j = 1, \dots, q(\bar{x})$ ، با $q(\bar{x}) \in \mathbb{N}$ وابسته به \bar{x} و مضارب نامنفی مانند $\bar{\lambda}_j$ ، $j = 1, \dots, q(\bar{x})$ ، موجود است به طوری که داشته باشیم:

$$c = \sum_{j=1}^{q(\bar{x})} \bar{\lambda}_j a(\bar{t}_j).$$

همچنین، فرض می‌کنیم یک شرحی از $T \subset \mathbb{R}^m$ به صورت

$$T = \{t \in \mathbb{R}^m : u_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}, \quad (10-1)$$

موجود باشد که u_i ، $i = 1, \dots, m$ ، هموار است.

مشاهده می‌شود که $q(\bar{x})$ عبارت است از تعداد کمینه‌های جامع مسئلهٔ زیرتراز $Q(\bar{x})$ که از $\nu(Q(\bar{x})) = 0$ به دست می‌آید. در این حالت داریم $\bar{t}_j \in T(\bar{x})$ اگر و تنها اگر \bar{t}_j عبارت باشد از یک کمینه‌ساز مسئلهٔ زیرتراز (متناهی) در \bar{x} به شکل

$$Q(\bar{x}) : \inf_{t \in T} \langle a(t), \bar{x} \rangle - b(t)$$

$$\text{s.t. } u_i(t) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

در این صورت، با چند شرط کیفیت قیدی، از قضیهٔ رایج KKT نتیجه می‌شود که مضارب نامنفی مانند $\bar{\theta}_i^j$ ، $i = 1, \dots, m$ ، موجود هستند به طوری که داشته باشیم:

$$\langle \nabla_t a(\bar{t}_j), \bar{x} \rangle - \nabla_t b(\bar{t}_j) = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^j \nabla_t u_i(\bar{t}_j) \quad (11-1)$$

$$\bar{\theta}_i^j u_i(\bar{t}_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

در یک حالت معمولی که T عبارت باشد از یک بازه مانند $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ، $u_1(t) = t - \alpha$ ، $m = 2$ ، $u_2(t) = \beta - t$ چنین خواهد شد:

$$\left\langle \frac{da(\bar{t}_j)}{dt}, \bar{x} \right\rangle - \frac{db(\bar{t}_j)}{dt} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^j \nabla_t u_i(\bar{t}_j)$$

گام k : با یک نقطه مفروض مانند x_k (لژیومی ندارد شدنی باشد) شروع کنید.

۱. مقدار $q(x_k)$ را برآورد کنید.

۲. N_k گام از یک روش شبه‌نیوتن (مربوط به دستگاه‌های معادلات) را برای

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \sum_{j=1}^{q(x_k)} \lambda_j a(t_j) \\ \langle a(t_j), x \rangle = b(t_j), \quad j = 1, \dots, q(x_k) \\ \langle \nabla_t a(t_j), x \rangle - \nabla_t b(t_j) = \sum_{i=1}^m \theta_i^j \nabla_t u_i(t_j), \quad j = 1, \dots, q(x_k) \\ \theta_i^j u_i(t_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, q(x_k) \end{array} \right. \quad (12-1)$$

(با مجهولات $x, t_j, \lambda_j, \theta_i^j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, q(x_k)$) به‌کار ببرید که به نقاط تکرار $x_{k,l}, l = 1, \dots, N_k$ منجر می‌شود.

۳. قرار دهید $x_{k+1} = x_{k,N_k}$ و $k = k + 1$.

روش‌های کاهش‌ی دو عیب دارند: نخست اینکه به فرض‌های قوی روی P (همواری توابع توصیف‌کننده F و T) نیاز دارند، فشردگی T ، وجود برخی نقطه اسلیتر (به‌طوری‌که P در FMCQ صدق کند) و دوم اینکه آن‌ها به جواب تقریبی به‌اندازه کافی دقیق (۱۲-۱) نیاز دارند تا شروع کنند. حسن روش‌های کاهش‌ی عبارت است از رفتار مجانبی سریع (چون از روش شبه‌نیوتن استفاده می‌کنند). یک راهبرد مناسب مرکب است از ترکیب آن در یک روش دو مرحله‌ای، مزیت گسسته‌سازی که ممکن است یک برآورد از $q(x_k)$ و یک جواب تقریبی از (۱۲-۱) و کاهش‌ی را به‌دست دهد تا این جواب تقریبی را بهبود بخشد. متأسفانه، هیچ قضیه نظری وجود ندارد که از تصمیم‌گیری در رفتن از مرحله ۱ (کاهش‌ی‌سازی) به مرحله ۲ را پشتیبانی کند و محاسبه یک نقطه مناسب شروع برای مرحله ۲، درعمل دشوار است.

مثال ۳۰.۱ می‌خواهیم روش‌های اشاره‌شده قبلی را برای مسئله ساده LSIO از مثال ۱۰.۱ (ب) به صورت

$$P : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} -x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$x_1 \geq 0 \quad (t = 2), \quad x_2 \geq 0 \quad (t = 3).$$

را به‌کار ببریم. دنباله شبکه‌ها به صورت $k \in \mathbb{N}, T_k = \{2, 3\} \cup \{\frac{\pi i}{4k} : i = 0, \dots, 2k\}$ را در نظر بگیریم. در این صورت داریم $k \in \mathbb{N}, \frac{\pi}{4} \in T_k$ و جواب بهینه یکتا از مسئله $P(T_k)$ عبارت است از $x_k = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ با $a_t^T x_k \geq b_t - \varepsilon$ در گام ۱ با $\varepsilon > 0$ متوقف می‌شود. به روش دیگر، اگر دنباله با یک دقت دلخواه مانند $\varepsilon > 0$ در گام ۱ با $x_1 \in S$ متوقف می‌شود. به روش دیگر، اگر دنباله بهینه حاصل از روش گسسته‌سازی شبکه عبارت است از

$$x_k = \left[\sin \left(\left(\frac{4k+1}{8k+4} \right) \pi \right) \right]^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \in S,$$

با $k \in \mathbb{N}, \|x_k\|_2 > 1$ که در نتیجه، این الگوریتم پس از تعداد متناهی گام با برخی نقطه نشدنی پایان می‌یابد.

اکنون، روش صفحه برش مرکزی هندسی را به‌کار می‌بریم. قرار دهید $Q_0 = [0, 1]^2 \supset F$ $x_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in F$ بنابراین اولین برش عبارت است از برش تابع هدف و

$$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

که مرکز هندسی آن در مرکز درونی آن

$$x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \in S.$$

قرار دارد و الگوریتم با یک گام، بدون توجه به دقت انتخاب‌شده، پایان می‌یابد.

فرض کنید روش صفحه برش مرکز تحلیلی با تابع مانع لگاریتمی و یک چندوجهی همان چندوجهی کران‌دار آغازین قبلی به‌کار رود، $Q_0 = [0, 1]^2$ ، x_0 و Q_1 همانند قبل باشند، ولی اکنون داشته باشیم $x_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \in F$ در این صورت خواهیم داشت:

$$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq \frac{4}{3}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, \quad x_2 = \left(\frac{7}{9}, \frac{7}{9} \right) \notin F$$

و بنابراین برش بعدی عبارت است از یک برش شدنی. چون عمیق‌ترین برش متناظر است با $t = \frac{\pi}{4}$ ، پس خواهیم داشت:

$$Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \geq x_1 + x_2 \geq \frac{4}{3}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, x_3 = (0.68559, 0.68559) \in F$$

و الی آخر. مشاهده می‌شود که این الگوریتم نقاط تکرارشدنی و نشدنی را تولید می‌کند که در نتیجه می‌تواند در یک جواب شدنی تقریبی تولیدشده پایان یابد.

در ارتباط با روش کاهش، باید $T = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{2, 3\}$ را همانند $(1-1)$ نمایش بدهیم، مثلاً $T = \{t \in \mathbb{R} : u(t) \geq 0\}$ با $u(t) = -t(t - \frac{\pi}{4})(t - 2)^2(t - 3)^2$ ، و برآورد تعداد شاخص‌های فعال در کمینه، برای حالت ما ۱ یا ۲ (تعداد بیشینه شاخص‌های فعال در مرز F). اگر قرار دهیم $q(x) = 1$ ، آنگاه $(1-1)$ به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 1) = \lambda(\cos t, \sin t) \\ (\cos t)x_1 + (\sin t)x_2 = 1 \\ (\sin t)x_1 - (\cos t)x_2 = \theta \frac{du}{dt} \\ \theta u(t) = 0 \end{array} \right. \quad (13-1)$$

درخواست آمد. به آسانی می‌توان بررسی کرد که آیا $(x_1, x_2, t, \lambda, \theta) = (\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{\pi}{4}, 2, 0)$ یک جواب برای $(13-1)$ است یا نه. با روش نیوتن و شبه‌نیوتن دنباله‌هایی در \mathbb{R}^5 سریع (لااقل زیرخطی) به دست می‌آید که به این نقطه همگرا می‌شود با این شرط که یک جواب تقریبی در دست باشد (متأسفانه داشتن چنین جوابی یک کار دشوار است).

۴-۳-۱ روش‌های نقطه شدنی

با روش‌های نقطه شدنی، دنباله‌هایی مانند $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ از نقاط شدنی تولید می‌شود به طوری که دنباله نظیر تصویرها به وسیله تابع هدف $\{c^T x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ناصعودی هستند. اشکال اصلی این روش عبارت است از حجم محاسبات موردنیاز برای یافتن مجموعه بهینه مسئله زیرتراز در نقطه تکرار فعلی x_k : یعنی حل

$$Q(x_k) = \min_{t \in T} s(x_k, t) = \min_{t \in T} \{a(t), x_k\} - b(t).$$

درحقیقت، محاسبهٔ تمامی کمینه‌های جامع $Q(x_k)$ تنها وقتی ممکن است که T عبارت باشد از یک بازهٔ فشرده در \mathbb{R} و

$$a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot), b(\cdot) \in C^\infty(T)$$

(دستهٔ توابع تحلیلی روی T که شامل توابع چندجمله‌ای‌هاست) که P را در این حالت تحلیلی می‌گویند. روش‌های نقطهٔ شدنی رایج یک جهت شدنی در نقطهٔ تکرار فعلی x_k را از حل یک مسئلهٔ مشخص LO به‌دست می‌آورد، نقطهٔ تکرار بعدی که حاصل از تشکیل یک جستجوی خطی در این جهت است، تابع هدف را آنقدر بهبود می‌بخشد تا اینکه یک نقطه مانند $x_{k+1} \in \text{bd}F$ به‌دست آید. الگوریتم شبه-سادک اندرسون و لويس [۵] عبارت است از گام‌های پاک‌سازی یک در میان (با به‌دست آوردن یک نقطهٔ فرین F از نقطهٔ تکرار فعلی) و گام‌های جستجوی خطی که یک نقطهٔ $\text{bd}F$ را به‌دست می‌آورد. این روش برای مسئله‌هایی که به‌صورت بلوکی تحلیلی باشند، در [۱۶۹] تطبیق داده شد. همگرایی دنباله‌های حاصل از روش شبه-سادک به یک جواب بهینهٔ مسئلهٔ P تضمین نمی‌شود. اشتین و استیل [۲۱۵] یک روش نقطهٔ درونی را برای برنامه‌ریزی‌های نیمه-نامتناهی (لزومی ندارد خطی باشد) پیشنهاد کردند که نسخهٔ LSIO از آن به این شرط نیاز دارد که دستگاه قیدی که به‌وسیلهٔ زیردستگاه‌هایی به‌شکل $\{ \langle a(t), x \rangle \geq b(t), t \in T \}$ تشکیل شده باشد که در آن T عبارت است از یک زیرمجموعهٔ محدب از برخی فضای برداری و تابع $\langle a(t), x \rangle - b(t) \mapsto t$ باید خطی باشد (یک فرض قوی). فلوداس و اشتین [۸۴] یک روش نقطهٔ شدنی کارا را معرفی کردند که اندیشهٔ زیربنایی آن متشکل است از جایگزینی مسئلهٔ سخت کمکی جامع $Q(x_k)$ به‌وسیلهٔ یک محدب‌سازی مناسب تحت فرض‌های ضعیف‌تر از فرض‌های در [۱۶۹] (ضرایب نامساوی‌های هر بلوک باید در C^2 به‌جای C^∞ باشند).

یادآوری ۱-۳-۸ (روش‌های شبه-سادک). در مقاله‌های راه‌گشای [۵۹، ۶۰] مشاهده شد که نقاط فرین F^D را می‌توان با یک روش جبری (همانند LO) شناسایی کرد. روش سادک نظیر برای مسئلهٔ D در [۹۰] به زبان جبری و در [۹۸] به زبان هندسی شرح داده شد. یک تعمیم برای فضاها با بعد نامتناهی دلخواه در [۲۱۲] پیشنهاد شده است. روش‌های سادک مربوط به مسئلهٔ P تنها تحت فرض‌های قوی روی قیدها امکان‌پذیر است. یک روش پاک‌سازی مربوط به مسئله‌های تحلیلی LSIO در [۵] پیشنهاد شد. روش موسوم به روش پیوندی در همان مقاله پیشنهاد شد که یک در میان گام‌های پاک‌سازی را با جستجوی خطی انجام می‌دهد تا دنباله‌های نامتناهی در F را با تصویرهای ناصعودی به‌وسیلهٔ تابع هدف به‌دست آورد. یک روش سادک برای یک دسته از مسئله‌های LSIO در [۶] پیشنهاد شد که مجموعهٔ شدنی آن شبه

چندوجهی است (یعنی مجموعه‌ای که اشتراک آن با چندوجهی‌های کران‌دار یا تهی یا یک چندوجهی کران‌دار باشد). مزیت روش‌های شبه-سادک در کلی بودن آن‌هاست (روش سادک دوگان به پیوستگی نیاز ندارد) و اشکال‌های متداول آن‌ها عبارت‌اند از فقدان قضیه‌های همگرایی قابل‌بررسی در عمل و نیاز آن‌ها به جواب‌های دقیق زیرمسئله‌ها (نیاز غیرواقعی).

بدون فرض پیوستگی، مسئله‌های LSIO را می‌توانستیم به‌وسیله تطابق آن با شیوه تصادفی معرفی شده در [۳۳] نیز تقریب کنیم.

یادآوری ۱-۳-۹ (حل‌کننده‌های موجود). نرم‌افزار یکتای موجود برای به‌گزینی نیمه-نامتناهی (خطی و غیرخطی)، *NSIPS*^۱ از بسته نرم‌افزاری SIPAMPL استفاده می‌کند که امکان AMPL را برای پایگاه داده SIPAMPL تعمیم می‌دهد (برای کسب اطلاعات بیشتر، به [۲۲۳] و راهنمای SIPAMPL^۲ مراجعه کنید). NSIP روی سیستم *NEOS*^۳ قابل‌دستیابی است که شامل چهار حل‌کننده، حل‌کننده گسسته‌سازی، حل‌کننده جریمه‌ای، حل‌کننده برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و حل‌کننده نقطه درونی نشدنی شبه-نیوتن است. خانواده دیگری از حل‌کننده‌های قابل‌دستیابی برای همه مربوط به به‌گزینی نامتناهی (خطی و محدب) براساس الگوریتم هموارسازی جریمه‌ای رمز در [۸] و پیاده‌سازی آن در [۷] در دست آماده‌سازی است. توضیحات ساده‌کارترین روش‌های LSIO (همچنین برای به‌گزینی مسئله‌های نیمه-نامتناهی) همراه با توضیحات نظیر به‌وسیله یکی از مؤلفین در راهنمای به‌گزینی *SEOS*^۴ اضافه شده است.

در رابطه با نرم‌افزار تجاری، نسخه ۲ از جعبه ابزار به‌گزینی متلب (MATLAB)^۵ یک حل‌کننده مربوط به به‌گزینی نیمه-نامتناهی با $T \subset \mathbb{R}$ یا $T \subset \mathbb{R}^2$ موسوم به *fseminf* (در نسخه ۱۰۵) را دربردارد که استفاده از آن در آموزش متلب^۵ شرح داده شده است. مسئله‌های LSIO از طریق گسسته‌سازی با *fseminf* حل می‌شوند.

یادآوری ۱-۳-۱۰ (کاربردهای LSIO). از LSIO ابتدا به‌عنوان یک وسیله مفهومی در نظریه اقتصاد، بازی‌ها یا هندسی استفاده شده است. دوم اینکه به‌عنوان یک وسیله محاسباتی در تقریب تابعی، آمارهای استوار یا به‌گزینی نیمه-نامتناهی استفاده شده است و سوم اینکه به‌عنوان یک وسیله قالب‌بندی برای

1. <http://www.norg.uminho.pt/aivaz/nsips.html>

2. <http://plato.la.asu.edu/ftp/sipampl.pdf>

3. <http://www.neos-server.org/neos/>

4. <http://www.neos-guide.org/algorithms>

5. http://serdis.dis.ulpgc.es/~ii-its/MatDocen/laboratorio/manuales/OPTIM_T.B.PDF

مسئله‌های به‌دست آمده در مهندسی، مراقبت بهداشتی یا طیف‌سنجی استفاده شده است. بسیاری از کاربران با نوع سوّم کاربرد دچار مشکلاتی در به‌کارگیری شدند چون یا نرم‌افزار در دسترس همه نبود (معمولاً مؤلفین احساس کردند که از روش‌های پیاده‌سازی شده استاندارد یا از روش عددی موردی استفاده شود). برخی از زمینه‌ها را در ادامه می‌آوریم که LSIO در حداقل یکی از سه روش در آن به‌کاربرده شده است. یک گردایه وسیع از منابع چاپ‌شده قبل از ۲۰۱۰ را می‌توان در آدرس

<http://www.home.math.utwente.nl/stillgj/sip/lit-sip.pdf>

یافت.

- Environmental engineering [90, 102, 125, 126, 129, 142, 237].
- Optimal design [155, 231].
- Telecommunication networks [91].
- Control problems [90, 91].
- Economic theory [91].
- Finance [65, 162, 167, 186, 196, 224].
- Game theory [91].
- Spectrometry [61].
- Health care [192].
- Probability and Statistics [2, 22, 23, 80, 81, 91, 102].
- Machine Learning [18, 184, 185, 193, 194, 213, 217].
- Data envelopment analysis [91, 102].
- Functional approximation [90, 102, 132, 163, 218].
- Computational linear algebra [102].
- Linear functional equations [90, 102].
- Convex geometry [91, 149, 198].
- Location problems [102].
- Robust optimization [91, 178].
- Semidefinite optimization [91, 164].

۴۱ مقدماتی در باب به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی

- Geometric optimization [102].
- Combinatorial optimization [164].

مسئله‌های به‌گزینی خطی نقیینه-نامتناهی

در اکثر کاربردهای به‌گزینی نیمه-نامتناهی، LSIO، بخشی از داده‌ها، اگر نه همه آن‌ها، به صورت یک پیامد خطای اندازه‌گیری‌ها یا برآوردهای نقیینه هستند. این نقیینه حاصل مربوط به داده‌ها در زمینه‌هایی مانند مهندسی محیط زیستی، ارتباطات راه دور، مالی، طیف سنجی، مراقبت‌های بهداشتی، آمار، یادگیری ماشین یا تحلیل پوششی داده‌ها هستند که تنها چند مورد کاربردی هستند که برای اطلاع، تعدادی از آن‌ها در یادآوری ۱-۳-۱۰ فهرست شده‌اند در این فصل، یک مسئله نقیینه داده‌شده به شکل

$$P_{\circ} : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad (1-2)$$

$$\text{s.t. } a_t^T x \geq b_t, \quad t \in T,$$

را در نظر می‌گیریم که پیامد چندین بار پریشیده شدن مسئله نمادین

$$\bar{P} : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{c}^T x \quad (2-2)$$

$$\text{s.t. } \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T.$$

است. با وجود این، اکثر پژوهشگران با محدود کردن خودشان به حل یک نمونه ویژه از P_{\circ} ، بدون تجزیه و تحلیل بیشتر، از این واقعیت چشم‌پوشی می‌کنند. چون یک مسئله به‌گزینی نقیینه تنها در چهارچوب قالب‌های ویژه می‌تواند تجزیه و تحلیل و یا حل شود، پس در این فصل می‌خواهیم به کاربران بالقوه از LSIO کمک کنیم تا قالب‌های مناسب را از طریق توصیف و مقایسه قالب‌های مختلف و مورد بحث قرار دادن یک مسئله مهم نقیینه LSIO انتخاب کنند. در بخش بعدی، پنج نمونه مختلف برای بررسی نقیینه

معرفی می‌شوند که عبارتند از: تصادفی، فازی، بازه‌ای، استوار و شیوه‌های پارامتری. تقریباً همه نوشته‌های موجود درباره مسئله نقینی LSIO روی دو شیوه آخری تمرکز دارند.

۱-۲ پنج نمونه برای بررسی مسئله‌های نقینی LSIO

۱-۱-۲ شیوه تصادفی

فرض کنید داده‌های نقینی عبارت باشند از متغیرهای تصادفی با یک توزیع احتمالی معلوم. از برخورداری هریک از این ویژگی‌ها به وسیله این متغیرهای تصادفی یک مسئله یقینی LSIO به نام وضعیت به دست می‌آید. اگرچه به دست آوردن توزیع احتمالی مقدار بهینه در عمل غیرممکن است، اما توزیع تجربی آن را می‌توان با حل یک نمونه ساده از وضعیت‌ها از طریق شبیه‌سازی تقریب کرد.

قالب‌های احتمالی عبارتند از یک زیردسته از قالب‌های تصادفی شامل مسئله‌های به‌گزینی با یک تابع هدف یقینی و قیدهایی با احتمال رخدادهایی که برحسب داده‌های تصادفی بیان می‌شوند. قالب‌های فازی و قالب‌های بازه‌ای را می‌توان به صورت انواع قالب‌های تصادفی در نظر گرفت.

۲-۱-۲ شیوه فازی

اکنون برخی از مفاهیم استاندارد در مورد توابع یک متغیره را یادآوری می‌کنیم که در رویکردهای فازی و پارامتری استفاده می‌شود. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی و \mathcal{N}_x عبارت باشد از خانواده همسایگی‌های نقاط $x \in X$ و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. به یاد بیاورید که یک تابع مانند f با مقدار متناهی حول $\bar{x} \in X$ ، در آن نقطه پیوسته است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی مانند $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in V$ داشته باشیم $f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon$. این مفهوم را می‌توان به دو مفهوم ضعیف‌تر تقسیم کرد:

- تابع f در نقطه $\bar{x} \in X$ نیمه-پیوسته پایینی (به اختصار ISC) است اگر برای هر $\lambda < f(\bar{x})$ یک همسایگی مانند $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in V$ داشته باشیم $\lambda < f(x)$ ؛ تابع f نیمه-پیوسته پایینی است اگر در هر نقطه مانند x نیمه-پیوسته پایینی باشد^۱.

- تابع f در نقطه $\bar{x} \in X$ نیمه-پیوسته بالایی (به اختصار USC) است اگر برای هر $\lambda > f(\bar{x})$ یک همسایگی مانند $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in V$ داشته باشیم $\lambda > f(x)$ ؛ تابع f نیمه-پیوسته بالایی است هرگاه در هر نقطه مانند x نیمه-پیوسته بالایی باشد.

^۱ در کتاب \mathcal{N}_x نوشته شده است که به نظر مترجم اشتباه است

به‌آسانی ثابت می‌شود که f یک تابع به شکل lsc است اگر و تنها اگر f epi بسته باشد. این حالت، حالت تابع حاشیه‌ای g است که در (۳-۱) تعریف شده است زیرا $\text{epi } g$ عبارت است از اشتراک زیرفضاهای بسته. پوسته پایینی lsc از تابع f عبارت است از بزرگ‌ترین قسمت lsc از تابع f ، یعنی تابعی که بالای آن برابر $\text{cl epi } f$ است. روشن است که تابع f در نقطه $\bar{x} \in X$ نیمه-پیوسته بالایی usc است اگر و تنها اگر قرینه آن، $-f$ در نقطه $\bar{x} \in X$ نیمه-پیوسته پایینی باشد. بنابراین، تابع f نیمه-پیوسته بالایی usc است اگر و تنها اگر f hypo بسته باشد و پوسته usc از تابع f (یعنی کوچک‌ترین قسمت usc از f) عبارت باشد از تابعی که زیرمنحنی نمایش آن برابر باشد با $\text{cl hypo } f$. به‌علاوه، اگر تابع f با مقدار متناهی باشد، آنگاه پیوسته خواهد بود اگر و تنها اگر f epi و f hypo بسته باشند که در نتیجه $\text{gph } f$ بسته خواهد بود. همان‌طور که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{وگرنه} \end{cases} \quad (3-2)$$

نشان می‌دهد، عکس آن درست نیست مگر اینکه تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ کران‌دار باشد.

اینک فرض کنید $X = \mathbb{R}^n$. به یاد آورید که تابع f مقعر (سره، شبه‌مقعر) است اگر $-f$ محدب (به‌ترتیب سره، شبه‌محدب) باشد. یعنی موقعی که f hypo محدب باشد (f hypo عبارت است از یک مجموعه ناتهی بدون خطوط عمودی، مجموعه‌های زیرتراز f به‌ترتیب محدب هستند). دامنه یک تابع مقعر مانند f را همانند دامنه تابع محدب $-f$ تعریف می‌کنیم، یعنی مجموعه محدب $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ در نقطه f مقعر تابع f در نقطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ به همین روش، زیردیفرانسیل مقعر تابع f در نقطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ را به صورت متقارن زیردیفرانسیل محدب تابع محدب $-f$ نسبت به مبدأ تعریف می‌کنیم، یعنی مجموعه محدب بسته

$$\partial f(\bar{x}) := \{u \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(\bar{x}) + u^T(x - \bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

یک مجموعه فازی مانند A تعریف شده در یک فضای توپولوژیکی مانند X (به نام مجموعه جهانی) به‌وسیله یک تابع usc مانند $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ ، به نام تابع درجه عضویت A مشخص می‌شود که تصویرهای آن $\mu_A(x)$ ، $x \in X$ ، نشان‌دهنده درجه عضویت x در A است (می‌توان به μ_A همانند همتهای فازی یک توزیع احتمالی روی X نگاه کرد). یک عدد فازی مانند A عبارت است از یک مجموعه فازی که در \mathbb{R} تعریف می‌شود و تابع عضویت آن شبه‌مقعر است و در $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_A(x) = 1$ صدق می‌کند.

مجموعه اعداد فازی را با \mathfrak{F} نشان می‌دهیم. حاصل ضرب αA که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $A \in \mathfrak{F}$ عبارت است از عدد فازی با تابع درجه عضویت $\mu_{\alpha A}(x) := \mu_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ ، اگر $\alpha \neq 0$ ، و μ_{0A} عبارت است از تابع مشخصه χ^0 از 0 (یعنی $\chi^0(0) = 1$ و گرنه $\chi^0(x) = 0$)، درحالی‌که مجموع $\text{sum } A + B$ ، $A, B \in \mathfrak{F}$ ، یک عدد فازی است که درجه عضویت آن برابر است با

$$\mu_{A+B} := \min_{x=u+v} \{\mu_A(u), \mu_B(v)\}.$$

بنابراین، ترکیب خطی $a^T x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ و $a_i \in \mathfrak{F}$ ، $x_i \in \mathbb{R}$ و $1 \leq i \leq n$ ، به استقرا خوش‌تعریف است. مشاهده می‌شود که با توجه به تعریف عدد فازی، به ازای $A \in \mathfrak{F}$ و یک تراز $\lambda \in [0, 1]$ ، مجموعه زیرتراز $\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \lambda\}$ عبارت است از یک مجموعه محدب که در نتیجه می‌توانیم بنویسیم $\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \lambda\} = [A_\lambda^l, A_\lambda^u]$ ، که در آن $A_\lambda^l, A_\lambda^u \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. اعداد فازی را می‌توان به روش‌های مختلف با هم مقایسه کرد. روش رایج عبارت است از تعریف $A \succeq B$ هرگاه برای هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $A_\lambda^l \geq B_\lambda^l$ و $A_\lambda^u \geq B_\lambda^u$ ، اما در این صورت \succeq فقط یک ترتیب جزئی روی \mathfrak{F} است. رابطه‌های دودویی کلی روی \mathfrak{F} را می‌توان به وسیله اندازه‌های مرکزیت توابع عضویت به نام توابع رتبه‌بندی تعریف کرد. برای نمونه، با تابع رتبه‌بندی روبنس^۱ به صورت $R(A) = \frac{1}{2} \int_0^1 (A_\lambda^l + A_\lambda^u) d\lambda$ (میانگین مرکزهای مجموعه‌های زیرتراز μ_λ) می‌توان تعریف کرد $A \succeq B$ به شرطی که داشته باشیم $R(A) \geq R(B)$ ، چون برای هر $A \in \mathfrak{F}$ داریم $R(A) = 0$ به طوری که $\mu_{A_\alpha}(x) = \exp(-\alpha x^2)$ ، $\alpha > 0$ ، که در نتیجه رابطه دودویی دومی، \succeq ، بازتابی و تریاست ولی پادمتقارن نیست^۲.

تعریف * (مترجم). فرض کنید $A = [A^l, A^u]$ و $B = [B^l, B^u]$. اگر $A^l > B^u$ ، آنگاه با درجه یک داریم $A > B$ ، و گرنه با درجه $\frac{A^l - B^l}{B^u - B^l}$ خواهیم داشت $A > B$. این تعریف در حقیقت مربوط به بخش بازه‌ای نیز است که در آنجا تکرار نخواهد شد و از این رو نوشته اصلی کتاب را بدون هیچ تغییری برای حفظ امانت آورده‌ایم.

بدین ترتیب، پس از انتخاب رابطه مناسب دودویی \succeq روی \mathfrak{F} ، نامعادله خطی $a^T x \succeq b$ معنی دقیق خواهد داشت که در آن $1 \leq i \leq n$ ، $a_i, b \in \mathfrak{F}$. اینک مسئله این است که چگونه به جای یک

1. Roubence

۲. نکته. نوشته‌های بعد از «چون برای ...» فقط برای حفظ امانت نوشته شده است که از دیدگاه مترجم نادرست به نظر می‌آید و به علاوه به نظر می‌آید که روش مقایسه دو عدد فازی ارائه شده درست نباشد، زیرا اگر $A_\lambda^l \geq B_\lambda^u$ نشان‌دهنده $A \succeq B$ باشد آنگاه عدد فازی A درست در سمت راست عدد فازی B قرار خواهد گرفت. بنابراین شاید بهتر باشد تعریف * را بپذیریم (مترجم).

نامعادله مانند $a'x \succeq b$ ، یک دستگاه (احتمالاً غیرخطی) قطعی (دستگاه معمولی، به زبان فازی) قراردهیم به طوری که در نظر داشته باشیم که در حالت کلی داشته باشیم $(A+B)^\lambda \neq (A)^\lambda + (B)^\lambda$ ، $(A+B)^\mu \neq (A)^\mu + (B)^\mu$ و $R(A+B) \neq R(A) + R(B)$ که با تعریف یک تابع عضویت موردی برای $a^T x$ امکان‌پذیر است. داده عددی نقینی در P با شیوه فازی طرح شده در اینجا به صورت یک عدد فازی با توابع معلوم عضویت تعبیر می‌شود و هدف مرکب است از محاسبه یک بردار مانند $\bar{x} \in F$ (مجموعه جواب دستگاه فازی $\{a_i^T x \succeq b_i, t \in T\}$) به طوری که نامساوی فازی $c^T x \succeq c^T \bar{x}$ برای هر $x \in F$ برقرار باشد. موقعی که اعداد فازی با ترتیب جزئی تعریف شده از طریق مجموعه‌های زیرتر از مقایسه می‌شوند، دستگاه فازی دوّمی اغلب ناسازگار خواهد بود.

۲-۱-۳ شیوه بازه‌ای

فرض کنید هر نمونه از داده عددی در P دارای مقداری در یک بازه معلوم (این فرض ضعیف‌تر از توزیع یکنواخت روی بازه نظیر است) باشد. به عبارت دیگر، هر داده عددی در P به صورت یک بازه مانند $A^\pm = [A^l, A^u] \in \mathbb{R}$ ، تعبیر می‌شود.

دسته بازه‌های فشردده در \mathbb{R} را با $\tilde{\mathcal{I}}$ نشان دهید. ضرب $\alpha \in \mathbb{R}$ در $A^\pm \in \tilde{\mathcal{I}}$ را با $\alpha A^\pm := [\alpha A^l, \alpha A^u]$ ، اگر $\alpha \geq 0$ ، وگرنه با $\alpha A^\pm := [\alpha A^u, \alpha A^l]$ نشان دهید. به همین روش، حاصل جمع $A^\pm, B^\pm \in \tilde{\mathcal{I}}$ را به صورت $A^\pm + B^\pm := [A^l + B^l, A^u + B^u]$ تعریف کنید. با این روش، برای اعداد بازه‌ای $a_1^\pm, \dots, a_n^\pm \in \tilde{\mathcal{I}}$ و $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ، ترکیب خطی $\sum_{i=1}^n x_i a_i^\pm$ عبارت است از یک عضو خوش‌تعریف در $\tilde{\mathcal{I}}$. بنابه تعریف می‌نویسیم $A^\pm \succcurlyeq B^\pm$ هرگاه $A^l \geq B^l$ و $A^u \geq B^u$ ، « \succcurlyeq » یک ترتیب جزئی را روی $\tilde{\mathcal{I}}$ تعریف می‌کند که در نتیجه نامساوی‌های $\sum_{i=1}^n x_i a_i^\pm \succcurlyeq b^\pm$ و $\sum_{i=1}^n x_i c_i^\pm \geq \bar{x}_i c_i^\pm$ نیز دارای معنی دقیق هستند.^۱

^۱ نکته: [دیدگاه دیگر در مقایسه با دودعد بازه‌ای (یا دودعد فازی)]. این تعریف برای مقایسه دودعد بازه‌ای نادرست به نظر می‌آید و بهتر است به شکل $A^l \geq B^u$ یا به صورت $A^l \leq \frac{B^l + B^u}{2}$ همراه با $B^u \leq \frac{A^l + A^u}{2}$ تعریف شود. البته می‌توان نسبت به طول بازه B ، یعنی $\frac{A^l - B^l}{B^u - B^l}$ به عنوان درجه بزرگ‌تری A در مقایسه با B تعریف شود (مترجم).

بنابراین، هدف عبارت است از تعیین یک بردار مانند $\bar{x} \in F$ (مجموعه جواب دستگاه بازه‌ای $\sum_{i=1}^n x_i c_i^\pm \geq \sum_{i=1}^n \bar{x}_i c_i^\pm$ داشته باشیم $x \in F$ هر $\{ \sum_{i=1}^n x_i a_{it}^\pm \geq b_t^\pm, t \in T \}$ به‌طوری‌که برای هر مقدار بهینه $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i c_i^\pm$ در این قالب نیز یک بازه است.

۲-۱-۴ شیوه استوار

با این شیوه یک چهارچوب یقینی برای بررسی مسئله‌های برنامه‌ریزی ریاضی تحت فرض نقیینی به‌دست می‌آید. قالب‌های به‌گزینی استوار، برخلاف توزیع‌های احتمالی مبتنی بر مجموعه‌ها (توابع عضویت، بازه‌ها) هستند که در شیوه‌های تصادفی (فازی، بازه‌ای) مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در قالب‌های استوار فرض بر این است که تمامی نمونه‌ها از داده به مجموعه‌هایی از پیش تعیین شده (نه الزاماً بازه‌ها یا جعبه‌ها) تعلق دارند، ولی اینک هدف مشکل است از کمینه کردن بدترین مقدار ممکن تابع هدف روی مجموعه نقاطی که برای هر نمونه ممکن از قیده‌ها شدنی باشند. درحقیقت، اگر تنها بردار هزینه c در P نقیینی باشد و مجموعه نقیینی عبارت باشد از $C \subset \mathbb{R}^n$ ، آنگاه قالب استوار هدف « $\inf c^T x$ » در P جایگزین « $\inf \sup_{c \in C} c^T x$ » می‌شود. ازسوی دیگر، موقعی که قید متناظر با شاخص $t \in T$ نقیینی، همراه با مجموعه نقیینی $U_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ باشد، آنگاه در قالب استوار، $a_t^T x \geq b_t$ در P را جایگزین دستگاه خطی نیمه-نامتناهی $\{ a^T x \geq b, (a, b) \in U_t \}$ می‌کنیم. در نتیجه، موقعی که نقیینی روی ضرایب ارزش و هم قیده‌ها تأثیر داشته باشد، با تعریف $U_t := \{ (a_t, b_t) \}$ به‌شرطی که قید $a_t^T x \geq b_t$ یقینی باشد، تصمیم‌گیرندگان خطرگریز، قالب به‌گزینی استوار (محض) به‌صورت

$$P_R : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{c \in C} c^T x$$

$$\text{s.t. } a^T x \geq b, (a, b) \in \bigcup_{t \in T} U_t,$$

را بر قالب‌های تصادفی، فازی، بازه‌ای و پارامتری ترجیح می‌دهند. آنچه کاربران از یک قالب به‌گزینی استوار انتظار دارند عبارت است از رام‌شدنی عددی و وجود چند هم‌تای خوشبینانه (مفهومی که در فصل ۳ با یک روش دقیق تعریف می‌شود) که از دوگانی به‌دست می‌آید که هر دو مسئله دارای مقدار بهینه یکسان باشند. صفت «قابل رام‌شدن» در برنامه‌ریزی خطی و محدب (متناهی) به این معنی است که یک مسئله معادل موجود است که الگوریتم‌های شناخته‌شده‌ای برای حل آن وجود دارد که مسئله در بدترین حالت زمان اجرایی را برحسب اندازه داده‌های ورودی در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند [۲۰]. در رابطه با مسئله نقیینی LSIO،

همانند این نوع از مسئله‌های به‌گزینی تقریباً همیشه سخت هستند، «رام‌شدنی» به‌اختصار به‌این معنی است که الگوریتمی وجود دارد که برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک جواب ε -بهینه را در «زمان معقول» به‌دست می‌آورد. تصمیم‌گیرندگان کم‌تر خطرگریز ممکن است یک قالب درهم را که ترکیب می‌کنند ترجیح دهند، مثلاً شیوه استوار نسبت به قیدها با قیده‌های احتمالی (فازی، بازه‌ای، پارامتری) را نسبت به تابع هدف ترکیب می‌کند. این قالب‌های درهم با تعبیر c به‌عنوان یک بردار تصادفی (فازی، بازه‌ای، و پارامتری) از P در (۱-۲) به‌دست می‌آید. می‌خواهیم به‌وجود یک جریان از کارهای مقایسه‌ای قالب‌های احتمالی و استوار مربوط به انواع خاصی از مسئله‌های به‌گزینی نقینی متناهی با داده‌های تصادفی اشاره کنیم که هدف اصلی آن عبارت باشد از تضمینی که تحت فرض‌های مناسب روی مجموعه‌های نقینی، هر جواب شدنی استوار در قیده‌های احتمالی با احتمال بالا صدق کند ([۲۰] و منابع در آن را ببینید).

۲-۱-۵ شیوه پارامتری

قالب‌های پارامتری براساس جا نشانیدن مسئله نمادین \bar{P} در (۲-۲)، مشخص شده به‌صورت سه‌تایی $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{\pi}$ در یک فضای مناسب توپولوژیکی از مسئله‌های پریشیده قابل قبول به نام فضای پارامترهای Π استوار است. معمولاً، توپولوژی روی Π متناظر است با برخی سنج از اندازه پریشیدگی‌های قابل قبول. اگر پریشیدگی‌ها باید، تعداد متغیرهای تصمیم n و مجموعه شاخص T را حفظ کند، آنگاه برای سهولت در اندازه‌گیری فاصله بین دو پارامتر $\pi_1 = (c^1, a^1, b^1) \in \Pi$ و $\pi_2 = (c^2, a^2, b^2) \in \Pi$ به‌وسیله جعبه فاصله تعمیم‌یافته به‌صورت

$$\begin{aligned} d(\pi_1, \pi_2) &:= \max \{ \|c^1 - c^2\|, \sup_{t \in T} \| (a_t^1, b_t^1) - (a_t^2, b_t^2) \| \} \\ &= \max \{ \|c^1 - c^2\|, d(\sigma_1, \sigma_2) \}, \end{aligned} \quad (۴-۲)$$

یک اتفاق نظر وجود داشته باشد که σ_1 و σ_2 در آن به‌ترتیب قید دستگاه‌های π_1 و π_2 هستند و $\|\cdot\|$ عبارت است از یک نرم دلخواه در \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^{n+1} . یک حالت ویژه مربوطه عبارت است از

$$d_\infty(\pi_1, \pi_2) := \max \{ \|c^1 - c^2\|_\infty, \sup_{t \in T} \| (a_t^1, b_t^1) - (a_t^2, b_t^2) \|_\infty \}, \quad (۵-۲)$$

و به همین روش می‌توان $d_\tau(\pi_1, \pi_2)$ را تعریف کرد.

این فاصله‌های تعمیم‌یافته توپولوژیکی همگرایی یکنوا را توصیف می‌کنند. هنگامی که همه داده‌ها در مسئله نمادین \bar{P} با $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{\pi}$ نمایش داده می‌شوند، می‌توانند پریشیده شوند، فضای پارامتری و درحالت کلی به شکل $\Pi = (\mathbb{R}^n)^T \times \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^n$ و در حالت پیوسته به‌صورت

$\Pi = \mathcal{C}(T)^n \times \mathcal{C}(T) \times \mathbb{R}^n$ نمایش داده می‌شود. مشاهده می‌شود که Π عبارت است از فضای خطی برای عملیات مؤلفه‌وار و به حالت کلی مربوط نمی‌شود؛ چون مجموعه پارامترها با مجموعه‌های داده قیده‌های کران‌دار و بی‌کران عبارتند از مخروط‌های باز مکمل.

شرایطی از تجزیه و تحلیل کیفی پایداری به دست می‌آید که تحت آن شرایط پربیشیدگی‌های به اندازه کافی کوچک مسئله نمادین باعث تغییرات کوچک در مقدار بهینه، مجموعه بهینه و مجموعه شدنی می‌شود. تابع مقدار بهینه (اولیه) عبارت است از تابع تعمیم‌یافته تک‌مقداری $\vartheta: \Pi \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ به طوری که $\vartheta(\pi)$ عبارت است از مقدار بهینه P (یعنی $\vartheta(\pi) = \nu(P)$) که ویژگی‌های مطلوب پایداری آن عبارتند از نیمه-پیوستگی پایینی و بالایی. نگاشت‌های مجموعه بهینه و مجموعه شدنی عبارتند از نگاشت‌های مجموعه‌ای. نگاشت مجموعه شدنی (اولیه): $\mathcal{F}: \Pi \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ هر عضو $\pi \in \Pi$ را با مجموعه شدنی $\mathcal{F}(\pi)$ از P (مسئله LSIO وابسته به π) متناظر می‌کند، درحالی‌که نگاشت مجموعه بهینه (اولیه) $\mathcal{S}: \Pi \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ هر عضو $\pi \in \Pi$ را با مجموعه بهینه $\mathcal{S}(\pi)$ از P متناظر می‌کند. با همین روش، مقدار بهینه تابع هدف دوگان $\vartheta^D: \Pi \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ، نگاشت مجموعه شدنی دوگان: $\mathcal{F}^D \Pi \rightrightarrows \mathbb{R}_+^{(T)}$ و نگاشت مجموعه بهینه دوگان: $\mathcal{S}^D \Pi \rightrightarrows \mathbb{R}_+^{(T)}$ را در نظر می‌گیریم که به ترتیب برای هر $\pi \in \Pi$ ، مقدار بهینه، مجموعه شدنی و مجموعه بهینه D را متناظر می‌کند. مشاهده می‌شود که ϑ (و نیز ϑ^D) به طور مثبت همگن هستند، یعنی برای هر $\pi \in \Pi$ و $\mu > 0$ داریم $\vartheta(\mu\pi) = \mu \vartheta(\pi)$.

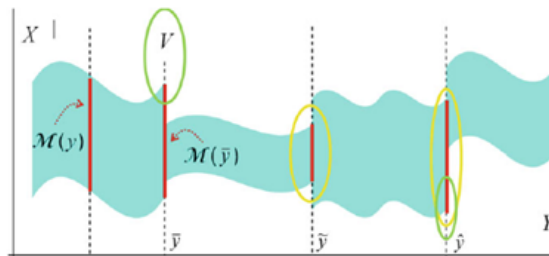
در اینجا باید مفاهیم پیوستگی پایه‌ای مربوط به نگاشت‌های مجموعه‌ای (همانند \mathcal{F} و \mathcal{S}) را به یاد آوریم. دو فضای توپولوژیکی X و Y را در نظر بگیرید (در چهارچوب پارامتری مورد نظر، $X = \mathbb{R}^n$ عبارت است از فضای تصمیم‌های مسئله نمادین درحالی‌که Y عبارت است از زیرفضای توپولوژیکی فضای پارامتری Π). بین X و Y ، یک نگاشت مجموعه‌ای مانند \mathcal{M} را در نظر بگیرید، یعنی $\mathcal{M}: Y \rightrightarrows X$ و $\bar{y} \in Y$ به طوری که $\mathcal{M}(\bar{y}) \neq \emptyset$. بنابراین

- در \mathcal{M} نیمه-پیوسته پایینی (به اختصار ISC) برج-کوراتوسکی^۱ است اگر برای هر مجموعه باز مانند $V \subset X$ داشته باشیم $\mathcal{M}(\bar{y}) \cap V \neq \emptyset$ ، آنگاه مجموعه‌ای مانند $U \in \mathfrak{N}_{\bar{y}}$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in U$ داریم $\mathcal{M}(y) \cap V \neq \emptyset$.

- در \mathcal{M} نیمه-پیوسته بالایی (به اختصار USC) برج-کوراتوسکی است اگر برای هر مجموعه باز مانند $V \subset X$ ، داشته باشیم $\mathcal{M}(\bar{y}) \subset V$ ، آنگاه مجموعه‌ای مانند $U \in \mathfrak{N}_{\bar{y}}$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in U$ داریم $\mathcal{M}(y) \subset V$.

1. Berge-Kuratowski

- اگر X و Y فضاهای شبه‌متری باشند، آنگاه \mathcal{M} در \bar{y} بسته است اگر برای هر دو دنباله که برای هر $r \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\lim_{r \rightarrow \infty} y_r = \bar{y}$ و $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \bar{x}$ ، آنگاه نتیجه می‌شود $\bar{x} \in \mathcal{M}(\bar{y})$.



شکل ۱-۲ نیمه-پیوستگی پایینی و بالایی

فرض کنید که اگر عبارت \mathcal{M} عبارت باشد از یک نگاشت تک‌مقداری، آنگاه نیمه-پیوستگی پایینی و بالایی با مفهوم معمولی پیوستگی $\mathcal{M} : Y \rightarrow X$ منطبق می‌شود. از پیوستگی همچنین بسته بودن نتیجه می‌شود، ولی عکس آن درست نیست (تابع در (۲-۳) را به یاد آورید).
منحنی نمایش و دامنه \mathcal{M} به ترتیب عبارتند از

$$\text{gph } \mathcal{M} := \{(y, x) \in Y \times X : x \in \mathcal{M}(y)\}$$

و

$$\text{dom } \mathcal{M} := \{y \in Y : \mathcal{M}(y) \neq \emptyset\} = \text{Proj}_Y \text{gph } \mathcal{M}.$$

نیمه-پیوستگی پایینی باعث می‌شود مجموعه تصویر $\mathcal{M}(y)$ برای y نزدیک به \bar{y} به شدت جمع شود، درحالی‌که نیمه-پیوستگی بالایی از وضعیت مخالف جلوگیری می‌کند. به عبارت دیگر، مجموعه‌های تصویر حول y از نظر اندازه به‌طور ناگهانی افزایش می‌یابند. بسته بودن \mathcal{M} در \bar{y} به این معنی است که $\text{gph } \mathcal{M}$ شامل حد دنباله‌هایی است که تصاویر $\text{Proj}_Y \text{gph } \mathcal{M}$ به \bar{y} همگرا می‌شوند. در شکل ۱-۲ منحنی نمایش یک نگاشت مجموعه‌ای مانند $\mathcal{M} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ مشاهده می‌شود که در شکل ۱-۲ ناحیه سایه‌دار آبی است و ما سه وضعیت مختلف را در نقاط \bar{y} (usc، نه lsc)، \hat{y} (lsc، نه usc)، و \tilde{y} (نه lsc، نه usc) مشاهده می‌کنیم. به علاوه، \mathcal{M} در \tilde{y} و \hat{y} بسته نیست.

بسته بودن \mathcal{M} در یک نقطه مانند $y \in \text{dom } \mathcal{M}$ با بسته بودن $\text{gph } \mathcal{M}$ در فضای حاصل ضرب $Y \times X$ معادل است. بسته بودن و نیمه-پیوستگی بالایی دو مفهومی هستند که با مفهوم همتای نیمه-پیوستگی پایینی در رقابت‌اند.

منطقی است اگر نگاشت مجموعه‌شدنی \mathcal{F} روی فضای Θ از دستگاه‌های نظیر پارامترهای $\sigma = (a, b)$ نیز تعریف شود (این دستگاه‌ها را نیمه-نامتناهی نیز می‌نامند و در زمینه‌های دیگر ظاهر می‌شوند). با این روش می‌توان بدون هیچ تفاوتی از $\mathcal{F}(\pi)$ یا $\mathcal{F}(\sigma)$ استفاده کرد. با همین روش، درباره‌نگاشت شدنی دوگان، یعنی $\mathcal{F}^D(\pi)$ همانند $\mathcal{F}^D(\sigma_D)$ است که در آن $\sigma_D := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t a_t \right\} = c$. مشاهده می‌شود که \mathcal{F} همواره بسته است. درحقیقت، فرض کنید $r \in \mathbb{N}$ و $\bar{\sigma} = (\bar{a}, \bar{b}) \in \Theta$ و برای هر $r \in \mathbb{N}$ دو دنباله $(\sigma_r)_{r=1}^\infty \subset \Theta$ و $(x_r)_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ که برای هر $r \in \mathbb{N}$ داریم $x_r \in \mathcal{F}(\pi_r)$ خواهیم داشت $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \bar{x}$ و $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = \bar{\sigma}$ اگر $t \in T$ را ثابت نگه‌داریم و وقتی $r \rightarrow \infty$ ، $\sigma_r = \{ \langle a^r(t), x \rangle \geq b^r(t), t \in T \}$ قرار دهید $\langle a^r(t), x \rangle \geq b^r(t)$ حد بگیریم خواهیم داشت $\langle \bar{a}(t), \bar{x} \rangle \geq \bar{b}(t)$. در نتیجه $\bar{\sigma} \in \mathcal{F}(\bar{\sigma})$ و بنابراین \mathcal{F} در $\bar{\sigma}$ بسته است. در چهارچوب پایداری مجموعه‌شدنی نتیجه می‌گیریم که بسته بودن خیلی ضعیف است و حال آنکه نیمه-پیوستگی بالایی خیلی قوی است (اگر تصویر نافشرده باشد به‌سختی برقرار است). با توجه به \mathcal{S} ، در بخش ۵-۱ خواهیم دید که بسته بودن اساساً بر ویژگی شکل Isc از \mathcal{F} منطبق می‌شود. پایداری $\mathbb{R}_+^{(T)} : \Pi \Rightarrow \mathcal{F}^D$ تنها برای حالتی تجزیه و تحلیل شده است که نرم‌های $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ در \mathbb{R}^T در نظر گرفته شده است [۱۰۵]، در صورتی که تاکنون پایداری \mathcal{S}^D بررسی نشده است.

تجزیه و تحلیل پایداری کمی درباره‌کران‌های خطا روی فاصله در فضاهای تصمیم و پارامتر بحث می‌کند. با یک دستور اساسی که توسط هافمن^۱ در [۱۳۵] ۱۹۵۲ به‌دست آمده است یک کران خطا روی فاصله از هر نقطه در \mathbb{R}^n تا مجموعه جواب یک دستگاه خطی برحسب بیشترین انحراف قیدی به‌دست می‌آید. این دستور به پیچیدگی عددی روش‌های در LO مربوط می‌شود. به‌همین دلیل، بسیاری از تعمیم‌ها و تغییرات این نتیجه برای انواع دستگاه‌ها، از جمله آن‌هایی که در LSIO به‌وجود می‌آیند، پیشنهاد شده است. با قالب‌های پارامتری نیز می‌توان فاصله بدطرحی نسبت به برخی ویژگی را محاسبه کرد که مسئله نمادین از آن برخوردار است، یعنی اندازه کمینه آن پربیندگی‌های \bar{P} که مسئله‌های پربیندگی را به‌وجود می‌آورند که از این ویژگی برخوردار نیستند.

برآوردهای تأثیر یک پریشیدگی داده‌شده روی مقدار بهینه با تجزیه و تحلیل حساسیت به دست می‌آید. اکثر نشریه‌های مربوط به تجزیه و تحلیل حساسیت موجود در LO بر روی تعیین تخت بودن (یا خطی بودن) ناحیه‌های مقدار بهینه تابع هدف تحت پریشیدگی‌های بردار هزینه \bar{c} یا پریشیدگی‌های بردار طرف راست \bar{b} یا هر دو متمرکز شدند (بررسی تأثیر پریشیدگی روی مقدار بهینه پریشیدگی‌های طرف چپ \bar{a} حتی در LO دشوار است). تجزیه و تحلیل حساسیت در LO را می‌توان از سه دیدگاه مختلف انجام داد: دیدگاه اول مبتنی بر استفاده از پایه بهینه (اطلاعات متغیر وقتی که روش سادک یک نقطه فرین از مجموعه شدنی چندوجهی را به دست می‌آورد). این شیوه نمی‌تواند برای LSIO تعمیم داده شود؛ زیرا تعداد قیدهای فعال در نقطه فرین مجموعه شدنی به ندرت بیش از یکی است (به‌ویژه، شکل‌های هموار محدب به صورت گوی‌های اقلیدسی و بیضی‌گون دارای یک ابرصفحه پشتیبان یکتا در هر نقطه مرزی هستند). با شیوه دوگانی شرایطی برای تخت بودن روی پاره خط‌ها یا نیم-خط‌های مقدار بهینه تابع هدف مربوط به پریشیدگی‌های طرف راست به دست می‌آید. شیوه سوم برای تجزیه و تحلیل حساسیت در LO، افزاز بهینه با روش نقطه درونی شناسایی می‌شود هرگاه بهینگی حاصل شود که در این صورت می‌توان پریشیدگی‌های هم‌زمان هزینه‌ها و هم طرف راست را بررسی کرد.

مثال ۱.۲ مسئله LSIO، \bar{P} از مثال ۱.۱ (ج) را در نظر بگیرید و فرض کنید که RHS از زیردستگاه نظیر شاخص‌های $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ را می‌توان به وسیله یک پارامتر مشترک مانند $y \in \mathbb{R}$ پریشیده کرد (به عبارت دقیق‌تر، فضای پارامتر عبارت است از سه تایی‌های (\bar{c}, \bar{a}, b) که در آن برای هر $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ داریم $b_t = -y$ و می‌توان آن را با \mathbb{R} شناسایی کرد). در این صورت، باید مسئله پارامتری LSIO به صورت

$$P(y) : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} x_1$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -y, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$x_1 \geq 0 \quad (t = 2), \quad x_2 \geq 0 \quad (t = 3).$$

را بررسی کرد. مشاهده می‌شود که $P(I) = \bar{P}$. در اینجا داریم $\mathcal{F}, \mathcal{S} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ عبارت‌اند از $\mathcal{F}(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : \|x\|_2 \leq y\}$ و $\mathcal{S} = \mathcal{F}(y) \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ ، در صورتی که اگر $y \in \mathbb{R}_+$ آنگاه $\vartheta(y) = 0$ وگرنه $\vartheta(y) = +\infty$. بنابراین، خواهیم داشت

$$\text{dom } \mathcal{F} = \text{dom } \mathcal{S} = \text{dom } \vartheta = \mathbb{R}_+,$$

$$\text{gph } \vartheta = \mathbb{R}_+ \times \{0\},$$

$$\text{gph } \mathcal{F} = \{(y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : \|x\|_2 \leq y\},$$

(شکل ۲-۲ را ببینید) و

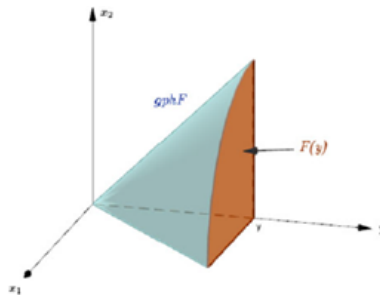
$$\text{gph } \mathcal{S} = \{(y, \circ, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : \circ \leq x_2 \leq y\},$$

(شکل ۳-۲ را ببینید).

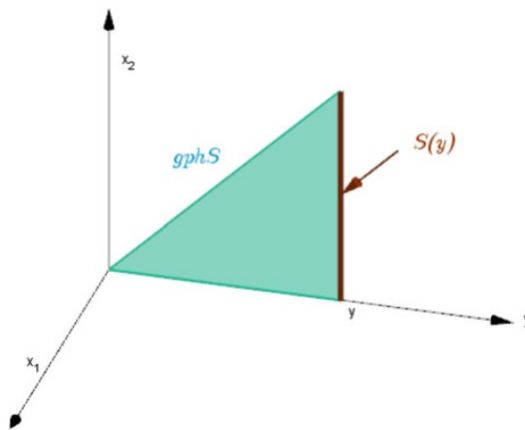
چون $\text{epi } \vartheta$ بسته است، درحالی‌که $\text{epi } (-\vartheta)$ بسته نیست، پس ϑ به شکل lsc است، ولی به شکل usc نیست (ویژگی دوّم در $y = \circ$ برقرار نیست). با توجه به \mathcal{F} و \mathcal{S} ، وضعیت کاملاً برخلاف این وضعیت است: آن‌ها به شکل usc هستند، ولی به شکل lsc نیستند. درحقیقت، ویژگی دوّم در $y = \circ$ برقرار نیست؛ چون داریم $\mathcal{S}(\circ) = \mathcal{F}(\circ) = \{0_2\}$ و حال‌آنکه برای هر $y < \circ$ داریم $\mathcal{S}(y) = \mathcal{F}(y) = \emptyset$. به‌علاوه، \mathcal{S} به دلیل بسته بودن $\text{gph } \mathcal{S}$ ، بسته است (به یاد آورید که \mathcal{F} همواره بسته است).

درباره پایداری \bar{P} ، چون سه نداشت در $\bar{y} = 1$ به شکل lsc و usc هستند و \mathcal{S} و \mathcal{F} نیز در آن پارامتر بسته هستند، پس نتیجه می‌گیریم که پارامتر نمادین از هر جنبه که تا کنون تعریف شده است، پایدار است (سایر مفاهیم پایداری بعداً معرفی خواهند شد).

مشاهده می‌شود که فاصله از \bar{P} (یا پارامتر نظیر $\bar{y} = 1$) تا ناسازگاری برابر ۱ است؛ چون برای هر $y \in \mathbb{R}$ داریم $\mathcal{F}(y) \neq \emptyset$ (که در نتیجه $1 \leq |y - 1| = d_\infty(y, 1)$)، درحالی‌که برای تمامی $r \in \mathbb{N}$ داریم $\mathcal{F}(-\frac{1}{r}) = \emptyset$ با $1 + \frac{1}{r} \rightarrow 1$. مسئله $d_\infty(-\frac{1}{r}, 1) = 1 + \frac{1}{r}$ از لحاظ سازگاری بد-وضع است چون هر همسایگی \circ شامل هم مسئله سازگار و هم ناسازگار است. چون $\text{dom } \mathcal{S} = \text{dom } \vartheta$ ، پس می‌توانیم به جای «سازگاری» در دو پاراگراف آخری قرار بدهیم «حل‌پذیری».



شکل ۲-۲ منحنی نمایش نگاشت مجموعه شدنی



شکل ۲-۳ منحنی نمایش نگاشت مجموعه بهینه

در پایان، توجه شود که تجزیه و تحلیل حساسیت برای این مثال بدیهی است؛ چون \mathcal{V} روی \mathbb{R}^+ ثابت است (یعنی تغییرات کوچک‌تر از ۱، در مسئله نمادین هیچ تأثیری روی \mathcal{V} ندارد).

قالب پارامتری که اغلب درباره پایداری در مسئله‌های LSIO، در نشریات اخیر با آن مواجه می‌شوند، پربیشیدگی همه داده‌ها را در نظر می‌گیرند. یکی از دلایل این است که شناسایی ویژگی‌های مختلف پایداری کیفی در این قالب شرایط کافی برای بقیه قالب‌ها می‌شود و گاهی این شرایط لازم نیز هستند. به همین قیاس، دستوری که فاصله تا بد-وضعی را به دست می‌دهد، برای قالب‌های دیگر، حداقل، کران‌های بالا هستند، در صورتی که کران خطا همچنان معتبر هستند (گرچه می‌توان آن‌ها را بهبود بخشید). گاهی بررسی پایداری تحت پربیشیدگی‌های قسمت داده‌ها (معمولاً \bar{a} LHS) مشکل‌تر از تحت پربیشیدگی‌های تمامی داده‌هاست و حال آنکه در قالب‌های پیوسته به خوبی می‌توان از ابزارهای توپولوژیکی و تحلیلی به صورت لم اوریسون^۱ یا قضیه روبینسون-اورسسکو^۲ استفاده کرد (به شرطی که محدب باشد که اگر \bar{a} ثابت باشد، آنگاه چنین خواهد بود). چند قضیه تجزیه و تحلیل حساسیت تحت پربیشیدگی‌های داده از جمله \bar{a} درباره LO چاپ شده است که در نتیجه پژوهشگر فقط می‌تواند قضیه‌های تجزیه و تحلیل مربوط به LSIO تحت پربیشیدگی شدن بقیه داده‌ها را انتظار داشته باشد، بنابراین بخش‌های ۱-۴، ۲-۴ و ۳-۴ به ترتیب به پربیشیدگی‌های \bar{c} و \bar{b} و زوج (\bar{b}, \bar{c}) می‌پردازند. پربیشیدگی‌های هم‌زمان $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ در بخش‌های ۱-۵، ۳-۵، ۱-۲-۶ و ۱-۳-۶ بررسی می‌شوند، پربیشیدگی‌های جداگانه \bar{a} ، \bar{b} و \bar{c} در بخش ۲-۵، پربیشیدگی‌های \bar{b} و (\bar{a}, \bar{b}) در بخش ۲-۲ و پربیشیدگی‌های (\bar{c}, \bar{b}) در بخش ۲-۳-۶ بررسی می‌شوند.

1. Urisohn
2. Robinson-Ursescu

آسان بودن و اعتبار قالب‌های دیگر رسم‌شده در این بخش برای مسئله خاص نقیینی LSIO به ماهیت داده آن، نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به خطر، قابل حل بودن مسئله‌های کمکی که باید حل شوند، موجودی سخت‌افزار و امکانات نرم‌افزاری وابسته است. در نتیجه، به جای ادعای برتری یکی از قالب‌های موردنظر بر دیگری، مؤلف با این گزاره معروف پژوهشگر آمار، جورج باکس^۱، موافق است که «تمامی قالب‌ها غلط هستند، ولی برخی از آن‌ها مفید هستند» [۲۸].

یادآوری ۱-۲-۱ (پیشینه‌ها)

شیوه تصادفی: نوشته‌های موجود درباره قالب‌های احتمالی مربوط به مسئله‌های نیمه-ناممتناهی نقیینی [۶۹-۶۷، ۲۱۱] شامل مطالبی درباره LSIO نیستند.

شیوه فازی: اولین مقاله‌های چاپ‌شده درباره به‌گزینی فازی در دهه ۱۹۷۰ [۱۳، ۲۱۶] چاپ شدند. به‌ویژه، [۲۳۵] روشی را نشان داد که مسئله‌های فازی LO با توابع درجه عضویت به مسئله‌های معمولی LO تبدیل می‌شوند. مقاله‌های زیادی درباره به‌گزینی فازی از طریق توابع رتبه‌بندی موجودند، (مثلاً [۷۶، ۷۹، ۱۷۱، ۲۲۸] و مقاله مروری [۳۲] را ببینید). مقاله مروری [۱۷۰] مسئله‌های به‌گزینی فازی LO با تابع هدف قطعی به مسئله LSIO دوباره دستورسازی و حل می‌شوند و همان روش را می‌توان برای مسئله‌های LSIO با قیده‌های فازی به‌کار برد. تا آنجا که مؤلفین اطلاع دارند هیچ مقاله‌ای درباره LSIO چاپ نشده است. سایر ارتباط‌های بین به‌گزینی فازی و LSIO در [۱۳۸، ۱۹۵] و [۲۲۷] ثابت شده‌اند که در آن به‌ترتیب، مسئله‌های به‌گزینی محدب فازی، دستگاه‌های فازی نیمه-ناممتناهی با توابع عضویت مقعر (که مثال گویا و یکتای آن خطی است) و طراحی بهینه سرامیک آلومینا با داده فازی به‌صورت مسئله‌های LSIO دوباره دستورسازی شدند.

شیوه بازه‌ای: باتاچارجی و همکاران^۲ [۲۴] شیوه بازه‌ای را در به‌گزینی نیمه-ناممتناهی غیرخطی بررسی کردند بدون اینکه حالت خاص LSIO را در نظر بگیرند. شیوه بازه‌ای که برای حل مسئله نقیینی LSIO در مهندسی محیط زیستی به‌وجود می‌آیند، به‌طریقی نسبتاً تجربی به‌کار برده شده‌اند [۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۴۲، ۱۷۳، ۲۳۷]. در قالب پیچیده‌تر بازه‌ای [۱۷۳]، بازه‌های تصمیم به‌جای متغیرهای تصمیم قرار داده شده‌اند.

شیوه استوار: مسئله‌های LO با قیده‌های نقیینی در [۲۱۴] با شیوه استوار تحت نام به‌گزینی خطی نادقیق بررسی شده‌اند و ارتباط آن‌ها با LSIO در [۲۱۹] بررسی شد که پژوهشگران آن‌ها قیده‌های نقیینی (با

1. George Box
2. Bhattacharjee et al.

بردارهای ضرایب (a_t, b_t) معمولاً تغییرات روی برخی گوی برحسب نرم سوپریم وزن‌دار را بررسی کردند. پیشینه روش‌های استوار برای مسئله‌های LSIO در فصل ۳ مرور می‌شود. شیوه پارامتری: فاصله تعمیم‌یافته تعریف شده در (۲-۵) در یک مقاله اصیل [۱۲۳] معرفی شد. نتایج اولیه درباره پایداری \mathcal{F} ، \mathcal{S} و \mathcal{V} در دهه ۸۰ چاپ شدند و با مسئله‌های پیوسته LSIO مورد بررسی قرار گرفتند. مقاله‌های [۹۲] و [۱۷۶] حجم وسیعی از مقاله‌های موجود درباره قالب‌های پارامتری مربوط به شبه-متری d تعریف شده در (۲-۴) برای مسئله‌های LSIO، LIO و CIO را مرور کردند. جزئیات بیشتر را می‌توان در یادآوری‌های بخش‌های ۴ تا ۶ یافت.

۲-۲ قالب‌بندی انتخاب سبد سهام اوراق بهادار نقینی

فرض کنید باید C یورو در سهام متشکل از n دارایی (سهام، اندوخته‌ها، اوراق بهادار) سرمایه‌گذاری شود. فرض کنید r_i عبارت باشد از سود هر ۱ یورو سرمایه‌گذاری شده در دارایی $i \in \{1, \dots, n\}$ طی یک دوره زمانی (مثلاً یک ماه یا یک سال). چون این سودها از پیش معلوم نیستند، پس $r = (r_1, \dots, r_n)$ عبارت است از یک بردار نقینی. متغیرهای تصمیم عبارتند از مقدار یورو که باید در دارایی i -ام سرمایه‌گذاری شود که با $x_i = 1, \dots, n$ ، نشان داده می‌شود. هر سهام شدنی $x = (x_1, \dots, x_n)$ در شرایط $\sum_{i=1}^n x_i = C$ ، $x_i \geq 0$ ، $i = 1, \dots, n$ ، و قیدهای خطی دیگر صدق می‌کند که حداقل یکی از آنها نقینی است. در این بخش قالب‌های سهامی را مورد بحث قرار می‌دهیم که نسبت به قیدها استوار است. یکی از این قالب‌ها درهم است اگر r به صورت یک بردار تصادفی (فازی، بازه‌ای، پارامتری) تعبیر شود و حال آنکه این قالب استوار محض است اگر هدف متشکل باشد از بیشینه‌سازی بدترین سود برگشتی ممکن سهام. با توجه به (۲-۱)، یک مسئله نقینی LSIO به شکل

$$P_0 : \max_{x \in \mathbb{R}^n} r^T x := \sum_{i=1}^n r_i x_i \quad \text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T,$$

را در نظر می‌گیریم که نقینی فقط روی تابع هدف تاثیر دارد. فرض می‌کنیم مسئله P_0 شدنی است، یعنی مجموعه شدنی $F \subset \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = C\}$ ناتهی است. با تعبیر هر نرخ سود به صورت یک متغیر تصادفی r_i با امید ریاضی $\mathbb{E}[r_i]$ ، $i = 1, \dots, n$ ، یک قالب احتمالی را به دست خواهیم آورد. در قالب رایج به‌گزینی تصادفی مربوط به مسئله سهام که در دهه

۱۹۵۰ معرفی شده است، مسئله‌ای که آن را تصمیم‌گیرنده حل می‌کند، عبارت است از

$$P_1 : \max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}[r^T x] := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[r_i] x_i \quad \text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T,$$

که بیشینه به‌دلیل فشردگی F حاصل می‌شود. این قالب خیلی ساده است، ولی به‌طورکامل غیرواقعی است؛ زیرا خطر را در نظر نمی‌گیرد. اینک فرض می‌کنیم که سرمایه‌گذار می‌خواهد سود کمتر از $\eta \in I \subset \mathbb{R}$ (عبارت است از بازه‌ای شامل هر سود قابل‌تصور) از سهام شدنی x با احتمال $\Pr\{r^T x \leq \eta\}$ نایبتر از مقداری مانند $p_\eta \in [0, 1]$ به‌دست آورد. تابع $\eta \mapsto p_\eta$ نظر تصمیم‌گیرنده را نسبت به خطر نشان می‌دهد و هر نامساوی $\Pr\{r^T x \leq \eta\} \leq p_\eta$ را قید مقدار-در-خطر (یا غالب تصادفی) می‌نامند. از این‌رو، مسئله احتمالی در اینجا عبارت است از

$$P_2 : \max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}[r^T x] \\ \text{s.t.} \quad \Pr\{r^T x \leq \eta\} \leq p_\eta, \quad \eta \in I, \quad (6-2) \\ \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T.$$

تا آنجا که پژوهشگران اطلاع دارند، تعداد اندکی از روش‌های عددی موجود مربوط به برنامه‌ریزی‌های تصادفی مقید غالب [۱۴۱، ۱۳۷] به حل مسئله نیمه-نامتناهی غیرخطی P_2 نیاز ندارند، به‌استثنای در حالت‌های ویژه. در واقع، مسئله P_2 یک مسئله سخت است، حتی در ساده‌ترین حالت که در آن داریم $|I| = 1$ و $|T| < \infty$ (همانند قالب سهام مقید شانسی رایج)، مگر اینکه r دارای یک توزیع نرمال چندمتغیره باشد.

اگر r در یک مجموعه کران‌دار داده‌شده $R \subset \mathbb{R}^n$ تغییر کند، آنگاه یک قالب به‌گزینی استوار به‌دست خواهد آمد. یک تصمیم‌گیر بدبین بایستی بدترین سود سهام x ، یعنی $\inf_{r \in R} r^T x$ را کمینه کند. بدین ترتیب، همتای استوار P_0 عبارت است از مسئله بیشینه-کمینه‌سازی

$$P_0 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{r \in R} r^T x \quad \text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T, \quad (7-2)$$

مشاهده می‌شود که $\inf_{r \in R} r^T x$ عبارت است از بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه $\{r^T x : r \in R\}$ ، به‌گزینی غیرخطی نیمه-نامتناهی P_4 معادل است با مسئله نیمه-نامتناهی LSIO به صورت

$$P_4 : \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}} y$$

$$\text{s.t.} \quad r^T x - y \geq 0, \quad r \in R, \quad (۸-۲)$$

$$\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T.$$

اگر $\sigma = \{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ پیوسته و R عبارت باشد از یک زیرمجموعه محدب فشرده در \mathbb{R}^n ، آنگاه P_4 عبارت است از یک مسئله پیوسته LSIO که در نتیجه می‌تواند با روش‌های گسسته‌سازی اشاره‌شده در بخش ۳-۱ حل شود، به‌استثنای الگوریتم تولید قید نقطه درونی (چون درون مجموعه شدنی P_4 تهی است)، گرچه اگر $\dim R \geq 3$ (گاهی $\dim R = n$) آنگاه گسسته‌سازی شبکه کارا نخواهد بود. اگر T متناهی باشد، ترجیح داده می‌شود که با بهره‌برداری از تخت بودن تابع $r \mapsto r^T x - y$ ، برای هر زوج $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ از روش نقطه درونی [۲۱۵] استفاده شود. نتایج عددی با P_4 و با فرض متناهی بودن T ، در مقاله اخیر گزارش شده‌اند.

اینک، با این فرض که مجموعه نقینی به صورت جعبه‌ای $R = \prod_{i=1}^n [r_i, \bar{r}^i]$ ، با $r_i < \bar{r}^{-i}$ ، $i = 1, \dots, n$ باشد، یک قالب به‌گزینی بازه‌ای را پیشنهاد می‌کنیم. باید محدوده مقدار بهینه مربوط به تمامی نمونه‌های مسئله نقینی P را مشخص کنیم، یعنی یک هم‌تای بدبینانه و یک هم‌تای خوش‌بینانه مسئله P را حل کنیم، ولی باید ساختار ویژه R را مورد بهره‌برداری قرار دهیم. چون با توجه به بحث محدب بودن، $\{r_i, \bar{r}^{-i}\}^n$ عبارت است از مجموعه نقاط فرین R ، پس قید زیردستگاه $\{r^T x - y \geq 0, r \in R\}$ با $y \leq \sum_{i=1}^n \min\{r_i x_i, \bar{r}^i x_i\}$ معادل است. بنابراین، با معرفی یک متغیر کمکی مانند $z \in \mathbb{R}^n$ ، مسئله P_4 را می‌توان به شکل

$$P_5 : \quad \sup_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{n+1+n}} y$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n z_i - y \geq 0,$$

$$r_i x_i - z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{r}_i x_i - z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T,$$

قالب‌بندی کرد.

انتخاب یک روش عددی مناسب برای حل مسئله P_5 مشروط به ویژگی‌های دستگاه انتخاب یک روش عددی مناسب برای حل مسئله P_5 مشروط به ویژگی‌های دستگاه انتخاب یک روش عددی مناسب برای حل مسئله P_5 مشروط به ویژگی‌های دستگاه

$$P_6 : \max_{(x,r) \in \mathbb{R}^{2n}} r^T x$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T,$$

را حل کند که مشکل آن در محدب نبودن تابع هدف است.

در پایان، یک قالب پارامتری را از یک مسئله نمادین داده‌شده به صورت

$$\bar{P} : \max_{x \in \mathbb{R}^n} r^T x \quad \text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T$$

می‌سازیم. فضای پارامترها عبارت است از $\Pi_1 = \{\bar{a}\} \times \{\bar{b}\} \times \mathbb{R}^n$ که می‌توانیم فاصله در \mathbb{R}^n را با نرم سوپریم d_∞ در نظر بگیریم. به روشنی $\mathcal{F}|_{\Pi_1} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ ثابت است و حال آنکه به دلیل فشردگی $\mathcal{S}|_{\Pi_1} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ و $\vartheta|_{\Pi_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ثابت خواهیم کرد که $\mathcal{S}|_{\Pi_1}$ پیوسته و در \bar{r} به شکل usc است و حال آنکه $\vartheta|_{\Pi_1}$ در \bar{r} پیوسته است.

فرض کنید دنباله‌های $(r_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n$ و $(x_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n$ چنان باشند که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x^k \in \mathcal{S}(r_k)$ ، $x^k \rightarrow \bar{x}$ و $r_k \rightarrow \bar{r}$. برای یک نقطه مفروض مانند $x \in F$ ، برای هر $k \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت:

$$r_k^T x^k \geq r_k^T x \tag{۹-۲}$$

اگر حد (۹-۲) را وقتی $k \rightarrow \infty$ به دست آوریم، خواهیم داشت $\bar{r}^T \bar{x} \geq \bar{r}^T x$ ، که در نتیجه $\bar{x} \in \mathcal{S}(\bar{r})$ و بنابراین نتیجه می‌شود که \mathcal{S} در \bar{r} بسته است. به علاوه، \bar{r} غیرقابل مقایسه است به این مفهوم که هیچ عضوی مانند $U \in \mathcal{N}_{\bar{r}}$ موجود نیست به طوری که $\{ \mathcal{S}(r) : r \in U \}$ کران‌دار باشد (مثلاً $U = \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید). چون هر نگاشت مجموعه‌ای غیرقابل مقایسه که در یک پارامتر معلوم بسته باشد، در همان پارامتر به شکل usc است، در نتیجه معلوم می‌شود که \mathcal{S} در \bar{r} به شکل usc است.

مثال بعدی نشان می‌دهد $S|_{\Pi_1}$ لزوماً در \bar{r} به شکل lsc نیست اگر $F = [0, 1]^2$ و $\bar{r} = (0, 1)$ ، آنگاه $S(\bar{r}) = [0, 1] \times \{1\}$ در صورتی که اگر $r \notin \text{cone}\{\bar{r}\}$ به اندازه کافی نزدیک به \bar{r} باشد، خواهیم داشت $S \subset \{(0, 1), (1, 1)\}$ ، که در نتیجه S به طور ناگهانی نزدیک به \bar{r} جمع می‌شود. با توجه به تابع مقدار بهینه، چون

$$\vartheta(r) = \max_{x \in F} r^T x,$$

پس ϑ بر تابع پشتیبان σ_F از مجموعه محدب فشرده F منطبق می‌شود (یعنی $(\sigma_F(r) = \sup_{x \in F} r^T x)$ عبارت است از یک تابع محدب متناهی همگن مثبت که در نتیجه $\vartheta \in C(\mathbb{R}^n)$ و بنابراین ϑ در \bar{r} پیوسته است.

یادآوری ۲-۲-۲ (پیشینه‌ها).

مثال‌های P_4 در (۶-۲) با داده‌های واقعی از بازار اوراق سهام آمریکا، با مجموعه متناهی T در [۶۸] و [۶۹] بحث و حل شدند. با قرار دادن قیدهای مقدار-در-خطر در P_3 در (۷-۲) به وسیله تقریب‌های محدب شامل گشتاورها به جای احتمال‌ها، قالب‌های دیگر به دست می‌آیند. دقیق‌ترین تقریب‌ها به وسیله یک سنج مقدار-در-خطر معرفی شده به وسیله بن-تال^۱ و تبوله^۲ [۱۷] ارائه شده است و بعداً به وسیله روکا فلر^۳ و اوریا سف^۴ [۲۰۶] تحت نام سنج مقدار شرطی-در-خطر رایج شده است. با این روش، به جای P_4 یک مسئله به‌گزینی محدب نیمه-نامتناهی (CSIO) مناسب قرار داده شد که یک قالب‌بندی مجدد معادل LSIO را با فرض‌های خفیف [۷۱] به دست آوردند.

یک دسته وسیع از نشریات درباره قالب‌های فازی برای مسئله سهام وجود دارد (مقاله‌های مروری اخیر [۲۳۸، ۲۲۵] را ببینید).

سودها r_i^T در [۷۰، ۱۶۸] به شکل اعداد فازی دوزنقه‌ای تعبیر شدند که مجموعه T در آن متناهی است. در [۲۲۴] تمامی مقدارهای r_i^T عبارتند از اعداد فازی-LR با شکل‌های مختلف تعبیر می‌شوند. دوبوآ^۵ و پراید^۶ [۷۷] این نوع اعداد فازی را با در نظر گرفتن ویژگی‌های دو تابع کمکی L و R با یک روش اصول موضوعه‌ای تعریف کردند که باید در پشتیبان آن‌ها، زوج کاهش‌ی و به شکل usc باشند و مقدار

1. Ben-Tal
2. Teboulle
3. Rockafellar
4. Uryasev
5. Dubois
6. Prade

آن‌ها در \circ برابر ۱ باشد. اولین قالب پیشنهادشده در [۲۲۴] مرکب است از کمینه کردن سنج معینی از خطر رسیدن به یک سود که کمتر از سود η از یک دارایی بدون خطر (یعنی $\sum_{i=1}^n x_i r_i \leq \eta$) مقید به $a_t^T x \geq b_t$ $t \in T$ باشد. در دومین قالب، به‌جای این قید فازی یکتا تعداد بسیار زیاد قید خطی قرار می‌دهد که به یک مسئله LSIO منجر می‌شود. نتایج عددی با قالب اخیر و در نظر گرفتن مجموعه متناهی T در [۲۲۴] گزارش شده است که داده‌های واقعی از بازار سهام اسپانیا گرفته شده و روش شبه-سادک در [۱۶۹] مورد استفاده قرار گرفته است.

یادآوری ۲-۲-۳ (یک مسئله حل‌نشده در مسئله LSIO نقینی) پیاده‌سازی‌های نرم‌افزاری و کاربردهای روش‌های پس‌بهبندی برای حل مسئله‌های LSIO در دنیای واقعی از مواردی است که جای آن خالی است.

به‌گزینی خطی استوار نیمه-نامتناهی

برای بسیاری از مسئله‌های به‌گزینی متناهی، روش‌های عددی را می‌توان از دیدگاه پیچیدگی، یعنی محاسبه کران‌های بالای تعداد تکرار، اعمال ریاضی لازم برای به‌دست آوردن یک جواب بهینه یا یک جواب ε -بهینه برحسب اندازه مسئله، با هم مقایسه کرد. این روش را به‌سختی می‌توان برای مسئله‌های LSIO به‌کار برد زیرا معلوم نیست که، با وجود نتایج مهم درباره پیچیدگی الگوریتم تولید قید نقطه درونی در [۱۸۲، ۱۹۲]، چگونه اندازه سه‌تایی (a, b, c) نمایانگر داده‌های یک مسئله مانند (۱-۱) را تعریف کنیم. از طرف دیگر، همتای استوار یک مسئله نقیینی LSIO به‌ندرت از فرض‌های قوی برخوردار است که برای به‌کار بردن روش‌های کاهش‌ی یا نقطه‌شدنی لازم هستند. به‌همین دلیل، در این چهارچوب، رام‌شدن یک مسئله داده‌شده LSIO را با برقراری شرایط تضمین‌کننده اعتبار روش‌های گسسته‌سازی، شناسایی می‌کنیم، یعنی:

- پیوستگی (موارد اصلی هر اثبات همگرایی)،
 - فرض چگالی و بعد پایین مجموعه شاخص (برای گسسته‌سازی شبکه)،
 - کران‌دار بودن مجموعه بهینه (برای الگوریتم‌های صفحه برش مرکزی)،
 - بعد کامل و کران‌دار بودن مجموعه شدنی (برای الگوریتم تولید قید نقطه درونی).
- در این فصل، یک مسئله نقیینی داده‌شده LSIO به‌صورت

$$P : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad a_t^T x \geq b_t^T, \quad t \in T,$$

را بررسی می‌کنیم که دادهٔ نقینی در آن می‌تواند یا قیده‌ها یا تابع هدف، با $c = \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ (یک بردار ثابت) در حالت اول و $(a, b) = (\bar{a}, \bar{b}) \in (\mathbb{R}^n)^T \times \mathbb{R}^T$ (یک تابع ثابت) در حالت دوم باشد. بررسی مسئله‌هایی که تمامی داده‌های آن نقینی باشند، ترکیبی است از این دو حالت. برای هر حالت، P را با یک مسئلهٔ LSIO مانند P_R مرتبط می‌کنیم که آن را همتای استوار (یا بدبینی) می‌نامیم که بردار هزینه، مجموعهٔ شاخص، مجموعهٔ شدنی، مجموعهٔ جواب‌های بهینه، مخروط اولین‌گشتاور و مخروط مشخصه نظیر را به ترتیب با DR, CR, TR, FR, SR, MR و KR نشان می‌دهیم. مسئلهٔ دوگان هار P_R با DR نشان داده می‌شود. همچنین، با مسئلهٔ P ، یک مسئلهٔ دوگان استوار (همچنین، به نام همتای خوش‌بینانه) مانند DR را مرتبط می‌کنیم به طوری که همواره دوگانی ضعیف برقرار باشد و حال آنکه دوگانی قوی تحت شرایط ملایم برقرار است. همچنین، سازگاری P_R و قابلیت حل عددی را بررسی می‌کنیم.

۱-۳ قیده‌های نقینی

مسئلهٔ LSIO، P در صورت دادهٔ نقینی در قیده‌ها را می‌توان با یک مسئلهٔ پارامتری شدهٔ LSIO به شکل

$$P^u : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{c}^T x$$

$$\text{s.t.} \quad v_t^T x \geq w_t, \quad \forall t \in T,$$

نشان داد که در آن $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ و $u = (v, w) : T \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ یک انتخاب از نگاهت مجموعه‌ای نقینی مانند $U : T \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1}$ (به اختصار $u \in U$) را نشان می‌دهد. فرض کنید برای هر $t \in T$ داشته باشیم $U_t := U(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. بنابراین، مجموعهٔ نقینی در این قالب استوار عبارت است از منحنی نمایش U ، یعنی $\text{gph } U = \{(t, u_t) : u_t \in U_t, t \in T\}$.

یک تصمیم‌گیر استوار که با نقینی در قیده‌ها روبه‌رو می‌شود، می‌خواهد شدنی بودن تصمیم خود را تضمین کند، به طوری که مسئلهٔ همتای استوار پارامتری $(P^u)_{u \in U}$ عبارت باشد از مسئلهٔ یقینی

$$P_R : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{c}^T x$$

$$\text{s.t.} \quad v_t^T x \geq w_t, \quad u_t = (v_t, w_t) \in U_t, \quad t \in T, \tag{۱-۳}$$

که قیده‌های نقینی آن برای هر مقدار ممکن داده در محدودهٔ مجموعهٔ نقینی تجویز شدهٔ $\text{gph } U$ اعمال می‌شود. همچنین، با نشان دادن $T_R := \bigcup_{t \in T} U_t$ ، می‌توان نوشت:

$$P_R : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{c}^T x \tag{۲-۳}$$

$$\text{s.t.} \quad v^T x \geq w, (v, w) \in T_R.$$

بنابراین مجموعه‌ی شدنی، مخروط مشخصه و مخروط‌های گشتاور اول P_R ، به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$F_R = \{v^T x \geq w, (v, w) \in T_R\}$$

$$K_R = \text{cone} \{T_R \cup \{(0_n, -1)\}\} \quad \text{و} \quad M_R = \text{cone Proj}_{\mathbb{R}^n}(T_R), \tag{۳-۳}$$

مثال ۱.۳ برای روشن شدن منظور خود، مثال ۱.۱ را دوباره با $\bar{c} = (-1, -1)$ مرور می‌کنیم که پریشیدگی‌های $v_1(t)$ و $v_2(t)$ از ضرایب طرف چپ مسئله‌ی نمادین $-\sin t$ و $-\cos t$ ، $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ، را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که داشته باشیم $|v_1(t) + \cos t| \leq \alpha$ و $|v_2(t) + \sin t| \leq \alpha$ با $0 < \alpha < 1$ (می‌توان α را به‌عنوان کران بالا برای خطاهای گرد کردن ناشی از زیربرنامه‌هایی تعبیر کرد که مقادیر تقریبی ضرایب طرف چپ متناظر با شاخص‌های $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ را فراهم می‌سازند). برحسب قالب استوار در نظر گرفته‌شده در این بخش، مجموعه‌ی شاخص عبارت است از $T = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{2, 3\}$ ، نگاشت مجموعه‌ی نقیینی $U : T \rightrightarrows \mathbb{R}^3$ عبارت است از

$$U_t = \begin{cases} [-\cos t - \alpha, -\cos t + \alpha] \times [-\sin t - \alpha, -\sin t + \alpha] \times \{-1\}, & t \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \{(1, 0, 0)\}, & t = 2, \\ \{(0, 1, 0)\}, & t = 3, \end{cases}$$

و همتای استوار P عبارت است از

$$P_R : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} -x_1 - x_2 \tag{۴-۳}$$

$$\text{s.t.} \quad v_t^T x \geq w_t, (t, (v_t, w_t)) \in \text{gph } U.$$

اگر $0 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2} + 2\alpha}$ و $(t, (v_t, w_t)) \in \text{gph } U$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\langle v_1, (\gamma, \gamma) \rangle = \gamma(v_1(t) + v_2(t)) \geq -\gamma(\cos t + \sin t + 2\alpha) \geq -\gamma(\sqrt{2} + 2\alpha) > -1,$$

که در نتیجه P_R در SCQ صدق می‌کند. بنابراین، چون $\text{gph } U$ فشرده است، پس P_R در FMCQ نیز صدق می‌کند که در نتیجه مخروط مشخصه K_R از P_R بسته است.

یک انتخاب واقعی‌تر \mathcal{U} برای P از این واقعیت به‌دست می‌آید که توابع مثلثاتی از طریق دستور تیلور محاسبه می‌شوند. بنابراین، می‌توانستیم U_2 و U_3 را همانند قبل و دستور دربی را اختیار کنیم و برای هر $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ قرار دهیم:

$$U_t = \left[-1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}, -1 + \frac{t^2}{2}\right] \times \left[-t, -t + \frac{t^3}{6}\right] \times \{-1\}.$$

اینک، برای هر انتخاب مقدار ثابت $u = (v, w) \in \mathcal{U}$ ، دوگان P عبارت است از مسئله به‌گزینی

نقینی

$$D^u : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t w_t : \sum_{t \in T} \lambda_t v_t = \bar{c} \right\}.$$

همتای خوش‌بینانه $(D^u)_{u \in \mathcal{U}}$ عبارت است از

$$D^R : \sup_{\substack{u=(v,w) \in \mathcal{U} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}}} \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t w_t : \sum_{t \in T} \lambda_t v_t = \bar{c} \right\}.$$

با توجه به ساختار دوگان داریم:

$$\nu(D^R) \leq \nu(P_R). \quad (5-3)$$

می‌گوییم دوگان استوار برای P برقرار است هرگاه (5-3) به‌صورت تساوی برقرار و D^R حل‌پذیر باشد، یعنی

$$\inf_{x \in F_R} \langle \bar{c}, x \rangle = \max_{\substack{u=(v,w) \in \mathcal{U} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}}} \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t w_t : \sum_{t \in T} \lambda_t v_t = \bar{c} \right\}. \quad (6-3)$$

اگر اولین جمله در (6-3) متناهی باشد. این جمله «بدترین مقدار اولیه است» و حال آنکه جمله دوم عبارت است از «بهترین مقدار دوگان»، که در نتیجه دوگان استوار به معنی «بدترین مقدار اولیه برابر است با بهترین مقدار دوگان» با دستیابی دوگان به مقدار بهینه. مخروط گشتاور استوار

$$M^R := \bigcup_{u=(v,w) \in \mathcal{U}} \text{cone} \{(v_t, w_t), t \in T; (0_n, -1)\},$$

را با P_R متناظر می‌کنیم. مشاهده می‌شود که M^R در حالت کلی نه محدب و نه بسته است و با تساوی $K_R = \text{conv } M^R$ با K_R مرتبط می‌شود.

اکنون در وضعیتی هستیم که همتای خوش‌بینانه D^R را با دوگان هار D_R از همتای بدبینانه P به‌شکل

$$D_R : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\text{gph } \mathcal{U}}} \sum_{(t, u_t) \in \text{gph } \mathcal{U}} \lambda_{(t, u_t)} b_{(t, u_t)}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(t, u_t) \in \text{gph } \mathcal{U}} \lambda_{(t, u_t)} a_{(t, u_t)} = \bar{c}.$$

مقایسه کنیم. به‌خاطر آورد (بخش ۱-۲ را ببینید) که D_R با $\sup_{y \in \mathbb{R}} \{y : (\bar{c}, y) \in K_R\}$ معادل است با این مفهوم که هر دو مسئله دارای مقدار بهینه یکسان هستند و هم‌زمان حل‌پذیر هستند یا نیستند. با توجه به قضیه ۱-۲-۶، خواهیم داشت $\nu(P_R) = \nu(D_R)$ هرگاه K_R بسته باشد. اگر M^R بسته و محدب باشد، آنگاه $K_R = \text{conv } M^R = M^R$ نیز بسته خواهد بود و بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nu(P_R) &= \nu(D_R) \\ &= \max \{y : (\bar{c}, y) \in K_R\} \\ &= \max \{y : (\bar{c}, y) \in M^R\} \\ &= \nu(D^R). \end{aligned}$$

از این رو، قضیه دوگانی استوار، قضیه ۳-۱-۱، را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۳-۱-۱ (دوگانی استوار جامع). فرض کنید $F_R \neq \theta$ ؛ در این صورت، دوگانی استوار برای P برقرار است هرگاه مخروط گشتاور استوار M^R بسته و محدب باشد. قضیه بعدی یک نسخه محلی از قضیه دوگانی استوار است.

قضیه ۳-۱-۲ (دوگانی استوار محلی). فرض کنید که LFMCQ برای هر $t \in T$ در نقطه $\bar{x} \in F_R$ برقرار و U_t محدب باشد؛ در این صورت، یک جواب شدنی مانند $(\bar{\lambda}, (\bar{v}, \bar{w}))$ برای D^R موجود است به طوری که داشته باشیم $\bar{c}^T \bar{x} = \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \bar{w}_t$.

نگاشت مجموعه‌ای نقینی در بیشتر وضعیت‌های واقعی به‌شکل

$$U_t := (\bar{a}_t, \bar{b}_t) + \alpha_t Z, t \in T, \quad (7-3)$$

است که در آن $\alpha \in \mathbb{R}_+^T$ ، $(\bar{a}, \bar{b}) \in \Theta := (\mathbb{R}^n)^T \times \mathbb{R}^T$ و $Z \subset \mathbb{R}^{n+1}$ یک مجموعه فشرده است به طوری که $0_{n+1} \in Z$. مجموعه شدنی دستگاه نمادین $\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ را با \bar{F} نشان دهید. از این

پس در این بخش فرض می‌شود که $\bar{F} \neq \emptyset$ (در غیر این صورت مسئله P_R برای هر α ناسازگار است). نقیینه با پیریشیدگی داده تخت در بسیاری از وضعیت‌های واقعی پیش می‌آید. این وضعیت بسیاری از مجموعه‌هایی از داده‌های نقیینه است که معمولاً استفاده می‌شود، همانند مجموعه نقیینه نرم، مجموعه نقیینه جعبه‌ای و مجموعه نقیینه بیضی‌گون را پوشش می‌دهد که مجموعه Z در آن به ترتیب عبارت است از یک گوی واحد، یک جعبه و یک بیضی‌گون (منبع [۱۴] را ببینید). باید شدنی بودن استوار را تضمین کنیم، یعنی سازگاری همتای استوار P_R از طریق شرایطی که می‌تواند برحسب داده بیان شوند. مشاهده می‌شود که هم U و هم P_R به پارامتر $\alpha \in \mathbb{R}_+^T$ بستگی دارند.

ابتدا نگاهی مجموعه‌ای نقیینه U در (۷-۳) با $\alpha \in \mathbb{R}_+$ را بررسی می‌کنیم (در اینجا با یک نگاه ثابت مشخص می‌شود) و $Z = \mathbb{B}$ که در آن مشخص‌کننده گوی واحد با یک نرم مانند $\|\cdot\|$ در \mathbb{R}^{n+1} است، یعنی

$$U_t := (\bar{a}_t, \bar{b}_t) + \alpha \mathbb{B}, \quad t \in T. \quad (۸-۳)$$

مشاهده می‌شود که اگر P_R به‌ازای $\beta > 0$ سازگار باشد، آنگاه P_R به‌ازای هر عدد نامنفی مانند $\beta < \gamma$ نیز سازگار خواهد بود. در نتیجه، مجموعه

$$\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha \text{ سازگار است}\}$$

عبارت است از یک بازه که عضو کمینه آن برابر ۰ است.

شعاع سازگاری همتای استوار وابسته به U عبارت است از

$$\rho(U) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha \text{ سازگار است}\}. \quad (۹-۳)$$

سوپریمم در (۹-۳) نمی‌تواند $+\infty$ باشد؛ زیرا برای یک مقدار معلوم $t \in T$ ، به‌ازای مقدار مثبت و به‌اندازه کافی بزرگ α خواهیم داشت $(0_n, 1) \in (\bar{a}_t, \bar{b}_t) + \alpha \mathbb{B}$ که مسئله نظیر P_R در این حالت سازگار نخواهد بود. به‌علاوه، این سوپریمم ممکن است همیشه مقدار خود را نگیرد. از قضیه بعدی یک دستور برای شعاع سازگاری به‌دست می‌آید که شامل مجموعه‌ای به نام، مجموعه زیرمنحنی نمایش [۴۹] از دستگاه $\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ تعریف‌شده به صورت

$$H(\bar{a}, \bar{b}) := \text{conv} \{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T\} + \mathbb{R}_+ \{(0_n, -1)\}$$

است. چون فرض کردیم که F_R سازگار است، $\bar{F} \neq \emptyset$. پس با توجه به قضیه وجودی، 0_{n+1} نمی‌تواند یک نقطه درونی مخروط مشخصه $\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ باشد که به‌روشنی شامل

است. بنابراین، اگر فاصله نظیر $\|\cdot\|$ را با d نشان بدهیم، خواهیم داشت

$$d(0_{n+1}, \text{bd } H(\bar{a}, \bar{b})) = d(0_{n+1}, \text{cl } H(\bar{a}, \bar{b}))$$

قضیه ۳-۱-۳ (محاسبه شعاع سازگاری). فرض کنید \mathcal{U} همانند مجموعه انتخاب شده در (۳-۸) باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\rho(\mathcal{U}) = d(0_{n+1}, \text{cl } H(\bar{a}, \bar{b}))$$

اگر هر یک از شرایط در ادامه را داشته باشیم:

(۱) مجموعه $\{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T\}$ کران‌دار است بدون نقاط مجزا،

(۲) مجموعه \mathbb{B} عبارت باشد از گوی واحد اقلیدسی و مجموعه $\{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T\}$ فشرده باشد،

(۳) مجموعه \mathbb{B} عبارت باشد از یک چندوجهی کران‌دار و مجموعه $\{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T\}$ متناهی باشد.

نامساوی $\rho(\mathcal{U}) \leq d(0_{n+1}, \text{cl } H(\bar{a}, \bar{b}))$ از شناسایی انتخاب‌های \mathcal{U} با پیریشیدگی‌های (\bar{a}, \bar{b}) و استفاده از قضیه ۶-۲-۲ نتیجه می‌شود (که برای هر نرم در \mathbb{R}^{n+1} درست است). به یاد آورید که اگر دستگاه نمادین $\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ پیوسته و نیز گوی واحد \mathbb{B} برای نرم‌های $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_1$ یک چندوجهی کران‌دار باشد، آنگاه مجموعه $\{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T\}$ فشرده خواهد بود. مثال ۱.۱ در ادامه چگونگی محاسبه $d_\gamma(0_{n+1}, \text{cl } H(\bar{a}, \bar{b}))$ مربوط به مثال ۱.۱ را نشان می‌دهد.

قضیه ۳-۱-۴ (قابلیت دستیابی شعاع سازگاری). اگر $0^+ \bar{F}$ عبارت باشد از یک زیرفضای خطی، آنگاه سوپریم در (۳-۹) به دست می‌آید.

چگونگی اثبات. بدون هیچ خللی در کلیت، فرض کنید $\rho(\mathcal{U}) > 0$. اگر $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_{++}$ چنان باشد که $\alpha_k \rightarrow \rho(\mathcal{U})$ ، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ عضو $x_k \in \mathbb{R}^n$ موجود است به طوری که برای هر $t \in T$ داریم:

$$\nu_t^T x_k - w_t \geq 0, \quad (\nu_t, w_t) \in (\bar{a}_t, \bar{b}_t) + \alpha_k \mathbb{B}$$

که در نتیجه برای هر $t \in T$ خواهیم داشت:

$$\bar{a}_t^T x_k - \bar{b}_t + \inf_{(c_t, d_t) \in \mathbb{B}} \alpha_k (c_t^T x_k - d_t) \geq 0.$$

فرض کنید $\gamma, \delta \in \mathbb{R}_{++}$ چنان باشند که داشته باشیم $\gamma \mathbb{B}_\gamma \subset \mathbb{B} \subset \delta \mathbb{B}_\delta$ ؛ در این صورت خواهیم داشت:

$$\inf_{(c_t, d_t) \in \mathbb{B}} \alpha_k (c_t^T x_k - d_t) \geq \inf_{(c_t, d_t) \in \delta \mathbb{B}_\delta} \alpha_k (c_t^T x_k - d_t) \geq -\delta \alpha_k \|(x_k, -1)\|_\gamma.$$

و بنابراین برای هر $t \in T$ خواهیم داشت:

$$\bar{a}_t^T x_k - \bar{b}_t - \delta \alpha_k \| (x_k, -1) \|_2 \geq 0. \quad (10-3)$$

چون دنباله $(x_k)_{k=1}^\infty$ کران‌دار است، پس بدون هیچ خللی در کلیت، می‌توان فرض کرد $x_k \rightarrow \bar{x}$. اگر از (10-3) حد بگیریم، آنگاه برای هر $t \in T$ خواهیم داشت $\bar{a}_t^T \bar{x} - \bar{b}_t - \delta \rho(\mathcal{U}) \| (\bar{x}, -1) \|_2 \geq 0$ که در نتیجه $\bar{x} \in F_R$. بنابراین، سوپریم مقدار خود را در (9-3) می‌گیرد (برای شرح مفصل‌تر به گزاره ۷.۳ در [۹۶] مراجعه کنید).

مشاهده می‌شود که برای انتخاب (\bar{a}, \bar{b}) نظیر قید دستگاہ در مثال ۱.۱ خواهیم داشت $0_2^+ \bar{F} = \{0_2\}$ ، که در نتیجه سوپریم در (9-3) به دست می‌آید. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که اگر α عبارت باشد از یک تابع کران‌دار، آنگاه برای قالب (7-3) خواهیم داشت $\rho(\mathcal{U}) > 0$ و اثبات آن با توجه به قضیه 3-1-3 آسان است.

نتیجه ۱.۳ (سازگاری همتای استوار). فرض کنید که \mathcal{U} در (7-3) چنان باشد که برای هر $z \in Z$ داشته باشیم $\|z\| < \mu$ و نیز فرض می‌کنیم که (\bar{a}, \bar{b}) و \mathbb{B} در یکی از شرایط (۱) تا (۳) از قضیه 3-1-3 صدق کند؛ در این صورت، برای هر $P_R \in \mathbb{R}_+^T$ ، سازگار است که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sup_{t \in T} |\alpha_t| \leq \mu^{-1} d(0_{n+1}, \text{cl } H(\bar{a}, \bar{b})).$$

سرانجام در این بخش، به چند مطلب مربوط به بررسی عددی P_R می‌پردازیم. به روشنی، P_R پیوسته است اگر و تنها اگر T_R فشرده باشد که مسئله P_R را در این حالت می‌توان از طریق گسسته‌سازی حل کرد. با توجه به ویژگی‌های مربوط به مجموعه شدنی F_R ، به یاد آورید که از شناسایی ویژگی‌های مجموعه شدنی یک دستگاہ خطی بر حسب مخروط مشخصه آن و (3-3) نتیجه می‌شود که F_R عبارت است از یک شکل محدب اگر و تنها اگر بست مخروط T_R ، $\text{cl cone } T_R$ ، نوک‌دار باشد و $(0_n, -1) \in \text{int cone } T_R$ که در این حالت مسئله P_R را می‌توان با الگوریتم تولید قید نقطه درونی حل کرد. به همین سبک، در رابطه با مجموعه بهینه، S_R کران‌دار است اگر و تنها اگر با توجه به (نتیجه ۹.۳.۱ در [۱۰۲]) داشته باشیم $\bar{c} \in \text{int cone Proj}_{\mathbb{R}^n}(T_R)$ که مسئله P_R را در این حالت می‌توان با برخی الگوریتم صفحه برش مرکزی حل کرد. قضیه بعدی به قابل رام‌شدن همتای استوار تحت نقیصی با پریشیدگی داده تخت (آفینی) مربوط می‌شود.

قضیه ۵-۱-۳ (رام‌شدنی همتای استوار). فرض کنید \mathcal{U} به صورت (۷-۳) با $\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ پیوسته، $\alpha \in \mathcal{C}(T)$ و $Z \subset \mathbb{R}^{n+1}$ فشرده باشد؛ در این صورت، خواهیم داشت:

(۱) P_R پیوسته است اگر سازگار باشد،

(۲) اگر Z محدب باشد و $\alpha \in \mathbb{R}_{++}^T$ ، آنگاه P_R در فرض چگالی صدق می‌کند،

(۳) اگر $Z = \text{conv} \{(r_i, s_i), i \in I\}$ ، که در آن I یک مجموعه متناهی است، آنگاه

$$F_R = \{x \in \mathbb{R}^n : (\bar{a}_t + \alpha_t r_i)^T x \geq \bar{b}_t + \alpha_i s_i, (t, i) \in T \times I\}. \quad (۱۱-۳)$$

فرض (۲) تضمین می‌کند که P_R بتواند از طریق گسسته‌سازی شبکه حل شود. فرض در گزاره (۳) برقرار است. مثلاً هرگاه داشته باشیم $Z = \mathbb{B}_\infty$ با $I = \{1, \dots, 2^n\}$. مثال بعدی نشان می‌دهد که از (۱۱-۳) می‌توان یک دستورسازی دوباره از P_R را به صورت یک مسئله LSIO با یک مجموعه شاخص هم بعد با T به دست آورد.

مثال ۲.۳ مسئله نقینی LSIO در مثال ۱.۳ با یک خطای تقریبی نایب‌تر از یک مقدار معلوم $\alpha \in [0, 1]$ را در نظر بگیرید. بنابراین، مسئله P_R همانند مسئله در (۳-۴) را خواهیم داشت. به علاوه، چون $\mathbb{B}_\infty = \text{conv} \{(\pm 1, \pm 1)\}$ ، بنابراین از قسمت (۳) از قضیه ۵-۱-۳ می‌توان مسئله P_R را دوباره به صورت

$$P^1_R : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 - x_2$$

s.t.

$$(\alpha - \cos t)x_1 + (\alpha - \sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$-(\alpha + \cos t)x_1 + (\alpha - \sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}], \quad (۱۲-۳)$$

$$(\alpha - \cos t)x_1 + (\alpha + \sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

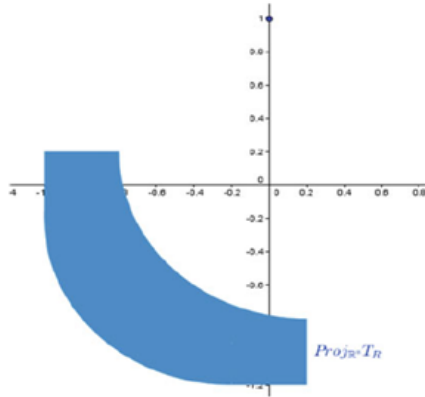
$$-(\alpha + \cos t)x_1 - (\alpha + \sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$x_1 \geq 0 \quad (t = 2), \quad x_2 \geq 0 \quad (t = 3),$$

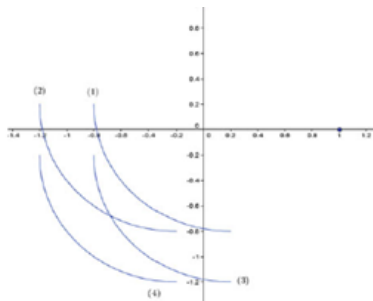
دستورسازی کرد که در آن می‌توانیم به جای بازه‌های با شاخص یکسان در (۱۲-۳) به ترتیب^۱ قرار دهیم $T_1 = [0, \frac{\pi}{4}]$ ، $T_2 = [2\pi, \frac{5\pi}{4}]$ ، $T_3 = [4\pi, \frac{9\pi}{4}]$ و $T_4 = [6\pi, \frac{13\pi}{4}]$. با این روش، یک

^۱ نکته. در کتاب شاخص متغیر دوم، «یک» نوشته شده بود که اصلاح شد (مترجم).

مسئله معادل LSIO پیوسته مانند P_R^Y را به‌دست می‌آوریم که مجموعه شدنی آن F_R^Y با بعد کامل و فشرده است (چون P_R^Y در SCQ صدق می‌کند و $F_R^Y \subset \bar{F}$ ، مجموعه جواب آن، S^Y نیز فشرده است و مجموعه شاخص آن، $\{2, 3\} \cup (\bigcup_{i=1}^4 T_i)$) در فرض چگال بودن صدق می‌کند و در داخل بازه یک بعدی $[0, 21]$ قرار دارد. شکل‌های ۱-۳ و ۲-۳ مجموعه بردار ضرایب طرف راست، LHS، مسئله P_R^Y و P_R^Y (مولدهای، به‌ترتیب، از مخروط‌های گشتاور اول M_R و M_R^Y) برای $\alpha = 0.2$ نمایش داده شده‌اند (خم‌های در شکل ۲-۳ مطابق شاخص‌های بازه‌ها برچسب خورده‌اند). بدین‌ترتیب، مسئله P_R^Y می‌تواند با روش‌های گسسته‌سازی شبکه، صفحه برش مرکزی و الگوریتم تولید قید نقطه درونی حل شود.



شکل ۱-۳ مولدهای M_R



شکل ۲-۳ مولدهای M_R^Y

یادآوری ۱-۳-۶ (پیشینه و تعمیم‌ها). رام‌شدنی همتای استوار مسئله‌های به‌گزینی معمولی در [۱۴-۱۶] و غیره تجزیه و تحلیل شده‌اند، در صورتی‌که مسئله‌های دوگان استوار مربوط به LO و به‌گزینی محدب معمولی

در [۱۲] و [۱۵۰] از جمله سایر مقالات ارائه شده‌اند. اثبات قضیه‌های ۱-۱-۳ و ۲-۱-۳ را می‌توان در (قضیه ۱ از [۹۵]) و (نتیجه ۲.۷ از [۹۶]) یافت. قضیه ۳-۱-۳ (۲)، همان قضیه ۳.۳ از [۹۶] است و حال‌آنکه گزاره‌های (۱) و (۳) را می‌توان از بحث‌های در (یادآوری ۳.۴، از [۹۶]) به‌دست آورد. گزاره ۳.۷ از [۹۶] به‌وسیله قضیه ۴-۱-۳ برای نرم‌های دلخواه تعمیم داده می‌شود، در صورتی‌که قضیه ۵-۱-۳ عبارت است از برابری (گزاره ۴.۲ از [۹۶]). در (گزاره ۱ از [۹۵]) نشان داده می‌شود که M^R در حالتی محدب است که نقینی داده به‌صورت تخت (آفینی) پارامترسازی شود (این حالت همانند تعریف در [۱۴] تعریف می‌شود) و حال‌آنکه (گزاره ۲ از [۹۵]) نشان می‌دهد که M^R ، تحت یک SCQ استوار همراه با شرایط مناسب توپولوژیکی روی مجموعه شاخص و مجموعه نقینی این مسئله، بسته است.

قضیه‌های دوگانی مربوط به مسئله استوار چندهدفه LSIO تحت قیده‌های نقینی را می‌توان در [۹۶] و مربوط به مسئله‌های به‌گزینی استوار محدب طرح‌شده در فضاهاى محدب محلی را در [۲۷] یافت. مقاله دوّمی شامل یک کاربرد برای مسئله‌های بهترین تقریب با قید داده نقینی است. یک تعمیم از قضیه ۵-۱-۳ برای مسئله استوار چندهدفه LSIO را می‌توان در (گزاره ۱۵ از [۹۶]) یافت.

۲-۳ هدف نقینی

مجموعه شدنی و مخروط گشتاور اول $\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, t \in T\}$ را با \bar{F} و \bar{M} و پشتیبان تابع C را با σ_C نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $\bar{F} \neq \emptyset$ ؛ در این صورت، همتای استوار مسئله P عبارت است از مسئله CSIO به‌شکل

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sigma_C(x) = \sup_{c \in C} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq b_t, \quad t \in T$$

یا به‌طور معادل، مسئله LSIO به‌شکل

$$P_R : \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}} y$$

$$\text{s.t.} \quad -c^T x + y \geq 0, \quad c \in C, \quad (13-3)$$

$$\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T,$$

و در نتیجه $(0_n, 1)$ ، $c_R = (0_n, 1)$ ، $F_R = \text{epi } \sigma_C \cap (\bar{F} \times \mathbb{R})$ ، $T_R = T \cup C$ (بدون هیچ خللی در کلیت، می‌توان فرض کرد که $C \cap T = \emptyset$)،

$$\begin{aligned} M_R &= (\text{cone } \{(-C) \times \{1\}\} \cup \{(\bar{a}_t, 0) : t \in T\}) \\ &= (\bar{M} \times \{0\}) + \text{cone } \{(-C) \times \{1\}\}, \end{aligned}$$

و

$$K_R = \text{cone } [((-C) \times \{1\} \times \{0\}) \cup \{(\bar{a}_t, 0, \bar{b}_t) : t \in T\} \cup \{(0_n, 0, -1)\}].$$

به روشنی، P_R سازگار است اگر و تنها اگر داشته باشیم $\bar{F} \cap \text{dom } \sigma_C \neq \emptyset$. به ویژه P_R سازگار است هرگاه C کران‌دار باشد. نظریهٔ دوگانی استوار عبارت است از یک مشخصهٔ ساده از مخروط نشان‌داده‌شده در بخش ۱-۳، تنها با تعریف نگاهت مجموعه‌ای نقیصی \mathbb{R}^{n+1} $U : T \cup \{t_0\} \Rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ با $t_0 \notin T$ ، به طوری که $U_t = (-C) \times \{1\} \times \{0\}$ و برای هر $t \in T$ داشته باشیم $U_t = \{(\bar{a}_t, 0, \bar{b}_t)\}$. با توجه به بررسی مناسب عددی P_R ، این دستور به ویژگی مربوط به آن: پیوستگی دستگاه قیدی، فرض چگال بودن، کران‌داری مجموعهٔ بهینهٔ S_R و کران‌داری و کامل بودن بعد F_R بستگی دارد.

معمولاً، برای برخی مقادیر $m \leq n$ داریم $T \subset \mathbb{R}^m$ و $C = \bar{c} + \alpha Z$ ، که در آن $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ و Z عبارت است از یک مجموعهٔ کران‌دار داده‌شده از \mathbb{R}^n . برای نمونه، اگر Z برحسب یک نرم، مثلاً $\|\cdot\|_*$ ، یک گوی واحد بسته در \mathbb{R}^n باشد، آنگاه C عبارت خواهد بود از یک گوی به مرکز \bar{c} ، σ_C مقدار متناهی است و $\|\cdot\|_*$ که $\sigma_C(x) = \bar{c}_t^T x + \alpha \|x\|_*$ در آن نشان‌دهندهٔ نرم دوگان است^۱ (به یاد آورید که $\|\cdot\|_2$ بر نرم دوگان منطبق است و حال آنکه $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ دوگان یکدیگر هستند). از طریق دیگر، اگر Z عبارت باشد از یک ضرب کارتیزین (احتمالاً تباهیده) بازه‌های بسته شامل 0 ، آنگاه C عبارت است از یک جعبه که لزومی ندارد نسبت به \bar{c} متقارن باشد. در هریک از دو حالت، بدون هیچ خللی در کلیت، می‌توان فرض کرد که $T \subset \mathbb{R}^n$ (در غیر این صورت می‌توان به جای T قرار داد $C \cap T = \emptyset$ و $(T \times \{0_{n-m}\})$ اگر مسئلهٔ نمادین \bar{P} در (۲-۲) پیوسته باشد، آنگاه P_R نیز پیوسته خواهد بود. به علاوه، اگر \bar{P} در فرض چگال بودن صدق کند (مثلاً T محدب باشد)، آنگاه T_R نیز در فرض چگال بودن صدق خواهد کرد. در رابطه با بعد T_R ، بعد آن عبارت است از بیشینهٔ بعدهای T و C . اگر $x \in F$ ، آنگاه $(x, \max_{c \in C} c^T x) \in F_R$ که در نتیجه P_R سازگار است (با مجموعهٔ شدنی بیکران

۱. اندیس «*» در سمت راست و پایین علامت از قلم افتاده بود که اصلاح شد (مترجم).

(F_R) اگر و تنها اگر \bar{P} سازگار باشد. در پایان، S_R کران‌دار است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$(0_n, 1) \in \text{int} [(\bar{M} \times \{0\}) + \text{cone} \{(-C) \times \{1\}\}]. \quad (14-3)$$

مثال ۳.۳ همان مسئله در مثال ۲.۳ را در نظر بگیرید، ولی اکنون فرض کنید که سرچشمه نقیینه عبارت باشد از تابع هدف. فرض کنید \mathbb{B}_2 ، $C = (-1, -1) + \alpha \mathbb{B}_2$ ، $\alpha \in [0, 1]$ ، در این صورت، هم‌تای استوار P عبارت است از

$$P_R : \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} y$$

s.t.

$$(1 - \alpha u_1)x_1 + (1 - \alpha u_2)x_2 + y \geq 0, \quad u \in \mathbb{B}_2,$$

$$-(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, \quad (t, v) \in [0, \frac{\pi}{4}] \times [2, 3],$$

$$x_1 \geq 0 \quad (t = (2, 0)), \quad x_2 \geq 0 \quad (t = (3, 0)).$$

به‌روشنی، P_R پیوسته است، مجموعه شاخص $\mathbb{B}_2 \cup [0, \frac{\pi}{4}] \times [2, 3] \cup \{(2, 0), (3, 0)\}$ در فرض چگالی صدق می‌کند و در داخل بازه دوبعدی $[0, 3]^2$ قرار دارد و مجموعه شدنی آن عبارت است از یک مجموعه بسته بیکران. به‌علاوه، چون $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \bar{M} \times \{0\} + \text{cone} \{(-C) \times \{1\}\}$ ، $(1, 1, 1) \in (-C) \times \{1\}$ پس، $(\bar{M} \times \{0\}) + \text{cone} \{(-C) \times \{1\}\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ ، بنابراین، (۱۴-۳) برقرار و مجموعه بهینه کران‌دار است. در نتیجه مسئله P_R را می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های گسسته‌سازی شبکه یا صفحه برش مرکزی حل کرد.

یادآوری ۳-۲-۷ (پیشینه‌ها و تعمیم‌ها). خواننده را به پیشینه‌های اشاره‌شده در یادآوری ۳-۱-۶ ارجاع می‌دهیم. به‌ویژه (نتیجه ۲، [۹۵])، یک قضیه دوگانی استوار مربوط به مسئله LSIO با تابع هدف و قیدهای نقیینه را ثابت می‌کند. مسئله‌های چندهدفه استوار LO با تابع هدف نقیینه در [۹۷] تجزیه و تحلیل شده است.

یادآوری ۳-۲-۸ (دو مسئله حل‌نشده در مسئله LSIO استوار).

۱. تجزیه و تحلیل پیچیدگی هم‌تاهای استوار انواع ویژه‌ای از مسئله‌های LSIO.
۲. تجزیه و تحلیل منظم رام‌شدنی هم‌تاهای استوار از انواع ویژه‌ای از مسئله‌های LSIO.

تجزیه و تحلیل حساسیت

از این پس، فرض می‌شود که یک مسئله نمادین سازگار LSIO مانند \bar{P} همانند مسئله در (۲-۲) با مسئله دوگان

$$\begin{aligned} \bar{D} : & \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^T} \sum_{t \in T} \lambda_t \bar{b}_t \\ \text{s.t.} & \sum_{t \in T} \lambda_t \bar{a}_t = \bar{c} \\ & \lambda_t \geq 0, t \in T. \end{aligned}$$

داده شده باشد. نمایش پارامتری \bar{P} در فضای پارامترهای $\Pi = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^T \times \mathbb{R}^T$ را با $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ ، مخروط گشتاور اول \bar{P} را با $M(\bar{\pi}) = \text{cone} \{\bar{a}_t, t \in T\}$ و مخروط مشخصه \bar{P} را با $K(\bar{\pi}) = \text{cone} \{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T; (0_n, -1)\}$ نشان می‌دهیم. برای هر سه تایی مرتب $\pi = (c, a, b) \in \Pi$ یک مسئله پرسیده LSIO مانند $\bar{\pi}$ را در نظر می‌گیریم که اولیه آن به صورت

$$\begin{aligned} P(\pi) : & \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \\ \text{s.t.} & a_t^T x \geq b_t, t \in T, \end{aligned}$$

و دوگان آن به شکل

$$\begin{aligned} D(\pi) : & \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^T} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ \text{s.t.} & \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \end{aligned}$$

$$\lambda_t \geq 0, t \in T.$$

است. به یاد آورید که $\mathcal{F}(\pi)$ ، $\mathcal{S}(\pi)$ و $\vartheta(\pi)$ به ترتیب نشان‌دهنده مجموعه‌های شدنی و بهینه $P(\pi)$ و مقدار بهینه آن هستند. به همین ترتیب $\mathcal{F}^D(\pi)$ ، $\mathcal{S}^D(\pi)$ و $\vartheta^D(\pi)$ مقادیر نظیر مسئله دوگان $D(\pi)$ هستند.^۱

هدف از این فصل عبارت است از تعیین ناحیه‌های تخت بودن (آفینی بودن) تحدید توابع مقادیر بهینه ϑ (یا ϑ^D) مربوط به زیرفضای Π و برآوردهای آن‌ها تحت سه نوع مختلف پریشیدگی داده‌نمادین $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$.

۱-۴ پریشیدن تابع هدف

فرض کنید تنها تابع هدف \bar{P} می‌تواند پریشیده شود. در این صورت، اعضای پارامترها متشکل هستند از سه‌تایی‌هایی به شکل $\pi = (c, \bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{R}^n$ ، یعنی می‌توانیم زیرفضای پارامترها را با \mathbb{R}^n مشخص کنیم.

مسئله‌های پریشیده‌شده P و D را که باید در این بخش بررسی کنیم، به ترتیب عبارت‌اند از

$$P(c) : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{a}_t x \geq \bar{b}_t, t \in T,$$

و

$$D(c) : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \lambda_t \bar{b}_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t \bar{a}_t = c,$$

با مجموعه‌های بهینه $\mathcal{F}(c)$ و $\mathcal{F}^D(c)$ و مقادیر بهینه $\vartheta(c)$ و $\vartheta^D(c)$ (به روشنی، اگر \bar{P} پیوسته باشد، آنگاه $P(c)$ نیز پیوسته خواهد بود). با این نمادگذاری، دامنه مؤثر مقدار بهینه تابع دوگان ϑ^D ، عبارت است از مخروط گشتاور اول $M(\bar{\pi})$ و مقادیر بهینه مسئله نمادین \bar{P} و دوگان آن \bar{D} به ترتیب عبارتند از $\vartheta(\bar{c})$ و $\vartheta^D(\bar{c})$. نگاشت مجموعه‌ای $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$: $\partial\vartheta$ به هر $c \in \mathbb{R}^n$ یک زیردیفرانسیل مقعر از مقدار بهینه تابع ϑ در c نسبت می‌دهد.

۱. به نظر می‌آید که به جای π باید $\bar{\pi}$ نوشته شود چون مسئله پریشیده مورد بررسی است (مترجم).

از قضیه بعدی یک برآورد از نمو $\nu(\bar{c}) = \nu(\bar{P})$ به دست می آید هرگاه فقط تابع هدف \bar{P} پربشیده شود.

قضیه ۱-۱-۴ (برآورد مقدار بهینه). فرض کنید \bar{P} عبارت باشد از یک مسئله سازگار LSIO با مخروط مشخصه $K(\bar{\pi})$ ، در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{hypo } \vartheta^D = K(\bar{\pi}) \quad (۱)$$

$$\text{hypo } \vartheta = \text{cl } K(\bar{\pi}) \quad (۲)$$

$$\text{rint } M(\bar{\pi}) \subset \text{dom } \vartheta \subset \text{cl } M(\bar{\pi}) \quad (۳)$$

$$\partial\vartheta = \mathcal{S} \quad (۴)$$

$$c \in \text{int } M(\bar{\pi}) \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{S}(c) \text{ کران دار باشد.} \quad (۵)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که تابع مقعر ϑ عبارت است از پوسته usc از ϑ^D . از (۳)، (۴) و (قضیه ۲۳.۴ از [۲۰۵]) یک عبارت برای مشتق جهتی ϑ در $c \in \text{rint } M(\bar{\pi}) = \text{rint dom } \vartheta$ را به دست می آوریم که در آن $\text{dom } \vartheta = \{c \in \mathbb{R}^n : \vartheta(c) > -\infty\}$: به ازای یک جهت داده شده $d \in \mathbb{R}^n$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \vartheta'(c; d) &:= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\vartheta(c + \lambda d) - \vartheta(c)}{\lambda} = - \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{-\vartheta(c + \lambda d) + \vartheta(c)}{\lambda} \\ &= -(-\vartheta)'(c; d) = - \sup_{u \in \partial(-\vartheta)(c)} d^T u = \inf_{x \in \mathcal{S}(c)} d^T x. \end{aligned} \quad (۱-۴)$$

به ویژه، با توجه به (۵)، اگر $c \in \text{int } M(\bar{\pi})$ ، آنگاه خواهیم داشت $\vartheta'(c; d) = \min_{x \in \mathcal{S}(c)} d^T x$. با به کارگیری (۱-۴) برای \bar{P} به طوری که $\bar{c} \in \text{int } M(\bar{\pi})$ ، نتیجه خواهیم گرفت که یک برآورد مناسب از $\vartheta(c)$ برای یک مقدار c در نزدیکی \bar{c} به صورت

$$\vartheta(c) \simeq \vartheta(\bar{c}) + \inf_{x \in \mathcal{S}(\bar{c})} \langle c - \bar{c}, x \rangle, \quad (۲-۴)$$

به دست می آید. اگر $\bar{c} \in \text{int } M(\bar{\pi})$ و مسئله \bar{P} دارای یک جواب بهینه یکتا مانند \bar{x} باشد، از (۴) و (۲-۴) نتیجه می شود که ϑ در \bar{c} مشتق پذیر است به طوری که $\nabla\vartheta(c) = \{\bar{x}\}$ و $\vartheta(c) \simeq \vartheta(\bar{c}) + \langle c - \bar{c}, \bar{x} \rangle$

قضیه های رایج مربوط به تجزیه و تحلیل حساسیت در LO به وسیله سه قضیه بعدی برای مسئله LSIO تعمیم داده می شود که دستورات دقیق در آن برای $\vartheta(c)$ در نزدیکی پارامتر نمادین \bar{c} داده شده است. تعمیم این قضیه ها برای مسئله LSIO به معرفی مفاهیم مناسب افزاز نیاز دارد.

به‌ازای یک تابع تعمیم‌یافته همگن مثبت محدب یا مقعر مانند f ، مخروط تخت f در $\{0_n\} \setminus (\text{dom } f)$ را به‌صورت بزرگ‌ترین مخروط محدب به‌طور نسبی باز شامل z تعریف می‌کنیم و آن را با L_z نشان می‌دهیم که تابع f روی آن تخت است (یعنی هم‌زمان محدب و نیز مقعر است). یک بحث مبتنی بر ابزار آنالیز محدب نشان می‌دهد که گردایه

$$\mathcal{L}(f) := \{L_z : z \in (\text{dom } f) \setminus \{0_n\}\}$$

از مخروط‌های تخت از یک تابع همگن مثبت محدب مانند $\bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n : f$ یک افراز از $\{0_n\} \setminus (\text{dom } f)$ را تشکیل می‌دهد. بنابراین به $\mathcal{L}(f)$ می‌گوییم افراز تخت f . چون این حکم برای توابع همگن مثبت مقعر تعریف‌شده برقرار و ϑ عبارت است از یک تابع زبرخطی (یعنی همگن مثبت مقعر به‌شکل USC، پس قضیه بعدی را خواهیم داشت.

قضیه ۲-۱-۴ (افراز تخت تابع مقدار بهینه). دسته مخروط‌های به‌طور نسبی باز $\mathcal{L}(\vartheta)$ یک افراز از $\{0_n\} \setminus (\text{dom } \vartheta)$ را در ناحیه‌هایی تشکیل می‌دهد که تابع ϑ تخت باشد.

بدین ترتیب، $L_{\bar{c}} \in \mathcal{L}(\vartheta)$ عبارت است از بزرگ‌ترین مجموعه به‌طور نسبی باز (درحقیقت یک مخروط محدب) که ϑ روی آن تخت است. این اطلاعات دقیق‌تر از اطلاعاتی است که از (۲-۴) به‌دست می‌آید، اما آن فقط برای یک همسایگی از \bar{c} به‌کار می‌رود اگر $L_{\bar{c}}$ با بعد کامل باشد. این وضعیت در قضیه بعدی بررسی می‌شود.

قضیه ۳-۱-۴ (تخت بودن روی همسایگی‌ها). تابع ϑ روی برخی همسایگی \bar{c} تخت است اگر و تنها اگر \bar{P} دارای یک جواب قوی و یکتا باشد. در چنین حالتی، اگر $\mathcal{S}(\bar{c}) = \bar{x}$ ، آنگاه برای هر $c \in L_{\bar{c}}$ خواهیم داشت $\vartheta(c) = \langle \bar{x}, c \rangle$ (یک مخروط محدب باز شامل \bar{c}).

از تلفیق قضیه ۳-۱-۴ با تساوی

$$\nu(\bar{P}) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{y : (c, y) \in \text{cl } K(\bar{\pi})\}$$

مشخصه هندسی وجود جواب قوی یکتا را به‌صورت نتیجه بعدی به‌دست خواهیم آورد.

نتیجه ۱۰۴ مسئله \bar{P} دارای یک جواب قوی یکتاست اگر و تنها اگر نقطه

$$(\bar{c}, \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{y : (c, y) \in \text{cl } K(\bar{\pi})\}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

متعلق به درون نسبی یک وجهک $\text{cl } K(\bar{\pi})$ باشد.

$$P(c) : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$x_1 \geq 0 \quad (t = 2), \quad x_2 \geq 0 \quad (t = 3).$$

را در نظر بگیرید. افراز تخت $\mathcal{L}(\vartheta)$ از ϑ به وسیله تصویرهای حاصل از $\text{Proj}_{\mathbb{R}^2}$ از وجه‌های آشکار $\text{hypo } \vartheta = \text{cl } K(\bar{\pi})$ تشکیل می‌شود که مبدأ را حذف می‌کند (شکل ۴-۱ را ببینید) که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\dim L_c = \begin{cases} 1, & c \in [\mathbb{R}_-^2 \cup (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+)] \setminus \{0\}, \\ 2. & \text{وگرنه.} \end{cases}$$

مخروط‌های خطی بودن مربوط به سه تابع هدف مختلف در نظر گرفته شده در مثال ۱.۱ عبارتند از:

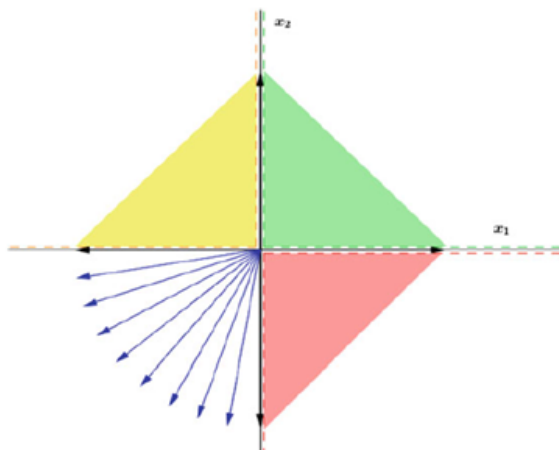
- حالت (الف) $\bar{c} = (1, 1)$: روی مخروط محدب $L_{\bar{c}} = \mathbb{R}_{++}^2$ داریم $\vartheta \equiv 0$. چون ϑ روی یک همسایگی $L_{\bar{c}}$ از \bar{c} تخت است، پس $P(\bar{c})$ دارای یک جواب بهینه قوی یکتاست (مبدأ 0_{ϑ}).
- حالت (ب) $\bar{c} = (-1, -1)$: که برای تمامی $c \in L_{\bar{c}} = \mathbb{R}_{++}(-1, -1)$ داریم $\vartheta(c) = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}}$.
- حالت (پ) $\bar{c} = (1, 0)$: که برای هر $c \in L_{\bar{c}} = \mathbb{R}_{++}(1, 0)$ داریم $\vartheta(c) = 0$.

جدول ۴-۱، ارتباط نزدیک بین مخروط‌های تخت از نقطه $\{0_{\vartheta}\} \setminus \mathbb{R}^2$ و افرازهای بهینه-بیشینه و مجموعه‌های بهینه $P(c)$ را نشان می‌دهد. به عبارت دقیق‌تر، تمامی مسئله‌های $P(c)$ متناظر با بردارهای c از یک مخروط تخت $L \in \mathcal{L}(\vartheta)$ دارای افراز بهینه-بیشینه یکسان هستند. این حکم نمی‌تواند کلی باشد؛ چون مسئله‌های LSIO ممکن است دارای افراز بهینه باشند یا نباشند.

به موجب تعریف $\mathcal{L}(\vartheta)$ ، روشن است که اگر $\{c^i, i \in I\} \subset L \in \mathcal{L}(\vartheta)$ ، آنگاه نتیجه می‌شود که ϑ روی مخروط $\{c^i, i \in I\}$ تخت است. قضیه بعدی یک همتای این گزاره شامل افراز بهینه است (در مثال ۱.۴، مسئله‌های وابسته به $\{c^i, i \in I\}$ ، افراز بهینه-بیشینه یکسان دارند اگر و تنها اگر مجموعه $\{c^i, i \in I\}$ در داخل برخی عنصر افراز تخت قرار گیرد).

قضیه ۴-۱-۴ (تخت بودن روی چندوجهی کران‌دار). فرض کنید $\{c^i, i \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ با متناهی بودن I چنان باشد که یک افراز بهینه مشترک برای خانواده مسئله‌هایی مانند $\{P(c^i), i \in I\}$ موجود

باشد (مثلاً، آن‌ها دارای افراز بهینه-بیشینه باشند)؛ در این صورت ϑ روی $\text{conv} \{c^i, i \in I\}$ تخت است.



شکل ۴-۱ افراز مخروط‌های تخت

جدول ۴-۱ افراز تخت در مثال ۴.۱

مجموعه بهینه	افراز بهینه-بیشینه	مخروط تخت
\mathbb{R}_{++}^2	$([\circ, \frac{\pi}{4}], \{2, 3\}, \emptyset)$	$\{0_2\}$
$\{0\} \times \mathbb{R}_{++}$	$([\circ, \frac{\pi}{4}] \cup \{2\}, \{3\}, \emptyset)$	$[\circ, 1] \times \{0\}$
$\mathbb{R}_{--} \times \mathbb{R}_{++}$	$([\circ, \frac{\pi}{4}] \cup \{2\}, \{0, 3\}, \emptyset)$	$\{(1, 0)\}$
$\mathbb{R}_{--} \times \{0\}$	$([\circ, \frac{\pi}{4}] \cup \{2\}, \{0\}, \{3\})$	$\{(1, 0)\}$
$\mathbb{R}_{++} + c, c \in \mathbb{R}_{--}^2$	$(T \setminus \{\alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset), \alpha = \arctan(\frac{c_2}{c_1})$	$\{(-\frac{c_1}{\ c\ _2}, -\frac{c_2}{\ c\ _2})\}$
$\{0\} \times \mathbb{R}_{--}$	$([\circ, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}, \{\frac{\pi}{4}\}, \{3\})$	$\{(0, 1)\}$
$\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{--}$	$([\circ, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}, \{\frac{\pi}{4}, 2\}, \emptyset)$	$\{(0, 1)\}$
$\mathbb{R}_{++} \times \{0\}$	$([\circ, \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}, \{2\}, \emptyset)$	$\{0\} \times [0, 1]$

از شیوه دوگانی برای تجزیه و تحلیل حساسیت، تحت فرض‌هایی که وجود افزایش بهینه را نتیجه می‌دهد، به صورت قضیه بعدی روی تخت بودن در امتداد پاره‌خطها بیان می‌شود.

قضیه ۴-۱-۵ (تخت بودن در امتداد پاره‌خطها). تابع ϑ روی یک پاره‌خط منشعب از \bar{c} در جهت $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ تخت است اگر \bar{P} و \bar{D} حل‌پذیر باشند، $\nu(\bar{P}) = \nu(\bar{D})$ و مسئله

$$\bar{D}_d : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \mu \in \mathbb{R}} \sum_{t \in T} \lambda_t \bar{b}_t + \mu \nu(\bar{P})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t \bar{a}_t + \mu \bar{c} = d,$$

نیز حل‌پذیر باشد و داشته باشیم $\nu(\bar{P}_d) = \nu(\bar{D}_d)$.

با توجه به قضیه ۱-۲-۶، فرض‌های روی \bar{D}_d برقرار هستند هرگاه مسئله اولیه نظیر

$$\bar{P}_d : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{d}^T x,$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t, \quad t \in T,$$

$$\bar{c}_t^T x = \nu(\bar{P}),$$

در شرایط FMCQ صدق کند.

مثال ۲.۴ فرض کنید \bar{P} عبارت باشد از مسئله $P(-1, -1)$ از مثال ۱.۴ (ب) و $d \in \mathbb{R}^2$ به طوری که داشته باشیم $0 < \|d\|_2 < 1$. در اینجا داریم

$$\bar{P}_d : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{d}^T x$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}],$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 = \sqrt{2}.$$

اگر مخروط‌های مشخصه \bar{P} و \bar{P}_d را با $K(\bar{\pi})$ و K_d نشان بدهیم، خواهیم داشت $K_d = K(\bar{\pi}) + \text{span}\{(1, 1, \sqrt{2})\}$ و این مخروط بسته نیست (بست آن عبارت است از نیم‌فضای $x_3 \leq x_1 + x_2$). بنابراین خواننده می‌تواند توجه کند که قضیه ۴-۱-۳ یا قضیه ۴-۱-۵ را نمی‌توان به کار برد.

مشاهده می‌شود که افزایش‌های بهینه-بیشینه $\bar{c} = (-1, -1)$ و $\bar{c} + d = (-1 + d_1) + (-1 + d_2)$ عبارت‌اند از $(T \setminus \{\frac{\pi}{4}\}, \{\frac{\pi}{4}\}, \emptyset)$ و $(T \setminus \{\alpha\}, \{\alpha\}, \emptyset)$ که برهم منطبق می‌شوند اگر و تنها اگر

قضیه ۴-۱-۴ نتیجه می‌شود که ϑ روی پاره خط $[\bar{c}, \bar{c} + d]$ تخت است. بدین ترتیب، ϑ روی نیم‌خط $\mathbb{R}_{++}\bar{c}$ به شکل تخت است (شکل ۴-۱ را ببینید).

یادآوری ۴-۱-۶ (پیشینه‌ها و منابع). قضیه ۴-۱-۱ درباره ویژگی‌های تابع مقدار بهینه دارای پیشینه قضیه دوگانی مربوط به مسئله‌های زیرسازگار LSIO در [۲۰۹] است که اثبات آن کاملاً به صورت ترسیمی است، یک روش دقیق‌تر اثبات را می‌توان در قضیه ۸۰۱ در [۱۰۲] یافت. شرایط مربوط به مشتق‌پذیری ϑ در \bar{c} را می‌توان از تساوی $\vartheta(c) = -\sigma_{\bar{F}}(-c)$ و قضیه‌های موجود در [۲۳۲، ۲۳۳] به دست آورد. به ویژه، اگر \bar{F} عبارت باشد از یک مجموعه محدب فشرده با درون ناتهی، آنگاه ϑ مشتق‌پذیر است، مگر در مبدأ، اگر و تنها اگر F به طور اکید محدب باشد (یعنی $\text{bd } F$ شامل هیچ پاره‌خطی نباشد).

قضیه‌های ۴-۱-۲ و ۴-۱-۳ دارای هیچ پیشینه‌ای در LO نیستند. این قضیه‌ها به ترتیب در گزاره ۲۰۲ در [۱۱۰] و قضیه ۱ در [۹۳] ثابت شده‌اند. در پایان، قضیه ۴-۱-۵ یک قضیه مشابه از گاوین [۸۷] در باب تجزیه و تحلیل حساسیت در LO را تعمیم می‌دهد و در قضیه ۲، در [۹۳] ثابت شده است و حال آنکه قضیه ۴-۱-۴ در گزاره ۴۰۱ در [۱۱۰] ثابت شده است و می‌تواند به شکل یک تعمیم برای LSIO از یک دسته وسیع از مقاله‌ها درباره تجزیه و تحلیل حساسیت در LO از دیدگاه‌های افزاز بهینه [۱، ۱۹، ۸۵، ۸۸، ۸۹، ۱۲۲-۱۱۹، ۱۴۸-۱۴۶، ۱۸۸، ۲۰۸] نگرست. تعمیم‌های مشابه برای مسئله‌های به‌گزینی نیمه-معین، [۱۱۷]، مخروطی [۲۳۰] و درجه دوم [۸۹] پیشنهاد شده‌اند.

۲-۴ پریشیدن طرف راست

اینک مسئله پارامتری

$$P(b) : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \bar{c}^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq b_t, \quad t \in T,$$

و

$$D(b) : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t \bar{a}_t = \bar{c},$$

با مقادیر بهینه نظیر $\vartheta(b)$ و $\vartheta^D(b)$ را در نظر بگیرید. به روشنی، مقادیر بهینه مسئله \bar{P} و دوگان آن \bar{D} به ترتیب عبارت‌اند از $\nu(\bar{P}) = \vartheta(\bar{b})$ و $\nu(\bar{D}) = \vartheta^D(\bar{b})$ چون $P(b) \equiv \pi = (\bar{c}, \bar{a}, b)$ و $\bar{P} = P(b) \equiv \bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ توجه داشته باشید که مخروط گشتاور اول $P(b)$ بر مخروط گشتاور اول $M(\bar{\pi})$ از \bar{P} منطبق می‌شود. بنابراین، اگر $\bar{c} \in \text{rint } M(\bar{\pi})$ (مثلاً، مجموعه شدنی \bar{F} از \bar{P} کران‌دار باشد) و $P(b)$ سازگار باشد، آنگاه با توجه به قضیه ۱-۲-۶ خواهیم داشت $\vartheta^D(b) = \vartheta^D(b)$ ، یعنی ϑ^D در $\text{dom } \mathcal{F}$ بر ϑ منطبق می‌شود.

با توجه به پربیشیدگی‌های $\bar{b} : T \rightarrow \mathbb{R}$ ، فضای پارامترها، مشخص شده با \mathbb{R}^T ، را در نظر می‌گیریم که در آن، شبه‌اندازه همگرایی یکنواخت عبارت است از

$$d_\infty(\psi, \varphi) := \sup_{t \in T} |\psi(t) - \varphi(t)|, \quad \psi, \varphi \in \mathbb{R}^T.$$

قضیه بعدی را می‌توان به صورت یک همتای طرف راست از قضیه ۴-۱-۳ در نظر گرفت.

قضیه ۴-۲-۷ (تخت بودن روی همسایگی‌ها). اگر ϑ روی یک همسایگی مشخص از \bar{b} خطی باشد، آنگاه \bar{D} دارای حداکثر یک جواب بهینه خواهد بود. برعکس، اگر یک نقطه مانند $x^* \in \mathcal{F}(\bar{b})$ و اعدادی مانند $\mu > 0$ و $\gamma > 0$ موجود باشند، به طوری که داشته باشیم

$$(1) \quad \bar{c} \in A(x^*)$$

$$(2) \quad \{\bar{a}_t, t \in T(x^*)\} \text{ عبارت باشد از یک پایه } \mathbb{R}^n \text{ و}$$

$$(3) \quad \text{برای هر } x \in x^* + \gamma \mathbb{B}_2 \text{ و } t \notin T \text{ داشته باشیم } \bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t + \mu$$

آنگاه ϑ در یک همسایگی از \bar{b} عبارت است از تابع خطی مانند $\vartheta(b) = c^T x(b)$ که در آن عبارت است از جواب یکتای دستگاه $\{\bar{a}_t^T x = b_t, t \in T(x^*)\}$.

تحت فرض‌های قوی، قضیه بعدی تخت بودن ϑ در امتداد پاره‌خطها را تضمین می‌کند.

قضیه ۴-۲-۸ (تخت بودن در امتداد پاره‌خطها). تابع ϑ روی یک پاره‌خط منشعب از \bar{b} در جهت یک تابع کران‌دار مانند $f \in \mathbb{R}^T \setminus \{0_T\}$ تخت است اگر \bar{P} و \bar{D} با جواب بهینه یکسان حل‌پذیر باشند، مسئله

$$P_f : \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}} c^T x + \vartheta(\bar{b})y$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x + \bar{b}_t^T y \geq f_t, \quad t \in T,$$

نیز حل‌پذیر باشد و دارای شکاف صفر دوگانی با D_f باشد و یک نقطه مانند $x^* \in S(\bar{b})$ موجود باشد به‌طوری‌که $T(x^*) = T$ یا دو عدد مانند μ و η موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $t \notin T(x^*)$ داشته باشیم $0 < \mu \leq \bar{a}_t^T x^* - \bar{b}_t \leq \eta$.

قضیه ۹-۲-۴ (تخت بودن روی چندوجهی‌های کراندار). فرض کنید $\text{conv}\{b^i, i \in I\}$ با فرض متناهی بودن I ، چنان باشد که یک افراز بهینه مشترک برای تمامی مسئله‌های $P(b^i), i \in I$ ، موجود است؛ در این صورت $\vartheta(b) = \vartheta^D(b)$ روی $\text{conv}\{b^i, i \in I\}$ تخت است. در نتیجه، اگر $d \in \mathbb{R}^T$ و عددی مانند $0 < \epsilon$ موجود باشد به‌طوری‌که افراز بهینه $P(b+d)$ با افراز بهینه P یکسان باشد، آنگاه $\vartheta(b) = \vartheta^D(b)$ روی $[b, b+d]$ تخت است.

مثال ۳.۴ **مثال ۱۰.۴** (ب) را دوباره نگاه می‌کنیم که در آن $T = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{2, 3\}$. مسئله اولیه نظیر با $b \in \mathbb{R}^T$ عبارت است از

$$P(b) \inf_{x \in \mathbb{R}^2} -x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq b_t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$x_1 \geq b_2, \quad x_2 \geq b_3,$$

و پارامتر نمادین عبارت است از $\bar{b} \in \mathbb{R}^T$ به‌طوری‌که برای هر $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ داشته باشیم $\bar{b}_t = -1$ و $\bar{b}_2 = \bar{b}_3 = 0$. به یاد آورید که $\bar{x} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ و $(T \setminus \{\frac{\pi}{4}\}, \{\frac{\pi}{4}\}, \emptyset)$ به‌ترتیب عبارتند از جواب بهینه یکتا و افراز بهینه-بیشینه $P(\bar{b})$.

اینک، افرازهای طرف راست نظیر هریک از قیدها را بررسی می‌کنیم که بهینه بودن \bar{x} را حفظ می‌کند. قید نظیر $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ زائد است که در نتیجه برای هر $\alpha \leq 0$ خواهیم داشت $\mathcal{F}(\bar{b} + \alpha \chi^t) = \mathcal{F}(\bar{b})$ که χ^t در آن نشان‌دهنده تابع مشخصه t است. به‌علاوه، برای هر $\alpha \leq \bar{a}_t^T \bar{x}$ خواهیم داشت $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{b} + \alpha \chi^t) \subset \mathcal{F}(\bar{b})$. بدین‌ترتیب، برای هر $\alpha \leq \bar{a}_t^T \bar{x}$ خواهیم داشت $S(\bar{b} + \alpha \chi^t) = \{\bar{x}\}$. با تکرار بحث در مثال ۲.۱ نتیجه می‌شود که برای هر $\alpha \leq \bar{a}_t^T \bar{x} = -\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}} = -\cos(t - \frac{\pi}{4})$ مجموعه $(T \setminus \{\frac{\pi}{4}\}, \{\frac{\pi}{4}\}, \emptyset)$ عبارت است از افراز بهینه-بیشینه $P(\bar{b} + \alpha \chi^t) - D(\bar{b} + \alpha \chi^t)$.

قیدهای نظیر $t = 2, 3$ زائد نیستند، ولی همچنان $(T \setminus \{\frac{\pi}{4}\}, \{\frac{\pi}{4}\}, \emptyset)$ برای هر $\alpha \leq \bar{a}_t^T \bar{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ عبارت است از افراز بهینه-بیشینه $P(\bar{b} + \alpha \chi^t) - D(\bar{b} + \alpha \chi^t)$.

بنابراین، با توجه به قضیه ۴-۲-۹، ϑ روی

$$\text{conv} (U_{t \in T} \{\bar{b} + \alpha \chi^t : \alpha \leq \bar{a}_t^T \bar{x}\})$$

تخت است.

یادآوری ۴-۲-۱۰ (پیشینه‌ها و منابع). پیشینه‌های مربوط به نتایج این بخش عبارتند از کارهای روی تحلیل حساسیت در مسئله LO از دیدگاه یک افراز بهینه که در یادآوری ۴-۱-۶ به آن اشاره شد. قضیه‌های ۴-۲-۷، ۴-۲-۸ و ۴-۲-۹ به ترتیب عبارتند از (قضیه ۴ در [۹۳])، (قضیه ۵ در [۹۳]) و (گزاره ۵.۱ در [۱۱۰]).

۳-۴ پریشیدن تابع هدف و طرف راست

فضای پارامترها، $\mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^n$ را با مسئله نمادین داده شده \bar{P} متناظر می‌کنیم. مسئله‌های اولیه و دوگان متناظر با یک پریشیدگی مانند $\pi = (\bar{a}, b, c)$ از مسئله نمادین $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ به ترتیب با مقادیر بهینه $\vartheta(c, b)$ و $\vartheta^D(c, b)$ عبارتند از

$$P(c, b) : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{a}_t^T x \geq b_t, \quad t \in T,$$

و

$$D(c, b) : \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^{(T)}} \sum_t \lambda_t b_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_t \lambda_t \bar{a}_t = c,$$

$$\lambda_t \geq 0, \quad t \in T.$$

برای شرح رفتار ϑ و ϑ^D ، پس از ارائه مختصری از انگیزه این کار، یک دسته از توابع را تعریف می‌کنیم. فرض کنید L عبارت باشد از یک فضای خطی و $\varphi : L^\vee \rightarrow \mathbb{R}$ عبارت باشد از یک تابع دوخطی روی L . اگر $C = \text{conv} \{\nu_i, i \in I\} \subset L$ و $q_{ij} = \varphi(\nu_i, \nu_j)$ ، $(i, j) \in I^\vee$ ، آنگاه هر $\nu \in C$ را می‌توان به صورت

$$\nu = \sum_{i \in I} \mu_i \nu_i, \quad \sum_{i \in I} \mu_i = 1, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^{(I)} \quad (3-4)$$

بیان کرد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\varphi(\nu, \nu) = \sum_{i,j \in I} \mu_i \mu_j q_{ij}. \quad (4-4)$$

به‌همین سبک، برای $q : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن $C = \text{conv} \{i, i \in I\} \subset L$ می‌گوییم که q روی C از درجهٔ دوم است اگر عضوی مانند $i, j \in I, q_{ij} \in \mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $v \in C$ که در رابطه (۳-۴) صدق کند، رابطه (۴-۴) برقرار باشد.

قضیه ۴-۳-۱۱ (رفتار درجهٔ دوم روی چندوجهی‌های کران‌دار). فرض کنید $\{(c^i, b^i), i \in I\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^T$ با مجموعهٔ متناهی I چنان باشد که یک افزایش بهینهٔ مشترک برای یک خانواده از مسئله‌های $P(c^i, b^i), i \in I$ ، موجود است؛ در این صورت، مسئله‌های $P(c, b)$ و $D(c, b)$ حل‌پذیرند، روی $\text{conv} \{c^i : i \in I\} \times \text{conv} \{b^i : i \in I\}$ داریم $\vartheta(c, b) = \vartheta^D(c, b)$ و روی $\text{conv} \{(c^i, b^i), i \in I\}$ درجهٔ دوم است. به‌علاوه، اگر $(c, b) \in \text{conv} \{c^i : i \in I\} \times \text{conv} \{b^i : i \in I\}$ ، آنگاه $\vartheta(\cdot, b)$ و $\vartheta(c, \cdot)$ به‌ترتیب روی $\text{conv} \{(c^i : i \in I\}$ و $\text{conv} \{b^i : i \in I\}$ تخت هستند.

از این رو، به‌ازای $(d, f) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^T$ ، اگر عددی مانند $\varepsilon > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که مسئله $P(\bar{c}, \bar{b}) + \varepsilon(d, f)$ دارای افزایش بهینه-بیشینهٔ همانند مسئله P باشد، آنگاه $\vartheta(c, b) = \vartheta^D(c, b)$ روی بازهٔ $[(\bar{c}, \bar{b}), (\bar{c}, \bar{b}) + \varepsilon(d, f)]$ درجهٔ دوم است. به‌علاوه، $\vartheta(c, \bar{b})$ و $\vartheta(\bar{c}, b)$ به‌ترتیب یک تابع تخت از c روی بازهٔ $[\bar{c}, \bar{c} + \varepsilon d]$ (روی b) یک تابع تخت از b است.

مثال ۴.۴ اینک پیشیدگی‌های هم‌زمان تابع هدف و ضرایب طرف راست از مسئلهٔ نمادین مثال‌های ۲.۴ و ۳.۴ را بررسی می‌کنیم. از ترکیب بحث‌های آنجا، درمی‌یابیم که ϑ عبارت است از یک تابع درجهٔ دوم روی $\text{conv} \{(c^i, b^i) : i \in I\}$ که در آن $R++\bar{c}$ و $\{c^i : i \in I\}$ و

$$\{b^i : i \in I\} = \text{conv} \left(\bigcup_{t \in T} \{\bar{b} + \alpha \chi^t : \alpha \leq \bar{a}_t^T \bar{x}\} \right)$$

یادآوری ۴-۳-۱۲ (پیشینه‌ها و منابع). یک بار دیگر، پیشینه‌های مربوط به قضیه‌های در این بخش عبارت‌اند از کارهای روی تجزیه و تحلیل حساسیت در مسئلهٔ LO از دیدگاه یک افزایش بهینه که در یادآوری ۴-۱-۶ اشاره شد. قضیهٔ ۴-۳-۱۱ عبارت است از (گزارهٔ ۶.۱ در [۱۱۰]). با توجه به برآورد مقدار بهینه از طریق مشتق‌های جهتی، [۲۳۴] مسئلهٔ پارامتری خطی پیوسته را

به صورت $P(\lambda) = \pi(\lambda) = (\bar{c}, a(\lambda), b(\lambda))$ مورد بحث قرار می‌دهد (یعنی $a(\lambda)$ و $b(\lambda)$ عبارتند از توابع پیوسته از t روی مجموعه T که به یک پارامتر λ وابسته است)، مسئله نمادین به شکل $\bar{P} = P(\bar{\lambda}) = \pi(\bar{\lambda})$ خواهد بود. دیدگاه پژوهشگران این است که چند قضیه در [۱۱۸] را برای مسئله LSIO تعمیم بدهند. تحت فرض‌های زیرسازگاری زوج دوگان مسئله نمادین $P(\bar{\lambda}) - D(\bar{\lambda})$ (یعنی SCQ و $\bar{c} \in \text{int } M(\bar{\lambda})$) و فرض‌های عملی دیگر، از قضیه ۶ در [۲۳۴]، عبارت‌هایی برای مشتق‌های راست و چپ تابع بهینه ϑ در $\bar{\lambda}$ به دست می‌آید. با توجه به تعمیم‌های مربوط به مشتق‌پذیر بودن مسئله‌های CSIO، شاپیرو^۱ (قضیه ۳.۲ در [۲۱۰]) شرایط کافی مربوط به مشتق‌پذیری طرف چپ تابع مقدار بهینه را ارائه داد و یک دستور صریح را برای این مشتق‌ها به دست آورد ([۲۱۰] (۳.۷)).

یادآوری ۴-۳-۱۳ (چند مسئله حل نشده در تجزیه و تحلیل مسئله‌های LSIO).

۱. تجزیه و تحلیل حساسیت مسئله‌های LSIO با پربشیدگی‌های a .
۲. تجزیه و تحلیل حساسیت مسئله‌های LSIO با پربشیدگی‌های سه‌تایی (c, a, b) .
۳. روش‌های عددی برای محاسبه ناحیه‌های تخت بودن با پربشیدگی‌های c, b و زوج (c, b) .

تجزیه و تحلیل پایداری کیفی

۱-۵ پایداری بدون تحدید

در این بخش، ویژگی‌های پیوستگی $\mathcal{F}, \mathcal{S} : \Pi \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{V} : \Pi \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ را تحت پربیشیدگی‌های دلخواه تمامی داده‌ها در یک مسئله نمادین داده‌شده مانند $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ تجزیه و تحلیل می‌کنیم. اولین تأثیر روی پایداری مسئله‌های پیوسته LSIO و شکل کلی LSIO به ترتیب در سال‌های ۱۹۸۰ (مثلاً [۲۹، ۸۲]) و در سال‌های ۱۹۹۰ [۱۰۳، ۱۰۴] چاپ شدند و قضیه‌های اصلی در این زمینه‌ها در [۱۰۲] گردآوری شده‌اند. سه مفهوم اصلی: نیمه-پیوستگی پایینی و بالایی و بسته بودن درگیر در تجزیه و تحلیل یک نگاشت مجموعه‌ای $\mathcal{M} : Y \rightrightarrows X$ را در $\bar{y} \in \text{dom } \mathcal{M}$ (به طور معادل، $(\mathcal{M}(\bar{y})) \neq \emptyset$) تعریف کرده‌ایم. چند مفهوم مربوط را در اینجا معرفی می‌کنیم.

- دوباره، اگر X و Y فضاها مترنما باشند، آنگاه می‌توانیم حد داخلی به شکل

$$\liminf_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y) := \left\{ x \in X : \forall (y_r)_{r=1}^{\infty} \rightarrow \bar{y} \exists r_0 \text{ s.t. } (y_r)_{r=r_0}^{\infty} \subset \text{dom } \mathcal{M}, \right. \\ \left. \exists x_r \in \mathcal{M}(y_r) \forall r \geq r_0 \text{ s.t. } x_r \rightarrow x \right\},$$

را تعریف کنیم. همچنین، حد خارجی برطبق تعریف عبارت است از

$$\limsup_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y) := \left\{ x \in X : \exists (y_r)_{r=1}^{\infty} \rightarrow \bar{y}, (x_r)_{r=r_0}^{\infty} \in \mathcal{M}(y_r), \right. \\ \left. \text{s.t. } x_r \rightarrow x \right\}.$$

با توجه به [۲۰۷]، می‌گوییم \mathcal{M} در \bar{y} نیمه-پیوسته خارجی (osc) است اگر داشته باشیم $\mathcal{M}(\bar{y}) \supset \limsup_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y)$. به همین طریق، می‌گوییم \mathcal{M} در \bar{y} نیمه-پیوسته داخلی (isc) است،

اگر داشته باشیم $\mathcal{M}(\bar{y}) \subset \liminf_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y)$ در پایان، می‌گوییم که \mathcal{M} در $\bar{y} \in \text{dom } \mathcal{M}$ پیوسته است اگر \mathcal{M} در \bar{y} هم isc و هم osc باشد، یعنی

$$\liminf_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y) = \limsup_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y) = \mathcal{M}(\bar{y}).$$

که در این حالت می‌نویسیم

$$\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y) = \mathcal{M}(\bar{y}).$$

نیمه-پیوستگی داخلی \mathcal{M} در \bar{y} با نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{M} در \bar{y} (از دیدگاه برج^۱) معادل است در صورتی که نیمه-پیوستگی خارجی \mathcal{M} در \bar{y} با بسته بودن \mathcal{M} در \bar{y} معادل است.

- همچنین می‌گوییم \mathcal{M} در $(\bar{y}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{M}$ نیمه-پیوسته داخلی است اگر برای هر مجموعه باز مانند U ، که $\bar{x} \in U$ ، یک مجموعه مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{y}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in V$ داشته باشیم $\mathcal{M}(y) \cap U \neq \emptyset$ ، یعنی $\bar{x} \in \liminf_{y \rightarrow \bar{y}} \mathcal{M}(y)$. به روشنی، \mathcal{M} نیمه-پیوسته داخلی در \bar{y} است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathcal{M}(\bar{y})$ ، (\bar{y}, x) نیمه-پیوسته داخلی باشد.

قبلاً اشاره کرده‌ایم که \mathcal{F} برای هر $\pi \in \text{dom } \mathcal{F}$ بسته است، یعنی $\text{gph } \mathcal{F}$ بسته است. قضیه اساسی مربوط به نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ را به روش‌های مختلف شناسایی می‌کند که شامل مفاهیم قبلی و نیز مفاهیمی است که در ادامه می‌آید:

- از دیدگاه توی^۲، \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ پایدار است اگر $\circ_T \notin \text{bd } \{G(\mathbb{R}^n) - \mathbb{R}_+^T\}$ ، که در آن $G(x)(\cdot) := s(x, \cdot)$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ (در اینجا $s(x, \cdot)$ ، عبارت است از تابع کمبود در x و فرض می‌شود که \mathbb{R}^T با همگرایی یکنواخت توپولوژیکی روی T در نظر گرفته شده است).

قضیه ۱-۱-۵ (نیمه-پیوستگی پایینی مجموعه شدنی). فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$. گزاره‌هایی که در پی می‌آیند، معادل هستند:

- (i) \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به شکل lsc است؛
- (ii) $\bar{\pi} \in \text{int dom } \mathcal{F}$ ؛
- (iii) پریشیدگی‌های به اندازه کافی کوچک طرف راست از $\bar{\pi}$ ، شدنی بودن آن را حفظ می‌کند؛
- (iv) $\bar{\pi}$ در SSCQ صدق می‌کند؛

1. Berge
2. Tuy

$$(v) \quad C(\bar{\pi}) = \text{conv} \{(\bar{a}_t, \bar{b}_t), t \in T\} \text{ که در آن } 0_{n+1} \notin \text{cl } C(\bar{\pi})$$

(vi) یک همسایگی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{\pi}}$ موجود است به طوری که برای هر $\pi \in V$ داریم

$$\dim \mathcal{F}(\bar{\pi}) = \dim \mathcal{F}(\pi) \text{ (پایداری بعدی)}؛$$

(vii) یک همسایگی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{\pi}}$ موجود است به طوری که برای هر $\pi \in V$ داریم

$$\text{aff}(\pi) = \text{aff}(\bar{\pi}), \text{ (بی حرکتی پوسته تخت)}؛$$

(viii) $\bar{\pi}$ از دیدگاه توی^۱ در $\bar{\pi}$ پایدار است،

$$(ix) \quad \mathcal{F} \text{ در } \bar{\pi} \text{ پیوسته است،}$$

به علاوه، اگر $0_n \notin \text{bd conv} \{\bar{a}_t, t \in T\}$ ، آنگاه گزینه بعدی به این فهرست اضافه می شود؛

(x) یک همسایگی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{\pi}}$ موجود است به طوری که برای هر $\pi \in V$ با $\mathcal{F}(\bar{\pi})$

$\mathcal{F}(\pi)$ همسان ریخت است (پایداری توپولوژیکی).

در [۲۰۷] گفته شده است که ”نیمه-پیوستگی بالایی با نیمه-پیوستگی خارجی ما فرق دارد و در محدوده خود به طور جدی مشکل ساز است“. به این دلیل است که شناسایی نیمه-پیوستگی \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ یک مسئله سخت است که با معرفی چند اندیشه در [۱۰۴]، به طور مفهومی در [۴۵] حل شد.

قبلاً بیان کرده ایم که اگر تصویر فشرده نباشد، نیمه-پیوستگی بالایی با دشواری برقرار است. در واقع، همان گونه که قضیه ۵-۱-۲ در ادامه نشان می دهد، باید مجموعه های پریشیده شده با مجموعه شدنی مسئله نمادین به طریق کران داری یکنواخت متفاوت باشد. یک گام مقدماتی به صورت لم بعدی بیان می شود:

لم ۱۰۵ (کران داری یکنواخت مجموعه شدنی). فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$. اگر $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ کران دار باشد، آنگاه \mathcal{F} در برخی همسایگی $\bar{\pi}$ به طور یکنواخت کران دار است.

طرحی از اثبات. اگر حکم درست نباشد، آنگاه یک دنباله مانند $(\pi_r)_{r=1}^{\infty}$ همگرا به $\bar{\pi}$ و $x_r \in \mathcal{F}(\pi_r)$ ، موجود است به طوری که $\|x_r\|_p \geq r$ ، $r = 1, 2, \dots$. در این صورت، اگر d یک نقطه انباشتگی دنباله $(x_r / \|x_r\|_p)_{r=1}^{\infty}$ باشد، به آسانی ثابت می شود که $d \in 0^+ \mathcal{F}(\bar{\pi})$ ، که با فرض کران دار بودن $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ در تناقض است.

قضیه بعدی همان قضیه ۳۰۱ در [۱۰۴] است.

قضیه ۵-۱-۲ (نیمه-پیوستگی بالایی مجموعه شدنی). \mathcal{F} در $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$ به شکل usc است اگر و تنها اگر عددی مانند $\rho > 0$ و یک همسایگی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{\pi}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $\pi \in V$

داشته باشیم

$$\mathcal{F}(\pi) \setminus \rho \mathbb{B}_\gamma \subset \mathcal{F}(\bar{\pi}) \setminus \rho \mathbb{B}_\gamma. \quad (۱-۵)$$

مثال ۱.۵ پارامتر $\bar{\pi}$ را در \mathbb{R}^2 در نظر بگیرید که دستگاه قیدی آن عبارت است از

$$\bar{\sigma} = \{tx_1 + x_2 \geq -|t|, t \in \mathbb{R}\},$$

به‌طور بدیهی داریم $\mathcal{F}(\bar{\pi}) = [-1, 1] \times \mathbb{R}_+$ و

$$\text{cl } K(\bar{\pi}) = \text{cone}\{(-1, 0, -1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\} \quad (۲-۵)$$

اگر $d_\infty(\bar{\pi}, \pi) < \infty$ آنگاه به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که برای هر $x \in \mathcal{F}(\pi)$ داریم $x_1 \in [-1, 1]$ و اگر $d_\infty(\bar{\pi}, \pi) < 1$

$$\rho := \frac{2d_\infty(\bar{\pi}, \pi)}{1 - d_\infty(\bar{\pi}, \pi)},$$

آنگاه برای هر $x \in \mathcal{F}(\pi)$ (قرار دهید $t = 0$) خواهیم داشت $x_2 \geq -\rho$. بنابراین، برای هر π اگر $d_\infty(\bar{\pi}, \pi) < 1$ خواهیم داشت $\mathcal{F}(\pi) \setminus (\rho + 1)\mathbb{B}_\gamma \subset \mathcal{F}(\bar{\pi}) \setminus (\rho + 1)\mathbb{B}_\gamma$ و با استفاده از قضیه ۱-۵-۲ نتیجه می‌شود که \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به‌شکل usc است.

متأسفانه، تشخیص نیمه-ناپیوستگی بالایی \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ داده‌شده در قضیه ۱-۵-۲ به ضرایب مسئله نمادین $\bar{\pi}$ متکی نیست. به‌عنوان همتای مثبت، دارای یک پیامد سراسر است:

نتیجه ۱.۵ فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$. اگر $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ کران‌دار باشد، آنگاه \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به‌شکل usc است.

برای ادامه، مشاهده می‌شود که نیمه-پیوستگی بالایی $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ همان‌گونه که از (مثال ۳.۶ در [۱۰۴]) به‌روشنی آشکار است، به‌طور قوی به ضرایب (\bar{a}) و (\bar{b}) وابسته است. در این مثال نمایش معادل دستگاه قیدی $\bar{\pi}$ به‌شکل

$$\bar{\sigma} := \{k\bar{a}_t^T x \geq k\bar{b}_t, (t, k) \in T \times \mathbb{N}\}$$

را در نظر می‌گیرد که مجموعه شاخص آن همان عدد اصلی T است (موقعی که T نامتناهی است) و نشان می‌دهد که \mathcal{F} در $\bar{\sigma}$ به‌روشنی به‌شکل usc است. بنابراین با بزرگ کردن ضرایب، \mathcal{F} را مجبور کردیم که به‌شکل usc باشد. این مشاهدات انگیزه معرفی سیستم تقویت‌شده وابسته به $\bar{\pi}$ در [۴۵] شد که به‌صورت

$$\bar{\sigma}^{re} := \{\bar{a}_t^T \geq b, (a, b) \in 0^+ \text{cl } C(\bar{\pi}),$$

است که ابزار اصلی در تجزیه و تحلیل نیمه-پیوستگی بالایی \mathcal{F} را تشکیل می‌دهد. با در نظر گرفتن تفسیر متوالی جهت‌های دورشونده و به لطف لم فرکاس خواهیم داشت $0^+ \text{cl } C(\bar{\pi}) \subset \text{cl } K(\bar{\pi})$ و مجموعه جواب‌های $\bar{\sigma}^{re}$ را به ترتیب با $\mathcal{F}^{re}(\bar{\pi})$ و $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ نشان می‌دهیم. مخروط مشخصه $\bar{\sigma}^{re}$ را با $K^{re}(\bar{\pi})$ نشان می‌دهیم. به آسانی بررسی می‌شود (لم ۳.۴، [۴۵]) که اگر $d_\infty(\bar{\pi}, \pi) < \infty$ ، آنگاه خواهیم داشت $\bar{\sigma}^{re} = \sigma^{re}$ ؛ زیرا $0^+ \text{cl } C(\bar{\pi}) = \text{cl } K(\bar{\pi})$ و نیز $K^{re}(\bar{\pi})$ بسته است، (نتیجه ۵.۲، [۴۵]).

با استفاده از دستگاه تقویت‌شده می‌توان شرایط کافی (نتیجه ۳.۵، [۴۵])، مربوط به نیمه-پیوستگی بالایی \mathcal{F} را در ادامه ثابت کرد با این فرض که $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ کران‌دار باشد.

نتیجه ۲.۵ فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$. اگر $\mathcal{F}(\bar{\pi}) \setminus \mathcal{F}(\pi)$ کران‌دار باشد، آنگاه \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به شکل usc خواهد بود.

طرح برهان. اگر $\rho > 0$ چنان باشد که داشته باشیم $\rho \mathbb{B}_2 \subset \mathcal{F}(\bar{\pi}) \setminus \mathcal{F}(\pi)$ و $d_\infty(\bar{\pi}) < \infty$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}(\pi) \setminus \mathcal{F}(\bar{\pi}) \subset \mathcal{F}^{re}(\pi) \setminus \mathcal{F}(\bar{\pi}) = \mathcal{F}^{re}(\bar{\pi}) \setminus \mathcal{F}(\bar{\pi}) \subset \rho \mathbb{B}_2,$$

و برای هر π به یک فاصله معین از $\bar{\pi}$ خواهیم داشت $\rho \mathbb{B}_2 \subset \mathcal{F}(\bar{\pi}) \setminus \mathcal{F}(\pi)$. اینک، قضیه ۲-۱-۵ به کار می‌رود.

شرط کافی که در این نتیجه ثابت شد، همانند مثال ۱.۵ نشان می‌دهد که شرط لازم نیست. به یاد آورید که برای مسئله $\bar{\pi}$ که در اینجا بررسی شده است، داشتیم $\mathcal{F}(\bar{\pi}) = [-1, 1] \times \mathbb{R}_+$ و \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به شکل usc بود. به علاوه، با بررسی‌های ساده خواهیم داشت:

$$\text{cl } C(\bar{\pi}) = C(\bar{\pi}) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 1, y_3 \leq -|y_1|\},$$

و نیز

$$\begin{aligned} 0^+ \text{cl } C(\bar{\pi}) &= \{z \in \mathbb{R}^3 : z_2 = 0, z_3 \leq -|z_1|\}. \\ &= \text{cone}\{(-1, 0, -1), (1, 0, -1)\}. \end{aligned}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma}^{re} = \{-x_1 \geq -1, x_2 \geq -1\} \quad \text{و} \quad \mathcal{F}^{re}(\bar{\pi}) = [-1, 1] \times \mathbb{R},$$

و در نتیجه، $\mathcal{F}(\bar{\pi}) \setminus \mathcal{F}(\pi)$ بیکران است. به علاوه خواهیم داشت:

$$K^{re}(\bar{\pi}) = \text{cone}\{(-1, 0, -1), (1, 0, -1)\}. \quad (3-5)$$

درواقع، بنابر قضیه ۴.۵ در [۴۵]) مثال آخر تنها حالتی را نشان می‌دهد که شرط کافی از نتیجه ۲.۵ شرط لازم نیست؛ برای برخی $u \neq 0_n$ داریم $0^+ \mathcal{F}^{re}(\bar{\pi}) = \mathbb{R}\{u\}$ و $0^+ \mathcal{F}(\bar{\pi}) = \mathbb{R}_+\{u\}$. قضیه بعدی (قضیه ۵.۳ در [۴۵]) همه حالت‌ها را دربرمی‌گیرد و نیز بر استفاده از دستگاه تقویت شده مبتنی است.

قضیه ۳-۱-۵ (نیمه-پیوستگی بالایی \mathcal{F} دستگاه تقویت شده). اگر $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ کران‌دار باشد، آنگاه دو حالت پیش می‌آید:

- (i) اگر $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ شامل حداقل یک خط باشد (یعنی اگر $\dim\{\bar{a}_t, t \in T\} < n$)، آنگاه $\bar{\pi}$ به شکل usc خواهد بود اگر و تنها اگر $K^{re}(\bar{\pi}) = \text{cl } K(\bar{\pi})$.
- (ii) وگرنه، اگر w عبارت باشد از مجموع یک پایه معین از \mathbb{R}^n در داخل $\{\bar{a}_t, t \in T\}$ ، آنگاه $\bar{\pi}$ به شکل usc است اگر و تنها اگر عددی مانند $\beta \in \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم:

$$\text{cone}(K^{re}(\bar{\pi}) \cup \{(w, \beta)\}) = \text{cone}(\text{cl } K(\bar{\pi}) \cup \{(w, \beta)\}) \quad (4-5)$$

اینک قضیه ۳-۱-۵ را برای مثال ۱.۵ به کار می‌بریم. چون $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ شامل هیچ خطی نیست، پس در حالت (ii) قرار داریم و پایه $\{\bar{a}_t, t \in T\} \subset \{\bar{a}_{-1}, \bar{a}_1\}$ را در نظر خواهیم گرفت. به روشنی، داریم $w = \bar{a}_{-1} + \bar{a}_1 = (0, 2)$ و (۴-۵) بنابر (۲-۵) و (۳-۵) به ازای $\beta = 0$ برقرار است. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به شکل نیمه-پیوسته بالایی است. نگاشت‌هایی که در پی می‌آیند، دارای رابطه تنگاتنگ با \mathcal{F} هستند:

- نگاشت مرزی $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{B} : \Pi$ ، مجموعه $\mathcal{B}(\pi) := \text{bd } \mathcal{F}(\pi)$ را برای هر $\pi \in \Pi$ متناظر می‌کند.
- نگاشت مجموعه نقاط فرین $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{E} : \Pi$ ، متناظر با هر $\pi \in \Pi$ ، $\mathcal{E}(\pi)$ عبارت باشد از مجموعه نقاط فرین $\mathcal{F}(\pi)$.

اینک فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$ چنان باشد که $\mathcal{F}(\bar{\pi}) \neq \mathbb{R}^n$. شکلی که در پی می‌آید، ویژگی‌های پایداری \mathbb{B} و وجود ارتباط با ویژگی‌های نظیر \mathcal{F} را جمع‌بندی می‌کند:

$$\bar{\pi} \text{ در lsc } \mathcal{F} \longleftrightarrow \bar{\pi} \text{ در lsc } \mathcal{B}$$



\mathcal{B} در $\bar{\pi}$ بسته است



$$\bar{\pi} \text{ در usc } \mathcal{F} \longleftrightarrow \bar{\pi} \text{ در usc } \mathcal{B}$$

معادل بودن $\bar{\pi}$ در \mathcal{B} lsc $\Leftrightarrow \bar{\pi}$ در \mathcal{F} lsc، به این معنی است که شرط آخری را می‌توان به مشخصه‌های نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{F} در قضیه ۵-۱-۱ تحت فرض ملایم جمع کرد که $\mathcal{F}(\bar{\pi}) \neq \mathbb{R}^n$. به علاوه، $\bar{\pi}$ در \mathcal{B} lsc $\Leftrightarrow \bar{\pi}$ در \mathcal{B} usc $\Leftrightarrow \bar{\pi}$ در \mathcal{B} usc اگر $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ کران‌دار باشد.

نگاشت مجموعه نقاط فرین \mathcal{E} به‌طور قابل ملاحظه‌ای ناپایدار است، مگر اینکه CQ که در ادامه می‌آید، برقرار باشد: $\bar{\pi}$ ناتباهیده است اگر برای تمامی

$$x \in \mathcal{B}(\bar{\pi}) \setminus \mathcal{E}(\bar{\pi}) = (\text{bd } \mathcal{F}(\bar{\pi})) \setminus (\text{extr } \mathcal{F}(\bar{\pi}))$$

داشته باشیم $|T(x)| < n$. در شکل بعدی، $(\bar{c}, \bar{a}, \circ) := \bar{\pi}_H$ متشکل است از قرار دادن تابع پوچ به جای \bar{b} در $\bar{\pi}$ ، که در نتیجه دستگاه قیدی $\bar{\pi}_H$ به صورت دستگاه همگن $\{\bar{a}_t^T x \geq \circ, t \in T\} := \bar{\sigma}_H$ درمی‌آید. اگر $|T| \geq n$ ، $\mathcal{E}(\bar{\pi}) \neq \emptyset$ و $|\mathcal{F}(\bar{\pi})| > 1$ (سخت‌ترین حالت)، آنگاه خواهیم داشت:

$$\bar{\pi} \text{ در lsc } \mathcal{F} \longleftrightarrow \bar{\pi} \text{ در lsc } \mathcal{E}$$

$$\downarrow (۱)$$

(۴)

$$\bar{\pi} \text{ ناتباهیده است} \longrightarrow \mathcal{E} \text{ در } \bar{\pi} \text{ بسته است}$$

$$(۲) \downarrow \uparrow (۳)$$

(۵)

$$\bar{\pi}_H \text{ و } \bar{\pi} \text{ ناتباهیده است} \longrightarrow \bar{\pi} \text{ در usc } \mathcal{E}$$

از معادل بودن

$$\bar{\pi} \text{ در lsc } \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{\pi} \text{ در lsc } \mathcal{E}$$

یک شرط دیگر، تحت شرط‌های ملایم $|T| \geq n$ (زائد در مسئله LSIO) و $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ شامل بیش از یک نقطه باشد، ولی نه خط‌های کامل، به‌دست می‌آید که باید به فهرست موجود در قضیه ۵-۱-۱ اضافه شود.

استنتاج‌ها در شکل قبلی به‌استثنای (۵) تحت چند فرض اضافی برقرار هستند:

(۱) $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ به‌طور اکید محدب باشد؛

(۲) $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ کران‌دار باشد؛

(۳) مجموعه $\{\bar{a}_t, t \in T\}$ کران‌دار باشد؛

(۴) $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به‌شکل Isc باشد؛

اگر $|T| < \infty$ ، آنگاه برعکس گزاره‌های (۴) و (۵) برقرار هستند.

ویژگی‌های معلوم پیوستگی نگاشت مجموعه‌بهنیه \mathcal{S} و تابع مقدار بهین ϑ در دو قضیه بعدی بیان می‌شوند. خواننده از طریق این قضیه‌ها می‌تواند درک کند که تأثیر نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{F} چقدر قوی است.

قضیه ۴-۱-۵ (پایداری مجموعه‌بهنیه). فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{S}$ ؛ در این صورت، گزاره‌های در پی برقرار هستند:

(i) \mathcal{S} در $\bar{\pi}$ بسته است اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به‌شکل Isc باشد یا $\mathcal{S}(\bar{\pi}) = \mathcal{F}(\bar{\pi})$.

(ii) \mathcal{S} در $\bar{\pi}$ به‌شکل Isc است اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به‌شکل Isc و نیز $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ تک‌عضوی باشد.

(iii) اگر \mathcal{S} در $\bar{\pi}$ به‌صورت usc باشد، آنگاه \mathcal{S} در $\bar{\pi}$ بسته است. اگر $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ کران‌دار باشد، آنگاه

عکس آن برقرار است.

قضیه ۵-۱-۵ (پایداری مقدار بهینه). فرض کنید $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$ ؛ در این صورت گزاره‌های در پی برقرار هستند:

(i) اگر مجموعه $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ ناتهی و فشرده باشد، آنگاه ϑ در $\bar{\pi}$ به‌شکل Isc است. اگر $\vartheta(\bar{\pi}) \neq -\infty$ ، آنگاه عکس گزاره برقرار است.

(ii) ϑ در $\bar{\pi}$ به‌شکل usc است اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به‌شکل Isc باشد.

(iii) اگر مجموعه $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ ناتهی و فشرده و \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به‌شکل Isc باشد، آنگاه ϑ در $\bar{\pi}$ پیوسته لیپ‌شیتسی

است، یعنی عضوی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{\pi}}$ و عددی مانند $L > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر

$\pi_1, \pi_2 \in V$ داریم:

$$|\vartheta(\pi_1) - \vartheta(\pi_2)| \leq Ld(\pi_1, \pi_2).$$

دو قضیه آخر، علاوه بر نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ که قبلاً مورد بحث قرار گرفته بود، شامل شرایط دیگری است که در ادامه می‌آید:

$$\text{(الف)} \quad \mathcal{S}(\bar{\pi}) = \mathcal{F}(\bar{\pi}),$$

(ب) $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ عبارت است از یک مجموعه ناتهی فشرده و

(ج) $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ یک مجموعه تک‌عضوی است.

این شرایط دارای یک تعبیر هندسی برحسب داده‌هاست، هرچند در عمل نمی‌توان آن‌ها را بررسی کرد: (الف) باتوجه به لم فرکاس ناهمگن، داریم $\mathcal{S}(\bar{\pi}) = \mathcal{F}(\bar{\pi})$ اگر و تنها اگر $(\bar{c}, \vartheta(\bar{\pi}))$ عضو خطی بودن $\text{cl } K(\bar{\pi})$ باشد.

(ب) $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ عبارت است از یک مجموعه ناتهی فشرده اگر و تنها اگر $\bar{c} \in \text{int } M(\bar{\pi})$. یک شرط

کافی عبارت است از وجود یک جواب شدنی مانند λ از مسئله دوگان به طوری که داشته باشیم

$$\text{span}\{\bar{a}_t, t \in \sigma(\lambda)\} = \mathbb{R}^n$$

(ج) اگر $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{\pi})$ در $\bar{c} \in \text{int } A(\bar{x})$ صدق کند، آنگاه \bar{x} عبارت است از یک جواب قوی یکتا از $\bar{\pi}$.

مثال ۲.۵ فرض کنید π_1, π_2 و π_3 عبارت باشند از پارامترهای متناظر در مثال ۱.۱ همراه با بردارهای ارزش به ترتیب $c^1 = (1, 1)$ ، $c^2 = (-1, -1)$ و $c^3 = (1, 0)$. فرض کنید $\bar{\pi}$ عبارت باشد از هر یک از این سه پارامتر. چون SSCQ برقرار است و $0_2 \in \text{int conv}\{\bar{a}_t, t \in T\}$ پس \mathcal{F} در تمامی ویژگی‌های فهرست شده در قضیه ۵-۱-۱ صدق می‌کند و به ویژه در $\bar{\pi}$ به شکل Isc است. به علاوه، چون مجموعه شدنی نمادین فشرده است، پس \mathcal{F} نیز در $\bar{\pi}$ به شکل usc است. در نتیجه، نگاشت مرزی B در $\bar{\pi}$ به شکل Isc و بسته است (نیمه-پیوستگی بالایی نیز برقرار است، ولی پیامد نظریه کلی نیست). با توجه به نگاشت مجموعه نقطه فرین \mathcal{E} ، در $\bar{\pi}$ به شکل Isc است، ولی $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ به طور اکید محدب نیست که در نتیجه باید نیمه-پیوستگی بالایی و بسته بودن \mathcal{E} در $\bar{\pi}$ برحسب داده‌ها بررسی شود.

اینک قضیه ۵-۱-۴ را به کار می‌بریم. چون \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به شکل Isc است، پس نگاشت مجموعه بهینه \mathcal{S} در $\bar{\pi}$ بسته است که همراه با کران دار بودن $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ تضمین می‌کند که \mathcal{S} در $\bar{\pi}$ به شکل usc باشد. مسئله‌های اولیه π_1 و π_2 دارای جواب بهینه یکتا هستند که در نتیجه \mathcal{S} در آن پارامترها به شکل Isc است و حال آنکه مسئله اولیه π_3 دارای جواب‌های چندگانه است و بنابراین \mathcal{S} در π_3 به شکل Isc نیست.

سرانجام، با توجه به نگاشت مقدار بهینه ϑ ، بنابر قضیه ۵-۱-۵، این نگاشت در $\bar{\pi}$ به شکل Isc و usc

است چون $\mathcal{S}(\bar{\pi})$ یک مجموعه ناتهی فشرده و \mathcal{F} در $\bar{\pi}$ به شکل Isc است.

مثال ۳.۵ (تقریب یکنواخت). بهترین تقریب یکنواخت از یک تابع نقینی $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}$ به وسیله چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر از n را می‌توان به صورت یک مسئله به‌گزینی نامقید اقل اکثر به شکل

$$P_0 : \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{x \in T} \left| \varphi(t) - \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i \right| \right\}$$

بیان کرد که T در آن عبارت است از بازه فشرده در \mathbb{R} . با معرفی یک متغیر جدید مانند $x_{n+1} := \sup_{x \in T} |\varphi(t) - \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i|$ مسئله P_0 را می‌توان به صورت یک مسئله LSIO نقینی به شکل

$$P_0 : \inf_{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}} x_{n+1}$$

$$\text{s.t.} \quad \left| \varphi(t) - \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i \right| \leq x_{n+1}, t \in T.$$

بیان کرد. با فرض اینکه یک تابع نمادین مانند $\bar{\varphi} : T \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که باید تقریب شود، یک قالب پارامتری برای P_0 می‌سازیم. مسئله نمادین تقریب عبارت خواهد بود از

$$P_{\bar{\varphi}} : \inf_{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}} x_{n+1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i + x_{n+1} \geq \bar{\varphi}(t), t \in T,$$

$$-\sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i + x_{n+1} \geq -\bar{\varphi}(t), t \in T.$$

فضای پریشیدگی‌های دلخواه تمامی داده‌ها در $P_{\bar{\varphi}}$ را با Π نشان می‌دهیم. فرض کنید \mathcal{F} ، \mathcal{S} و ϑ به ترتیب عبارت باشند از مجموعه شدنی، مجموعه بهینه و نگاشت‌های مقدار بهین مسئله مربوط به $P_{\bar{\varphi}}$. در اینجا فقط به آن پریشیدگی‌های داده در $P_{\bar{\varphi}}$ توجه می‌کنیم که ضریب متغیرها را حفظ می‌کند و نیز چنان باشد که توابع RHS در هر دو طرف قیدها، نتیجه پریشیده کردن $\bar{\varphi}$ و $-\bar{\varphi}$ با مجموع صفر باشد. به عبارت دیگر، پریشیدگی‌ها متشکل است از جابه‌جایی $\bar{\varphi} : T \rightarrow \mathbb{R}$ در $P_{\bar{\varphi}}$ با تابع دیگر مانند $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}$ که از همان نوع است. بنابراین فضاهای ممکن از پریشیدگی‌ها عبارت‌اند از فضای $\Pi_1 := \mathcal{C}(T)$ از توابع حقیقی پیوسته روی T موقعی که $\bar{\varphi}$ پیوسته است، فضای $\Pi_2 := l_\infty(T)$ از توابع کران‌دار روی T موقعی که $\bar{\varphi}$ کران‌دار باشد و فضای $\Pi_3 := \mathbb{R}^T$ موقعی که $\bar{\varphi}$ بی‌کران باشد که در آن $\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \Pi_3$. تمامی این فضاها (که می‌توان به‌طور بدیهی به صورت زیرفضاهای Π انگاشت) با متر سوپریم d_∞ در نظر گرفته می‌شوند که همگرایی یکنواخت روی T را مشخص می‌کند. اگر $\varphi \in \Pi_1$ ، آنگاه P_φ دارای یک جواب بهینه یکتاست (یعنی $\mathcal{S}(\varphi)$ عبارت است از یک مجموعه تک‌عضوی (مثلاً قضیه ۷.۶ [۱۹۷] یا [۷۰] را

ببینید). اگر $\bar{\varphi}$ بی‌کران باشد و $\varphi \in \Pi_3$ در $d_\infty(\varphi, \bar{\varphi}) < \infty$ صدق کند، آنگاه φ نیز بی‌کران خواهد بود و برای یک چندجمله‌ای دلخواه مانند p خواهیم داشت $d_\infty(\varphi, p) = +\infty$ که در نتیجه $P_{\bar{\varphi}}$ ناسازگار است، به این معنی که روی $\mathfrak{N}_{\bar{\varphi}} \in \{\varphi \in \Pi_3 : d_\infty(\varphi, \bar{\varphi}) < \infty\}$ داریم $\mathcal{F} = \emptyset$ و $\mathcal{S} \equiv +\infty$ و $\vartheta \equiv +\infty$ بدین ترتیب فقط باید ویژگی‌های پیوستگی تحدیدهای \mathcal{F} ، \mathcal{S} و ϑ بر Π_1 و Π_2 را بررسی کنیم.

فرض کنید $\bar{\varphi} \in \Pi_i$ ، $i = 1, 2$. شرط اینکه پربیشیدگی‌های تابع RHS از $P_{\bar{\varphi}}$ شرط مجموع صفر را حفظ کند، باید قضیه‌های قبلی را با دقت به‌کار ببریم که در چهارچوب فعلی تنها شرایط کافی را فراهم می‌آورد: اگر یکی از نگاشت‌های مربوط به \mathcal{F} ، \mathcal{S} و ϑ ، به‌ازای پربیشیدگی‌های دلخواه، در یک ویژگی پایداری معین در $\bar{\varphi}$ صدق کند، آنگاه همان ویژگی‌ها برای $\mathcal{F}|_{\Pi_1}$ ، $\mathcal{S}|_{\Pi_1}$ و $\vartheta|_{\Pi_1}$ نیز برقرار خواهند بود. با توجه به نگاشت مجموعه‌شدنی \mathcal{F} ، در $\bar{\varphi}$ بسته و به‌شکل lsc است؛ زیرا $(0_n, \delta)$ یک نقطه قوی اسلیتر برای $P_{\bar{\varphi}}$ خواهد بود اگر داشته باشیم $\delta > \sup_{t \in T} |\bar{\varphi}(t)|$ (قرار دهید $\varepsilon = \delta - \sup_{t \in T} |\bar{\varphi}(t)|$)، که در نتیجه $\mathcal{F}|_{\Pi_1}$ بسته است و با توجه به قضیه ۵-۱-۱، در $\bar{\varphi}$ به‌شکل lsc نیز است. بررسی ویژگی usc برای $\mathcal{F}|_{\Pi_1}$ در $\bar{\varphi}$ به بحث موردی نیاز دارد.

با توجه به نگاشت مجموعه‌بهینه، چون \mathcal{F} در $\bar{\varphi}$ به‌شکل lsc است، \mathcal{S} در $\bar{\varphi}$ بسته است (قضیه ۵-۱-۴ را ببینید)، و در $\bar{\varphi}$ به‌شکل usc است هرگاه مجموعه $\mathcal{S}(\bar{\varphi})$ تک‌عضوی باشد (وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $i = 1$). بنابراین، همان حکم برای $\mathcal{S}|_{\Pi_1}$ برقرار است.

در پایان، با توجه به تابع مقدار بهینه، ϑ در $\bar{\varphi}$ به‌شکل usc است (قضیه ۵-۱-۵ را ببینید) و بنابراین $\vartheta|_{\Pi_1}$ نیز در $\bar{\varphi}$ به‌شکل usc خواهد بود. به‌علاوه، اگر $\mathcal{S}(\bar{\varphi})$ عبارت باشد از یک مجموعه ناتهی فشرده (مثلاً موقعی که $\bar{\varphi}$ پیوسته باشد)، آنگاه $\vartheta|_{\Pi_1}$ در $\bar{\varphi}$ به‌شکل lsc و در یک همسایگی $\bar{\varphi}$ به‌طور لیب‌شیتسی پیوسته است.

یادآوری ۵-۱-۶ (پایداری مجموعه‌شدنی: پیشینه‌ها و تعمیم‌ها). مشخصه‌های (vi)-(i) و (viii) از ویژگی‌های \mathcal{F} در قضیه ۵.۱۰۱ در [۱۰۳] و (x) در [۱۰۱] ارائه شده بود. همه آن‌ها، همراه با نسخه معادل (ix) در قضیه ۶.۱ در [۱۰۲] و تمرین ۶.۵ برای (ix)) و (vii) در [۱۱۵] ظاهر شدند.

با توجه به نیمه-پیوستگی بالایی \mathcal{F} ، کفایت کران‌دار بودن مجموعه‌شدنی (نتیجه ۵.۱۰۱ در [۱۰۴] و نیز در نتیجه ۶.۲۰۱ در [۱۰۲]) نشان داده شده است و حال آنکه مشخصه داده‌شده در قضیه ۵.۱۰۳ در [۴۵] ثابت شده بود. شکل‌های lsc و usc از \mathcal{F} مربوط به دستگاه با تعداد نامتناهی قید محدب در [۱۷۹] مورد بررسی قرار گرفت. جدول ۵-۱ خلاصه‌ای از اطلاعات موجود درباره پایداری مجموعه‌شدنی ظاهر شده در منابع فهرست‌شده در اولین ستون (آن‌ها برحسب زمان مرتب شده‌اند، با این توضیح که نشانه‌گذاری به‌وسیله

ستارهٔ مبین آثار مربوط به دستگاه‌های وضع‌شده در فضاها با ابعاد نامتناهی است). برای اختصار، اطلاعات جدول ۵-۱ پیشینه‌های مربوط به پایداری مجموعهٔ شدنی مربوط به توپولوژی تعریف‌شده بر فضای پارامتر نظیر را درج نکرده‌ایم. ستون، نوع دستگاه قیدی P (در اینجا "sinf"، "ord" و "cont" به ترتیب عبارت‌اند از کوتاه‌شدهٔ "semi-infinite"، "معمولی" و "پیوسته"). اطلاعات دودویی (بله یا خیر) از ستون‌های ۱۰-۴ نشان‌دهندهٔ ویژگی‌های پایداری مطلوب هستند که در ادامه می‌آید:

جدول ۵-۱ پیشینه‌های مربوط به پایداری مجموعهٔ شدنی

Ref.	Year	Constr. system	lsc	usc	cl	Top	c	S	T
[202]*	1975	sinf. linear cont.							
[63]	1975	ord. linear						✓	
[123]	1975	sinf.	✓	✓				✓	
[203]*	1976	sinf. C1							
[222]*	1977	sinf. linear						✓	
[29]	1982	sinf. cont.	✓	✓	✓			✓	
[82]	1983	sinf. linear cont.	✓	✓				✓	
[11]*	1983	ord. convex	✓	✓	✓			✓	
[31]	1984	sinf. linear cont.	✓	✓	✓			✓	
[220]	1985	sinf. linear cont.	✓						
[124]	1986	ord. C1				✓			
[131]	1990	sinf. linear cont.	✓					✓	
[152]	1992	sinf. C1				✓			
[183]	1994	ord. linear						✓	
[103]	1996	sinf. linear	✓		✓			✓	✓
[101]	1996	sinf. linear				✓			
[104]	1997	sinf. linear	✓						
[151]	1998	sinf. C1				✓			
[102]	1998	sinf. linear	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
[177]*	1998	sinf. linear	✓	✓	✓				
[139]	2000	sinf. linear						✓	
[187]*	2000	sinf. linear			✓			✓	
[105]	2001	sinf. linear	✓						
[170]	2001	sinf. convex	✓	✓	✓		✓	✓	
[45]	2002	sinf. linear	✓						
[154]	2004	sinf. linear	✓	✓					
[46]	2005	sinf. linear	✓						
[4]	2006	sinf. linear	✓					✓	
[3]	2008	sinf. linear	✓	✓	✓				
[64]	2013	sinf. linear	✓					✓	

ستون ۴: نیمه-پیوستهٔ پایینی \mathcal{F} در $(lsc) \cdot \bar{\pi}$.

- ستون ۵: نیمه-پیوسته بالای F در $\bar{\pi}(usc)$.
- ستون ۶: فشردگی \mathcal{F} در $\bar{\pi}(cl)$.
- ستون ۷: پایداری توپولوژیکی \mathcal{F} در $\bar{\pi}(top)$.
- ستون ۸: پیوستگی \mathcal{F} در $\bar{\pi}(c)$.
- ستون ۹: نوع اسلیتر $CQ(S)$.
- ستون ۱۰: پایداری توی $\bar{\mathcal{F}}$ در $\bar{\pi}(T)$.

یادآوری ۵-۱-۷ (نیمه-پیوستگی هاوسدورف مجموعه شدنی). مفاهیم دیگر نیمه-پیوستگی بالایی و پایینی در [۲۹، ۳۰] و [۱۰۵] برای شرح رفتار پایداری استفاده شده‌اند:

• M نیمه-پیوسته پایینی هاوسدورف (به اختصار H-lsc) در \bar{y} است اگر برای هر عدد حقیقی مانند $\varepsilon > 0$ یک عضو مانند $V \in \mathcal{N}_{\bar{y}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in V$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}(\bar{y}) \subset \mathcal{M}(y) + \varepsilon \mathbb{B}_Y$$

• M نیمه-پیوسته بالایی هاوسدورف (به اختصار H-usc) در \bar{y} است اگر برای هر عدد حقیقی مانند $\varepsilon > 0$ یک عضو مانند $V \in \mathcal{N}_{\bar{y}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in V$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}(y) \subset \mathcal{M}(\bar{y}) + \varepsilon \mathbb{B}_Y$$

به روشنی، از نیمه-پیوستگی پایینی هاوسدورف، نیمه-پیوستگی پایینی و از نیمه-پیوستگی بالایی هاوسدورف، نیمه-پیوستگی بالایی نتیجه می‌شود. یک توافق عمومی بین خبرگان درباره قدرت اضافی ویژگی H-lsc و ضعف اضافی ویژگی H-usc در چهارچوب ما وجود دارد.

یادآوری ۵-۱-۸ (پایداری \mathcal{F} در مسئله‌های با قید مجموعه‌ای و/یا معادلات). چندین مقاله به تجزیه و تحلیل پایداری کیفی مسئله‌های LSIO شامل نامعادلات مرتبط که باید به وسیله هر پیریشیدگی قابل قبول حفظ شود، اختصاص داده شده است ([۱۳، ۴، ۳۶] که در آن هر معادله را می‌توان به دو نامعادله با مجموع-صفر تعبیر کرد)، مسئله‌هایی که شامل یک قید مجموعه‌ای هستند (مثلاً، $x \in \mathbb{R}_+^n$ ، موقعی که متغیرهای تصمیم در قیدهای فیزیکی $(i = 1, \dots, n, x_i \geq 0)$ هر دو صدق می‌کنند [۳، ۴]. برای نمونه، در مثال ۲.۵ می‌توانستیم قیدهای علامت را ثابت نگه‌داریم که فضای پارامترها در آن حالت، مثلاً Π_1 عبارت خواهد بود از یک زیرمجموعه از Π . تمامی ویژگی‌های $\mathcal{F}, \mathcal{S} : \Pi \Rightarrow \mathbb{R}^n$ و $\vartheta : \Pi \Rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ در $\Pi_1 \in \bar{\pi}$ به $\mathcal{F}|_{\Pi_1}, \mathcal{S}|_{\Pi_1}$ و $\vartheta|_{\Pi_1}$ منتقل می‌شوند، ولی الزاماً عکس این احکام درست نیستند.

۱. نکته. به نظر می‌آید که باید جای $\mathcal{M}(y)$ و $\mathcal{M}(\bar{y})$ عوض شود (مترجم).

بنابراین، در این حالت ویژه که S نمی‌تواند در π_3 به شکل Isc باشد، بایستی مشخص کنیم که آیا $S|_{\Pi_1}$ در π_3 به شکل Isc است یا نیست (درواقع نیست؛ زیرا پریشیدگی‌های به‌دلخواه کوچک c^3 باعث می‌شود مجموعه بهینه به یک مجموعه تک‌عضوی تبدیل شود).

یادآوری ۵-۱-۹ (به‌کارگیری برای سلول‌های وورونویی^۱).

دستگاه‌های خطی نیمه-نامتناهی در شاخه‌های مختلف ریاضی به صورت آنالیز محدب به وجود می‌آیند (مثلاً زیردیفرانسیل‌های محدب و مقعر عبارت‌اند از مجموعه جواب‌های این نوع دستگاه‌ها)، مسئله‌های مکمل خطی استوار (تعریف ۱۰۱۰ در [۲۲۹]) یا هندسه محاسباتی. تصویر متری روی $T \subset \mathbb{R}^n$ ، $|T| \geq 2$ ، عبارت است از نگاشت مجموعه‌ای $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ متناظر با هر $x_n \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه نزدیک‌ترین نقاط در T برحسب فاصله اقلیدسی. بنابراین، برای هر $s \in T$ ، $\mathcal{P}_T^{-1}(x)$ نمایانگر مجموعه تمامی نقاط \mathbb{R}^n نزدیک‌تر از سایر نقاط T به s است. در این چهارچوب، عناصر T را مکان‌های وورونویی می‌نامند، درحالی‌که $\mathcal{P}_T^{-1}(s)$ عبارت است از سلول وورونویی s . تنها به تعداد متناهی از مکان‌های وورونویی را تا سال‌های ۱۹۹۰ بررسی کردند، مثلاً دکارت در ۱۶۴۴، دیریشله در ۱۸۵۰ و وورونویی در ۱۹۰۸ به ترتیب برای $n=2$ ، $n=3$ و $n > 3$. دلونای^۲ یک مقاله درباره کریستوگرافی در سال ۱۹۳۴ چاپ کرده که در آن یک مجموعه گسسته مانند T با $n \in \mathbb{N}$ را در نظر گرفت. سلول‌های وورونویی مربوط به مجموعه متناهی به‌طور وسیع در هندسه محاسباتی، تحقیق در عملیات، فشرده‌سازی داده، اقتصاد، بازاریابی و غیره به‌کار برده شده است. همان‌طور که در [۲۲۶] مشاهده شد، با حذف $\|x\|_p$ در دومین نامساوی، برای هر $t \in T$ خواهیم داشت:

$$d_p(x, s) \leq d_p(x, t) \Leftrightarrow \|x - s\|_p \leq \|x - t\|_p$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T^{-1}(s) &= \{x \in \mathbb{R}^n : d_p(x, s) \leq d_p(x, t), t \in T\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : (t - s)^T x \leq \frac{\|t\|_p^p - \|s\|_p^p}{p}, t \in T\}. \end{aligned}$$

از این دست‌ورسازی دوباره در [۱۰۸] و [۱۰۹] به‌طور منظم، به ترتیب برای به‌دست آوردن اطلاعات هندسی $\mathcal{P}_T^{-1}(s)$ از داده‌های (T) و $(s \in T)$ و تعیین مجموعه‌های T استفاده کرده‌اند، به‌گونه‌ای که $\mathcal{P}_T^{-1}(s)$

1. Voronoi
2. Delaunay

عبارت باشد از مجموعه محدب داده شده. تأثیر انواع مختلف پریشیدگی های داده نمادین، یک زوج (\bar{T}, \bar{s}) به گونه ای که داشته باشیم $\bar{s} \in \bar{T} \subset \mathbb{R}^n$ ، درباره سلول های وورونی در [۱۱۶] تجزیه و تحلیل شده است.

یادآوری ۱۰-۱-۵ (پایداری اولیه-دوگان). به همان روشی که $\text{int dom } \mathcal{F}$ را می توان به صورت مجموعه پارامترهای سازگار پایدار تعبیر کرد (از این دیدگاه که از پارامترهای به قدر کافی کوچک، مسئله های اولیه سازگار به دست می آید)، درون توپولوژیکی زیرمجموعه های اصلی Π را می توان همانند مجموعه های پارامترهای پایدار با همان دیدگاه نگاه کرد. برخی از نقاط درونی در حالت پیوسته در [۱۱۱، ۱۱۳]، در حالت کلی در [۱۹۱] شناسایی شده اند. مثلاً آن هایی که با افرازاها متناظر باشند (ناسازگاری-کران داری-بی کرانی یا ناسازگاری-حل پذیری-کران دار حل ناپذیر-بی کرانی) با مسئله اولیه، مسئله دوگان، یا هر دو مسئله متناظر هستند.

یادآوری ۱۱-۱-۵ (پایداری مرزی و مجموعه نقاط فرین). قضیه های پایداری مرزی جمع بندی شده در شکل پس از قضیه ۵-۱-۳ را می توان در [۹۹، ۱۰۶] یافت. در مقاله اخیر، ارتباط های بین ویژگی های پایداری نگاشت های مجموعه ای همراه با تصویرهای محدب بسته در \mathbb{R}^n و نگاشت های مرزی نظیر در حالت کلی تجزیه و تحلیل شده اند. معادل بودن

$$B \text{ در } \bar{\pi} \text{ به شکل usc است} \Leftrightarrow B \text{ در } \bar{\pi} \text{ بسته است}$$

در [۹۴] مورد استفاده قرار گرفت تا یک شرط کافی را برای مهار پایداری بین مجموعه های جواب دستگاه های خطی نیمه-نامتناهی به دست آورد.

نتایج مهم درباره نیمه-پیوستگی ها و سدورف مجموعه نقاط فرین مجموعه شدنی دستگاه های متناهی در [۶۶] ابتدا برای مجموعه شدنی دستگاه های نامتناهی در [۱۰۰] و سپس برای نگاشت های مجموعه ای دلخواه با تصویرهای محدب در [۱۱۴] تعمیم داده شده بود.

یادآوری ۱۲-۱-۵ (پایداری S و \mathcal{V} : پیشینه ها و تعمیم ها). جدول ۵-۲ فهرست غیرجامعی از آثار مرتبط با پایداری مسئله های به گزینی به شکل

$$\inf f(x, \pi) \text{ s.t. } x \in \mathcal{F}(\pi)$$

را به ترتیب زمانی، به اختصار نشان می دهد که در آن معمولاً داریم:

$$\mathcal{F}(\pi) = \{x : f_t(x) \leq 0, \forall t \in T; x \in C\}$$

که X در آن میین فضای تصمیم، C میین یک مجموعه قیدی معین (در حالت کلی $X = C$) و $\pi \in \Pi$ (فضای پارامتر نظیر) هستند. آن آثاری که انواع ویژه‌ای از پارامترها را مورد بحث قرار می‌دهند. معمولاً پیریشیدگی‌های طرف راست (RHS) با ستاره نشانه‌گذاری می‌شوند. برای مقایسه، در اینجا قیدهای تابعی به شکل $f(t, \cdot) \in K$ نمایش داده می‌شوند که در آن $f_t(x) := f(t, x)$ و K عبارت است از یک زیرمجموعه معلوم از فضای مرتب جزئی مشخص مانند Y (مثلاً $Y = \mathbb{R}^T$ و $K = \mathbb{R}_+^T$) به خاطر مسئله LSIO (موردنظر P) اطلاعات در ستون‌های ۸-۳، از جدول ۵-۲ را به شکلی که در پی می‌آید نشانه‌گذاری می‌کنیم:

جدول ۵-۲ پیشینه‌های مربوط به مجموعه بهینه

Ref.	Year	X	T	f	$f(t, \cdot)$	$f(\cdot, x)$	K	ϑ	S
[136]	1973	top	abstr	lsc or usc	-	-	-	✓	✓
[29]	1982	\mathbb{R}^n	top	lin	fract	arb	R_-^T	✓	✓
[11]	1983	met	abstr	lsc or usc	-	-	-	✓	✓
[30]*	1983	\mathbb{R}^n	compH	cont	aff	cont	R_-^T		✓
[82]	1983	\mathbb{R}^n	compH	lin	aff	cont	R_-^T		✓
[31]	1984	\mathbb{R}^n	compH	lin	aff	cont	R_-^T	✓	✓
[62]	1984	norm	compH	cont	aff	cont	R_-^T	✓	
[157]	1985	\mathbb{R}^n	fin	fin conv	fin conv/aff	-	R_-^T	✓	✓
[10]*	1997	met	abstr	lsc	-	-	-	✓	
[102]	1998	\mathbb{R}^n	arb	lin	aff	arb	R_-^T	✓	✓
[156]	1998	\mathbb{R}^n	compH	diff	diff	cont	R_-^T	-	✓
[25]	2000	Ban	arb	cont	cont	-	cl conv	✓	✓
[48]	2001	\mathbb{R}^n	arb	lin	aff	arb	R_-^T	✓	✓
[86]	2003	\mathbb{R}^n	arb	fin conv	fin conv	arb	R_-^T	✓	✓
[145]	2005	Ban	fin	fin conv	fin conv/aff	-	cl conv	✓	✓
[47]	2005	\mathbb{R}^n	arb	lin	aff	arb	R_-^T	✓	✓
[180]*	2006	met	abstr	fin usc	-	-	-	✓	
[53]	2006	\mathbb{R}^n	arb	lin	aff	arb	$RT R_-^T$	✓	
[43]*	2007	\mathbb{R}^n	met compH	fin conv	fin conv	cont	R_-^T		✓
[72]*	2007	lcH	arb	lsc conv	lsc conv	arb	R_-^T	✓	
[143]*	2011	\mathbb{R}^n	compH	fin conv	fin conv	cont	R_-^T		✓
[73]	2012	Ban	arb	lsc	lsc	arb	R_-^T	✓	✓

ستون ۳: باناخ (Ban)، نرم‌دار (nor)، متریک (met)، فضای برداری توپولوژیکی هاوسدورف محدب محلی (lcH) و فضای توپولوژیکی (top).

ستون ۴: متناهی (fin)، دلخواه (arb)، و فضای توپولوژیکی فشردهٔ هاوسدورف (compH) در حالت مسئله‌های کمینه‌کردن محض (abstr)، هیچ‌گونه اطلاعات صریح دربارهٔ T ، $f(t, \cdot)$ ، $f(\cdot, x)$ و K وجود ندارد.

ستون ۵-۷: تخت (aff)، خطی (lin)، کسری (fract)، محدب (conv)، با مقدار متناهی (fin)، پیوسته (cont)، نیمه-پیوسته پایینی (lsc)، نیمه-پیوسته بالایی (usc)، دلخواه (arb) و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر (diff). در حالت مسئله‌های کمینه‌کردن محض، هیچ‌گونه اطلاعات مستقیم دربارهٔ قید موجود نیست و پریشیدگی‌های مجاز متداول متوالی هستند.

ستون ۸: بسته (cl) و محدب (conv). برای اختصار، هیچ اطلاعاتی دربارهٔ فضای پارامتر در این جدول درج نمی‌شود و تنها مفاهیم پایداری که در اینجا منحصراً مدنظر قرار می‌گیرند، عبارت‌اند از نیمه-پیوستگی پایینی و بالایی و بسته بودن. بدین ترتیب، در بین سایر مفاهیم پایداری مربوط به S پایداری‌های لیپ‌شیتسی و هولدر [۲۵]، پایداری ساختاری [۱۵۱، ۱۵۳] یا پایداری مانایی جواب‌ها [۱۳۳] در اینجا نمی‌آیند.

در [۱۵۶]، T با پارامتر تغییر می‌کند، ولی همیشه فشرده و به‌طور یکنواخت کران‌دار است. منابع در [۱۴۵]، خوش-وضع بودن به‌گزینی‌های محدب را تحت پریشیدگی‌های خطی توابع هدف و پریشیدگی‌های RHS مورد بحث قرار می‌دهد.

۵-۲-۲ تعیین پایداری به دامنهٔ مجموعهٔ شدنی

یک چهارچوب جدید با استفاده از نظریهٔ پایداری بازی‌های مجموع-صفر پیشنهاد شده است که پریشیدگی‌های در آن مجبور می‌شوند که شدنی بودن دستگاه‌های درگیر را حفظ کنند. بنابراین، مسئلهٔ عبارت است از مشخص کردن ویژگی lsc مربوط به \mathcal{F} محدود به $\text{dom } \mathcal{F}$ ، مثلاً \mathcal{F}^R برای انواع مختلف دستگاه‌های تحت پریشیدگی‌های تمامی داده‌های تابع RHS و LHS. اینک می‌خواهیم به دو قضیهٔ مربوط به پریشیدگی از نوع اخیر اشاره کنیم (یعنی موقعی که فقط \bar{a} پریشیده می‌شود و \bar{b} و \bar{c} ثابت می‌مانند)، برای دستگاه‌های دلخواه و پیوسته که یک تازگی در این زمینه را تشکیل می‌دهد.

قضیهٔ ۵-۲-۱۳ (نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{F}^R). فرض کنید $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ عبارت باشد از یک مسئلهٔ معمولی LSIO و پریشیدگی‌های دلخواه تنها در \bar{a} را در نظر بگیرید؛ در این صورت خواهیم داشت: (i) اگر یا $\bar{\pi}$ در SCQS صدق کند یا $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ عبارت باشد از یک مجموعه تک‌عضوی، آنگاه \mathcal{F}^R در $\bar{\pi}$ به شکل lsc است.

(ii) اگر \mathcal{F}^R در $\bar{\pi} \in \text{int dom}$ به شکل Lsc باشد و $\mathcal{F}(\bar{\pi}) \neq \{0_n\}$ ، آنگاه $\bar{\pi}$ در SSCQ صدق می‌کند.
 (iii) اگر \mathcal{F}^R در $\bar{\pi}$ به شکل Lsc باشد و $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ یک مجموعه تک‌عضوی نباشد یا یک زیرمجموعه یک شعاع نباشد، آنگاه $\bar{\pi}$ در SSCQ صدق می‌کند.

قضیه ۱۴-۲-۵ (پایداری بُعدی \mathcal{F}^R). فرض کنید $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) \in \text{dom } \mathcal{F}$ عبارت باشد از یک مسئله پیوسته LSIO و تنها پریشیدگی‌های پیوسته در \bar{a} را در نظر بگیرید. فرض کنید که $\bar{\pi}$ دارای هیچ نامساوی بدیهی به صورت قید نداشته باشد و نیز $0_n \notin \mathcal{F}(\bar{\pi})$ ؛ در این صورت احکام فهرست‌شده در ادامه با یک دیگر معادل هستند:

- (i) یک مجموعه مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{\pi}}$ موجود است به طوری که برای هر $\pi \in V$ داریم

$$\mathcal{F}^R(\pi) = \text{dom } \mathcal{F}(\bar{\pi})$$

 (ii) SSCQ برقرار است.

$$\mathcal{F}(\bar{\pi}) = n$$

به علاوه، از هر یک از این سه ویژگی نتیجه می‌شود که \mathcal{F}^R در $\bar{\pi}$ به شکل Lsc است.

اختلاف قابل ملاحظه بین قضیه ۱-۱-۵، قضیه ۱۳-۲-۵ و قضیه ۱۴-۲-۵ به خاطر دستگاه‌های موجود در $\text{bd dom } \mathcal{F}$ است (چون \mathcal{F}^R و \mathcal{F} بر $\text{dom int } \mathcal{F}$ برهم منطبق می‌شوند). در حالت ویژه که مجموعه T متناهی باشد، شرایط (i)-(iii) در قضیه ۱۴-۲-۵ برقرار هستند اگر و تنها اگر گزینه‌های دیگر که در ادامه می‌آیند، برقرار باشند:

- (الف) $\dim \mathcal{F}(\bar{\pi}) = n$
 (ب) $\dim \mathcal{F}(\bar{\pi}) = 0$
 (ج) $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ عبارت باشد از یک مجموعه تک‌عضوی در داخل یک شعاع باز (یک نیم-خط منشعب از 0_n بدون نقطه شروع).

یادآوری ۱۵-۲-۵ (پیشینه‌ها و منابع). قضیه‌های ۱۳-۲-۵ و ۱۴-۲-۵ به ترتیب عبارت‌اند از (گزاره ۹ در [۶۴]) و (گزاره ۱۰ در [۶۴]).

۳-۵ خوش-وضع بودن و بد-وضع بودن

مسئله LSIO مانند \bar{P} را خوش-وضع (بد-وضع) نسبت به یک ویژگی خاص می‌گویند اگر این ویژگی به وسیله هر مسئله پریشیده برقرار باشد به شرطی که پریشیدگی به اندازه کافی کوچک باشد (از پریشیدگی‌های کوچک و دلخواه مسئله \bar{P} ، مسئله‌هایی به دست می‌آیند که در این ویژگی‌ها به ترتیب صدق می‌کنند یا

نمی‌کنند). به زبان توپولوژیکی، مسئله \bar{P} را خوش-وضع (یا بد-وضع) می‌گویند اگر پارامتر وابسته به آن، $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ عبارت باشد از یک نقطهٔ درونی (به ترتیب یک نقطهٔ مرزی) از مجموعهٔ پارامترهای متناظر با مسئله‌هایی باشند که در این چنین ویژگی‌ها صدق می‌کنند. برای نمونه، مسئله \bar{P} خوش-وضع (بد-وضع) نسبت به شدنی بودن اولیه است اگر $\bar{\pi} \in \text{int dom } \mathcal{F}$ (به ترتیب $\bar{\pi} \in \text{bd dom } \mathcal{F}$).

زیرفضاهای Π مربوط به تجزیه و تحلیل اولیه-دوگان بد-وضع بودن عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \text{dom } \mathcal{F}, & \Pi_c^D &= \text{dom } \mathcal{F}^D, \\ \Pi_i &= \Pi \setminus \Pi_c, & \Pi_i^D &= \Pi \setminus \Pi_c^D, \\ \Pi_s &= \text{dom } \mathcal{S}, & \Pi_s^D &= \text{dom } \mathcal{S}^D, \\ \Pi_b &= \{\pi \in \Pi_c : \vartheta(\pi) > -\infty\}, \\ \Pi_b^D &= \{\pi \in \Pi_c^D : \vartheta^D(\pi) > -\infty\}, \\ \Pi_u &= \Pi_c \setminus \Pi_b, & \Pi_u^D &= \Pi_c^D \setminus \Pi_b^D. \end{aligned}$$

روشن است که زیرفضاهای Π_i ، Π_b و Π_u و $(\Pi_u^D$ و Π_b^D ، $\Pi_i^D)$ یک افزاز از Π به نام افزاز اولیه (به ترتیب افزاز دوگان) را تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ بعدی، برخی از نتایج مربوط به خوش-وضع بودن (بد-وضع بودن، به ترتیب) محدود به حالت اولیه مسئله LSIO در حالت کلی (نه لزوماً پیوسته) را بیان می‌کند. علاوه بر مجموعه‌های $C(\bar{\pi})$ ، $M(\bar{\pi})$ ، $N(\bar{\pi})$ و $K(\bar{\pi})$ ، احکام

$$A(\bar{\pi}) := \text{conv}\{\bar{a}_t, t \in T\}, \quad H(\bar{\pi}) := C(\bar{\pi}) + \mathbb{R}_+(0_n, -1),$$

$$Z^+(\bar{\pi}) := \text{conv}\{\bar{a}_t, t \in T; \bar{c}\}, \quad Z^-(\bar{\pi}) := \text{conv}\{\bar{a}_t, t \in T; -\bar{c}\}$$

مجموعه‌های متناظر با $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ هستند. به روشنی، داریم $M(\bar{\pi}) = \mathbb{R}_+ A(\bar{\pi})$.

قضیهٔ ۳-۱۶ (خوش-وضع بودن اولیه). فرض کنید $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) \in \Pi$ ؛ در این صورت، خواهیم داشت:

(i) اگر $d(\bar{\pi}, \text{bd } \Pi_c) < +\infty$ آنگاه $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_c$ ، $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_i$ یا $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_c$ اگر و تنها اگر

به ترتیب داشته باشیم $0_{n+1} \in \text{int } H(\bar{\pi})$ ، $0_{n+1} \in \text{int}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus H(\bar{\pi}))$ یا $0_{n+1} \in H(\bar{\pi})$.

(ii) اگر $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_c$ ، آنگاه $\bar{\pi} \in \text{int}(\Pi_c \setminus \Pi_s)$ ، $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_s$ یا $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_s$ اگر و تنها اگر به ترتیب

داشته باشیم $0_n \in \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus Z^-(\bar{\pi}))$ ، $0_n \in \text{int } Z^-(\bar{\pi})$ یا $0_n \in \text{bd } Z^-(\bar{\pi})$ ،

(iii) $\text{cl}\{\Pi_s\} = \text{cl}\{\Pi_b\}$ و $\text{int } \Pi_s = \text{int } \Pi_b$ (در نتیجه $\text{bd } \Pi_s = \text{bd } \Pi_b$).

در (i) آن مسئله‌هایی را از $\bar{\pi}$ خارج می‌کنیم که $d(\bar{\pi}, \text{bd } \Pi_c) = +\infty$ برقرار باشد، مسئله‌هایی که ویژگی‌ها و وجود آن‌ها در فصل بعدی بررسی می‌شوند. به‌ویژه خواهیم دید که این مسئله‌ها ناسازگار هستند

مثال ۴.۵، \mathbb{R} ، مسئله

$$\bar{\pi} : \inf_{x \in \mathbb{R}} (-x) \text{ s.t. } \circ x \geq 1, x \geq -k, k \in \mathbb{N}.$$

را در نظر بگیرید. این مسئله به‌روشنی ناسازگار است، اما $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_c$ چون مسئله‌های

$$\bar{\pi}_\varepsilon : \inf_{x \in \mathbb{R}} (-x) \text{ s.t. } \varepsilon x \geq 1, x \geq -k, k \in \mathbb{N}.$$

با $\varepsilon > 0$ سازگار هستند و وقتی $\varepsilon \downarrow 0$ خواهیم داشت $\bar{\pi} \rightarrow \bar{\pi}$. بنابراین، گزاره (i) در قضیه قبلی به‌کار می‌رود (به‌یقین، خواننده می‌تواند بررسی کند که داریم $0 \in \text{bd } H(\bar{\pi})$).

مثال ۵.۵ فرض کنید $\bar{\pi}$ هر یک از سه پارامتر π_1, π_2, π_3 باشد که در مثال ۱.۱ بررسی شده بودند. از پیش می‌دانیم $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_c$ و به‌آسانی بررسی می‌شود که $0_{n+1} \in \text{int}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus H(\bar{\pi}))$ درحقیقت خواهیم داشت $d_\gamma(0_{n+1}, H(\bar{\pi})) = (\omega + 2\sqrt{2})^{-2}$ (مثال ۴.۶ را ببینید). چون داریم

$$0 \in \text{int } A(\bar{\pi}) \subset \text{int } Z^-(\bar{\pi}) \subset \text{int } \Pi_s,$$

اگر به آن مسئله‌های در $(\text{bd } \Pi_c) \cap (\text{bd } \Pi_s)$ را بد-وضع کلی بگوییم دارای معنی خواهد بود، چون آن‌ها هم نسبت به شدنی بودن و هم حل‌پذیر بودن به‌طور هم‌زمان بد-وضع هستند. مشخصه این مسئله‌ها که در ادامه می‌آید، فقط شامل داده‌ها نمی‌شود (بنابراین، بررسی آن دشوار است). اینک مشاهده می‌شود که از $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_c$ خواهیم داشت یا $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_s$ یا $\bar{\pi} \in \text{int}(\Pi \setminus \Pi_s)$.

قضیه ۳-۱۷ (بد-وضعی کلی). اگر $\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_c$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\bar{\pi} \in \text{bd } \Pi_c \Leftrightarrow 0_n \in \text{bd } Z^+(\bar{\pi}) \text{ یا } \bar{\pi} \in \text{cl}(\Pi_c \cap \text{bd } \Pi_c). \quad (۵-۵)$$

مثال ۶.۵ در مثال ۴.۵، به‌روشنی می‌بینیم که در یک همسایگی به‌اندازه کافی کوچک $\bar{\pi}$ ، هر مسئله مانند π یا ناسازگار یا بی‌کران است، یعنی $\bar{\pi} \in \text{int}(\Pi \setminus \Pi_s)$. در واقع $[-1, 1] = \text{int } Z^+(\bar{\pi})$ و $0 \in \text{int } Z^+(\bar{\pi})$ و $0 \in \text{int}(\mathbb{R}^2 \setminus H(\bar{\pi}))$ ، چون هر مسئله سازگار به‌اندازه کافی نزدیک به $\bar{\pi}$ در $\text{cl}(\Pi_c \cap \text{bd } \Pi_c)$ صدق می‌کند و بنابراین به $\text{int } \Pi_c$ تعلق دارد.

قضیه‌های اولیه -دوگان در ادامه را با فرض پیوسته بودن خواهیم داشت.

قضیه ۵-۳-۱۸ (اولیه-دوگان خوش-وضع). مسئله‌های پیوسته در فضای پارامتری Π ، برای $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) \in \Pi$ خواهیم داشت:

- (i) $\bar{\pi} \in \Pi_c \Leftrightarrow$ در $\bar{\pi}$ SCQ صدق می‌کند
- (ii) $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_c^D \Leftrightarrow \bar{c} \in \text{int } M(\bar{\pi})$
- (iii) $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_b \Leftrightarrow \bar{\pi} \in \text{int}(\Pi_b \cap \Pi_b^D) \Leftrightarrow$ در $\bar{\pi}$ و $c \in M(\bar{\pi})$ SCQ صدق می‌کند
- (iv) $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_i \Leftrightarrow \bar{\pi} \in \text{int}(\Pi_i \cap \Pi_u^D) \Leftrightarrow \bar{\pi} \in \text{int } \Pi_u^D \Leftrightarrow (0|_n, 1) \in \text{int } K(\bar{\pi})$
- (v) $\bar{\pi} \in \text{int } \Pi_i^D \Leftrightarrow \bar{\pi} \in \text{int}(\Pi_u \cap \Pi_i^D) \Leftrightarrow \bar{\pi} \in \text{int } \Pi_u$
 $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n$ به طوری که $\bar{a}_i^T y > 0$ و $\bar{c}^T y < 0$ برای هر $t \in T$
- (vi) $\text{int}(\Pi_i \cap \Pi_i^D) = \text{int}(\Pi_b \cap \Pi_i^D) = \text{int}(\Pi_i \cap \Pi_b^D) = \emptyset$

شرط در (iii)، یعنی $\bar{\pi}$ در SCQ صدق می‌کند و $c \in \text{int } \mathcal{M}(\bar{\pi})$ ، همچنین خوش-وضع بودن نسبت به کران‌دار بودن هم‌زمان (یعنی $\bar{\pi} \in \text{int}(\Pi_b \cap \Pi_b^D)$) را برای یک مسئله کلی LSIO مشخص می‌کند که نیازی نیست پیوسته باشد. برعکس و بنابر (vi)، هیچ مسئله پیوسته LSIO نسبت به نشدنی بودن هم‌زمان خوش-وضع نیست، درحالی‌که یک مسئله کلی LSIO مانند $\bar{\pi}$ نسبت به همان ویژگی خوش-وضع است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$0_n \notin \text{cl } A(\bar{\pi}), \bar{c} \notin \text{cl } M(\bar{\pi}), (0_n, 1) \in 0^+ \text{cl } C(\bar{\pi}).$$

یادآوری ۵-۳-۱۹ (پیشینه‌ها و قضیه‌های مربوطه) گزاره (i) درقضیه ۵-۳-۱۶ از قضیه‌های ۴ و ۵ در [۴۹] می‌آید (ii) و (iii) به ترتیب عبارت‌اند از قضیه ۲ و قضیه ۱ در [۵۱]. قضیه ۵-۳-۱۷ را می‌توان درقضیه ۳ در [۵۱] یافت و شرایط کافی مربوط به خوش-وضع بودن کلی در [۵۴] ثابت شده است. شرط (۵-۵) با استفاده از دستور مربوط به تابع سوپریمم داده‌شده در [۱۲۸] برحسب داده‌ها در [۱۲۷] شناسایی می‌شود. مثال ۴.۵ همان مثال ۱ در [۵۱] است.

مقادیر ثابت لیپ‌شیتسی مربوط به مقادیر بهینه هم اولیه و هم دوگان، با توجه به فرض‌های ضعیف‌تر پایداری در [۲۲۱] به دست می‌آیند که مانع وجود شکاف دوگانی در تمامی حالت‌ها نمی‌شود. پربیشیدگی‌های مجاز محدود به ضرایب تابع هدف مسئله‌های دوگان نظیر هستند. قضیه‌های مربوط به خوش-وضع بودن مسئله‌های پیوسته LSIO داده‌شده درقضیه ۵-۳-۱۸ از [۱۱۱، ۱۱۵] برگرفته شده است. این قضیه‌ها در [۱۹۱] برای حالت کلی مسئله LSIO تعمیم داده شده‌اند. به‌علاوه، خوش-وضع بودن نسبت به وجود یک

جواب یکتای قوی اولیه در [۱۱۵] شناسایی شده‌اند. مشخصه‌های اشاره‌شده خوش وضع بودن همیشه برحسب داده‌ها ممکن است برای مسئله LSIO پیوسته و حالت کلی منطبق نشود.

قضیه‌های پیرایش‌شده برای حالتی که Π_b و Π_b^D در آن به‌وسیله پارامترها به مجموعه‌هایی تفکیک می‌شوند به این نحو که آن‌هایی که دارای مجموعه‌های فشرده بهینه هستند و آن‌هایی که این ویژگی را ندارند، در [۱۱۲] آورده شده‌اند. به‌علاوه، در [۱۱۲] همچنین نشان داده می‌شود که اکثر پارامترهایی که مسئله‌های وابسته به آن‌ها دارای اولیه یا دوگان کران‌دار هستند، مجموعه‌های بهینه فشرده اولیه و دوگان دارند. باوجودی که تقریباً اکثر مشخصه‌های نظیر درون توپولوژیکی زیرفضای Π اشاره‌شده قبلی همچنان برای مسئله کلی LSIO برقرارند، این ویژگی کلی برای مسئله‌های کلی (نه پیوسته) برقرار نیست [۵۰، ۵۲، ۱۰۵].

دستورهای مبتنی بر داده‌ها برای محاسبه (یا حداقل برای برآورد) فاصله تا یک مسئله خوش-وضع تا بد-وضع بودن نسبت به شدنی اولیه، نشدنی بودن، حل‌پذیری و حل‌ناپذیری (یعنی، اندازه کمیته آن پریشیدگی‌هایی که از مسئله‌های در ویژگی نظیر صدق نمی‌کنند) به‌وسیله کانو واس، هانتوت، لویز، پارا وتولدو در یک دسته از مقاله‌ها از ۲۰۰۵ تا ۲۰۰۸ چاپ شده‌اند [۴۹-۵۲، ۱۲۷].

یادآوری ۵-۳-۲۰ (چند مسئله حل‌نشده درباره پایداری کیفی مسئله‌های LSIO)

۱. از قضیه ۵-۱-۱ و قضیه‌های دیگر پیشین، یک فهرست طولانی از ویژگی‌ها به‌دست می‌آید که با نیمه-پیوستگی پایینی \mathcal{F} با پریشیدگی‌های داده از جمله b معادل هستند. این پرسش به‌وجود می‌آید که تعیین کنیم کدام یک از این ویژگی‌ها همچنان، تحت فرض‌هایی که b ثابت بماند، نیمه-پیوستگی \mathcal{F} را شناسایی می‌کند

۲. قضیه ۵-۱-۳ نیمه-پیوستگی بالایی \mathcal{F} را تحت فرض‌های پریشیدگی‌های سه‌تایی شناسایی می‌کند، ولی هیچ‌همتایی از این قضیه برای انواع دیگر پریشیدگی‌های \mathcal{F} ، مثلاً آن‌هایی که b را ثابت نگه می‌دارند، وجود ندارد.

تجزیه و تحلیل کمی پایداری

۱-۶ پایداری کمی نگاشت‌های مجموعه‌ای

ویژگی‌های پایداری یک نگاشت مجموعه‌ای که در ادامه می‌آیند با ماهیت کمی هستند. دوباره عبارت $M : Y \rightrightarrows X$ است از یک نگاشت مجموعه‌ای بین دو فضای X و Y همراه با فاصله‌هایی (شاید تعمیم‌یافته) که با d نشان داده می‌شود.

- نگاشت M در $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } M$ به صورت شبه-لیپ‌شیتسی است اگر همسایگی‌هایی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{y}}$ و $U \in \mathfrak{N}_{\bar{x}}$ و یک عدد مانند $\kappa \geq 0$ موجود باشند به طوری که داشته باشیم:

$$d(x, M(y)) \leq \kappa d(y, y') \quad \forall y, y' \in V, \forall x \in M(y') \cap U \quad (1-6)$$

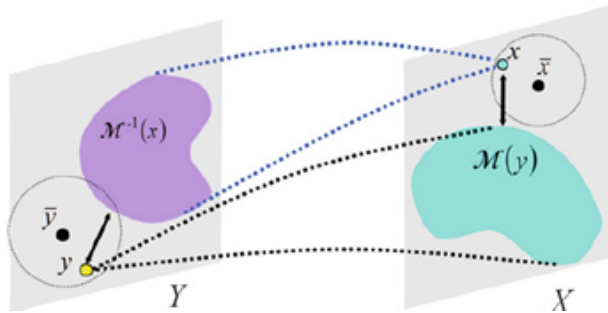
روشن است که این شرط، یک ویژگی پایداری است، از این دیدگاه که اگر نگاشت M در نقطه (\bar{y}, \bar{x}) به صورت شبه-لیپ‌شیتسی باشد، آنگاه در نقاط روی منحنی نمایش حول (\bar{y}, \bar{x}) نیز به صورت شبه-لیپ‌شیتسی خواهد بود. شبه-لیپ‌شیتسی نگاشت M را پیوستگی آوبینی^۱ یا ویژگی لیپ‌شیتس-مانند نگاشت هم می‌گویند (بخش ۱۰۴ در [۱۵۸] و منابع در آن را برای شرح بیشتر ببینید). به علاوه، شبه-لیپ‌شیتسی M در نقطه (\bar{y}, \bar{x}) با منظم بودن بر حسب یک متر معکوس M^{-1} در (\bar{y}, \bar{x}) معادل است، یعنی وجود دو همسایگی مانند $V \in \mathfrak{N}_{\bar{y}}$ و $U \in \mathfrak{N}_{\bar{x}}$ و یک عدد مانند $\kappa \geq 0$ معادل

است، به‌گونه‌ای که داشته باشیم:

$$d(x, \mathcal{M}(y)) \leq \kappa d(y, \mathcal{M}^{-1}(x)), \quad \forall y \in V, \forall x \in U. \quad (۲-۶)$$

درحقیقت، (۱-۶) به‌گونه‌ای روشن از (۲-۶) نتیجه می‌شود و حال آنکه با فرض (۱-۶) می‌توان ثابت کرد که برای همسایگی‌های کوچک‌تر می‌توانیم $y' \in V$ را برداریم و فقط بخواهیم که داشته باشیم $y' \in \mathcal{M}^{-1}(x)$. در پایان، با شروع از (۱-۶)، (۲-۶) با همان مقدار ثابت κ و شاید همسایگی‌های کوچک‌تر U و V به‌دست بیاید (بخش ۱۰۴ در [۱۵۸] را ببینید).

این وضعیت در شکل ۱-۶ مشاهده می‌شود، که با توجه به (۲-۶)، هرچه این کران کوچک‌تر باشد، با پایداری بیشتر مجموعه‌های تصویر $\mathcal{M}(y)$ حول \bar{y} همراه خواهد بود. کمینه‌چنین مقادیر κ مربوط به تمامی سه‌تایی‌های مرتب (κ, U, V) که در (۲-۶) صدق می‌کنند را کران درست لیپ‌شیتسی (یا اندازه لیپ‌شیتسی) \mathcal{M} در (\bar{y}, \bar{x}) می‌نامند، به‌شرطی که بر کوچک‌ترین مقدار κ مربوط به همه (κ, U, V) منطبق باشد و آن را با $\text{lip } \mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x})$ نشان می‌دهند. بنابراین، از (۱-۶) به‌آسانی خواهیم داشت:



شکل ۱-۶ مجموعه‌های تصویری و ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی

$$\text{lip } \mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x}) = \limsup_{\substack{y, y' \rightarrow \bar{y}, y \neq y' \\ x \rightarrow \bar{x}, x \in \mathcal{M}}} \frac{d(x, \mathcal{M}(y'))}{d(y, y')}$$

(مشاهده می‌شود که y و y' در (۱-۶) قابل جابه‌جا شدن هستند)

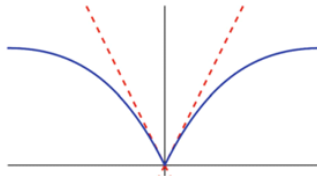
اگر $\text{lip } \mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x}) = \infty$ ، آنگاه \mathcal{M} نمی‌تواند در (\bar{y}, \bar{x}) شبه-لیپ‌شیتسی باشد. از شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{M} در (\bar{y}, \bar{x}) نتیجه می‌شود که \mathcal{M} در (\bar{y}, \bar{x}) نیمه-پیوسته درونی است (لم ۲.۳ در [۱۷۲]). در واقع اگر $y' = \bar{y}$ ، آنگاه برای هر $y \in V$ ، از نامساوی (۱-۶) خواهیم داشت:

$$d(\bar{x}, \mathcal{M}(y)) \leq d(y, \bar{y}). \quad (۳-۶)$$

بنابراین، برای V در (۳-۶) و فرض حالت غیربدهی $\kappa > 0$ ، اگر یک مجموعه باز مانند W شامل \bar{x} باشد، آنگاه عدد $\eta > 0$ را آن اندازه کوچک اختیار می‌کنیم تا با اطمینان داشته باشیم، اگر $d(x, \bar{x}) < \eta$ و $d(y, \bar{y}) < \frac{\eta}{\kappa}$ ، آنگاه $(x, y) \in W \times V$. بنابراین با توجه به (۳-۶) خواهیم داشت، اگر $d(y, \bar{y}) < \frac{\eta}{\kappa}$ ، آنگاه $W \cap \mathcal{M}(y) \neq \emptyset$ که به خاطر نیمه-پیوستگی درونی \mathcal{M} در (\bar{y}, \bar{x}) است. اگر هر دو فضا، Y و X نرم‌دار و \mathcal{M} دارای مقادیر بسته باشد، یعنی تصویرهای $\mathcal{M}(y)$ عبارت باشند از مجموعه‌های بسته در X ، آنگاه (۱-۶) (با همان عدد ثابت κ و همان همسایگی‌های U و V) با

$$\mathcal{M}(y') \cap U \subset \mathcal{M}(y) + \|y - y'\| \mathbb{B}_x, \quad (۴-۶)$$

معادل است که $\|\cdot\|$ در آن عبارت است از نرم تعریف شده در Y و \mathbb{B}_X عبارت است از یک گوی واحد



شکل ۲-۶ پیوستگی لیپشیتسی $f(y) = \sqrt{|y| + \frac{1}{16}}$

بسته در X . بدون فرض بسته بودن، همچنان (۱-۶) از (۴-۶) نتیجه می‌شود و حال آنکه برای هر $\kappa' > \kappa$ ، (۴-۶) از (۱-۶) به دست خواهد آمد.

اگر $\mathcal{M} \equiv f$ تک‌مقداری باشد، آنگاه برای هر $y, y' \in V$ از (۱-۶)، خواهیم داشت:

$$d(f(y'), f(y)) \leq \kappa d(y, y'),$$

به عبارت دیگر، f حول \bar{y} پیوسته لیپشیتسی است (یا به طور معادل پیوسته اکید در \bar{y} است).

مثال ۱۰۶ منحنی نمایش تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت

$$f(y) = \sqrt{|y| + \frac{1}{16}}$$

در شکل ۲-۶ مشاهده می‌شود که در هر نقطه پیوسته لیپشیتسی است (چرا؟).

اگر تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ روی یک مجموعه باز مانند $W \subset \mathbb{R}^n$ از دسته \mathcal{C}^1 باشد، آنگاه تابع f

حول هر نقطه مانند $\bar{y} \in W$ به صورت لیپشیتسی پیوسته است و خواهیم داشت:

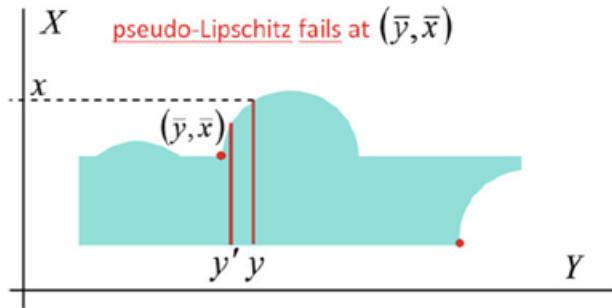
$$\text{lip } f(\bar{y}) = \|\nabla f(\bar{y})\|_2,$$

که $\nabla f(\bar{y})$ در آن عبارت است از ماتریس ژاکوبی f در \bar{y} (برای نمونه، قضیه ۸.۷ در [۲۰۷] را ببینید). مشکلات وقتی پیش می‌آیند که تابع f مشتق‌ناپذیر باشد (یا از دسته C^1 نباشد). خواننده می‌تواند با یک

مشاهده ساده هندسی بررسی کند که داریم $\text{lip}f(\circ) = 2$.

یک نگاشت مانند $\mathcal{M} : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ را در شکل ۳-۶ نشان می‌دهیم که در یک نقطه ویژه مانند $(\bar{y}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{M}$ به صورت شبه-لیپ‌شیتسی نیست. به این خاطر که اگر با نقاط y و y' از سمت راست به \bar{y} نزدیک شویم، آنگاه مشاهده خواهیم کرد که نسبت $\frac{d(x, \mathcal{M}(y'))}{d(y, y')}$ به بی‌نهایت میل می‌کند؛ چون شیب طرف راست مرز بالایی $\text{gph } \mathcal{M}$ برابر $+\infty$ است.

- \mathcal{M} در $(\bar{y}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{M}$ آرام است اگر همسایگی‌هایی مانند $U \in \mathfrak{N}_{\bar{x}}, V \in \mathfrak{N}_{\bar{y}}$ و عددی مانند $\kappa \geq 0$ موجود باشند به طوری که داشته باشیم:



شکل ۳-۶ ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی برقرار نیست

$$d(x, \mathcal{M}(\bar{y})) \leq \kappa d(y, \bar{y}), \quad \forall y \in V, \forall x \in \mathcal{M}(y) \cap U \quad (5-6)$$

توجه داشته باشید که $\mathcal{M}(y)$ می‌تواند برای نقطه‌ای مانند $y \in V$ تهی باشد.

ویژگی آرام بودن \mathcal{M} را می‌توان به طور معادل، برحسب زیرمنظم بودن $\mathcal{M}^{-1}(y)$ بیان کرد [۷۵] که به مفهوم وجود یک همسایگی (شاید کوچک‌تر) مانند U از \bar{x} است به طوری که داشته باشیم:

$$d(x, \mathcal{M}(\bar{y})) \leq \kappa d(\bar{y}, \mathcal{M}^{-1}(x)), \quad \forall x \in U. \quad (6-6)$$

مقدار ثابت κ به کران خطای محلی $d(\bar{y}, \mathcal{M}^{-1}(\cdot))$ در \bar{x} نیز معروف است به شرطی که $\text{gph } \mathcal{M}$ حول نقطه (\bar{y}, \bar{x}) به طور محلی بسته باشد.

کوچک‌ترین مقدار κ حاضر در تمامی زوج‌های (κ, U) صادق در (۶-۶) را می‌گویند کران آرام بودن دقیق (یا اندازه آرام بودن) \mathcal{M} در نقطه (\bar{y}, \bar{x}) و آن را با $\text{clm } \mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x})$ نشان می‌دهند. با توجه به (۵-۶) خواهیم داشت:

$$\text{clm } \mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x}) = \limsup_{\substack{y \rightarrow \bar{y}, x \rightarrow \bar{x} \\ x \in \mathcal{M}(y)}} \frac{d(x, \mathcal{M}(\bar{y}))}{d(y, \bar{y})}. \quad (7-6)$$

مشاهده می‌شود که اگر y را در \bar{y} ثابت نگاه داریم، آنگاه (۶-۶) از (۲-۶) به دست می‌آید و بنابراین خواهیم داشت $\mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x}) \leq \text{lip } \mathcal{M}(\bar{y}, \bar{x})$. در نتیجه، از شبه-لیپ‌شیتسی در (\bar{y}, \bar{x}) ، آرام بودن در همان نقطه نتیجه می‌شود، ولی از آرام بودن در نقطه (\bar{y}, \bar{x}) ، آرام بودن حول آن نقطه نتیجه نمی‌شود.

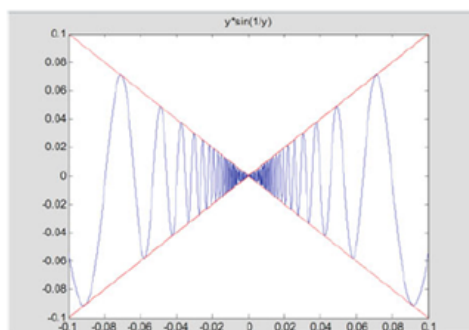
• \mathcal{M} را به طور مجزا (یا لیپ‌شیتسی محلی بالایی) آرام می‌گویند اگر علاوه بر (۶-۶) داشته باشیم $\mathcal{M}(\bar{y}) = \bar{x}$.

اگر $\mathcal{M} \equiv f$ تک‌مقداری باشد، آنگاه (۶-۶) به شکل

$$d(f(y), f(\bar{y})) \leq d(y, \bar{y}), \quad \forall y \in V,$$

در می‌آید که در آن عبارت است از یک همسایگی مشخص از \bar{y} . به علاوه، خواهیم داشت:

$$\text{clm } f(\bar{y}) = \limsup_{y \rightarrow \bar{y}} \frac{d(f(y), f(\bar{y}))}{d(y, \bar{y})}. \quad (8-6)$$



شکل ۴-۶ آرام، ولی لیپ‌شیتسی نیست

اینک چند مثال را می‌آوریم تا پیوستگی لیپ‌شیتسی و آرام بودن را با هم مقایسه کنیم.

مثال ۲.۶ شکل ۴-۶ منحنی نمایش تابع

$$\begin{cases} y \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

است. با توجه به (۸-۶) داریم:

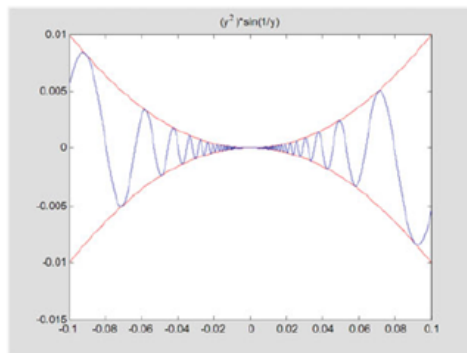
$$\text{clm } f(0) = \limsup_{y \rightarrow 0} \frac{d(f(y), f(0))}{d(y, 0)} = \limsup_{y \rightarrow 0} \left| \sin \frac{1}{y} \right| = 1$$

(دنباله $y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ ، $k = 1, 2, \dots$ را در نظر بگیرید).

از طرف دیگر، اگر یک دنباله جدید مانند $y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}$ ، $k = 1, 2, \dots$ را در نظر بگیریم که به صفر نیز میل می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \text{lip } f(0) &= \limsup_{y, y' \rightarrow 0} \frac{d(f(y), f(y'))}{d(y, y')} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(f(y_k), f(y'_k))}{|y_k - y'_k|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (4k + 2) = +\infty. \end{aligned}$$

یعنی $\text{lip } f(0) = +\infty$. لازم می‌آید که تابع f در 0 آرام باشد، ولی در این نقطه پیوسته لیپ‌شیتسی نیست.



شکل ۴-۶ لیپ‌شیتسی و آرام در $y = 0$.

مثال ۳.۶ تابع

$$f(y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{1}{y}, & \text{اگر } y \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } y = 0 \end{cases}$$

که به شکل (۵-۶) است در \circ از دسته C^1 نیست؛ زیرا

$$f'(y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{y} - \cos \frac{1}{y}, & \text{اگر } y \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } y = 0 \end{cases}$$

و $\lim_{y \rightarrow 0} f'(y)$ موجود نیست.

خواننده به آسانی می‌تواند بررسی کند که داریم $\text{clm} f(\circ) = \circ$. برای محاسبه $f(\circ)$ به نکات اشاره شده در ادامه توجه می‌کنیم. برای $y' \neq y$ ، از قضیه مقدار میانگین (نیازی نیست که داشته باشیم $f \in C^1$) نقطه‌ای مانند $z \in]y, y'[$ موجود است به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{|f(y') - f(y)|}{|y' - y|} = |f'(z)|,$$

و برای هر $\varepsilon > 0$ با نقاط y و y' به اندازه کافی نزدیک به \circ می‌توان اطمینان داشت که داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{|f(y') - f(y)|}{|y' - y|} &= |f'(z')| \\ &\leq \left| 2z \sin\left(\frac{1}{z}\right) - \cos\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \left| 2z \sin\left(\frac{1}{z}\right) \right| + \left| \cos\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \varepsilon + 1. \end{aligned}$$

(به یاد آورید که $f'(\circ) = \circ$). بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{lip } f(\circ) = \limsup_{y, y' \rightarrow \circ} \frac{|f(y') - f(y)|}{|y' - y|} \leq 1.$$

به علاوه، اگر

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{k}\pi}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

آنگاه خواهیم داشت $f'(y_k) = -1$ و با توجه به تعریف مشتق، برای هر k ، یک عدد حقیقی مانند y'_k موجود است به طوری که داشته باشیم:

$$\left| \frac{|f(y'_k) - f(y_k)|}{|y'_k - y_k|} - |f'(y_k)| \right| = \left| \frac{|f(y'_k) - f(y_k)|}{|y'_k - y_k|} - 1 \right| \leq \frac{1}{k}.$$

که با حد گرفتن از آن، وقتی $k \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(y'_k) - f(y_k)|}{|y'_k - y_k|} = 1.$$

و در نتیجه $\text{lip } f(\circ) = 1$.

چند قضیهٔ مربوط به ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی و آرام بودن \mathcal{F} و \mathcal{S} را در این فصل ثابت می‌کنیم و برآوردهایی از اندازهٔ نظیر را هم ارائه می‌دهیم.

• با این شرط که $\text{gph } \mathcal{M}$ بسته است، یک کران خطای جامع $d(\bar{y}, \mathcal{M}^{-1}(\cdot))$ عبارت است از هر عدد نامنفی مانند $\kappa < +\infty$ به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$d(x, \mathcal{M}(\bar{y})) \leq d(\bar{y}, \mathcal{M}^{-1}(x)). \quad (9-6)$$

اگر یک چنین عدد مثبتی مانند κ موجود باشد، آنگاه مقدار متناهی سوپریم در ادامه (که بر مینیمم مقادیر κ صادق در (9-6) منطبق می‌شود) یک نوع از نرخ حالت

$$\circ \leq \tau(\mathcal{M}, \bar{y}) := \sup_{x \in X} \frac{d(x, \mathcal{M}(\bar{y}))}{d(\bar{y}, \mathcal{M}^{-1}(x))}$$

را برای $\bar{\pi}$ می‌سازد با این قرارداد که $\circ/\circ = \circ$.

۲-۶ پایداری کمی نگاهت مجموعه شدنی

اولین معیار کمی پایداری که در این بخش بررسی می‌شود، عبارت است از فاصله تا بد-وضع بودن. این مفهوم به وسیلهٔ رنگار^۱ [۲۰۰] در زمینهٔ دستگاه‌های مخروطی معرفی شد. به علاوه، این مفهوم خود یک سنج کمی از پایداری (خوش-وضع بودن) دستگاه را می‌سازد. این فاصله یک وسیلهٔ کلیدی در تجزیه و تحلیل پیچیدگی برخی الگوریتم‌ها، مانند روش‌های نقطهٔ درونی در [۲۰۱]، الگوریتم بیضی‌گون در [۸۴]، یا تعمیم الگوریتم فون نیومن^۲ مطالعه شده در [۷۸] می‌باشد. عبارت‌های مربوط به $d(\pi, \text{bddom } \mathcal{F})$ ، $d(\pi, \text{bd dom } \mathcal{S})$ و غیره را در زیربخش‌های مختلف ارائه می‌دهیم.

۱-۲-۶ فاصله تا بد-وضعی نسبت به سازگاری

در رابطه با برآورد فاصله تا بد-وضع بودن، در یک دسته از مقاله‌ها ([۴۹-۵۲] و غیره) دستورات مختلفی ارائه شده‌اند تا محاسبهٔ شبه-فاصله‌ها از $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ تا مجموعه‌هایی از مسئله‌های بد-وضع را به

1. Renegar
2. von Neumann

محاسبه فاصله‌ها از مبدأ تا یک مجموعه مناسب در فضای اقلیدسی (\mathbb{R}^n یا \mathbb{R}^{n+1}) تبدیل کند. در این زیربخش، نرم‌های دلخواه را در \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^{n+1} و فاصله‌های تعمیم یافته نظیر آن‌ها، d در فضای پارامتری Π داده شده در (۲-۴) را در نظر می‌گیریم. در (بخش ۵ در [۴۹]) ثابت می‌شود:

$$d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = \left| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{t \in T} \frac{\bar{a}_t^T x - \bar{b}_t}{\|(x, -1)\|_*} \right|.$$

یک عبارت دیگر برای $d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F})$ با یک مفهوم روشن هندسی در همان مقاله ارائه می‌شود. اولین مشکلی که با آن روبه‌رو می‌شویم این است که در چهارچوب کار ما، ممکن است داشته باشیم $d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = \infty$. برای نمونه، اگر دستگاه قیدی $\bar{\pi}$ به صورت $\bar{\sigma} := \{\frac{1}{r} x \geq r, r \in \mathbb{N}\}$ باشد، آنگاه به آسانی نتیجه می‌شود:

$$d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = \left| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{r \in \mathbb{N}} \frac{(\frac{1}{r} x - r)}{\|(x, -1)\|_*} \right| = |-\infty| = \infty.$$

این حالت فقط وقتی ممکن است رخ دهد که مجموعه $C(\bar{\pi})$ بی‌کران باشد. همچنین مشاهده شود که این چنین دستگاه $\bar{\pi}$ باید ناسازگار باشد؛ در غیراین صورت، یعنی اگر $\bar{\pi} \in \text{dom } \mathcal{F}$ ، آنگاه می‌توانیم از آن یک دستگاه ناسازگار به دست آوریم بدین ترتیب که به جای تنها یک قید منتخب دلخواه از $\bar{\pi}$ ، مثلاً برای یک مقدار مشخص مانند $t_0 \in T$ ، $\bar{a}_{t_0}^T x \geq \bar{b}_{t_0}$ ، قرار دهیم $1 \geq 0_n^T x$ و بنابراین بنویسیم

$$\begin{aligned} d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) &= d(\bar{\pi}, \text{bd } (\Pi \setminus \text{dom } \mathcal{F})) \\ &= d(\bar{\pi}, \Pi \setminus \text{dom } \mathcal{F}) \leq \|(\bar{a}_{t_0}, \bar{b}_{t_0}) - (0_n, 1)\|, \end{aligned}$$

که تساوی دوم از (نتیجه ۱ در [۴۹]) به دست می‌آید.

به غیر از تابع حاشیه‌ای \bar{g} ، از تابع $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ به صورت

$$\bar{f}(x, \lambda) := \sup\{\bar{b}_t \lambda + \bar{a}_t^T x : t \in T\} \quad (۱۰-۶)$$

نیز استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که $\bar{f}(-x, 1) = \bar{g}(x)$. تابع \bar{f} عبارت است از تابع پشتیبان $\text{cl } C(\bar{\pi})$ که یک تابع زیرخطی نیمه-پیوسته پایینی است که دامنه مؤثر آن در

$$\text{cl } (\text{dom } \bar{f}) = (0^+ \text{cl } C(\bar{\pi}))^\circ$$

صدق می‌کند (گزاره ۲۰۲۰۴۷، در [۱۳۴]). زیردیفرانسیل \bar{f} در $(x, \lambda) \in \text{dom } \bar{f}$ عبارت است از

$$\partial \bar{f}(x, \lambda) = \{(u, \mu) \in \text{cl } C(\bar{\pi}) : \bar{f}(x, \lambda) = \langle u, x \rangle + \mu \lambda\}.$$

به‌ویژه

$$\partial \bar{f}(0_{n+1}) := \text{cl } C(\bar{\pi}).$$

برای $r = 1, 2, \dots$ اگر $\pi_r = (c^r, a^r, b^r)$ و برای هر $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ قرار دهیم

$$f_r(x, \lambda) := \sup \{ b_t^r \lambda + (a_t^r)^T x : t \in T \},$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$|\bar{f}(x, \lambda) - f_r(x, \lambda)| \leq d(\pi_r, \pi) \| (x, \lambda) \|_*, \quad (11-6)$$

و از $d(\pi_r, \pi) < +\infty$ ، $r = 1, 2, \dots$ نتیجه خواهد شد $\text{dom } \bar{f} = \text{dom } f_r$. به‌علاوه، اگر $\lim_{r \rightarrow \infty} d(\pi_r, \pi) = 0$ ، آنگاه دنباله f_r ، $r = 1, 2, \dots$ ، به‌طور نقطه‌وار به \bar{f} همگرا خواهد شد. قضیه‌هایی که در ادامه می‌آیند، یک جفت از مشخصه‌های این دستگاه‌های غیرعادی را فراهم می‌آورند.

قضیه ۱-۲-۶ (دستگاه‌هایی که برای آن‌ها داریم $d_\infty(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = +\infty$). گزاره‌های ذکر شده در ادامه معادل هستند:

- (i) $d_\infty(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = +\infty$
- (ii) تابع حاشیه‌ای $\bar{\pi}$ ، $\bar{g}(x) := \sup_{t \in T} \{ b_t - \bar{a}_t^T x \}$ ناسره است، یعنی $\bar{g} = +\infty$.
- (iii) $(0_n, 1) \in 0^+ \text{cl } C(\bar{\pi})$

ابتدا، اثبات معادل بودن (i) و (ii) را با تقریب بیان می‌کنیم. در ابتدا، فرض کنید $d_\infty(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = +\infty$ ، و با برهان خلف، فرض کنید که $\bar{g}(x_0) < +\infty$ بنا براین، اگر دستگاه پیریشیده $\pi = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b} + b)$ را در نظر بگیریم که b در آن عبارت است از تابع ثابت $b_t = -\bar{g}(x_0)$ ، آنگاه روشن است که $\pi \in \text{dom } \mathcal{F}$ (چون $x_0 \in \mathcal{F}(\pi)$) که با $d_\infty(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) \leq d_\infty(\bar{\pi}, \pi) = |\bar{g}(x_0)| < +\infty$ در تناقض است. از طرف دیگر، اگر $\bar{g} = +\infty$ و $\pi = (c, a, b)$ را در نظر بگیریم به طوری که مقدار $d_\infty(\bar{\pi}, \pi)$ متناهی باشد و بنویسیم:

$$f(x, \lambda) := \sup \{ b_t \lambda + a_t^T x, : t \in T \},$$

آنگاه از (۱۱-۶)، به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ خواهیم داشت:

$$g(x) = f(-x, 1) \geq \bar{f}(-x, 1) - d_\infty(\bar{\pi}, \pi) \| (x, \lambda) \|_1 = \bar{g}(x) - d_\infty(\bar{\pi}, \pi) \| (x, \lambda) \|_1$$

و $g = +\infty$ که در نتیجه خواهیم داشت $\pi \notin \text{dom } \mathcal{F}$.

برای اینکه نشان بدهیم (ii) و (iii) معادل هستند از تابع \bar{f} تعریف شده در (۶-۱۰) استفاده می‌کنیم.

فرض کنید (iii) برقرار باشد، یعنی برای هر زوج ثابت $(u, \mu) \in \text{cl } C(\bar{\pi})$ و هر $\gamma \geq 0$ داریم:

$$(u, \mu) + \gamma(0_n, 1) \in \text{cl } C(\bar{\pi}) = \partial \bar{f}(0_{n+1}).$$

بنابراین، برای $x \in \mathbb{R}^n$ و تمامی مقادیر $\gamma \geq 0$ داریم:

$$\bar{f}(-x, 1) \geq ((u, \mu) + \gamma(0_n, 1))^T(-x, 1) = \mu + \gamma - \langle u, x \rangle,$$

یعنی $\bar{g}(x) = \bar{f}(-x, 1) = +\infty$.

برعکس، فرض کنید (ii) برقرار باشد ولی $(0_n, 1) \notin 0^+ \text{cl } C(\bar{\pi})$. با توجه به قضیه جداسازی،

یک زوج مانند $(\nu, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0_{n+1}$ و یک عدد مانند β موجودند به طوری که برای تمامی

$(z, \mu) \in 0^+ \text{cl } C(\bar{\pi})$ داشته باشیم:

$$(\nu, \alpha)^T(z, \mu) \leq \beta < \alpha.$$

چون $0^+ \text{cl } C(\bar{\pi})$ عبارت است از یک مخروط بسته، بنابراین از نامساوی‌های قبلی خواهیم داشت

$$\alpha > 0, \beta = 0$$

$$(\nu, \alpha) \in [0^+ \text{cl } C(\bar{\pi})]^\circ = \text{cl}(\text{dom } \bar{f}).$$

با به کارگیری قضیه ۶.۱ در [۲۰۵] و در نظر گرفتن اینکه \bar{f} به طور مثبت همگن است، پس برای نقطه‌ای

مانند \bar{x} خواهیم داشت $\bar{g}(\bar{x}) < +\infty$ ، که با فرض (ii) متناقض است.

در بخش ۳-۱، دسته زیرمنحنی نمایش $H(\bar{\pi}) := C(\bar{\pi}) + \mathbb{R}_+\{(0_n, -1)\}$ را معرفی کردیم.

مشاهده می‌شود که

$$H(\bar{\pi}) = \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow d_\infty(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = +\infty, \quad (۶-۱۲)$$

در واقع، این رابطه یک نتیجه سراسر است از قضیه ۶-۲-۱ و

$$\bar{g}(x) = \sup_{(a,b) \in H(\bar{x})} \{b - a^T x\}.$$

است.

قضیه ۲-۲-۶ (فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به سازگاری). اگر $d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) < +\infty$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$d(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = d(0_{n+1}, \text{bd } H(\bar{\pi})). \quad (۱۳-۶)$$

تساوی (۱۳-۶) برای هر نرم در \mathbb{R}^{n+1} مانند $\|\cdot\|_*$ برقرار است و فاصله نظیر $d(\cdot, \cdot)$ در فضای پارامتری برقرار است ((۲-۴) را ببینید).

مثال ۴.۶ مثال ۱.۱ را دوباره بررسی می‌کنیم. هر مسئله $\bar{\pi}$ که در آنجا بررسی شد (یعنی برای هر $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ به $\text{int dom } \mathcal{F}$ تعلق دارد (SCQ برقرار است) و خواننده می‌تواند بررسی کند که داریم:

$$d_{\gamma}(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F}) = (\omega + 2\sqrt{2})^{-1},$$

و نیز مسئله پیرشیده $\pi = (\bar{c}, a, b)$ که در آن

$$(a_t, b_t) := (\bar{a}_t, \bar{b}_t) - u, \quad t \in T$$

با

$$u = (\omega + 2\sqrt{2})^{-1}(1, 1, -1 - \sqrt{2})$$

چنان است که $\pi \in \text{bd dom } \mathcal{F}$ و $d_{\gamma}(\bar{\pi}, \pi) = d_{\gamma}(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{F})$. مشاهده می‌شود که در حقیقت داریم:

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{\omega + 2\sqrt{2}}(a_{\frac{\pi}{4}}, b_{\frac{\pi}{4}}) + \frac{4 + \sqrt{2}}{2(\omega + 2\sqrt{2})}((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = 0_3,$$

و $0_3 \in \text{bd } H(\pi)$

۲-۲-۶ ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{F}

اگر تعریف متناظر را در زمینه کاری خود به‌کار ببریم، نتیجه می‌شود که اگر عضوی مانند $V \in \mathcal{N}_{\bar{\pi}}$ و عددی مانند $\kappa \geq 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $\pi \in V$ و $x \in U$ داشته باشیم:

$$d_{\gamma}(x, \mathcal{F}(\pi)) \leq \kappa d_{\infty}(\pi, \mathcal{F}^{-1}(x)), \quad (۱۴-۶)$$

آنگاه با توجه به (۶-۲) نتیجه می‌شود که $\mathcal{F} : \Pi \Rightarrow X$ در $\text{gph } \mathcal{F} \in (\bar{\pi}, \bar{x})$ شبه-لیپ‌شیتسی است و اندازه لیپ‌شیتسی عبارت است از

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = \limsup_{(x, \pi) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\pi})} \frac{d_{\mathcal{F}}(x, \mathcal{F}(\pi))}{d_{\infty}(\pi, \mathcal{F}^{-1}(x))},$$

با این قرار داد که $0/0 = 0$.

این ویژگی در کل پایداری دستگاه قیدی π و نیز در تجزیه و تحلیل حساسیت دارای نتایج مهمی است و حتی روی پیچیدگی عددی الگوریتم‌های مربوط به یافتن یک جواب دستگاه تأثیر دارد. ارتباط بین این ویژگی با کیفیت‌های قیدی به وسیله بسیاری از پژوهشگران از جمله منگاسریان-فرومویتز^۱، SCQ، CQ،^۲ و غیره، بررسی شدند. برای نمونه، در [۱۵۶]، ارتباط بین منظم بودن متری، منظم بودن متری نسبت به پریشیدگی‌های طرف راست و منگاسریان-فرومویتز تعمیم یافته CQ در یک چهارچوب مشتق‌پذیر غیرمحدب ثابت شدند.

تساوی (۶-۱۴) به این معنی است که فاصله $d_{\mathcal{F}}(x, \mathcal{F}(\pi))$ حول نقطه $(\bar{\pi}, \bar{x})$ از بالا به وسیله $\kappa d_{\infty}(\pi, \mathcal{F}^{-1}(x))$ کران‌دار است و این رابطه به‌ویژه مفید است؛ زیرا یک نوع از باقی‌مانده است که در حالت کلی به‌سادگی محاسبه‌پذیر است.

برای روشن شدن این اختلاف، ساده‌ترین قالب یک مسئله نمادین پیوسته مانند $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{\pi}$ ، با پریشیدگی‌های پیوسته تابع طرف راست \bar{b} را در نظر بگیرید، یعنی می‌خواهیم فقط پارامترهای به‌شکل $\pi = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b} + b)$ با دستگاه قیدی نظیر

$$\{\bar{a}_t^T x \geq \bar{b}_t + b_t, t \in T\},$$

را بررسی کنیم که پریشیدگی‌های b متعلق به $\mathcal{C}(T)$ هستند. باقی‌مانده در این حالت مربوط به سوپریم انحراف‌های قیدی π به وسیله x است، یعنی

$$d_{\infty}(\pi, \mathcal{F}^{-1}(x)) = \max_{t \in T} [\bar{b}_t + b_t - \bar{a}_t^T x]_+,$$

1. Mangasarian-Fromovitz

2. Robinson

در صورتی که محاسبه $\|x - x'\|_2$ در صورتی که محاسبه $d_2(x, \mathcal{F}(\pi)) = \inf_{x' \in \mathcal{F}(x)} \|x - x'\|_2$ بسیار پیچیده‌تر است. در واقع، اگر $\bar{\pi}$ دارای یک نقطه اسلیر باشد، آنگاه دستور تعمیم‌یافته اسکولی^۱ [۵۸]

$$d_2(x, \mathcal{F}(\pi)) = \max_{(a, \alpha) \in C(\pi)} \frac{[\alpha - a^T x]_+}{\|a\|_2},$$

را به دست می‌آوریم که $[\cdot]_+$ نشان‌دهنده قسمت مثبت است و $C(\pi) := \text{conv} \{\bar{a}_t, \bar{b}_t + b_t, t \in T\}$. اینک اثبات این قضیه را که با استفاده از ابزار استاندارد ساده است، به تقریب شرح می‌دهیم. در واقع، ثابت می‌کنیم که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$d_2(x, \mathcal{F}(\pi)) = \max_{(a, \alpha) \in C(\pi)} d_2(x, H(a, \alpha)) = \max_{(a, \alpha) \in C(\pi)} \frac{[\alpha - a^T x]_+}{\|a\|_2},$$

که در آن $H(a, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\}$. این روش اثبات دارای گام‌های مختلف است:

- (۱) $d_2(x, H(a, \alpha)) = \frac{|\alpha - a^T x|_+}{\|a\|_2}$ عبارت است از دستور معروف اسکولی.
- (۲) نامساوی « \geq »، یعنی $d_2(x, \mathcal{F}(\pi)) \geq \sup_{(a, \alpha) \in C(\pi)} d_2(x, H(a, \alpha))$ از این حقیقت نتیجه می‌شود که برای هر $(u, v) \in C(\pi)$ داریم $\mathcal{F}(\pi) \subset H(u, v)$.
- (۳) عکس نامساوی « \leq »، از بحث ارائه‌شده در ادامه نتیجه می‌شود. در حالت غیربديهی، یعنی $x \notin \mathcal{F}(\pi)$ ، تصویر متعامد آن، $\hat{x} \in \mathcal{F}(\pi)$ را در نظر بگیرید. بنابراین به‌ازای $u := \frac{(x - \hat{x})}{\|x - \hat{x}\|_2}$ خواهیم داشت:

$$d_2(x, \mathcal{F}(\pi)) = \|x - \hat{x}\|_2 = u^T(x - \hat{x}),$$

و برای تمامی $z \in \mathcal{F}(\pi)$ داریم:

$$u^T(z - \hat{x}) \geq 0.$$

- (۴) چون دستگاه قیدی π از نوع فرکاس-مینکوسکی است، بنابراین با توجه به لم فرکاس، برداری مانند $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ موجود است به طوری که

$$\begin{pmatrix} u \\ u^T \hat{x} \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \bar{a}_t \\ \bar{b}_t + b_t \end{pmatrix}.$$

در نتیجه، با تعریف $\gamma := \sum_{t \in T} \lambda_t$ (مثبت است؛ زیرا $u \neq 0_n$) و

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} := \gamma^{-1} \begin{pmatrix} u \\ u^T \hat{x} \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t}{\gamma} \begin{pmatrix} \bar{a}_t \\ \bar{b}_t + b_t \end{pmatrix} \in C(\pi),$$

خواهیم داشت:

$$d_{\mathcal{F}}(x, \mathcal{F}(\pi)) = u^T(\hat{x} - x) = \frac{\bar{\alpha} - (\bar{a}^T)x}{\|\bar{a}\|_{\mathcal{F}}} \leq \max_{(a, \alpha) \in C(\pi)} \frac{[\alpha - a^T x]_+}{\|a\|_{\mathcal{F}}}.$$

ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{F} را تحت پریشیدگی‌های پیوسته \bar{b} با قضیه بعدی مشخص می‌کنیم و یک دستور صریح را برای اندازه لیپ‌شیتسی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳-۲-۶ (ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{F} ، پریشیدگی‌های متعارف). فرض کنید $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ عبارت باشد از یک مسئله پیوسته LSIO و تنها پریشیدگی‌های در \bar{b} را در نظر بگیرید (\bar{a} و \bar{c} ثابت می‌مانند)؛ در این صورت خواهیم داشت:

(i) برای هر $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{\pi})$ عبارت است از یک شبه-لیپ‌شیتسی اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در SCQ صدق کند.

(ii) فرض کنید \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ شبه-لیپ‌شیتسی باشد. در این صورت:

(ii-۱) اگر \bar{x} عبارت باشد از یک نقطه اسلیتر برای $\bar{\pi}$ ، آنگاه خواهیم داشت $\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = 0$.

(ii-۲) اگر \bar{x} یک نقطه اسلیتر برای $\bar{\pi}$ نباشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = \max \left\{ \frac{1}{\|a\|_{\mathcal{F}}} : \begin{pmatrix} a \\ a^T \bar{x} \end{pmatrix} \in C(\bar{\pi}) \right\} > 0. \quad (۱۵-۶)$$

با سپاس از گزاره (i) و قضیه ۱-۱-۵ همراه با فشرده بودن $C(\bar{\pi})$ ، \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ برای هر $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{\pi})$ لیپ‌شیتسی است اگر و تنها اگر $0_{n+1} \notin C(\bar{\pi})$ و این حالت موقعی رخ می‌دهد که اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به شکل lsc باشد.

اگر تابع حاشیه‌ای وابسته به مسئله نمادین $\bar{\pi}$ ، $\bar{g}(x) := \sup_{t \in T} \{\bar{b}_t - \bar{a}_t^T x\}$ را در نظر بگیریم متوجه می‌شویم که $\bar{g}(x) > 0$ اگر و تنها $x \notin \mathcal{F}(\bar{\pi})$ در صورتی که داشته باشیم $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ همراه با $\bar{g}(\bar{x}) = 0$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\partial \bar{g}(\bar{x}) = \text{conv} \{ -\bar{a}_t : \bar{b}_t - \bar{a}_t^T \bar{x} = 0, t \in T \} = \text{conv} \{ \bar{a}_t : t \in T(\bar{x}) \}$$

و اگر \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ به شکل شبه-لیپ‌شیتسی باشد و $\bar{g}(\bar{x}) = 0$ ، آنگاه می‌توانیم (۶-۱۵) را به شکل

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = \{d_{\mathcal{F}}(0_n, \partial \bar{g}(\bar{x}))\}^{-1}$$

بنویسیم.

مثال ۵.۶ مثال ۱.۱ و سه نقطهٔ (بهینه) تجزیه و تحلیل شده در آنجا را دوباره بررسی می‌کنیم:

(الف) اگر $x^1 = 0_2$ ، آنگاه

$$\{a \in \mathbb{R}^2 : (a, a^T x^1) = (a, 0) \in C(\bar{\pi})\} = \text{conv}\{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1) = \sqrt{2} \text{ و}$$

(ب) اگر $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\{a \in \mathbb{R}^2 : (a, a^T x^2) = (a, \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2)) \in C(\bar{\pi}) = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\}$$

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^2) = 1 \text{ که در نتیجه } 1$$

(پ) در پایان، با $x^3 = (0, 1)$ خواهیم داشت:

$$\{a \in \mathbb{R}^3 : (a, a^T x^3) = (a_1, a_2, a_3) \in C(\bar{\pi})\} = \{(0, -1)\}$$

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^3) = 1 \text{ و}$$

اگر پربیشیدگی‌ها در تمامی ضرایب در نظر گرفته شود، آنگاه یک حالت بسیار پیچیده‌تر به وجود می‌آید که در قضیهٔ بعدی در مورد آن بحث می‌شود.

قضیهٔ ۶-۲-۴ (ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{F} ، پربیشیدگی‌های کلی). اگر عبارت باشد از یک مسئلهٔ معمولی مانند $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ ، آنگاه پربیشیدگی‌های دلخواه \bar{a} و \bar{b} را در نظر بگیرید؛ در این صورت خواهیم داشت:

(i) برای هر $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{\pi})$ ، به صورت شبه-لیپ‌شیتسی است اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در SSCQ

(یا در هر شرط معادل با شکل Isc بودن تابع \mathcal{F} در $\bar{\pi}$) صدق کند،

(ii) فرض کنید \mathcal{F} شبه-لیپ‌شیتسی در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ و مجموعهٔ $\{\bar{a}_t, t \in T\}$ کران‌دار باشد؛ در این صورت

داریم:

(الف) اگر \bar{x} عبارت باشد از یک نقطه SS برای $\bar{\pi}$ ، آنگاه خواهیم داشت $\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = 0$
 (ب) اگر نقطه \bar{x} برای $\bar{\pi}$ یک نقطه SS نباشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = \|(\bar{x}, -1)\|_2 \max \left\{ \frac{1}{\|a\|_2} : \begin{pmatrix} a \\ \bar{a}^T \bar{x} \end{pmatrix} \in \text{cl } C(\bar{\pi}) \right\} > 0 \quad (16-6)$$

دوباره، از قضیه ۵-۱-۱، گزاره‌های معادل در ادامه را خواهیم داشت: \mathcal{F} برای هر $\bar{x} \in \mathcal{F}(\bar{\pi})$ به صورت شبه-لیپ‌شیتسی است اگر و تنها اگر $0_{n+1} \notin \text{cl } C(\bar{\pi})$ ، اگر و تنها اگر $\bar{\pi}$ در \mathcal{F} به شکل lsc باشد.

پیشینه در (۱۶-۶) به دست می‌آید و مثبت است. مشاهده می‌شود که $\text{gph } \mathcal{F}$ محدب نیست و بنابراین ابزار استاندارد در آنالیز تغییراتی همچون قضیه رابینسون-اورسکو^۱ (برای نمونه [۷۵]) را ببینید) قابل استفاده نیست.

۳-۲-۶ آرام بودن F

فرض کنید $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ عبارت باشد از یک مسئله LSIO و تنها پریشیدگی‌های \bar{b} در نظر بگیرید (\bar{c} و \bar{a} ثابت می‌مانند). از همان تابع \bar{g} نیز می‌توان برای تجزیه و تحلیل آرام بودن \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ با $\bar{g}(\bar{\pi}) = 0$ استفاده کرد. آرام بودن \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ به این شکل تبدیل می‌شود که عددی مانند $\kappa \geq 0$ و یک همسایگی مانند $U \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ موجودند به طوری که برای هر $x \in U$ داشته باشیم

$$d_2(x, \mathcal{F}(\bar{\pi})) \leq \kappa d_\infty(\bar{\pi}, \mathcal{F}^{-1}(x))$$

که در آن

$$\begin{aligned} d_\infty(\bar{\pi}, \mathcal{F}^{-1}(x)) &= \sup \left\{ [\bar{b}_t - \bar{a}_t^T x]_+, t \in T \right\} \\ &= [\sup \{ \bar{b}_t - \bar{a}_t^T x, t \in T \}]_+ \\ &= [\bar{g}(x)]_+ \end{aligned} \quad (17-6)$$

اکنون با توجه به قضیه ۱ در [۱۶۵] (و نیز گزاره ۲.۱ و قضیه ۵.۱ در [۹])، \mathcal{F} در $\text{gph } \mathcal{F} \in (\bar{\pi}, \bar{x})$ با $\bar{g}(\bar{\pi}) = 0$ آرام است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}, \bar{g}(x) > 0} d_{\mathcal{V}}(0_n, \partial \bar{g}(x)) > 0 \quad (۱۸-۶)$$

و

$$\text{clm } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x}) = \left\{ \liminf_{x \rightarrow \bar{x}, \bar{g}(x) > 0} d_{\mathcal{V}}(0_n, \partial \bar{g}(x)) \right\}^{-1}. \quad (۱۹-۶)$$

مثال ۶.۶ به یاد آورید که در مثال ۱.۱، برای $x^1 = (0, 0)$ داشتیم $\mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1) = \sqrt{2}$. با در نظر گرفتن دنباله $z^r = \left(\frac{-1}{r}, \frac{-1}{r}\right)$ ، $r = 1, 2, \dots$ ، که به x^1 همگرا می‌شود، مشاهده می‌کنیم که $\bar{g}(z^r) = \frac{1}{r}$ و $\bar{g}(z^r) = \text{conv}\{-(1, 0), -(0, 1)\}$ با توجه به (۱۹-۶) داریم:

$$\text{clm } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1) \geq \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} d_{\mathcal{V}}(0_n, \partial \bar{g}(z^r)) \right\}^{-1} = \sqrt{2} = \text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1).$$

چون $\text{clm } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1) \leq \text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1)$ ، پس نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{F}(\bar{\pi}, x^1) = \sqrt{2}$. اینک، برای $x^3 = (0, 1)$ داشتیم $\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^3) = 1$ ، و اگر $y^r = \left(-\frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}\right)$ ، $r = 2, 3, \dots$ ، که به روشنی به x^3 همگراست، خواهیم داشت $\bar{g}(y^r) = \frac{1}{r}$ و $\partial \bar{g}(y^r) = \{-(1, 0)\}$ که در نتیجه از (۱۹-۶) خواهیم داشت:

$$\text{clm } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^3) \geq \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} d_{\mathcal{V}}(0_n, \partial \bar{g}(y^r)) \right\}^{-1} = 1 = \text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^3)$$

و بنابراین $\text{clm } \mathcal{F}(\bar{\pi}, x^3) = 1$.

یادآوری ۶-۲-۵ (پیشینه‌ها و تعمیم‌ها). فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به ناسازگاری: معادل بودن (i) و (ii) در قضیه ۶-۲-۱ عبارت است از گزاره ۱ در [۴۹]، ولی اثباتی که در اینجا ارائه می‌شود از معادل بودن (ii) و (iii) از گزاره ۱ در [۱۲۷] برگرفته شده است و معادل بودن با (ii) در قضیه ۳ در [۵۶] ثابت شده است. مفهوم (۶-۱۲) در قضیه ۳.۲ در [۵۲] بدون استفاده از تابع حاشیه‌ای \bar{g} ارائه شده است. قضیه ۶-۲-۲ عبارت است از قضیه ۶ در [۴۹].

ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی مجموعه شدنی: قضیه ۶-۲-۳ را می‌توان در قضیه ۲.۱ و نتیجه ۳.۲ در [۳۴] یافت و قضیه ۶-۲-۴ عبارت است از قضیه ۱ در [۳۷]. ارتباط‌های بین منظم بودن متری، منظم بودن متری نسبت به پرنشیدگی‌های طرف راست و تعمیم منگاسریان-فرومویتر CQ در چهارچوب مشتق‌پذیر

نامحدب در [۱۵۶] ثابت شده‌اند. یک کران خطای محلی، تحت کران دار بودن مجموعه $C(\bar{\pi})$ در [۱۴۰] ارائه شده است بدون اینکه به وجود یک نقطه اسلیر قوی نیاز داشته باشد.

یادآوری ۶-۲-۶ (مشخصه‌های دیگر آرام بودن). دوباره، در $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{\pi}$ ، تنها پربیشیدگی‌های \bar{b} را بررسی می‌کنیم.

(الف) شرایطی که در ادامه می‌آیند نیز آرام بودن \mathcal{F} در $\text{gph } \mathcal{F}$ در $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ را نسبت به $\bar{g}(\bar{x}) = 0$ مشخص می‌کنند که یک نسخه خطی از قضیه ۳ در [۱۵۹] را تشکیل می‌دهند: عددی مانند $\lambda > 0$ و یک همسایگی مانند $U \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ موجود هستند به طوری که برای هر $x \in U$ با $\bar{g}(x) > 0$ می‌توان یک نقطه مانند $u_x \in \mathbb{R}^n$ با شرط $\|u_x\|_2 = 1$ را یافت به طوری که برای هر $t \in T$ داشته باشیم:

$$\bar{g}(x + \mu_x u_x) \leq \bar{g}(x) - \mu_x \lambda. \quad (۲۰-۶)$$

(ب) در اینجا کیفیت قیدی معروف آبادی^۱ (به اختصار ACQ) در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ را یادآوری می‌کنیم که می‌توان در چهارچوب ما نوشت:

$$\text{cl } D(\mathcal{F}(\bar{\pi}); \bar{x}) = A(\bar{x})^\circ. \quad (۲۱-۶)$$

مشاهده می‌شود که همواره داریم $D(\mathcal{F}(\bar{\pi}); \bar{x}) \subset A(\bar{x})^\circ$ ، (۴-۱) را ببینید) و این واقعیت که $\text{cl } D\mathcal{F}(\bar{\pi}^-); \bar{x}$ عبارت است از یک مخروط که بر $\mathcal{F}(\bar{b})$ در نقطه \bar{x} مماس است. از (۲۱-۶) یک نوع از شرط بهینگی مجانبی به صورت

$$\bar{x} \in \mathcal{S}(\bar{\pi}) \Leftrightarrow \bar{c} \in (\text{cl } D(\mathcal{F}(\bar{\pi}); \bar{x}))^\circ = A(\bar{x})^{\circ\circ} = \text{textcl } A(\bar{x}).$$

به دست می‌آید. یک مثال، در \mathbb{R}^3 به صورت

$$\sigma(\bar{\pi}) = \left\{ \begin{array}{l} -(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq \bar{b}_t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ x_3 \geq \bar{b}_t, \quad t = 2, \end{array} \right\}$$

ارائه می‌شود که ACQ در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ برقرار نیست که در آن داریم $\{2\} \cup [0, \frac{\pi}{4}]$ ، $T = [0, \frac{\pi}{4}] \cup \{2\}$ ، اگر $\bar{b}_t = -1$ و $\bar{b}_2 = 1$ و $\bar{x} = (0, 0, 1)^T$ در این حالت داریم:

$$\mathcal{F}(\bar{\pi}) = \mathbb{R} \times]-\infty, 0] \times \{1\} \quad \text{و} \quad \text{cl } D\mathcal{F}(\bar{\pi}; \bar{x}) = \mathbb{R} \times]-\infty, 0] \times \{0\}$$

$$A(\bar{x})^\circ = \{a_{\bar{\pi}}, a_{\bar{x}}\}^\circ = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

برقراری ACQ در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ برای $x \in \mathcal{F}(\bar{\pi}) \cap U$ در [قضیه ۳، ۵۷]، ثابت می‌شود که U در آن عبارت است از یک همسایگی \bar{x} همراه با یک ویژگی دیگر کران‌داری یکنواخت اعداد که بردارهای واحد در $A(\bar{x})$ با هم یک مشخصهٔ مربوط به آرام بودن \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ با $g(\bar{x}) = 0$ را تشکیل می‌دهد. این مشخصه‌سازی به‌طور قوی براساس قضیهٔ ۲۰۲ در [۲۳۶] استوار است. برای حالتی که T متناهی باشد یک دستور عملیاتی برای محاسبهٔ $\text{clm } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x})$ در بخش ۴ از [۵۷] ارائه می‌شود.

یادآوری ۶-۲-۷ (کران خطای جامع). در پی گزارهٔ ۴۰۵ [۵۵] کران خطای جامع به‌دست می‌آید: برای $\bar{\pi} \in \text{dom } \bar{\mathcal{F}}$ داده‌شده، فرض کنید که عددی مانند K ، نقطه‌ای مانند \hat{x} و عددی مانند $\varepsilon > 0$ موجود هستند، به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $\|x\|_2 \leq K$ و برای هر $t \in T$ داشته باشیم $\bar{a}_t^T \hat{x} \geq \bar{b}_t + \varepsilon$. در این صورت، $\varepsilon^{-1} \max\{1, K\}$ عبارت است از یک کران بالا برای $\bar{\pi}$. نقطهٔ $\hat{x} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ برای مثال ۱۰۱ عبارت است از یک نقطهٔ اسلیتر برای تمامی $x \in \mathcal{F}(\bar{\pi})$ ، $\|x\|_2 \leq 1$ و $\varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. در نتیجه، $3 + 2\sqrt{2}$ عبارت است از کران خطای جامع با عبارت داده‌شدهٔ قبلی.

یادآوری ۶-۲-۸ (شعاع منظم بودن متری). چون ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{F} در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ با منظم بودن متری \mathcal{F}^{-1} در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ معادل است، پس می‌توان مفهوم شعاع منظم بودن متری را در نظر گرفت، که به‌شکل

$$\text{rad } \mathcal{F}^{-1} := \inf_{l \in \mathcal{L}} \{ \|l\| : l \text{ در } \mathcal{F}^{-1} + l \text{ در } (\bar{x}, \bar{\pi}) \text{ به‌طور متری منظم نیستند} \},$$

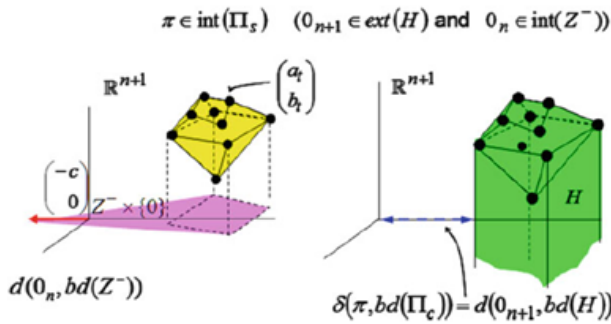
تعریف می‌شود که \mathcal{L} در آن عبارت است از فضای نگاشت پیوستهٔ خطی از \mathbb{R}^n به $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ ؛ یعنی $l(x) = \varphi(\cdot)^T x$ که $\varphi \in \mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ یک تابع مشخص است. در نتیجه، اگر نرم سوپرنرم در $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|l\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|l(x)\|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(\cdot)^T x\|_\infty \\ &= \max_{t \in T} \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(t)^T x| = \max_{t \in T} \|\varphi(t)\|_* \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}^{-1} + l)(x) = (\bar{a} + \varphi(\cdot))^T x - \mathcal{C}_+(T, \mathbb{R}).$$

قضیه‌ای که در ادامه می‌آید و به قضیه شعاعی معروف است، در قضیه ۳.۱ در [۳۴] بیان شده است (قضیه‌های شعاعی دیگر در [۷۴، ۱۴۴، ۱۸۹] ارائه شده‌اند): اگر $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}$ ، با پیوسته بودن $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ ، تنها پربیشیدگی‌های پیوسته \bar{b} مجاز باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{Rad } \mathcal{F}^{-1}(\bar{x}, \bar{\pi}) = \frac{1}{\text{lip } \mathcal{F}(\bar{\pi}, \bar{x})}.$$



شکل ۶-۶ فاصله تا بد-وضع بودن

یادآوری ۶-۲-۹ (ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی نگاشت مرزی). لاریکوئتا و ورا دو سربو [۱۶۶] معادل بودن ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی نگاشت مجموعه مرزی و پایداری نگاشت مجموعه شدنی \mathcal{F} نسبت به سازگاری را تجزیه و تحلیل می‌کنند. این مقاله، همچنین ارتباط بین منظم بودن اندازه B^{-1} و \mathcal{F}^{-1} را بررسی می‌کند و شرطی را اعلام می‌کند که تضمین کند که منظم بودن متری B^{-1} با نیمه-پیوستگی پایینی B معادل باشد که بسیاری از مشخصه‌ها در بخش ۵-۱ شرح داده شده‌اند.

۳-۶ پایداری کمی نگاشت مجموعه بهینه

۶-۳-۱ فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به حل‌پذیری

در این بخش، ابتدا یک دستور مربوط به فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به حل‌پذیری را ارائه می‌دهیم. برای سادگی، تنها فاصله اقلیدسی را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۶-۳-۱۰ (فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به حل‌پذیری). اگر $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) \in \text{cl dom } \mathcal{S}$ ، آنگاه

$$d_2(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{S}) = \min\{d_2(0_{n+1}, \text{bd } H(\bar{\pi})), \text{bd } Z^-(\bar{\pi})\} \quad (۲۲-۶)$$

که در آن $Z^-(\bar{\pi}) := \text{conv}\{\bar{a}_t, t \in T; -\bar{c}\}$

در شکل ۶-۶ نشان‌دهنده بیرون H است، یعنی $\text{ext}(H) = \text{int}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus H)$ در مثال شرح داده شده در این شکل داریم $d_2(0_n, \text{bd } Z^-(\bar{\pi})) < d_2(0_{n+1}, \text{bd } H(\bar{\pi}))$. برای هر مسئله ممکن در نظر گرفته شده $\bar{\pi}$ در مثال ۱۰.۱ (یعنی برای هر بردار ممکن \bar{c})، $\mathcal{F}(\bar{\pi})$ به صورت $M(\bar{\pi}) = \mathbb{R}^n$ کران‌دار است. بنابراین، با توجه به لم ۱۰.۵، \mathcal{F} در برخی همسایگی $\bar{\pi}$ به‌طور یکنواخت کران‌دار است. بنابراین داریم:

$$d_2(0_n, \text{bd } Z^-(\bar{\pi})) = (۲)^{-\frac{1}{2}} > (\delta + ۲\sqrt{۲})^{-\frac{1}{2}} = d_2(0_{n+1}, \text{bd } H(\bar{\pi}))$$

در نتیجه، با توجه به قضیه قبلی خواهیم داشت $d_2(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{S}) = (\delta + ۲\sqrt{۲})^{-\frac{1}{2}}$

مثال ۷.۶ مسئله برنامه‌ریزی خطی

$$\bar{\pi} : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} x_2 \text{ s.t. } -x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0, \left(\frac{1}{4}\right)x_2 \geq 0.$$

را در نظر بگیرید. چون

$$0_2 \notin H(\bar{\pi}) = \text{conv}\{(-1, 1, 0), (1, 1, 0), (0, \frac{1}{4}, 0)\} + \mathbb{R}_+\{(0, 0, -1)\}$$

پس با توجه به قضیه ۵-۳-۱۶ (i) داریم $\bar{\pi} \in \text{int dom } \mathcal{F}$ و به‌علاوه خواهیم داشت:

$$0_2 \in Z^-(\bar{\pi}) = \text{int conv}\{(-1, 1), (1, 1), (0, \frac{1}{4}), -(0, 1)\},$$

که با توجه به قضیه ۵-۳-۱۶ (ii) خواهیم داشت $\bar{\pi} \in \text{int dom } \mathcal{S}$. اینک داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \left\| \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right\|_2 = d_2(0_2, \text{bd } Z^-(\bar{\pi}))$$

$$> d_2(0_2, \text{bd } H(\bar{\pi})) = \left\| (0, \frac{1}{4}, 0) \right\|_2 = \frac{1}{4},$$

و

$$d_2(\bar{\pi}_1, \text{bd dom } \mathcal{S}) = \frac{1}{4}.$$

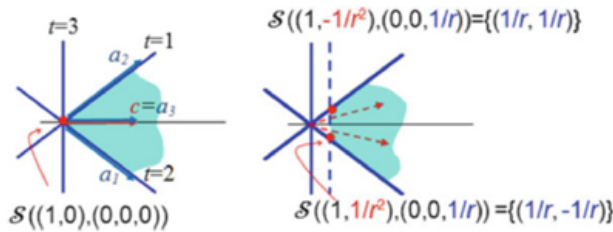
یک مسئله مانند $\pi \in \text{bd dom } \mathcal{S}$ چنان است که $d_{\mathcal{V}}(\bar{\pi}, \text{bd dom } \mathcal{S}) = d_{\mathcal{V}}(\bar{\pi}, \pi)$ عبارت است از

$$\bar{\pi} : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} x_2 \text{ s.t. } \begin{cases} (-1 - \circ)x_1 + (1 - \frac{1}{r})x_2 \geq \circ - \circ, \\ (1 - \circ)x_1 + (1 - \frac{1}{r})x_2 \geq \circ - \circ, \\ (\circ - \circ)x_1 + (\frac{1}{r} - \frac{1}{r})x_2 \geq \circ - \circ. \end{cases}$$

درحقیقت، داریم $\pi \in \text{bd dom } \mathcal{F}$ ؛ زیرا $0_3 \in \text{bd } H(\bar{\pi})$.

۲-۳-۶ ویژگی شبه-لیپ شیتسی S

از این پس، بررسی S را تنها در زمینه پارامترهای پیوسته $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ با $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ چپ ثابت \bar{a} و پربشیدگی‌های پیوسته \bar{c} و \bar{b} انجام می‌دهیم. با بررسی مثال‌هایی که در ادامه می‌آید، شروع می‌کنیم:



شکل ۶-۷ شبه-لیپ شیتسی نیست

$$\bar{\pi} : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 \text{ s.t. } x_1 - x_2 \geq \circ, x_1 + x_2 \geq \circ, x_1 \geq \circ. \quad (۲۳-۶)$$

در اینجا داریم $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ با $\bar{c} = (1, \circ)$ و $\bar{b} = (\circ, \circ, \circ)$ روشن است که $\mathcal{S}(\bar{\pi}) = \{(\circ, \circ)\}$. برای اینکه بدانیم که S در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ شبه-لیپ شیتسی نیست، مسئله‌های پربشیده شده (پارامتر ثابت \bar{a} را حذف کردیم)

$$\pi_r = ((1, -\frac{1}{r}), (\circ, \circ, \frac{1}{r})), \tilde{\pi}_r = ((1, -\frac{1}{r}), (\circ, \circ, \frac{1}{r})), r = 1, 2, \dots$$

را بررسی می‌کنیم. به آسانی داریم:

$$\mathcal{S}(\pi_r) = \{(\frac{1}{r}, \frac{1}{r})\}, \mathcal{S}(\tilde{\pi}_r) = \{(\frac{1}{r}, \frac{1}{r})\}, r = 1, 2, \dots$$

بنابراین، برای $r = 1, 2, \dots$ ، خواهیم داشت:

$$d_{\Psi}(\mathcal{S}(\pi_r), \mathcal{S}(\tilde{\pi}_r)) = \frac{\Psi}{r},$$

و حال آنکه

$$d_{\infty}(\pi_r, \tilde{\pi}_r) = \frac{\Psi}{r^2},$$

و

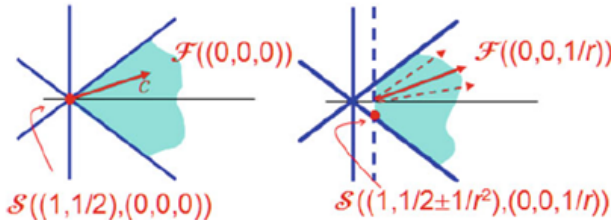
$$\text{lip } \mathcal{S}(\tilde{\pi}, \bar{x}) = \limsup_{(x, \pi) \rightarrow (\bar{x}, \tilde{\pi})} \frac{d_{\Psi}(x, \mathcal{S}(\pi))}{d_{\infty}(\pi, (\mathcal{S})^{-1}(x))} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{\Psi}{r}}{\frac{\Psi}{r^2}} = \infty.$$

همچنین شکل ۶-۷ را ببینید.

برخلاف وضعیت در مثال پیشین، اینک یک مسئله را ذکر می‌کنیم که در آن نمی‌توانیم با استفاده از شیوه به‌کاررفته قبلی نتیجه بگیریم که \mathcal{S} از ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی برخوردار نیست (شکل ۶-۸ را ببینید). مسئله جدید عبارت است از

$$\tilde{\pi} : \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{x_1 + \frac{1}{\Psi} x_2\} \text{ s.t. } x_1 - x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0, x_1 \geq 0. \quad (6-24)$$

که برای آن داریم $\mathcal{S}(\tilde{\pi}) = \{(0, 0)\}$.



شکل ۶-۸ پریشیدگی‌ها مانع شبه-لیپ‌شیتسی نمی‌شوند

مفهومی که در ادامه می‌آید، در شیوه بررسی ما مهم است: برای یک زوج داده‌شده مانند $(\tilde{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{S}$ ، شرط تعمیم‌یافته نرنبرگر^۱ (به اختصار ENC) در $(\tilde{\pi}, \bar{x})$ برقرار است، اگر $\tilde{\pi}$ در SCQ صدق کند و هیچ زیرمجموعه‌ای مانند $E \subset T(\bar{x})$ با شرط $|E| < n$ موجود نباشد به طوری که داشته باشیم $\bar{c} \in \text{cone } \{\bar{a}_t, t \in E\}$.

از قضیه بعدی، یک مشخصه کامل برای ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{S} مربوط به مسئله LSIO در زمینه پیوسته کار ما به دست می‌آید. این قضیه معادل بودن بین ENC و: (۱) ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{S} در

(۲) پایداری قوی لیپ‌شیتسی \mathcal{S} در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ یا منظم بودن قوی متری \mathcal{S}^{-1} در $G^3(\bar{\pi}, \bar{x})$ در [۷۵] و (۳) پایداری از نوع کوچیما^۱ تحت پریشیدگی‌های ویژه [۱۶۰] را نشان می‌دهد. این واقعیت که پایداری قوی لیپ‌شیتسی از ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی نگاشت مجموعه بهینه یک مسئله به‌گزینی پارامتری نتیجه می‌شود، برای یک دسته نسبتاً کلی از مسئله‌های به‌گزینی برقرار است (مثلاً نتیجه ۴.۷ در [۱۵۸] و قضیه ۷F.۴ در [۷۵] را ببینید).

قضیه ۶-۳-۱۱ (ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی \mathcal{S} مربوط به مسئله پیوسته LSIO). مسئله پیوسته LSIO، $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ را با پریشیدگی‌های پیوسته \bar{c} ، \bar{b} و $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{S}$ را در نظر بگیرید. در این صورت شرایطی که در ادامه می‌آیند با هم معادل هستند:

(i) \mathcal{S} در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ شبه-لیپ‌شیتسی است،

(ii) \mathcal{S} در برخی همسایگی $\bar{\pi}$ تک‌مقداری و پیوسته لیپ‌شیتسی است،

(iii) \mathcal{S} تک‌مقداری و پیوسته است،

(vi) \mathcal{S} در برخی همسایگی $\bar{\pi}$ تک‌مقداری است،

(v) ENC در $(\bar{\pi}, \bar{x})$ برقرار است.

مشاهده می‌شود که ENC برای مسئله $\bar{\pi}$ در (۶-۲۳) برقرار نیست، ولی برای مسئله $\bar{\pi}$ در (۶-۲۴) برقرار است، که در نتیجه \mathcal{S} در $(\bar{\pi}, 0_2)$ شبه-لیپ‌شیتسی است. در مثال ۱۰.۱، با \bar{b} که در آنجا تعریف شد، \mathcal{S} تنها در شرایط فهرست شده در ادامه شبه-لیپ‌شیتسی خواهد بود:

$$\text{برای } ((\bar{c}_1, \bar{c}_2), \bar{b}), \bar{x}) \begin{cases} \bar{x} = (1, 0), & \bar{c}_1 < 0, \bar{c}_2 > 0 \text{ برای,} \\ \bar{x} = (0, 1), & \bar{c}_1 > 0, \bar{c}_2 < 0 \text{ برای,} \\ \bar{x} = (0, 0), & \bar{c}_1 > 0, \bar{c}_2 > 0 \text{ برای,} \end{cases}$$

از ENC متوجه می‌شویم که خانواده ناتهی از مجموعه‌های

$$\mathfrak{I}(\bar{x}) := \{E \subset T(\bar{x}) : |E| = n \text{ and } \bar{c} \in \text{cone}\{\bar{a}_t, t \in E\}\}. \quad (۶-۲۵)$$

را بررسی کنیم. برای مسئله $\bar{\pi}$ در (۶-۲۴) داریم $\mathfrak{I}(0_2) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

روشن است که تحت ENC، اگر $E \in \mathfrak{I}(\bar{x})$ ، آنگاه بردارهای $\{\bar{a}_t, t \in E\}$ مستقل خطی هستند که در نتیجه ماتریس A_E با این سطرها ناویژه است. پژوهشگران در قضیه ۱ در [۳۸] ثابت کردند که اگر \mathcal{S}

در $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in \text{gph } S$ شبه-لیپ‌شیتسی باشد، آنگاه

$$\text{lip } S(\bar{\pi}, \bar{x}) \geq \sup_{E \in \mathfrak{E}(\bar{x})} \|A_E^{-1}\|.$$

به‌علاوه، اگر T متناهی باشد، آنگاه تساوی برقرار خواهد بود (که یک مسئله حل‌نشده پیشنهادی در [۱۷۴] را حل می‌کند). در اینجا، A_E را با درون‌ریختی $x \mapsto A_E x$ همراه با فضای تصویرها مجهز به $\|\cdot\|_\infty$ را شناسایی می‌کنیم. اگر ماتریس A_E ناویژه باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\|A_E^{-1}\| = \max_{\|y\|_\infty \leq 1} \|A_E^{-1}y\|_2 = \max_{y \in \{-1, 1\}^n} \|A_E^{-1}y\|_2. \quad (۲۶-۶)$$

دومین تساوی ناشی از این حقیقت است که $\{-1, 1\}^n$ عبارت است از مجموعه نقاط فرین‌گوی واحد بسته متناظر با $\|\cdot\|_\infty$. به اضافه اینکه باید تحدب تابع بیشینه شود.

برای مسئله π در (۲۴-۶) داریم:

$$\text{lip } S(\bar{\pi}, 0_2) = \max\{\|(\bar{a}_1, \bar{a}_2)^{-1}\|_2, \|(\bar{a}_2, \bar{a}_3)^{-1}\|_2\} = 5^{\frac{1}{2}}.$$

۳-۳-۳ آرام بودن S

دوباره در چهارچوب پارامترهای پیوسته مانند $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ با پریشیدگی‌های پیوسته \bar{c} و \bar{a} ، آرام بودن S از طریق آرام بودن نگاشت مجموعه جواب جزئی $\mathcal{S}_{\bar{c}} : C(T, \mathbb{R}) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ داده‌شده به صورت

$$\mathcal{S}_{\bar{c}}(b) := \mathcal{S}(\bar{c}, b),$$

و به اصطلاح نگاشت مجموعه تراز (پایین) $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times C(T, \mathbb{R}) \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ نشان داده‌شده به صورت

$$\mathcal{L}(\alpha, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{c}'x \leq \alpha; \bar{a}'_t x \geq b_t, t \in T\}$$

تجزیه و تحلیل می‌شود.

آرام بودن \mathcal{L} در $(\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}), \bar{x} \in \text{gph } \mathcal{L}$ به این شکل درمی‌آید که عددی مانند $\kappa \geq 0$ و یک همسایگی مانند $U \in \mathfrak{E}_{\bar{x}}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in U$ داشته باشیم:

$$d_2(x, \mathcal{L}(\bar{c}'\bar{x}, \bar{b})) \leq \kappa d_\infty((\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}), \mathcal{L}^{-1}(x)),$$

که به روشنی، داریم $\mathcal{L}(\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}) = \mathcal{S}(\bar{\pi})$ و

$$\begin{aligned} d_\infty((\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}), \mathcal{L}^{-1}(x)) &= \sup\{[\bar{c}'x - \bar{c}'\bar{x}]_+; [\bar{b}_t - \bar{a}'_t x]_+, t \in T\} \\ &= [\sup(\bar{c}'x - \bar{c}'\bar{x}; \bar{b}_t - \bar{a}'_t x, t \in T)]_+. \end{aligned} \quad (۲۷-۶)$$

اگر تابع $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را به شکل

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &:= \sup \{ (\bar{c}'x - \bar{c}'\bar{x}; \bar{b}_t - \bar{a}'_t x, t \in T) \\ &= \max \{ \bar{c}'x - \bar{c}'\bar{x}, \bar{g}(x) \}, \end{aligned} \quad (28-6)$$

معرفی کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{h} \leq 0\} \text{ و } d_\infty((\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}), \mathcal{L}^{-1}(x)) = [\bar{h}(x)]_+.$$

به علاوه

$$\partial \bar{h}(x) = \begin{cases} \text{conv} \{ -\bar{a}_t : \bar{b}_t - \bar{a}'_t x = \bar{h}(x), t \in T \}, & \text{اگر } \bar{c}'x - \bar{c}'\bar{x} < \bar{h}(x) \\ \text{conv} \{ -\bar{a}_t : \bar{b}_t - \bar{a}'_t x = \bar{h}(x), t \in T \} \cup \{ \bar{c} \}, & \text{اگر } \bar{c}'x - \bar{c}'\bar{x} = \bar{h}(x) \end{cases}$$

به ویژه

$$\partial \bar{h}(\bar{x}) = \text{conv} (\{ \bar{a}_t : t \in T(\bar{x}) \} \cup \{ \bar{c} \}). \quad (29-6)$$

اگر \bar{a} ثابت باشد، آنگاه برای به دست آوردن یک دستور بهتر برای گزاره‌های بعدی، $\bar{\pi}$ را با (\bar{c}, \bar{b}) شناسایی می‌کنیم. در این صورت، اگر $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{S}$ در SCQ صدق کند، آنگاه گزاره (۱۰-۶) در ادامه معادل بودن بین آرام بودن \mathcal{S} در $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ و آرام بودن \mathcal{L} در $((\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}), \bar{x})$ را ثابت می‌کند که در نتیجه می‌توان از مشخصه مربوط به آرام بودن نگاهت مجموعه‌ای داده شده در (۱۸-۶) استفاده کرد.

گزاره ۱۰-۶ (آرام بودن \mathcal{S}). اگر $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \in \text{gph } \mathcal{S}$ و SCQ برقرار باشد، آنگاه گزاره‌های ذکر شده در ادامه معادل هستند:

(i) در \mathcal{S} در $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ آرام است،

(ii) در $\mathcal{S}_{\bar{c}}$ در (\bar{b}, \bar{x}) آرام است،

(iii) در \mathcal{L} در $((\bar{c}'\bar{x}, \bar{b}), \bar{x})$ آرام است،

(iv) $\liminf_{x \rightarrow \bar{x}, \bar{h}(x) > 0} d_{\mathcal{L}}(0_n, \partial \bar{h}(x)) > 0$.

اینک یک قضیه ارائه می‌شود که آرام بودن مجزای نگاهت شناسه را مشخص می‌کند.

قضیه ۱۲-۳-۶ (آرام بودن مجزای \mathcal{S}). فرض کنید $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ با $\bar{c} \neq 0_n$ عبارت باشد از یک مسئله پیوسته LSIO و تنها پربیشیدگی‌های پیوسته \bar{c} و \bar{b} را در نظر بگیرید. اگر $\mathcal{S}(\bar{\pi}) = \{ \bar{x} \}$ و SCQ برقرار باشد، آنگاه گزاره‌های در ادامه معادل هستند:

$$(i) \quad \bar{c} \in \text{int } A(\bar{x})$$

(ii) نقطه \bar{x} عبارت است از یک کمینه‌کننده قوی یکتا از $\bar{\pi}$

(iii) در $\mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ به‌طور مجزاً آرام است،

(iv) در $\mathcal{S}_{\bar{c}}(\bar{b}, \bar{x})$ به‌طور مجزاً آرام است.

اگر T متناهی باشد، آنگاه شرایط قبلی با یکتایی \bar{x} به‌عنوان جواب بهینه $\bar{\pi}$ معادل است. همان‌گونه که

پژوهشگر [۴۲] اشاره کرده است، معادل بودن (iii) \Leftrightarrow (i) را می‌توان با استفاده از قضیه ۶-۳-۱۰

به‌دست آورد. با سپاس از (۶-۲۹)، $\bar{c} \in \text{int } A(\bar{x})$ معادل است با

$$0_n \in \text{int}(\text{conv}(\{-\bar{a}_t : t \in T(\bar{x})\} \cup \{\bar{c}\})) = \text{int } \partial \bar{h}(\bar{x}).$$

فرض کنید $\kappa > 0$ چنان باشد که داشته باشیم $\kappa^{-1} \mathbb{B}_\gamma \subset \partial \bar{h}(\bar{x})$ ؛ در این صورت، برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و

هر $u \in \mathbb{B}_\gamma$ خواهیم داشت:

$$\langle u, x - \bar{x} \rangle \leq \kappa \bar{h}(x)$$

و اگر $x \neq \bar{x}$ ، آنگاه با در نظر گرفتن $u = \frac{(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_\gamma}$ خواهیم داشت:

$$d_\gamma(x, \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})) = \|x - \bar{x}\|_\gamma \leq \kappa \bar{h}(x)$$

که در نتیجه با در نظر گرفتن $\mathcal{L}(\bar{c}, \bar{b}) = \mathcal{L}(\bar{c}, \bar{b})$ ، ویژگی آرام بودن موردنظر از قضیه ۶-۳-۱۰

نتیجه می‌شود. لزوم $\bar{c} \in \text{int } A(\bar{x})$ نیز با همان بحث (با به‌کارگیری به‌طور پسرو) نتیجه خواهد شد. توجه

خواننده را به این واقعیت جلب می‌کنیم که در واقع ثابت کردیم که (i) با وجود کران بالای خطای \bar{h} در \bar{x}

معادل است.

در ادامه این بخش، به مسئله برآورد $\text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ خواهیم پرداخت. به عبارت دقیق‌تر، یک

کران پایین را برای این اندازه تحت SCQ و یکتایی جواب بهینه ارائه می‌دهیم. به نظر می‌رسد که این کران

پایین در برنامه‌ریزی خطی یک کران بالا نیز باشد و بنابراین، این کران عبارت است از اندازه دقیق در

برنامه‌ریزی خطی هرگاه جواب بهینه یکتا باشد. به‌علاوه، یک کران جدید بالایی را ارائه می‌دهیم که دارای

این مزیت است که فقط به داده‌های نمادین متکی است.

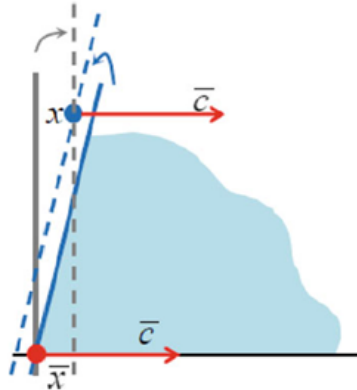
به یاد داشته باشید که همواره یک مسئله پیوسته مانند $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$ LSIO با پریشیدگی‌های

پیوسته \bar{c} و \bar{b} موردنظر است و فرض می‌کنیم که SCQ برقرار باشد. خانواده مجموعه‌های شاخص فعال در

رابطه با $\bar{x} \in \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})$ را به صورت

$$\mathcal{R}(\bar{x}) := \{E \subset T(\bar{x}) : |E| \leq n \text{ و } \bar{c} \in \text{cone}\{a_t, t \in E\}\}.$$

معرفی می‌کنیم. با توجه به قضیه ۱-۱-۳ داریم $\mathcal{R}(\bar{x}) \neq \emptyset$ که پس از به کارگیری لم کاراتشودوری^۱ به نمایش‌های مختلف KKT از بردار \bar{c} مربوط می‌شود. در رابطه با هر $E \in \mathcal{R}(\bar{x})$ ، تابع سوپریم



شکل ۹-۶ تعبیر تابع f_D

$$\begin{aligned} f_E(x) &:= \sup \{ \bar{b}_t - \bar{a}'_t x, t \in T; -(\bar{b}_t - \bar{a}'_t x), t \in E \} \\ &= \sup \{ \bar{b}_t - \bar{a}'_t x, t \in T \setminus E; |\bar{a}'_t x - \bar{b}_t|, t \in E \}. \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم. به روشنی، برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم $f_E(x) \geq 0$ و عبارت است از کوچک‌ترین اندازه پربشیدگی روی \bar{b} تا اینکه نقطه x یک نقطه KKT (در نتیجه بهینه)، با E به عنوان یک مجموعه KKT متناظر شود.

اینک مفهوم تابع f_E را با یک مثال ساده مانند

$$\bar{\pi} : \text{Inf}_{x \in \mathbb{R}^2} \{ x_1 \text{ s.t. } x_1 \geq 0, x_1 - \frac{1}{4}x_2 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$$

روشن می‌کنیم. در اینجا داریم $\bar{b} = 0_3$ و تنها جواب بهینه عبارت است از $\bar{x} = 0_2$. برای $E = \{1\}$ و $x = (1, 6)$ ، در شکل ۹-۶ مشاهده می‌کنیم که

$$f_{\{1\}}(1, 6) := \sup \{ -1, -1 + \frac{1}{4} \cdot 6, -6, -(-1) \} = 1$$

تنها باید قیدهای ۱ و ۲ پریشیده شود تا بهینگی در نقطه x به دست آید که در آن $\bar{c} \in \text{cone} \{a_1\}$ (و اندازه پریشیدگی عبارت است از $1 = (f_{\{1\}})(x)$).

اینک، اطلاعات بیشتری را درباره توابع f_E ، $E \in \mathfrak{K}$ ارائه می‌دهیم:

۱. تابع $f_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ عبارت است از یک تابع محدب.

۲. برای هر $E \in \mathfrak{K}$ داریم $[f_E = 0] \subset \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})$.

۳. با فرض یکتایی، یعنی اگر $\mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b}) = \{\bar{x}\}$ ، آنگاه برای هر $E \in \mathfrak{K}$ خواهیم داشت

$[f_E = 0] = \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})$ و نیز می‌توان بررسی کرد که اگر $x \notin \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$d_{\mathfrak{V}}(x, \bar{x}) \equiv d_{\mathfrak{V}}(x, \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})) \geq \frac{f_E(x)}{d_{\mathfrak{V}}(0_n, \partial f_E(x))}.$$

قضیه بعدی به صورت قضیه ۵ در [۴۴] ثابت شده است.

قضیه ۶-۳-۱۳ (کران پایین برای اندازه آرام بودن \mathcal{S}). مسئله پیوسته LSIO، $\bar{\pi} = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$.

همراه با پریشیدگی‌های پیوسته \bar{c} و \bar{b} را در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم SCQ برقرار باشد و نیز داشته باشیم $\mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b}) = \{\bar{x}\}$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \geq \text{clm } \mathcal{S}_{\bar{c}}(\bar{b}, \bar{x}) \geq \sup_{E \in \mathfrak{K}(\bar{x})} \limsup_{\substack{(x) \rightarrow \bar{x} \\ f_E(x) > 0}} \frac{1}{d_{\mathfrak{V}}(0_n, \partial f_E(x))}.$$

اینک حالت مهم ویژه برنامه‌ریزی خطی را بررسی می‌کنیم. قضیه بعدی (قضیه ۶ و نتیجه ۱ در [۴۴]) نشان می‌دهد که کران بالای به دست آمده قبلی برای $\text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ یک کران بالا نیز خواهد بود، بدون اینکه نیاز باشد SCQ یا یکتایی \bar{x} به عنوان یک جواب بهینه $\bar{\pi}$ برقرار باشد.

قضیه ۶-۳-۱۴ (اولین کران بالا برای اندازه آرام بودن \mathcal{S} در LO). فرض کنید T متناهی باشد. اگر

$\bar{x} \in \mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b})$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) = \text{clm } \mathcal{S}_{\bar{c}}(\bar{b}, \bar{x}) \leq \sup_{E \in \mathfrak{K}(\bar{x})} \limsup_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ f_E(x) > 0}} \frac{1}{d_{\mathfrak{V}}(0_n, \partial f_E(x))}$$

به علاوه، اگر داشته باشیم $\mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b}) = \{\bar{x}\}$ ، آنگاه نامساوی قبلی به تساوی تبدیل می‌شود.

گام‌های بعدی برای ارائه یک کران بالا مربوط به اندازه آرام بودن در برنامه‌ریزی خطی است که تنها به داده‌های مسئله متکی است. به یاد آورید که با توجه به قضیه ۶-۳-۱۲، در برنامه‌ریزی خطی داریم:

$$\mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b}) = \{\bar{x}\} \Leftrightarrow \bar{c} \in \text{int } A(\bar{x}),$$

که به وجود یک زیرمجموعه از شاخص‌ها مانند E ، $E \subset T(\bar{x})$ با $|E| = n$ منجر می‌شود به طوری که

$$\bar{c} \in \text{cone} \{ \bar{a}_t, t \in E \}$$

و $A_E := (\bar{a}_t)_{t \in E}$ ناویژه است. به عبارت دیگر، خانوادهٔ مجموعه‌های فعال شاخص ناتهی است:

$$\mathfrak{B}(\bar{x}) := \{ E \in \mathfrak{T} : A_E \text{ نامنفرد} \},$$

که خانوادهٔ $\mathfrak{T}(\bar{x})$ در (۶-۲۵) تعریف شده است. در حقیقت، با شرط ENC و لم مفید کاراتئودوری، هر دو خانواده برهم منطبق می‌شوند، یعنی $\mathfrak{B}(\bar{x}) = \mathfrak{T}(\bar{x})$. کران‌های بالا در قضیهٔ ۸ در [۴۴] ارائه شده است که در ادامه می‌آید:

قضیهٔ ۶-۳-۱۵ (دومین کران بالا مربوط به اندازهٔ آرام بودن S در LO). اگر مجموعهٔ T متناهی باشد و $\bar{c} \in \text{int} A(\bar{x})$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) \leq \max_{E \in \mathfrak{B}(\bar{x})} \| A_E^{-1} \| . \quad (۶-۳۰)$$

جدول ۶-۱ اندازهٔ آرام بودن S در LO و LSIO

	LSIO تحت SCQ	LO
یکتایی نیازی نیست	مسئلهٔ حل نشده	$\text{clm } \mathcal{S}_{\bar{c}}(b, \bar{x})$ $= \text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ $\leq C1$
$\mathcal{S}(\bar{c}, \bar{b}) = \{ \bar{x} \}$	$C1 \leq \text{clm } \mathcal{S}_{\bar{c}}(\bar{b}, \bar{x})$ $\leq \text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$	$\text{clm } \mathcal{S}_{\bar{c}}(\bar{b}, \bar{x})$ $= \text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ $\leq C1 \leq C2$

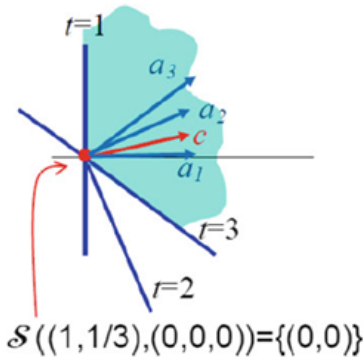
جدول ۶-۱ که در آن

$$C1 := \sup_{E \in \mathfrak{R}(\bar{x})} \limsup_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ f_{E(x)} > 0}} \frac{1}{d_{\mathfrak{T}}(0, \partial f_{E(x)})} \quad \text{و} \quad C2 := \max_{E \in \mathfrak{B}(\bar{x})} \| A_E^{-1} \|$$

نتایج در این زیربخش را جمع‌بندی می‌کند (شکل ۶-۱۰).

مثال ۸.۶ (دومین کران بالای به دست آمده). مسئلهٔ

$$\bar{\pi} : \text{Inf}_{x \in \mathbb{R}^2} \{ x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \mid x_1 \geq 0, x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0 \}$$

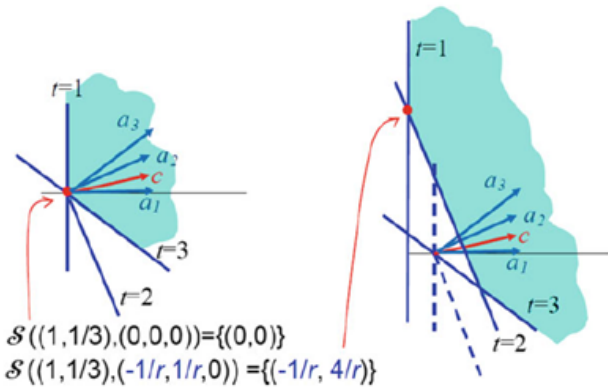


شکل ۱۰-۶ دومین کران بالای به‌دست‌آمده (a)

را در نظر بگیرید. به‌آسانی داریم $\mathcal{B}(\bar{x}) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ و $\|A_{\{1, 2\}}^{-1}\| = \sqrt{17}$ (با توجه به (۶-۲۶) $\|A_{\{1, 2\}}^{-1}\| = \sqrt{5}$). اینک اگر دنباله $\mathcal{S}_{\bar{c}}((b^r, x^r)_{n=1}^{\infty}) \subset \text{gph } \mathcal{S}_{\bar{c}}$ داده‌شده به‌صورت $b^r = (\frac{1}{r}, -\frac{1}{r}, 0)$ و $x^r = (-\frac{1}{r}, \frac{4}{r})$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت (شکل ۱۱-۶ را نیز ببینید):

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\|x^r - \bar{x}\|_2}{\|b^r - \bar{b}\|_{\infty}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\|(-\frac{1}{r}, \frac{4}{r}) - (0, 0)\|_2}{\|(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, 0) - (0, 0, 0)\|_{\infty}} = \sqrt{17}$$

از این عبارت و قضیه ۶-۳-۱۵ خواهیم داشت $\text{clm } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) = \sqrt{17}$



شکل ۱۱-۶ دومین کران بالای به‌دست‌آمده (b)

مثال ۹.۶ (دومین کران بالای به‌دست‌نیامده). مسئله

$$\bar{\pi} = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{x_1 + (\frac{1}{3})x_2 \text{ s.t. } x_1 \geq 0, x_1 + \frac{1}{4}x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \geq 0\}$$

را در نظر بگیرید. اینک داریم $\mathcal{G}(\bar{x}) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ و نیز

$$\|A_{\{1,2\}}^{-1}\| = \sqrt{17}, \|A_{\{1,3\}}^{-1}\| = \sqrt{5}, \|A_{\{2,4\}}^{-1}\| = \frac{\sqrt{17}}{3}, \|A_{\{3,4\}}^{-1}\| = 1.$$

از طرف دیگر، از طریق یک محاسبه غیرساده مستقیم [۴۴] رابینید) می توان بررسی کرد که خواهیم داشت:

$$\text{clmS}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) = \sqrt{5} < \|A_{\{1,2\}}^{-1}\|.$$

یادآوری ۱۶-۳-۶ (منابع و قضیه های مربوطه). فاصله تا بد-وضع بودن نسبت به حل پذیری:

قضیه های در این زیربخش، به ویژه قضیه ۱۰-۳-۶ و ۵ و ۶ در [۵۰] هستند.

ویژگی شبه-لیپ شیتسی جواب بهینه: قضیه ۱۱-۳-۶ عبارت است از قضیه ۱۶ در [۴۳].

آرام بودن جواب بهینه: قضیه ۱۰-۳-۶ را می توان در قضیه ۳۰۱ در [۴۲] یافت. قضیه ۱۲-۳-۶ که آرام

بودن مجزای نگاشت شناسه کمینه را شناسایی می کند، عبارت است از قضیه ۳ در [۳۵]. دو مین کران بالا

در (۳۰-۶) برابر است با اندازه لیپ شیتسی به شرطی که برطبق نتیجه ۲ در [۳۷]، \mathcal{S} پیوسته اوبینی باشد.

عبارت مربوط به $\text{lip } \mathcal{S}(\bar{\pi}, \bar{x})$ که در ادامه می آید، در [۴۰، ۳۹] تحت ENC ثابت شده است:

$$\text{lip } \mathcal{S}((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x}) = \text{lip } \mathcal{S}_{\bar{c}}(\bar{b}, \bar{x}) = \limsup_{\substack{(z,b) \rightarrow (\bar{x}, \bar{b}) \\ f_b(z) > 0}} \left(d_{\mathcal{V}}(0_n, \hat{\partial} f_b(z)) \right)^{-1}$$

که در آن

$$f_b(z) := d_{\infty}(b, (\mathcal{S}_{\bar{c}})^{-1}(z)),$$

در z است. به علاوه، همچنین با ENC می توان f_b را برحسب اختلاف مشخصی از توابع محدب

$\text{convex}(d.c.)$ نمایش داد که به طور مستقیم روی داده های نمادین متکی است [۴۱].

آرام بودن \mathcal{S} در $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ همواره برقرار است به شرطی که T متناهی باشد، حتی بدون فرض SCQ

در \bar{b} . این قضیه با استفاده از [۲۰۴] ثابت می شود (همچنین مثال ۹۰۵۷ در [۲۰۷] یا قضیه ۱D.۳ در

[۷۵]). به صورت یک پیامد از چندجمله ای بودن تکه ای $\text{gph } \mathcal{S}$ (یعنی این منحنی نمایش عبارت است از

اجتماع مجموعه های چندجمله ای) نتیجه می شود. مشاهده می شود که $\text{gph } \mathcal{L}$ در حالت متناهی چندجمله ای

است که در نتیجه آرام بودن \mathcal{S} در $((\bar{c}, \bar{b}), \bar{x})$ را می توان از طریق دیگر با استفاده از قضیه ۱۰-۳-۶ همراه

با قضیه مذکور پیشین روبینسن، حتی بدون SCQ به دست آورد؛ زیرا شرایط KKT برای مسئله های

برنامه ریزی خطی با تعداد متناهی قید بدون SCQ برقرار است.

یادآوری ۱۷-۳-۶ (دو مسئله حل‌نشده در پایداری کمی مسئله‌های LSIO).

۱. روش‌های عددی کارا برای محاسبه فاصله‌ها از یک مسئله تا بد-وضع بودن از دیدگاهی که در بخش‌های ۱-۲-۶ و ۱-۳-۶ مورد بحث قرار گرفت.

۲. روش‌های عددی کارا برای محاسبه اندازه‌های لیپ‌شیتسی و آرام بودن \mathcal{F} و S ، به‌ویژه برای وقتی که T متناهی باشد.

فهرست مراجع

1. Adler, I., Monteiro, R.: A geometric view of parametric linear programming. *Algorithmica* 8, 161–176 (1992)
2. Altinel, I.K., Çekyay, B.Ç., Feyzioğlu, O., Keskin, M.E., Özekici, S.: Mission-based component testing for series systems. *Ann. Oper. Res.* 186, 1–22 (2011)
3. Amaya, J., Bosch, P., Goberna, M.A.: Stability of the feasible set mapping of linear systems with an exact constraint set. *Set-Valued Anal.* 16, 621–635 (2008)
4. Amaya, J., Goberna, M.A.: Stability of the feasible set of linear systems with an exact constraints set. *Math. Methods Oper. Res.* 63, 107–121 (2006)
5. Anderson, E.J., Lewis, A.S.: An extension of the simplex algorithm for semi-infinite linear programming. *Math. Program. A* 44, 247–269 (1989)
6. Anderson, E.J., Goberna, M.A., López, M.A.: Simplex-like trajectories on quasi-polyhedral convex sets. *Math. Oper. Res.* 26, 147–162 (2001)
7. Auslender, A., Ferrer, A., Goberna, M.A., López, M.A.: Comparative study of RPSALG algorithm for convex semi-infinite programming. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Alicante, Spain. Preprint
8. Auslender, A., Goberna, M.A., López, M.A.: Penalty and smoothing methods for convex semi-infinite programming. *Math. Oper. Res.* 34, 303–319 (2009)
9. Azé, D., Corvellec, J.-N.: Characterizations of error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 10, 409–425 (2004)

10. Balayadi, A., Sonntag, Y., Zălinescu, C.: Stability of constrained optimization problems. *Nonlinear Anal.* 28, 1395–1409 (1997)
11. Bank, B., Guddat, J., Klatte, D., Kummer, B., Tammer, K.: *Non-linear Parametric Optimization*. Birkhäuser, Basel (1983)
12. Beck, A., Ben-Tal, A.: Duality in robust optimization: primal worst equals dual best. *Oper. Res. Lett.* 37, 1–6 (2009)
13. Bellman, R.E., Zadeh, L.A.: Decision making in a fuzzy environment. *Manag. Sci.* 17, 141–164 (1970)
14. Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., Nemirovski, A.: *Robust Optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton (2009)
15. Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Math. Program. A* 88, 411–424 (2000)
16. Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: Robust optimization—methodology and applications. *Math. Program. B* 92, 453–480 (2002)
17. Ben-Tal, A., Teboulle, M.: Expected utility, penalty functions and duality in stochastic non-linear programming. *Manag. Sci.* 30, 1445–1466 (1986)
18. Bennett, K.P., Parrado-Hernández, E.: The interplay of optimization and machine learning research. *J. Mach. Learn. Res.* 7, 1265–1281 (2006)
19. Berkelaar, A., Roos, C., Terlaky, T.: The optimal set and optimal partition approach to linear and quadratic programming. In: Gal, T., Greenberg, H. (eds.) *Recent Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming*, pp.1–44. Kluwer, Dordrecht (1997)
20. Bertsimas, D., Brown, D.B., Caramanis, C.: Theory and applications of robust optimization. *SIAM Rev.* 53, 464–501 (2011)
21. Betró, B.: An accelerated central cutting plane algorithm for linear semi-infinite programming. *Math. Program. A* 101, 479–495 (2004)
22. Betró, B.: Numerical treatment of Bayesian robustness problems. *Int. J. Approx. Reason.* 50, 279–288 (2009)

23. Betrò, B., Bodini, A.: Generalized moment theory and Bayesian robustness analysis for hierarchical mixture models. *Ann. Inst. Stat. Math.* 58, 721–738 (2006)
24. Bhattacharjee, B., Green, W.H., Jr., Barton, P.I.: Interval methods for semiinfinite programs. *Comput. Optim. Appl.* 30, 63–93 (2005)
25. Bonnans, J.F., Shapiro, A.: *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer, New York (2000)
26. Bot, R.I.: *Conjugate Duality in Convex Optimization*. Springer, Berlin (2010)
27. Bot, R.I., Jeyakumar, V., Li, G.: Robust duality in parametric convex optimization. *Set-Valued Var. Anal.* 21, 177–189 (2013)
28. Box, E.P.: Robustness in the strategy of scientific model building. In: Launer, R.L., Wilkinson, G.N. (eds.) *Robustness in Statistics*, pp. 201–236. Academic, New York (1979)
29. Brosowski, B.: *Parametric Semi-infinite Optimization*. Peter Lang, Frankfurt amMain (1982)
30. Brosowski, B.: On the continuity of the optimum set in parametric semi-infinite programming. In: Fiacco, A.V. (ed.) *Mathematical Programming with Data Perturbations*, pp. 23–48. Marcel Dekker, New York (1983)
31. Brosowski, B.: Parametric semi-infinite linear programming I. Continuity of the feasible set and the optimal value. *Math. Program. Study* 21, 18–42 (1984)
32. Cadenas, J.M., Verdegay, J.L.: A primer on fuzzy optimization models and methods. *Iran. J. Fuzzy Syst.* 3, 1–22 (2006)
33. Campi, M.C., Garatti, S.: The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs. *SIAM J. Optim.* 19, 1211–1230 (2008)
34. Cánovas, M.J., Dontchev, A.L., López, M.A., Parra, J.: Metric regularity of semi-infinite constraint systems. *Math. Program. B* 104, 329–346 (2005)
35. Cánovas, M.J., Dontchev, A.L., López, M.A., Parra, J.: Isolated calmness of solution mappings in convex semi-infinite optimization. *J. Math. Anal. Appl.* 350, 892–837 (2009)

36. Cánovas, M.J., Gómez-Senent, F.J., Parra, J.: Stability of systems of linear equations and inequalities: distance to ill-posedness and metric regularity. *Optimization* 56, 1–24 (2007)
37. Cánovas, M.J., Gómez-Senent, F.J., Parra, J.: On the Lipschitz modulus of the argmin mapping in linear semi-infinite optimization. *Set-Valued Anal.* 16, 511–538 (2008)
38. Cánovas, M.J., Gómez-Senent, F.J., Parra, J.: Regularity modulus of arbitrarily perturbed linear inequality systems. *J. Math. Anal. Appl.* 343, 315–327 (2008)
39. Cánovas, M.J., Hantoute, A., López, M.A., Parra, J.: Lipschitz modulus of the optimal set mapping in convex optimization via minimal subproblems. *Pac. J. Optim.* 4, 411–422 (2008)
40. Cánovas, M.J., Hantoute, A., López, M.A., Parra, J.: Stability of indices in KKT conditions and metric regularity in convex semi-infinite optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 139, 485–500 (2008)
41. Cánovas, M.J., Hantoute, A., López, M.A., Parra, J.: Lipschitz modulus in convex semi-infinite optimization via d.c. functions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 15, 763–781 (2009)
42. Cánovas, M.J., Hantoute, A., Parra, J., Toledo, J.: Calmness of the argmin mapping in linear semi-infinite optimization. *J. Optim. Theory Appl.* doi:10.1007/s10957-013-0371-z (in press)
43. Cánovas, M.J., Klatte, D., López, M.A., Parra, J.: Metric regularity in convex semi-infinite optimization under canonical perturbations. *SIAM J. Optim.* 18, 717–732 (2007)
44. Cánovas, M.J., Kruger, A.Y., López, M.A., Parra, J., Théra, M.: Calmness modulus of linear semi-infinite programs. *SIAM J. Optim.*, in press
45. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J.: Upper semicontinuity of the feasible set mapping for linear inequality systems. *Set-Valued Anal.* 10, 361–378 (2002)
46. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J.: Stability of linear inequality systems in a parametric setting. *J. Optim. Theory Appl.* 125, 275–297 (2005)

47. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J.: On the continuity of the optimal value in parametric linear optimization: stable discretization of the Lagrangian dual of nonlinear problems. *Set-Valued Anal.* 13, 69–84 (2005)
48. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Todorov, M.I.: Stability and well-posedness in linear semi-infinite programming. *SIAM J. Optim.* 10, 82–89 (1999)
49. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program. A* 103, 95–126 (2005)
50. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Distance to solvability/unsolvability in linear optimization. *SIAM J. Optim.* 16, 629–649 (2006)
51. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Ill-posedness with respect to the solvability in linear optimization. *Linear Algebra Appl.* 416, 520–540 (2006)
52. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Distance to ill-posedness in linear optimization via the Fenchel-Legendre conjugate. *J. Optim. Theory Appl.* 130, 173–183 (2006)
53. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Lipschitz continuity of the optimal value via bounds on the optimal set in linear semi-infinite optimization. *Math. Oper. Res.* 31, 478–489 (2006)
54. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Sufficient conditions for total illposedness in linear semi-infinite optimization. *Eur. J. Oper. Res.* 181, 1126–1136 (2007)
55. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Error bounds for the inverse feasible set mapping in linear semi-infinite optimization via a sensitivity dual approach. *Optimization* 56, 547–563 (2007)
56. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Distance to ill-posedness for linear inequality systems under block perturbations: convex and infinite-dimensional cases. *Optimization* 60, 925–946 (2011)

57. Cánovas, M.J., López, M.A., Parra, J., Toledo, F.J.: Calmness of the feasible set mapping for linear inequality systems. Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche. Preprint
58. Cánovas, M.J., Mordukhovich, B., López, M.A., Parra, J.: Variational analysis in semi-infinite and infinite programming, I: stability of linear inequality systems of feasible solutions. *SIAM J. Optim.* 20, 1504–1526 (2009)
59. Charnes, A., Cooper, W.W., Kortanek, K.O.: Duality, Haar programs, and finite sequence spaces. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 48, 783–786 (1962)
60. Charnes, A., Cooper, W.W., Kortanek, K.O.: Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Carathéodory. *Manag. Sci.* 9, 209–228 (1963)
61. Coelho, C.J., Galvao, R.K.H., de Araujo, M.C.U., Pimentel, M.F., da Silva, E.C.: A linear semi-infinite programming strategy for constructing optimal wavelet transforms in multivariate calibration problems. *J. Chem. Inform. Comput. Sci.* 43, 928–933 (2003)
62. da Silva, A.R.: On parametric infinite optimization. *Int. Ser. Numer. Math.* 72, 83–95 (1984)
63. Daniel, J.W.: Remarks on perturbations in linear inequalities. *SIAM J. Numer. Anal.* 12, 770–772 (1975)
64. Daniilidis, A., Goberna, M.A., López, M.A., Lucchetti, R.: Lower semicontinuity of the solution set mapping of linear systems relative to their domains. *Set-Valued Var. Anal.* 21, 67–92 (2013)
65. Daum, S., Werner, R.: A novel feasible discretization method for linear semi-infinite programming applied to basket options pricing. *Optimization* 60, 1379–1398 (2011)
66. Davidson, M.R.: Stability of the extreme point set of a polyhedron. *J. Optim. Theory Appl.* 90, 357–380 (1996)
67. Dentcheva, D., Ruszczyński, A.: Optimization with stochastic dominance constraints. *SIAM J. Optim.* 14, 548–566 (2003)

68. Dentcheva, D., Ruszczyński, A.: Semi-infinite probabilistic optimization: first-order stochastic dominance constraint. *Optimization* 53, 583–601 (2004)
69. Dentcheva, D., Ruszczyński, A.: Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. *J. Bank. Finance* 30, 433–451 (2006)
70. DeVore, R.A., Lorentz, G.G.: *Constructive Approximation*. Springer, Berlin (1993)
71. Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A.: From linear to convex systems: consistency, Farkas Lemma and applications. *J. Convex Anal.* 13, 279–290 (2006)
72. Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A., Son, T.Q.: New Farkas-type constraint qualifications in convex infinite programming. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 13, 580–597 (2007)
73. Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A.: On the stability of the optimal value and the optimal set in optimization problems. *J. Convex Anal.* 19, 927–953 (2012)
74. Dontchev, A.L., Lewis, A.S., Rockafellar, R.T.: The radius of metric regularity. *Trans. Am. Math. Soc.* 355, 493–517 (2003)
75. Dontchev, A.L., Rockafellar, R.T.: *Implicit Functions and Solution Mapping. A View from Variational Analysis*. Springer, New York (2009)
76. Dubois, D., Kerre, E., Mesiar, R., Prade, H.: Fuzzy interval analysis. In: Dubois, D., Prade, H. (eds.) *Fundamentals of Fuzzy Sets*, pp. 483–581. Kluwer, Dordrecht (2000)
77. Dubois, D., Prade, H.: The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets Syst.* 24, 279–300 (1988)
78. Epeľman, M., Freund, R.M.: Condition number complexity of an elementary algorithm for computing a reliable solution of a conic linear system. *Math. Program. A* 88, 451–485 (2000)
79. Fang, S.C., Hu, C.F., Wang, H.F., Wu, S.Y.: Linear programming with fuzzy coefficients in constraints. *Comput. Math. Appl.* 37, 63–76 (1999)
80. Feyzioglu, O., Altinel, I.K., Ozekici, S.: The design of optimum component test plans for system reliability. *Comput. Stat. Data Anal.* 50, 3099–3112 (2006)

81. Feyzioglu, O., Altinel, I.K., Ozekici, S.: Optimum component test plans for phased-mission systems. *Eur. J. Oper. Res.* 185, 255–265 (2008)
82. Fischer, T.: Contributions to semi-infinite linear optimization. *Meth. Verf. Math. Phys.* 27, 175–199 (1983)
83. Floudas, C.A., Stein, O.: The adaptive convexification algorithm: a feasible point method for semi-infinite programming. *SIAM Optim.* 18, 1187–1208 (2007)
84. Freund, R.M., Vera, J.R.: Some characterizations and properties of the “distance to illposedness”. *Math. Program. A* 86, 225–260 (1999)
85. Gal, T.: *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics: Degeneracy, Multicriteria Decision Making, Redundancy*, 2nd edn. Walter de Gruyter, New York (1995)
86. Gayá, V.E., López, M.A., Vera de Serio, V.N.: Stability in convex semi-infinite programming and rates of convergence of optimal solutions of discretized finite subproblems. *Optimization* 52, 693–713 (2003)
87. Gauvin, J.: Formulae for the sensitivity analysis of linear programming problems. In: Lassonde, M. (ed.) *Approximation, Optimization and Mathematical Economics*, pp. 117–120. Physica-Verlag, Berlin (2001)
88. Ghaffari Hadigheh, A., Terlaky, T.: Sensitivity analysis in linear optimization: invariant support set intervals. *Eur. J. Oper. Res.* 169, 1158–1175 (2006)
89. Ghaffari Hadigheh, A., Romanko, O., Terlaky, T.: Sensitivity analysis in convex quadratic optimization: simultaneous perturbation of the objective and right-hand-side vectors. *Algorithmic Oper. Res.* 2, 94–111 (2007)
90. Glashoff, K., Gustafson, S.-A.: *Linear Optimization and Approximation*. Springer, Berlin (1983)
91. Goberna, M.A.: Linear semi-infinite optimization: recent advances. In: Rubinov, A., Jeyakumar, V. (eds.) *Continuous Optimization: Current Trends and Applications*, pp. 3–22. Springer, Berlin (2005)

92. Goberna, M.A.: Post-optimal analysis of linear semi-infinite programs. In: Chinchuluun, A., Pardalos, P.M., Enkhbat, R., Tseveendorj, I. (eds.) *Optimization and Optimal Control: Theory and Applications*, pp. 23–54. Springer, Berlin (2010)
93. Goberna, M.A., Gómez, S., Guerra, F., Todorov, M.I.: Sensitivity analysis in linear semi-infinite programming: perturbing cost and right-hand-side coefficients. *Eur. J. Oper. Res.* 181, 1069–1085 (2007)
94. Goberna, M.A., Jeyakumar, V., Dinh, N.: Dual characterizations of set containments with strict convex inequalities. *J. Global Optim.* 34, 33–54 (2006)
95. Goberna, M.A., Jeyakumar, V., Li, G., López, M.A.: Robust linear semi-infinite programming duality under uncertainty. *Math. Program. B* 139, 185–203 (2013)
96. Goberna, M.A., Jeyakumar, V., Li, G.Y., Vicente-Pérez, J.: Robust solutions of uncertain multi-objective linear semi-infinite programming. School of Mathematics, UNSW, Sydney. Preprint
97. Goberna, M.A., Jeyakumar, V., Li, G.Y., Vicente-Pérez, J.: Robust solutions to multi-objective linear programs with uncertain data. School of Mathematics, UNSW, Sydney. Preprint
98. Goberna, M.A., Jornet, V.: Geometric fundamentals of the simplex method in semi-infinite programming. *OR Spektrum* 10, 145–152 (1988)
99. Goberna, M.A., Larriqueta, M., Vera de Serio, V.: On the stability of the boundary of the feasible set in linear optimization. *Set-Valued Anal.* 11, 203–223 (2003)
100. Goberna, M.A., Larriqueta, M., Vera de Serio, V.: On the stability of the extreme point set in linear optimization. *SIAM J. Optim.* 15, 1155–1169 (2005)
101. Goberna, M.A., López, M.A.: Topological stability of linear semi-infinite inequality systems. *J. Optim. Theory Appl.* 89, 227–236 (1996)
102. Goberna, M.A., López, M.A.: *Linear Semi-infinite Optimization*. Wiley, Chichester (1998)
103. Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I.: Stability theory for linear inequality systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 17, 730–743 (1996)

104. Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I.: Stability theory for linear inequality systems. II: upper semicontinuity of the solution set mapping. *SIAM J. Optim.* 7, 1138–1151 (1997)
105. Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I.: On the stability of the feasible set in linear optimization. *Set-Valued Anal.* 9, 75–99 (2001)
106. Goberna, M.A., López, M.A., Todorov, M.I.: On the stability of closed-convex-valued mappings and the associated boundaries. *J. Math. Anal. Appl.* 306, 502–515 (2005)
107. Goberna, M.A., López, M.A., Volle, M.: Primal attainment in convex infinite optimization duality. *J. Convex Anal.* 21, in press (2014) (unknown DOI)
108. Goberna, M.A., Martínex-Legaz, J.E., Vera de Serio, V.N.: On the Voronoi mapping. Department of Statistics and Operations Research, University of Alicante, Spain. Preprint
109. Goberna, M.A., Rodríguez, M.M.L., Vera de Serio, V.N.: Voronoi cells of arbitrary sets via linear inequality systems. *Linear Algebra Appl.* 436, 2169–2186 (2012)
110. Goberna, M.A., Terlaky, T., Todorov, M.I.: Sensitivity analysis in linear semi-infinite programming via partitions. *Math. Oper. Res.* 35, 14–25 (2010)
111. Goberna, M.A., Todorov M.I.: Primal, dual and primal-dual partitions in continuous linear optimization. *Optimization* 56, 617–628 (2007)
112. Goberna, M.A., Todorov, M.I.: Generic primal-dual solvability in continuous linear semi-infinite programming. *Optimization*, 57, 1–10 (2008)
113. Goberna, M.A., Todorov, M.I.: Primal-dual stability in continuous linear optimization. *Math. Program. B* 116, 129–146 (2009)
114. Goberna, M.A., Todorov, M.I., Vera de Serio, V.N.: On the stability of the convex hull of set-valued mappings. *SIAM J. Optim.* 17, 147–158 (2006)
115. Goberna, M.A., Todorov, M.I., Vera de Serio, V.N.: On stable uniqueness in linear semi-infinite optimization. *J. Global Optim.* 53, 347–361 (2012)
116. Goberna, M.A., Vera de Serio, V.N.: On the stability of Voronoi cells. *Top* 20, 411–425 (2012)

117. Goldfarb, D., Scheinberg, K.: On parametric semidefinite programming. *Appl. Numer. Math.* 29, 361–377 (1999)
118. Gol'shtein, E.G.: *Theory of Convex Programming*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 36. American Mathematical Society, Providence (1972)
119. Greenberg, H.: The use of the optimal partition in a linear programming solution for postoptimal analysis. *Oper. Res. Lett.* 15, 179–185 (1994)
120. Greenberg, H.J.: Matrix sensitivity analysis from an interior solution of a linear program. *INFORMS J. Comput.* 11, 316–327 (1999)
121. Greenberg, H.J.: Simultaneous primal-dual right-hand-side sensitivity analysis from a strict complementary solution of a linear program. *SIAM J. Optim.* 10, 427–442 (2000)
122. Greenberg, H.J., Holder, A., Roos, C., Terlaky, T.: On the dimension of the set of rim perturbations for optimal partition invariance. *SIAM J. Optim.* 9, 207–216 (1998)
123. Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P.: Stability theory for infinitely constrained mathematical programs. *J. Optim. Theory Appl.* 16, 409–428 (1975)
124. Guddat, J., Jongen, H.Th., Rückmann, J.-J.: On stability and stationary points in nonlinear optimization. *J. Aust. Math. Soc. B* 28, 36–56 (1986)
125. Guo, P., Huang G.H.: Interval-parameter semi-infinite fuzzy-stochastic mixed-integer programming approach for environmental management under multiple uncertainties. *Waste Manag.* 30, 521–531 (2010)
126. Guo, P., Huang, G.H., He, L.: ISMISIP: an inexact stochastic mixed integer linear semiinfinite programming approach for solid waste management and planning under uncertainty. *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.* 22, 759–775 (2008)
127. Hantoute, A., López, M.A.: Characterization of total ill-posedness in linear semi-infinite optimization. *J. Comput. Appl. Math.* 217, 350–364 (2008)
128. Hantoute, A., López, M.A., Zălinescu, C.: Subdifferential calculus rules in convex analysis: a unifying approach via pointwise supremum functions. *SIAM J. Optim.* 19, 863–882 (2008)

129. He, L., Huang, G.H.: Optimization of regional waste management systems based on inexact semi-infinite programming. *Can. J. Civil Eng.* 35, 987–998 (2008)
130. He, L., Huang, G.H., Lu, H.: Bivariate interval semi-infinite programming with an application to environmental decision-making analysis. *Eur. J. Oper. Res.* 211, 452–465 (2011)
131. Helbig, S.: Stability in disjunctive linear optimization I: continuity of the feasible set. *Optimization* 21, 855–869 (1990)
132. Hettich, R., Zencke, P.: *Numerische Methoden der Approximation und der Semi-Infiniten Optimierung*. Teubner, Stuttgart (1982)
133. Hirabayashi, R., Jongen, H.Th., Shida, M.: Stability for linearly constrained optimization problems. *Math. Program. A* 66, 351–360 (1994)
134. Hiriart-Urruty, J.-B., Lemaréchal, C.: *Convex Analysis and Minimization Algorithms I, II*. Springer, New York (1993)
135. Hoffman, A.J.: On approximate solutions of systems of linear inequalities. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 49, 263–265 (1952)
136. Hogan, W.W.: The continuity of the perturbation function of a convex program. *Oper. Res.* 21, 351–352 (1973)
137. Homem-de-Mello, T., Mehrotra, S.: A cutting-surface method for uncertain linear programs with polyhedral stochastic dominance constraints. *SIAM J. Optim.* 20, 1250–1273 (2009)
138. Hu, C.F., Fang, S.C.: A relaxed cutting plane algorithm for solving fuzzy inequality systems. *Optimization* 45, 89–106 (1999)
139. Hu, H.: Perturbation analysis of global error bounds for systems of linear inequalities. *Math. Program. B* 88, 277–284 (2000)
140. Hu, H., Wang, Q.: On approximate solutions of infinite systems of linear inequalities. *Linear Algebra Appl.* 114/115, 429–438 (1989)
141. Hu, J., Homem-de-Mello, T., Mehrotra, S.: Sample average approximation of stochastic dominance constrained programs. *Math. Program. A* 133, 171–201 (2012)

142. Huang, G.H., He, L., Zeng, G.M., Lu, H.W.: Identification of optimal urban solid waste flow schemes under impacts of energy prices. *Environ. Eng. Sci.* 25, 685–695 (2008)
143. Huy, N.Q., Yao, J.-C.: Semi-infinite optimization under convex function perturbations: Lipschitz stability. *J. Optim. Theory Appl.* 148, 237–256 (2011)
144. Ioffe, A.D.: On stability estimates for the regularity of maps. In: Brezis, H., Chang, K.C., Li, S.J., Rabinowitz, P. (eds.) *Topological Methods, Variational Methods, and Their Applications*, pp. 133–142. World Scientific, River Edge (2003)
145. Ioffe, A.D., Lucchetti, R.: Typical convex program is very well posed. *Math. Program. B* 104, 483–499 (2005)
146. Jansen, B., de Jong, J.J., Roos, C., Terlaky, T.: Sensitivity analysis in linear programming: just be careful! *Eur. J. Oper. Res.* 101, 15–28 (1997)
147. Jansen, B., Roos, C., Terlaky, T.: An interior point approach to postoptimal and parametric analysis in linear programming. Technical Report, Eotvös University, Budapest, Hungary (1992)
148. Jansen, B., Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-Ph.: Interior-point methodology for linear programming: duality, sensitivity analysis and computational aspects. Technical Report 93-28, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Computer Science, Delft (1993)
149. Jaume, D., Puente, R.: Representability of convex sets by analytical linear inequality systems. *Linear Algebra Appl.* 380, 135–150 (2004)
150. Jeyakumar, V., Li, G.: Strong duality in robust convex programming: complete characterizations. *SIAM J. Optim.* 20, 3384–3407 (2010)
151. Jongen, H.Th., Rückmann, J.-J.: On stability and deformation in semi-infinite optimization. In: Reemtsen, R., Rückmann, J.J. (eds.) *Semi-infinite Programming*, pp. 29–67. Kluwer, Boston (1998)
152. Jongen, H.Th., Twilt, F., Weber, G.-H.: Semi-infinite optimization: structure and stability of the feasible set. *J. Optim. Theory Appl.* 72, 529–552 (1992)

153. Jongen, H.Th., Weber, G.-H.: Nonlinear optimization: characterization of structural stability. *J. Global Optim.* 1, 47–64 (1991)
154. Juárez, E.L., Todorov, M.I.: Characterization of the feasible set mapping in one class of semiinfinite optimization problems. *Top* 12, 135–147 (2004)
155. Karimi, A., Galdos, G.: Fixed-order H1 controller design for nonparametric models by convex optimization. *Automatica* 46, 1388–1394 (2010)
156. Klatte, D., Henrion, R.: Regularity and stability in nonlinear semi-infinite optimization. In: Reemtsen, R., Rückmann, J.J. (eds.) *Semi-infinite Programming*, pp. 69–102. Kluwer, Boston (1998)
157. Klatte, D., Kummer, B.: Stability properties of infima and optimal solutions of parametric optimization problems. In: Demyanov, V.F., Pallaschke, D. (eds.) *Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications*, pp. 215–229. Springer, Berlin (1985)
158. Klatte, D., Kummer, B.: *Nonsmooth Equations in Optimization*. Kluwer, Dordrecht (2002)
159. Klatte, D., Kummer, B.: Optimization methods and stability of inclusions in Banach spaces. *Math. Program. B* 117, 305–330 (2009)
160. Kojima, M.: Strongly stable stationary solutions in nonlinear programs. In: Robinson, S.M. (ed.) *Analysis and Computation of Fixed Points*, pp. 93–138. Academic, New York (1980)
161. Kortanek, K.O.: Constructing a perfect duality in infinite programming. *Appl. Math. Optim.* 3, 357–372 (1976/1977)
162. Kortanek, K.O., Medvedev, V.G.: *Building and Using Dynamic Interest Rate Models*. Wiley, Chichester (2001)
163. Krabs, W.: *Optimization and Approximation*. Wiley, New York (1979)
164. Krishnan, K., Mitchel, J.E.: A semidefinite programming based polyhedral cut and price approach for the maxcut problem. *Comput. Optim. Appl.* 33, 51–71 (2006)
165. Kruger, A., Ngai, H.V., Thera, M.: Stability of error bounds for convex constraint systems in Banach spaces. *SIAM J. Optim.* 20, 3280–3296 (2010)

166. Larriqueta, M., Vera de Serio, V.N.: On metric regularity and the boundary of the feasible set in linear optimization. *Set-Valued Var. Anal.* doi:10.1007/s11228-013-0241-8 (in press)
167. Leibfritz, F., Maruhn, J.H.: A successive SDP-NSDP approach to a robust optimization problem in finance. *Comput. Optim. Appl.* 44, 443–466 (2009)
168. León, T., Liern, V., Marco, P., Segura, J.V., Vercher, E.: A downside risk approach for the portfolio selection problem with fuzzy returns. *Fuzzy Econ. Rev.* 9, 61–77 (2008)
169. León, T., Sanmatías, S., Vercher, E.: On the numerical treatment of linearly constrained semiinfinite optimization problems. *Eur. J. Oper. Res.* 121, 78–91 (2000)
170. León, T., Vercher, E.: Optimization under uncertainty and linear semi-infinite programming: a survey. In: Goberna, M.A., López, M.A. (eds.) *Semi-infinite Programming: Recent Advances*, pp. 327–348. Kluwer, Dordrecht (2001)
171. León, T., Vercher, E.: Solving a class of fuzzy linear programs by using semi-infinite programming techniques. *Fuzzy Sets Syst.* 6, 235–252 (2004)
172. Levy, A.B., Poliquin, R.A.: Characterizing the single-valuedness of multifunctions. *Set-Valued Anal.* 5, 351–364 (1997)
173. Li, H., Huang, G.H., Lu, H.: Bivariate interval semi-infinite programming with an application to environmental decision-making analysis. *Eur. J. Oper. Res.* 211, 452–465 (2011)
174. Li, W.: The sharp Lipschitz constants for feasible and optimal solutions of a perturbed linear program. *SIAM J. Optim.* 187, 15–40 (1993)
175. Li, C., Ng, K.F.: On constraint qualification for an infinite system of convex inequalities in a Banach Space. *SIAM J. Optim.* 15, 488–512 (2005)
176. López, M.A.: Stability in linear optimization and related topics. A personal tour. *Top* 20, 217–244 (2012)
177. López, M.A., Mira, J.A., Torregrosa, G.: On the stability of infinite-dimensional linear inequality systems. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 19, 1065–1077 (1985–1986)
178. López, M.A., Still, G.: Semi-infinite programming. *Eur. J. Oper. Res.* 180, 491–518 (2007)

179. López, M.A., Vera de Serio, V.: Stability of the feasible set mapping in convex semi-infinite programming. In: Goberna, M.A., López, M.A. (eds.) *Semi-infinite Programming. Recent Advances*, pp. 101–120. Kluwer, Dordrecht (2001)
180. Lucchetti, R.: *Convexity and Well-Posed Problems*. Springer, New York (2006)
181. Lucchetti, R., Viossat, Y.: *Stable correlated equilibria: the zero-sum case*. Milano Politecnico, 2011. Technical Report
182. Luo, Z.-Q., Roos, C., Terlaky, T.: Complexity analysis of a logarithmic barrier decomposition method for semi-infinite linear programming. *Appl. Numer. Math.* 29, 379–394 (1999)
183. Luo, Z.-Q., Tseng, P.: Perturbation analysis of a condition number for linear systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 15, 636–660 (1994)
184. Mangasarian, O.L., Wild, E.W.: Nonlinear knowledge in kernel approximation. *IEEE Trans. Neural Netw.* 18, 300–306 (2007)
185. Mangasarian, O.L., Wild, E.W.: Nonlinear knowledge-based classification. *IEEE Trans. Neural Netw.* 19, 1826–1832 (2008)
186. Maruhn, J.H.: *Robust Static Super-Replication of Barrier Options*. De Gruyter, Berlin (2009)
187. Mira, J.A., Mora, G.: Stability of linear inequality systems measured by the Hausdorff metric. *Set-Valued Anal.* 8, 253–266 (2000)
188. Monteiro, R., Mehotra, S.: A generalized parametric analysis approach and its implication to sensitivity analysis in interior point methods. *Math. Program. A* 72, 65–82 (1996)
189. Mordukhovich, B.S.: Coderivative analysis of variational systems. *J. Global Optim.* 28, 347–362 (2004)
190. Norbedo, S., Zang, Z.Q., Claesson, I.: A semi-infinite quadratic programming algorithm with applications to array pattern synthesis. *IEEE Trans. Circuits Syst. II Analog Digital Signal Process.* 48, 225–232 (2001)

191. Ochoa, P.D., Vera de Serio, V.N.: Stability of the primal-dual partition in linear semi-infinite programming. *Optimization* 61, 1449–1465 (2012)
192. Oskoorouchi, M.R., Ghaffari, H.R., Terlaky, T., Aleman, D.M.: An interior point constraint generation algorithm for semi-infinite optimization with health-care application. *Oper. Res.* 59, 1184–1197 (2011)
193. Ozogur, S., Weber, G.W.: On numerical optimization theory of infinite kernel learning. *J. Global Optim.* 48, 215–239 (2010)
194. Ozogur, S., Weber, G.W.: Infinite kernel learning via infinite and semi-infinite programming. *Optim. Methods Softw.* 25, 937–970 (2010)
195. Parks, M.L., Jr., Soyster, A.L.: Semi-infinite and fuzzy set programming. In: Fiacco, A.V., Kortanek, K.O. (eds.) *Semi-infinite Programming and Applications*, pp. 219–235. Springer, New York (1983)
196. Peña, J., Vera, J.C., Zuluaga, L.F.: Static-arbitrage lower bounds on the prices of basket options via linear programming. *Quant. Finance* 10, 819–827 (2010)
197. Powell, M.J.D.: *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge (1981)
198. Puente, R.: Cyclic convex bodies and optimization moment problems. *Linear Algebra Appl.* 426, 596–609 (2007)
199. Puente, R., Vera de Serio, V.N.: Locally Farkas-Minkowski linear inequality systems. *Top* 7, 103–121 (1999)
200. Renegar, J.: Some perturbation theory for linear programming. *Math. Program. A* 65, 73–91 (1994)
201. Renegar, J.: Linear programming, complexity theory and elementary functional analysis. *Math. Program. A* 70, 279–351 (1995)
202. Robinson, S.M.: Stability theory for systems of inequalities. Part I: linear systems. *SIAM J. Numer. Anal.* 12, 754–769 (1975)

203. Robinson, S.M.: Stability theory for systems of inequalities. Part II: differentiable nonlinear systems. *SIAM J. Numer. Anal.* 13, 497–513 (1976)
204. Robinson, S.M.: Some continuity properties of polyhedral multifunctions. *Math. Program. Study* 14, 206–214 (1981)
205. Rockafellar, R.T.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton (1970)
206. Rockafellar, R.T., Uryasev, S.: Optimization of conditional value-at-risk. *J. Risk* 2, 21–41 (2000)
207. Rockafellar, R.T., Wets, R.J.-B.: *Variational Analysis*. Springer, Berlin (1998)
208. Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-Ph.: *Theory and Algorithms for Linear optimization: An Interior Point Approach*. Wiley, Chichester (1997)
209. Rubinstein, G.S.: A comment on Voigt’s paper “a duality theorem for linear semi-infinite programming”. *Optimization* 12, 31–32 (1981)
210. Shapiro, A.: Directional differentiability of the optimal value function in convex semi-infinite programming. *Math. Program. A* 70, 149–157 (1995)
211. Shapiro, A., Dentcheva, D., Ruszczyński, A.: *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. MOS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia (2009)
212. Sharkey, T.C.: Infinite linear programs. In: Cochran, J.J. (ed.) *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, pp. 1–11. Wiley, New York (2010)
213. Sonnenburg, S., Rätsch, G., Schäfer, C., Schölkopf, B.: Large scale multiple kernel learning. *J. Mach. Learn. Res.* 7, 1531–1565 (2006)
214. Soyster, A.L.: Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Oper. Res.* 21, 1154–1157 (1973)
215. Stein, O., Still, G.: Solving semi-infinite optimization problems with interior point techniques. *SIAM J. Control Optim.* 42, 769–788 (2003)
216. Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K.: On fuzzy mathematical programming. *J. Cybern.* 3, 37–46 (1974)

217. Tian, Y., Shi, Y., Liu, X.: Recent advances on support vector machines research. *Technol. Econ. Dev. Econ.* 18, 5–33 (2012)
218. Tichatschke, R.: *Lineare Semi-Infinite Optimierungsaufgaben und ihre Anwendungen in der Approximationstheorie*. Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule, Karl- Marx-Stadt (1981)
219. Tichatschke, R., Hettich, R., Still, G.: Connections between generalized, inexact and semi-infinite linear programming. *Math. Methods Oper. Res.* 33, 367–382 (1989)
220. Todorov, M.I.: Generic existence and uniqueness of the solution set to linear semi-infinite optimization problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 8, 27–39 (1985/1986)
221. Toledo, F.J.: Some results on Lipschitz properties of the optimal values in semi-infinite programming. *Optim. Methods Softw.* 23, 811–820 (2008)
222. Tuy, H.: Stability property of a system of inequalities. *Math. Oper. Stat. Ser. Opt.* 8, 27–39 (1977)
223. Vaz, A., Fernandes, E., Gomes, M.: SIPAMPL: semi-infinite programming with AMPL. *ACM Trans. Math. Softw.* 30, 47–61 (2004)
224. Vercher, E.: Portfolios with fuzzy returns: selection strategies based on semi-infinite programming. *J. Comput. Appl. Math.* 217, 381–393 (2008)
225. Vercher, E., Bermúdez, J.D.: Fuzzy portfolio selection models: a numerical study. In: Doumpos, M., Zopounidis, C., Pardalos, P.M. (eds.) *Financial Decision Making Using Computational Intelligence*, pp. 245–272. Springer, New York (2012)
226. Voigt, I., Weis, S.: Polyhedral Voronoi cells. *Contr. Beiträge Algebra Geom.* 51, 587–598 (2010)
227. Wan, Z., Meng, F.-Z., Hao, A.-Y., Wang, Y.-L.: Optimization of the mixture design for alumina sintering with fuzzy ingredients. *Hunan Daxue Xuebao/J. Hunan Univ. Nat. Sci.* 36, 55–58 (2009)
228. Wang, X., Kerre, E.E.: Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I) (II). *Fuzzy Sets Syst.* 118, 375–385, 387–405 (2001)

229. Wu, D., Han, J.-Y., Zhu, J.-H.: Robust solutions to uncertain linear complementarity problems. *Acta Math. Appl. Sin., Engl. Ser.* 27, 339–352 (2011)
230. Yildirim, E.A.: Unifying optimal partition approach to sensitivity analysis in conic optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 122, 405–423 (2004)
231. Yiu, K.F., Xiaoqi, Y., Nordholm, S., Teo, K.L.: Near-field broadband beamformer design via multidimensional semi-infinite linear programming techniques. *IEEE Trans. Speech Audio Process.* 11, 725–732 (2003)
232. Zˆalinescu, C.: On the differentiability of the support function. *J. Global Optim.* 57, 719–731 (2013)
233. Zˆalinescu, C.: Relations between the convexity of a set and the differentiability of its support function. *arXiv:1301.0810 [math.FA]* (2013). <http://arxiv.org/abs/1301.0810>
234. Zencke, P., Hettich, R.: Directional derivatives for the value-function in semi-infinite programming. *Math. Program. A* 38, 323–340 (1987)
235. Zimmermann, H.J.: Description and optimization of fuzzy systems. *Int. J. Gen. Syst.* 2, 209–215 (1976)
236. Zheng, X.Y., Ng, K.F.: Metric regularity and constraint qualifications for convex inequality on Banach spaces. *SIAM J. Optim.* 14, 757–772 (2003)
237. Zhu, Y., Huang, G.H., Li, Y.P., He, L., Zhang, X.X.: An interval full-infinite mixed-integer programming method for planning municipal energy systems—a case study of Beijing. *Appl. Energy* 88, 2846–2862 (2011)
238. Zopounidis, C., Doumpos, M.: Multicriteria decision systems for financial problems. *Top* 21, 241–261 (2013)

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A		Behavior	رفتار
Abnormal systems	دستگاه‌های غیرعادی	Boundary	مرز
Active constraints	قیدهای فعال	Boundedness	کران‌دار بودن
Active	فعال	Bound	کران
Affine hull	پوسته تخت	C	
Affine	تخت	Calculus of the consistency radius	محاسبه شعاع ناسازگاری
Affinity along segments	تخت بودن در طول پاره‌خط‌ها	Calculus	حساب، محاسبه
Affinity cone	مخروط تخت بودن	Calmness	آرام بودن
Affinity on neighborhoods	تخت بودن بر همسایگی‌ها	Calmness modulus	اندازه آرام بودن
Affinity on polytopes	تخت بودن بر چندوجهی‌ها	Calmness of the optimal set	آرام بودن مجموعه بهینه
Affinity partition of the optimal value	افراز تخت مقدار بهینه	Calmn	آرام
Along	در طول	Canonical	متعارف
Analytic	تحلیلی	Cardinality	عدد اصلی
Around	حول	Center	مرکز
Assumption	فرض	Characteristic	مشخصه
Attainability of the consistency radius	قابل دستیابی شعاع ناسازگاری	Closed	بسته
Attainability	دستیابی - قابل دستیابی	Complementarity	مکملی
Aubin continuity	پیوستگی اوبینی	Concave	مقعر
B		Condition	حالت
Barrier	جریمه	Cone	مخروط
Behavior on polytopes	رفتار درجه دوم روی چندوجهی‌ها	Conical	مخروطی
		Consequently	در نتیجه
		Consistency	سازگاری

Constraint	قید	Estimation of the optimal value	برآورد مقدار بهینه
Continuous dual	دوگان پیوسته	Exact calmness	آرام بودن درست
Continuous	پیوسته	Existence	وجود
Converse	برعکس	Extended	تعمیم یافته
Converse strong duality	برعکس دوگانی قوی	Extreme	فرین
Convex	محدّب	F	
Counterpart	همتا	Feasible set	مجموعه شدنی
D		Feasible	شدنی
Data set	مجموعه داده‌ها	Finite	متناهی
Degenerate	تباهیده	First lower bound	اولین کران پایین
Density	چگالی	First moment	اولین گشتاور
Derivative	مشتق	Function	تابع
Dimensional stability of the restricted	پایداری ابعادی تحدید	Fuzzy	فازی
Dimensionally	به‌طور ابعادی	G	
Directional	جهتی	Generalized	تعمیم یافته
Directions	جهت‌ها	General	کلی
Distance to ill-posedness	فاصله تا بد-وضع بودن	Geometric	هندسی
Distance	فاصله	Global	جامع
Domain	دامنه	Global error condition rate	نرخ حالت خطای جامع
Dual	دوگان	Global error	خطای جامع
Dual feasible	شدنی دوگان	Graph	منحنی نمایش
Dual optimal value	مقدار بهینه دوگان	H	
Dual support	پشتیبان دوگان	Homogeneous	همگن
Duality	دوگانی	Hull	پوسته
E		Hypo graph	زیرمنحنی نمایش
Epigraph	بالای منحنی نمایش	Hypo graphical	به‌طور زیرمنحنی نمایش
Equibounded (not comparable)	غیرقابل مقایسه	I	
Equivalent	معادل	Ill-posedness	بد-وضع
Estimation	برآوردسازی		

Ill-posed	بد-وضع	Metric projection	تصویر متری
Immobile	بدون حرکت	Metric regularity	منظم بودن متری
immobile w.r.t. the affine hull	بدون حرکت نسبت به پوسته تخت	Modulus	اندازه
inconsistent	ناسازگار	N	
Index	شاخص	non-degenerate	ناتاباهیده
Inequality	نامساوی	non-homogeneous	ناهمگن
Inner	داخلی	Number	تعداد
Interior	درونی	O	
Isolated calmness	آرام بودن مجزا	Optimal set	مجموعه بهینه
Isolated	مجزا	Optimal set in LO	مجموعه بهینه در بهینه‌سازی خطی
L		Optimal value	مقدار بهینه
Level set	مجموعه تراز	Optimality	بهینگی
Limit	حد	Optimal	بهینه
Linearity	خطی بودن	Optimistic	خوش بینانه
Linear	خطی	Optimistic counterpart	همتای خوش بینانه
Lipschitz modulus	اندازه لیپ‌شیتسی	Orthogonal	متعامد
Lipschitz-like	شبه-لیپ‌شیتسی	Outer	خارجی
Local error	خطای محلی	P	
Local robust duality	دوگانای استوار محلی	Partial	جزئی
Local	محلی	Partition	افراز
Logarithmic	لگاریتمی	Perturbations	پریشیدگی‌ها
Lower semi -continuity	نیمه-پیوسته پایینی	Point	نقطه
Lower	پایینی	Pointed	نوک‌دار
lsc hull	پوسته lsc	Polytopes	چندوجهی‌های کران‌دار
M		Positive polar	قطبی مثبت
Mapping	نگاشت	positively	به‌طور مثبت
Marginal	حاشیه‌ای	Primal feasible	شدنی اولیه
Maximal optimal	بهینه بیشینه	Primal support	پشتیبان اولیه
Maximal	بیشینه	Primal-dual	اولیه-دوگان
Membership	عضویت	Primal	اولیه
		Problem	مسئله

Projection	تصویر	Segments	قطعه‌ها
Property	ویژگی	Selection	انتخاب
Proper	سره	Semi-continuous	نیمه-پیوسته
Pseudo-Lipschitz	لیپ‌شیتس نما، شبه-لیپ‌شیتسی	Semi-infinite	نیمه-نامتناهی
Q		Sense	دیدگاه
Quadratic	درجهٔ دوّم	Sequence	دنباله
Qualification	کیفیت	Set -valued function	تابع مجموعه‌ای
Quasi concave	شبه-مقعر	Set	مجموعه
Quasi convex	شبه-محدّب	Slack	کمکی
R		Solution	جواب
Radius	شعاع	Solvability	حل‌پذیری
Ranking	رتبه‌بندی	Space of parameters	فضای پارامترها
Recession	دور شونده	Stability	پایداری
Regularity	منظم بودن	Stable	پایدار
Reinforced	تقویت شده	Strictly continuous	به‌طور اکید پیوسته
Reinforced system	دستگاه تقویت شده	Strictly convex	به‌طور اکید محدّب
Relative boundary	مرز نسبی	strictly	به‌طور اکید
Relative interior	درون نسبی	Strong duality	دوگانی قوی
Relative	نسبی	Strong	قوی
Restricted	تحدید	Strongly inconsistent	به‌طور قوی ناسازگار
Robust counterpart	همتای استوار	Strongly unique	به‌طور قوی یکتا
Robust dual (optimistic counterpart)	دوگان استوار (همتای خوش‌بینانه)	Subdifferential	زیردیفرانسیل
Robust moment	گشتاور استوار	Sublevel	زیرتراز
Robust	استوار	Subspace	زیرفضا
S		Super linear	زبرخطی
Saddle	زینی	Support	پشتیبان
Scenario	وضعیت	System	دستگاه
Second moment	دوّمین گشتاور	T	
Second	دوّم	Theorem	قضیه
		Totally ill-posed	بد-وضع کلی
		Tractability	قابل‌پیگیری

Trivial بدیهی

U

Uncertain نئینی (نایقینی)

Undesirable situation حالت نامطلوب

Uniform یکنواخت

Uniqueness یکتایی

Universal جهانی

Upper semi-continuous (usc) نیمه-پیوسته
بالایی

usc hull پوستهٔ usc

V

Value مقدار

Value-at-Risk مقدار-در-خطر

W

w.r.t (with respect to) نسبت به

Weak ضعیف

well-posedness خوش-وضع بودن

Well-posed خوش-وضع

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Totally ill-posed	به کلی بد-وضع		ا
Strongly unique	به طور قوی یکتا	Robust	استوار
Dimensionally	به طور ابعادی	Partition	افراز
Strictly	به طور اکید	Affinity partition of the	افراز تخت مقدار بهینه
Hypographical	به طور زیرمنحنی نمایش	optimal value	
Strongly inconsistent	به طور قوی ناسازگار	Selection	انتخاب
Strictly continuous	به طور اکید پیوسته	Modulus	اندازه
Strictly convex	به طور اکید محدب	Calmness modulus	اندازه آرام بودن
Positively	به طور مثبت	Lipschitz modulus	اندازه لیبشیتس
Optimality	بهینه‌گی	First lower bound	اولین کران پایین
Optimal	بهینه	First moment	اولین گشتاور
Maximal-optimal	بهینه-بیشینه	Primal	اولیه
Maximal	بیشینه	Primal-dual	اولیه-دوگان
	پ	Calmn	آرام
Stable	پایدار	Isolated calmness	آرام بودن مجزاً
Dimensional stability of	پایدار ابعادی تحدید	Calmness	آرام بودن
the restricted		Exact calmness	آرام بودن درست
Stability	پایداری	Calmness of the optimal	آرام بودن مجموعه بهینه
Lower	پایینی	set	
Perturbations	پریشیدگی‌ها		ب
Support	پشتیان	Epigraph	بالای منحنی نمایش
Dual support	پشتیان دوگانی	Ill-posed	بد-وضع
Primal support	پشتیان اولیه	Ill-posedness	بد-وضع بودن
lsc Hull	پوسته ISC (پوسته نیمه-پیوسته پایینی)	Immobile	بدون حرکت
usc Hull	پوسته USC (پوسته نیمه-پیوسته بالایی)	Immobile	بدون حرکت نسبت به پوسته خطی
Affine hull	پوسته تخت	w.r.t. the affine hull	
Dual continuous	پیوسته دوگان	Trivial	بدیهی
Aubin continuity	پیوستگی اوبینی	Estimation of the optimal	برآورد مقدار بهینه
Continuous	پیوسته	value	
	ت	Estimation	برآورد
Function	تابع	Converse	برعکس
Set-valued function	تابع مجموعه‌ای	Converse strong duality	برعکس دوگانی قوی
Degenerate	تباهیده	Closed	بسته
Restricted	تحدید	Total ill-posedness	به کلی بد-وضع بودن
Analytic	تحلیلی		

Along	در طول، در امتداد	Affine	تخت
Consequently	در نتیجه	Affinity along segments	تخت بودن در طول پاره خط‌ها
Relative interior	درون نسبی	Affinity on neighborhoods	تخت بودن روی همسایه‌ها
Interior	درونی	Affinity on polytopes	تخت بودن روی چندوجهی‌های کران‌دار
System	دستگاه	Projection	تصویر
Reinforced system	دستگاه تقویت شده	Metric projection	تصویر متری
Abnormal systems	دستگاه‌های غیرعادی	Generalized	تعمیم یافته
Attainability	دستیابی - دستیابی پذیر	Extended	تعمیم یافته
Attainability of the consistency radius	دستیابی شعاع سازگاری	Reinforced	تقویت شده
Sequence	دنباله		
Recession	دور شونده		
Robust dual (optimistic counterpart)	دوگان استوار (همتای خوش بینانه)		
Duality	دوگانگی	Global	جامع
Local robust duality	دوگانگی استوار محلی	Barrier	جریمه
Strong duality	دوگانگی قوی	Partial	جزئی
Second	دوم	Solution	جواب
Second moment	دومین گشتاور	Universal	جهانی
Sense	دیدگاه	Directions	جهت‌ها
	ز	Directional	جهتی
Super linear	زیر خطی		
Sublevel	زیر تراز	Density	چگالی
Subdifferential	زیر دیفرانسیل	Polytopes	چندوجهی‌های کران‌دار
Subspace	زیر فضا		
Hypo graph	زیر منحنی نمایش		
Saddle	زینی	Marginal	حاشیه‌ای
	س	Condition	حالت
Consistency	سازگاری	Undesirable situation	حالت نامطلوب
Proper	سره	Limit	حد
	ش	Calculus	حساب - محاسبه
Index	شاخص	Solvability	حل پذیری
Quasi convex	شبه محدب	Around	حول
Quasi concave	شبه مقعر		
Feasible	شدنی	Outer	خارجی
Primal feasible	شدنی اولیه	Global error	خطای جامع
Dual feasible	شدنی دوگان	Linear	خطی
Radius	شعاع	Linearity	خطی بودن
	ض	Well-posed	خوش-وضع
Weak	ضعیف	Well-posedness	خوش-وضع بودن
	ع		
Number	عدد - تعداد	Inner	داخلی
		Domain	دامنه
		Quadratic	درجه دوم

Feasible set	مجموعه شدنی	Cardinality	عدد اصلی
Calculus of the consistency radius	محاسبه شعاع سازگاری	Membership	عضویت
Convex	محدب		غ
Local	محلی		
Cone	مخروط	Equibounded (not comparable)	غیرقابل مقایسه
Affinity cone	مخروط تخت بودن		ف
Conical	مخروطی		
Boundary	مرز	Fuzzy	فازی
Relative boundary	مرز نسبی	Distance	فاصله
Center	مرکز	Distance to	فاصله تا بد-وضع بودن
Derivative	مشتق	ill-posedness	فرض
Characteristic Value	مشخصه مقدار	Assumption	فرض
Equivalent Value	مقدار	Extreme	فردین
Value-at-Risk	مقدار-در-خطر	Space of parameters	فضای پارامترها
Dual optimal value	مقدار بهینه دوگان	Active	فعال
Concave	مقعر		ق
Complementary	مکملی	Tractability	قابل رام شدن
Graph	منحنی نمایش	Theorem	قضیه
Regularity	منظم بودن	Positive polar	قطبی مثبت
Metric regularity	منظم بودن متری	Segments	قطعه‌ها
	ن	Strong	قوی
Non-degenerate	ناتاباهیده	Constraint	قید
Inconsistent	ناسازگار	Active constraints	قیدهای فعال
Inequality	نامساوی		ک
Non-homogeneous	ناهمگن		
Global error condition rate	نرخ حالت خطای جامع		
W.R.T (with respect to)	نسبت به	Bound	کران
Relative	نسبی	General	کلی
Uncertain	تقریبی (نایقینی)	Slack	کمکی
Mapping	نگاشت	Qualification	کیفیت
Pointed	نوگ‌دار		گ
Upper	نیمه-پیوسته بالایی (usc)		
semicontinuous (usc)		Robust moment	گشتاور استوار
Lower	نیمه-پیوسته پایینی (lsc)		ل
semicontinuous (lsc)			
Semi-infinite	نیمه-نامتناهی		
	و		
Existence	وجود	Lipschitz-like	لیپ‌شیتس-مانند
Scenario	وضعیت	Pseudo-Lipschitz	شبه-لیپ‌شیتسی
Property	ویژگی		م
	ه		
Counterpart	همتا	Canonical	متعارف
Robust counterpart	همتای استوار	Orthogonal	متعامد
Optimistic counterpart	همتای خوش بینانه	Finite	متناهی
Homogeneous	همگن	Isolated	مجزا
Geometric	هندسی	Optimal set	مجموعه بهینه
	ی	Optimal set in LO	مجموعه بهینه در LO
Uniqueness	یکتایی	Level set	مجموعه تراز
Uniform	یکنواخت	Data set	مجموعه داده‌ها

نمایه

- ا
- آرام بودن، ۱۲۰، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۸
- آرام بودن مجزای نگاشت شناسه، ۱۳۹
- آمارهای استوار، ۳۹
- افراز بهینه، ۲۷
- افراز بهینه-بیشینه، ۸۱، ۸۲
- افراز بیشینه-بهینه، ۲۷، ۲۸
- افراز تخت، ۸۰، ۸۱
- الگوریتم تولید قید نقطه درونی، ۶۳
- الگوریتم صفحه برش مرکزی، ۶۳
- اندازه آرام بودن، ۱۱۷
- اندازه لیپ‌شیتسی، ۱۲۵
- اندازه‌های نامنفی اتمی، ۲۶
- ب
- بالای منحنی نمایش، ۱۴
- بدترین مقدار اولیه، ۶۶
- بدطرحی، ۵۲
- بد-وضع، ۱۱۲
- بست یک زیرمجموعه، ۱۶
- بسته بودن، ۵۱
- بهترین تقریب، ۷۳
- به‌طور قوی ناسازگار، ۱۷
- به‌طور مثبت همگن، ۵۰
- به‌گزینی استوار محدب، ۷۳
- بی‌حرکتی پوسته تخت، ۹۳
- پ
- پایداری قوی لیپ‌شیتسی، ۱۳۷
- پایین منحنی نمایش، ۱۴
- پشتیبان تابع، ۷۳
- پوسته پایینی Isc، ۴۵
- پوسته تخت (آفینی)، ۱۶
- پوسته محدب، ۱۷
- پیچیدگی الگوریتم تولید قید نقطه درونی، ۶۳
- پیوستگی دستگاه قیدی، ۷۴
- پیوسته اوبینی، ۱۴۵
- پیوسته لیپ‌شیتسی، ۱۳۷
- ت
- تابع حاشیه‌ای، ۱۴، ۲۲
- تابع درجه عضویت، ۴۵
- تابع دوخطی، ۸۷
- تابع زیرخطی، ۸۰
- تابع کمکی، ۱۸، ۲۳
- تابع مشخصه، ۸۶
- تابع مقدار بهینه، ۵۰
- تابع مقعر \cap ، ۷۹
- تابع همگن مثبت محدب، ۸۰
- تحت پربیشیدگی‌های پیوسته، ۱۲۷

رام‌شدنی عددی، ۴۸
 روش صفحه‌برش مرکزی هندسی، ۳۶
 روش‌های گسسته‌سازی شبکه، ۳۰

ز

زیرسازی زوج دوگان، ۸۹
 زیرتراز تابع، ۱۵
 زیردیفرانسیل، ۱۵
 زیردیفرانسیل فرشه، ۱۴۵
 زیردیفرانسیل مقعر تابع، ۴۵

س

سازگاری همتای استوار، ۶۸، ۷۰
 سلول وورونویی، ۱۰۴
 سوپریمم انحراف‌های قیدی، ۱۲۵
 سه‌افرازه، ۲۷

ش

شرط بهینگی مجانبی، ۱۳۱
 شرط تعمیم‌یافته نورنبرگر، ۱۳۶
 شرط کاروش-کهن-تاکر، ۲۰
 شرط مکملی، ۲۱
 شعاع سازگاری همتای استوار، ۶۸
 شعاع فرین، ۲۸
 شکاف صفردوگانی، ۲۶

ص

صفحه‌برش، ۳۰

ف

فاصله تا بد-وضع بودن، ۱۲۰
 فرض چگال بودن، ۷۲
 فضاهای شبه‌متری، ۵۱

تحدید توابع مقادیر بهینه ν ، ۷۸
 توابع رتبه‌بندی، ۴۶

ج

جعبه فاصله‌تعمیم‌یافته، ۴۹
 جمع شدن نامطلوب در نزدیکی S ، ۳۱
 جواب ε -بهینه، ۶۳
 جواب مکملی، ۲۷
 جواب مکملی زوج، ۲۷

چ

چندگونه تخت، ۱۸

خ

خوش-وضع، ۱۱۲

د

دامنه مؤثر مقدار بهینه تابع دوگان، ۷۸
 درون توپولوژیکی، ۱۰۵
 درون نسبی، ۱۶
 درون نسبی یک وجهک، ۸۰
 دستور والادیر، ۱۵
 دوگان استوار، ۶۴
 دوگان لاگرانژی، ۲۵
 دوگان هار، ۲۵
 دوگانی استوار محلی، ۶۷
 دوگانی ضعیف، ۲۶
 دوگانی قوی اینفمکس، ۲۶
 دوگانی قوی برعکس، ۲۶

ر

رام‌شدن همتای استوار، ۷۰
 رام‌شدنی، ۴۹

- ق
- قابلیت دستیابی شعاع سازگاری، ۶۹
 قدرت اضافی ویژگی H-lsc و ضعف اضافی ویژگی H-usc، ۱۰۳
 قضیه شعاعی، ۱۳۳
 قطب مثبت یک مخروط محدب، ۱۶
- ک
- کامل بودن بعد F_R ، ۷۴
 کران خطای جامع، ۱۲۰
 کران خطای محلی، ۱۱۶
 کران‌دار بودن مجموعه بهینه، ۶۳
 کیفیت قیدی، ۱۹، ۱۲۵
- م
- ماتریس ژاکوبی، ۱۱۶
 مجموعه اعداد فازی، ۴۶
 مجموعه زیرمنحنی نمایش، ۶۸
 مجموعه شاخص‌های فعال، ۲۹
 مجموعه قیده‌های فعال، ۱۸
 مجموعه تقینی، ۶۴
 مجموعه‌های بهینه، ۷۸
 مجموعه‌های پشتیبان، ۲۷
 مخروط اندازه‌های منظم نامنفی بورل، ۲۶
 مخروط بسته، ۱۲۳
 مخروط تخت، ۸۰
 مخروط جهت‌های شدنی، ۱۸
 مخروط دورشونده، ۱۶
 مخروط فعال، ۱۸
 مخروط گشتاور اول، ۱۷، ۷۳
 مخروط مثبت، ۱۵
 مخروط مشخصه، ۱۷، ۶۸، ۷۰
- ن
- ناحیه‌های تخت بودن، ۸۹
 نظریه دوگانی استوار، ۷۴
 نقطه انباشتگی، ۹۳
 نقطه عطف، ۲۰
 نگاشت تصویر، ۱۷
 نگاشت مجموعه‌ای، ۱۱۳
 نگاشت مجموعه‌ای تقینی، ۶۷، ۶۸
 نیمه-پیوستگی بالایی، ۱۰۱
 نیمه-پیوستگی پایینی، ۱۰۳، ۱۳۳
 نیمه-پیوسته بالایی، ۵۱
 نیمه-پیوسته پایینی، ۵۱
 نیمه-پیوسته خارجی، ۹۱
 نیمه-پیوسته داخلی، ۹۱
 نیمه-پیوسته درونی، ۱۱۴

و

وضعیت، ۴۴

ویژگی شبه-لیپ‌شیتسی، ۱۱۶، ۱۲۴

ویژگی نامطلوب، ۲۰

ویژگی‌های مطلوب پایداری، ۵۰

ه

همتای استوار (یا بدبینی)، ۶۴

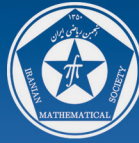
همتای استوار پارامتری، ۶۴

همتای استوار تحت نقینی، ۷۰

همتای بدبینانه، ۶۷

همتای خوش‌بینانه، ۶۴، ۶۶

همسان ریخت است (پایداری توپولوژیکی)، ۹۳



انتشارات وازگان خرد با همکاری کمیته انتشارات انجمن ریاضی ایران

تجزیه و تحلیل پس‌بهینگی در به‌گزینی خطی نیمه‌متناهی

به‌گزینی نیمه-نامتناهی خطی (LSIO) به مسئله‌های به‌گزینی خطی می‌پردازد که در آن‌ها یا بعد فضای تصمیم‌گیری یا تعداد قیدها (اما نه هر دو) بی‌نهایت است. در این کتاب مقدمات لازم دربارهٔ نظریه و روش‌های LSIO ارائه می‌شوند. برخی از مفاهیم مربوط به جواب‌های مکمل مورد استفاده در تجزیه و تحلیل حساسیت و روش‌های عددی نیز بیان می‌گردند. مزایا و معایب پنج رویکرد مختلف نسبت به LSIO نقیسی (نایقینی) نیز مورد بحث قرار گرفته‌اند و با استفاده از مسئلهٔ اوراق بهادر با بازدهٔ نقیسی شرح داده می‌شوند. دربارهٔ شیوهٔ استوار برای به‌گزینی خطی نیمه-نامتناهی، تجزیه و تحلیل حساسیت، تجزیه و تحلیل پایداری کیفی و تجزیه و تحلیل پایداری کمی، مطالب لازم ارائه می‌گردند. یادآوری‌های پایان هر بخش، پیشینه‌ها و تعمیم‌های قضیه‌ها و روش‌های ارائه‌شده را مرور می‌کند، در حالی‌که آخرین یادآوری هر فصل چند مسئلهٔ حل‌نشده را بیان می‌کند.

میگل آ. گوبرنا - مارکو آ. لوپنز

ترجمه: دکتر میرکمال میرنیا
استاد دانشگاه تبریز

