۷) فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد و $\{a_1, \dots, a_n\}$ و $\{b_1, \dots, b_n\}$ دو مجموعه $n$ عضوی از اعداد حقیقی باشند. اگر برای هر عدد حقیقی $t$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} |b_i - t| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - t|$، ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

**پاسخ:** اگر $t$ را کوچکتر یا مساوی $\min\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ بگیریم داریم

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - t) \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - t)$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

همچنین اگر $t$ را بزرگتر یا مساوی $\max\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ بگیریم داریم

$$\sum_{i=1}^{n} t - a_i \leq \sum_{i=1}^{n} t - b_i$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

پس حکم ثابت می‌شود.

انجمن ریاضی ایران

دانشگاه تبریز

۸) فرض کنید $A$ یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی باشد. اگر $A - A^2$ یک ماتریس پوچتوان باشد، ثابت کنید چندجمله‌ای‌های مشخصه $A$ و $A^2$ برابرند.

**پاسخ:** اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ همه مقادیر ویژه $A$ با احتساب تکرار باشند آن‌گاه $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ همه مقادیر ویژه $A^2$ با احتساب تکرار و $\lambda_1 - \lambda_1^2, \dots, \lambda_n - \lambda_n^2$ همه مقادیر ویژه $A - A^2$ با احتساب تکرار هستند. چون $A - A^2$ پوچتوان است تمام مقادیر ویژه آن صفرند پس به ازای هر $i$، $\lambda_i - \lambda_i^2 = 0$ در نتیجه $\lambda_i = \lambda_i^2$. بنابراین چندجمله‌ای مشخصه $A$ یعنی $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ با چندجمله‌ای مشخصه $A^2$ یعنی $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i^2)$ برابر است.

**۹)** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک فشرده باشد. تابع پیوسته $T:X\to X$ دارای این خاصیت است که برای هر دو نقطه متمایز $x,y \in X$ عدد طبیعی $n$ وجود دارد که $d(T^n(x),T^n(y)) < d(x,y)$. ثابت کنید $x_* \in X$ وجود دارد که $T(x_*) = x_*$. (منظور از $T^n$، $n$ بار ترکیب $T$ با خودش است.)

**پاسخ:** تابع $\varphi : X \to [0,+\infty)$ با ضابطه $\varphi(x) = d(x,T(x))$ را در نظر بگیرید. با توجه به پیوستگی تابع $T$ و متریک $d$، $\varphi$ تابعی پیوسته است. به دلیل فشردگی $X$، نقطه $x_* \in X$ وجود دارد که

$$\varphi(x_*) = \min\{\varphi(x) \ : \ x \in X\}$$

حال اگر $\varphi(x_*) > 0$، $T(x_*) \neq x_*$ و طبق فرض مسأله می‌توان $n \in \mathbb{N}$ یافت که

$$d(T^n(x_*),T^n(T(x_*)) < d(x_*,T(x_*))$$

این یعنی $\varphi(T^n(x_*)) < \varphi(x_*)$ که با مینیمم بودن $\varphi(x_*)$ تناقض دارد. بنابراین $\varphi(x_*) = 0$ که نتیجه می‌دهد $d(x_*,T(x_*)) = 0$ و معادلاً $T(x_*) = x_*$.

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم

چهل وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی

انجمن ریاضی ایران

جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲

---

**۱۰)** فرض کنید $n \geq 2$ عددی طبیعی و $\mathcal{A}$ مجموعه همه بردارهای به طول $n$ با مولفه‌های ۰، ۱ یا $*$ باشد. برای هر دو بردار $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ در $\mathcal{A}$ فاصله $\mathrm{x}$ و $\mathrm{y}$ را برابر با تعداد $i$ های بین ۱ تا $n$ تعریف می‌کنیم که $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$. ثابت کنید بیشترین تعداد اعضای $\mathcal{A}$ که فاصله دوبه‌دو آن‌ها حداقل ۱ و حداکثر $n-1$ است برابر است با $3 \times 2^{n-2}$.

**پاسخ:** فرض کنید $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ و اعضای $\mathcal{F}$ دو به دو فاصله حداقل ۱ و حداکثر $n-1$ داشته باشند. مجموعه $\mathcal{F}$ را به دو زیرمجموعه $\mathcal{F}^*$ و $\mathcal{F}'$ افراز می‌کنیم. زیرمجموعه $\mathcal{F}^*$ متشکل از همه بردارهایی در $\mathcal{F}$ است که حداقل یکی از مولفه‌های آنها $*$ است و زیرمجموعه $\mathcal{F}'$ متشکل از همه بردارهایی در $\mathcal{F}$ است که هیچ کدام از مولفه‌های آنها $*$ نیست.

برای هر بردار $\mathrm{x}$ در $\mathcal{F}^*$ دو بردار متمایز $\overset{0}{\mathrm{x}}$ و $\overset{1}{\mathrm{x}}$ را به شکل زیر می‌سازیم. بردار $\overset{0}{\mathrm{x}}$ $(\overset{1}{\mathrm{x}})$ برداری است که با قرار دادن ۰ (۱) به‌جای مولفه‌های $*$ در $\mathrm{x}$ بدست می‌آید.

**ادعا:** اگر $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ و $\mathrm{y} \in \mathcal{F}^*$ آن‌گاه $\{\overset{0}{\mathrm{y}}, \overset{1}{\mathrm{y}}\} \cap \{\overset{0}{\mathrm{x}}, \overset{1}{\mathrm{x}}\} = \varnothing$

**برهان ادعا:** چون $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ و فاصله $\mathrm{x}$ و $\mathrm{y}$ حداقل ۱ است پس مولفه‌ای مانند $i$ وجود دارد که درایه‌های $i$–ام $\mathrm{x}$ و $\mathrm{y}$ یکی ۰ و دیگری ۱ هستند. لذا با توجه به تعریف، روشن است که درایه‌های $i$–ام $\overset{0}{\mathrm{x}}$ و $\overset{1}{\mathrm{x}}$ یکسان بوده و متفاوت از درایه‌های $i$–ام $\overset{0}{\mathrm{y}}$ و $\overset{1}{\mathrm{y}}$ هستند. پس صحت ادعا تایید می‌شود.

در نتیجه با شمارش تعداد اعضای مجموعه $\bigcup\limits_{x \in \mathcal{F}^*} \{\overset{0}{\mathrm{x}}, \overset{1}{\mathrm{x}}\}$ داریم

$$2|\mathcal{F}^*| \leq |\{0, 1\}^n \setminus \mathcal{F}'| = 2^n - |\mathcal{F}'|.$$

از طرف دیگر، با توجه به تعریف مجموعه‌ی $\mathcal{F}$، از بین هر بردار در $\{0, 1\}^n$ و متمم آن فقط یکی می‌تواند در $\mathcal{F}'$ باشد. (منظور از متمم یک بردار $\mathrm{x}$ با مولفه‌های ۰ و ۱، بردار یکتایی مانند $\mathrm{y}$ با مولفه‌های ۰ و ۱ است که فاصله $\mathrm{y}$ با $\mathrm{x}$ برابر $n$ باشد.) بنابراین $|\mathcal{F}'| \leq 2^{n-1}$.

اکنون داریم

$$
\begin{aligned}
۲|\mathcal{F}| = ۲(|\mathcal{F}^*| + |\mathcal{F}'|) &\leq ۲^n - |\mathcal{F}'| + ۲|\mathcal{F}'| \\
&\leq ۲^n + |\mathcal{F}'| \\
&\leq ۲^n + ۲^{n-۱} \\
&= ۶ \times ۲^{n-۲}.
\end{aligned}
$$

برای اثبات اینکه مجموعه‌ای از بردارها وجود دارد که کران $۳ \times ۲^{n-۲}$ برای آنها اتفاق می افتد همه بردارهای $n$ تایی را در نظر بگیرید که مولفه اول و دوم آنها به شکل $(*,۰), (۱,۰), (۱,۱)$ هستند و مولفه‌های سوم تا $n$ام آنها ستاره ندارد (فقط ۰ یا ۱ در این مولفه‌ها بیاید) تعداد همه این بردارها برابر است با $۳ \times ۲^{n-۲}$.

۱۱) فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد و $z_۱, z_۲, \ldots, z_n$ اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ باشند و

$$P(z) = (z - z_۱)(z - z_۲)\cdots(z - z_n)$$

برای هر عدد حقیقی $r > ۱$ ثابت کنید $z_* \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $|z_*| = r$ و $|P(z_*)| = r^n$.

**پاسخ:** کافی است ثابت کنیم

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} \ln|P(re^{it})|\mathrm{d}t = \ln r^n \qquad (*)$$

در این صورت طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال می‌توان $۰ \leq t_* \leq ۲\pi$ یافت که

$$\ln|P(re^{it_*})| = \ln r^n$$

و بنابراین $z_* = re^{it_*}$ شرط مسأله را دارد.

برای اثبات رابطه $(*)$ تعریف می‌کنیم:

$$f(z) = (z - r^۲ z_۱)\cdots(z - r^۲ z_n)$$

توجه کنید که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $|r^۲ z_i| = r^۲$. پس $f(z)$ هیچ ریشه‌ای در مجموعه زیر ندارد

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}.$$

این نتیجه می‌دهد که تابع $\ln|f(z)|$ روی $C_r$ تابعی همساز است و لذا

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} \ln|f(re^{it})|\mathrm{d}t = \ln|f(۰)| = \ln\left(r^{۲n}|z_۱\cdots z_n|\right) = ۲n\ln r$$

از طرف دیگر برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $z \in \mathbb{C}$ که $|z| = r$،

$$\begin{aligned}
|z-r^2z_i|^2 &= (z-r^2z_i)(\overline{z}-r^2\overline{z}_i)\\
&= |z|^2+r^4|z_i|^2-r^2z_i\overline{z}-r^2\overline{z_i}z\\
&= r^2(1+r^2-z_i\overline{z}-\overline{z_i}z)\\
&= r^2(z-z_i)(\overline{z}-\overline{z}_i)\\
&= r^2|z-z_i|^2
\end{aligned}$$

حال چون $P(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$ پس برای هر $z$ که $|z|=r$، داریم

$$|f(z)|=|z-r^2z_1|\cdots|z-r^2z_n|=r^n|z-z_1|\cdots|z-z_n|=r^n|P(z)|$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|P(re^{it})|\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(r^{-n}|f(re^{it})|)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{it})|\mathrm{d}t-n\ln r=n\ln r$$

و به این ترتیب اثبات حکم به پایان می‌رسد.

**۱۲)** فرض کنید $R$ یک حلقه یکدار و جابجایی باشد. ایده‌آل $I$ در $R$ را بزرگ گوییم هرگاه $I$ با هر ایده‌آل ناصفر در $R$، اشتراک ناصفر داشته باشد. فرض کنید هر ایده‌آل بزرگ در $R$ شامل یک عنصر باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست. ثابت کنید مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال در $R$ توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

**پاسخ:** ایده‌آل $I$ را برابر مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال $R$ در نظر بگیرید. اگر $\Sigma = \{J \lhd R : I \cap J = 0\}$ آنگاه طبق لم زرن $\Sigma$ عضو ماکزیمالی مثل $K$ دارد. توجه کنید $IK \subset I \cap K = 0$ که نتیجه می‌دهد $IK = 0$. قرار دهید $J = I \bigoplus K$، نشان می‌دهیم $J$ در $R$ بزرگ است. اگر $L$ یک ایده‌آل ناصفر باشد و $J \cap L = 0$ آنگاه $L \nsubseteq J$ و لذا $L \nsubseteq K$. بنابراین $K + L \notin \Sigma$. در نتیجه $I \cap (K + L) \neq 0$. حال اگر $0 \neq i = l + k \in I \cap (K + L)$ آنگاه $l = i - k \in J \cap L = 0$. بنابراین $l = 0$ و $i = k \in I \cap K = 0$ که تناقض است. این نشان می‌دهد که $J$ یک ایده‌آل بزرگ در $R$ است. طبق فرض مسأله $J$ شامل عنصری مانند $x$ است که مقسوم‌علیه صفر نیست. قرار دهید $x = i + k$ به‌طوری‌که $i \in I, k \in K$. اگر $A$ یک ایده‌آل مینیمال $R$ باشد آنگاه $0 \neq xA \subseteq A$ نتیجه می‌دهد $xA = A$. بنابراین $xI = I$. در نتیجه $e \in I$ وجود دارد که $xe = i$. چون $ek \in IK = 0$ داریم $xe = (i + k)e = ie = xe^2$. پس $x(e - e^2) = 0$ که نتیجه می‌دهد $e = e^2$. واضح است که $Re \subseteq I$. برای هر عنصر $a \in I$ عنصر $z \in I$ وجود دارد که $a = xz$. بنابراین $a = (i + k)z = iz = exz \in Re$. در نتیجه $I = Re$.