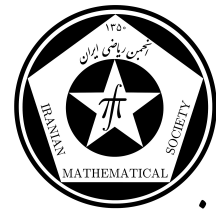




پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

(۷) فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد و  $\{a_1, \dots, a_n\}$  و  $\{b_1, \dots, b_n\}$  دو مجموعه  $n$  عضوی از اعداد حقیقی باشند. اگر برای هر عدد حقیقی  $t$  داشته باشیم  $\sum_{i=1}^n |a_i - t| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - t|$ ، ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

پاسخ: اگر  $t$  را کوچکتر یا مساوی  $\min\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  بگیریم داریم

$$\sum_{i=1}^n (a_i - t) \leq \sum_{i=1}^n (b_i - t)$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i.$$

همچنین اگر  $t$  را بزرگتر یا مساوی  $\max\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  بگیریم داریم

$$\sum_{i=1}^n t - a_i \leq \sum_{i=1}^n t - b_i$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i$$

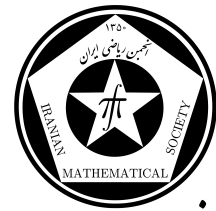
پس حکم ثابت می شود.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

۸) فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی باشد. اگر  $A - A^2$  یک ماتریس پوچتوان باشد، ثابت کنید چندجمله‌ای‌های مشخصه  $A$  و  $A^2$  برابرند.

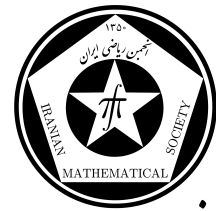
پاسخ: اگر  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  همه مقادیر ویژه  $A$  با احتساب تکرار باشند آن‌گاه  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$  همه مقادیر ویژه  $A^2$  با احتساب تکرار و  $\lambda_1 - \lambda_1^2, \dots, \lambda_n - \lambda_n^2$  همه مقادیر ویژه  $A - A^2$  با احتساب تکرار هستند. چون  $A - A^2$  پوچتوان است تمام مقادیر ویژه آن صفرند پس به ازای هر  $i$ ،  $\lambda_i - \lambda_i^2 = 0$  در نتیجه  $\lambda_i = \lambda_i^2$ . بنابراین چندجمله‌ای مشخصه  $A$  یعنی  $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  با چندجمله‌ای مشخصه  $A^2$  یعنی  $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i^2)$  برابر است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

۹) فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک فشرده باشد. تابع پیوسته  $T : X \rightarrow X$  دارای این خاصیت است که برای هر دو نقطه متمایز  $x, y \in X$  عدد طبیعی  $n$  وجود دارد که  $d(T^n(x), T^n(y)) < d(x, y)$ . ثابت کنید  $x_* \in X$  وجود دارد که  $T(x_*) = x_*$ . (منظور از  $T^n$ ،  $n$  بار ترکیب  $T$  با خودش است).

**پاسخ:** تابع  $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty)$  با ضابطه  $\varphi(x) = d(x, T(x))$  را در نظر بگیرید. با توجه به پیوستگی تابع  $T$  و متریک  $d$ ، تابعی پیوسته است. به دلیل فشردگی  $X$ ، نقطه  $x_* \in X$  وجود دارد که

$$\varphi(x_*) = \min\{\varphi(x) : x \in X\}$$

حال اگر  $\varphi(x_*) > 0$ ،  $T(x_*) \neq x_*$  و طبق فرض مسئله می‌توان  $n \in \mathbb{N}$  یافت که

$$d(T^n(x_*), T^n(T(x_*))) < d(x_*, T(x_*))$$

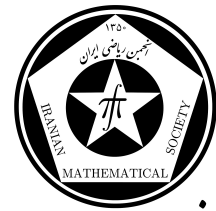
این یعنی  $\varphi(T^n(x_*)) < \varphi(x_*)$  که با مینیمم بودن  $\varphi(x_*)$  تناقض دارد. بنابراین  $\varphi(x_*) = 0$  که نتیجه می‌دهد  $d(x_*, T(x_*)) = 0$  و معادلاً  $T(x_*) = x_*$ .

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

۱° فرض کنید  $n \geq 2$  عددی طبیعی و  $A$  مجموعه همه بردارهای به طول  $n$  با مولفه‌های  $0, 1$  یا  $*$  باشد. برای هر دو بردار  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و  $y = (y_1, \dots, y_n)$  در  $A$  فاصله  $x$  و  $y$  را برابر با تعداد  $i$  های بین  $1$  تا  $n$  تعریف می‌کنیم که  $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$ . ثابت کنید بیشترین تعداد اعضای  $A$  که فاصله دوبه‌دو آن‌ها حداقل  $1$  و حداکثر  $n-1$  است برابر است با  $3 \times 2^{n-2}$ .

**پاسخ:** فرض کنید  $\mathcal{F} \subset A$  و اعضای  $\mathcal{F}$  دو به دو فاصله حداقل  $1$  و حداکثر  $n-1$  داشته باشند. مجموعه  $\mathcal{F}$  را به دو زیرمجموعه  $\mathcal{F}^*$  و  $\mathcal{F}'$  افراز می‌کنیم. زیرمجموعه  $\mathcal{F}^*$  متشکل از همه بردارهایی در  $\mathcal{F}$  است که حداقل یکی از مولفه‌های آن‌ها  $*$  است و زیرمجموعه  $\mathcal{F}'$  متشکل از همه بردارهایی در  $\mathcal{F}$  است که هیچ کدام از مولفه‌های آن‌ها  $*$  نیست.

برای هر بردار  $x$  در  $\mathcal{F}^*$  دو بردار متمایز  $\overset{\cdot}{x}$  و  $\overset{\cdot}{x}$  را به شکل زیر می‌سازیم. بردار  $\overset{\cdot}{x}$  برداری است که با قرار دادن  $0$  (۱) به جای مولفه‌های  $*$  در  $x$  بدست می‌آید.

**ادعا:** اگر  $y \in \mathcal{F}^*$  و  $y \neq x$  آن‌گاه  $\{y, \overset{\cdot}{y}\} \cap \{x, \overset{\cdot}{x}\} = \emptyset$

**برهان ادعا:** چون  $y \neq x$  و فاصله  $x$  و  $y$  حداقل  $1$  است پس مولفه‌ای مانند  $i$  وجود دارد که درایه‌های  $i$ -ام  $x$  و  $y$  یکی  $0$  و دیگری  $1$  هستند. لذا با توجه به تعریف، روشن است که درایه‌های  $i$ -ام  $\overset{\cdot}{x}$  و  $\overset{\cdot}{x}$  یکسان بوده و متفاوت از درایه‌های  $i$ -ام  $\overset{\cdot}{y}$  و  $\overset{\cdot}{y}$  هستند. پس صحت ادعا تایید می‌شود.

در نتیجه با شمارش تعداد اعضای مجموعه  $\bigcup_{x \in \mathcal{F}^*} \{x, \overset{\cdot}{x}\}$  داریم

$$2|\mathcal{F}^*| \leq |\{0, 1\}^n \setminus \mathcal{F}'| = 2^n - |\mathcal{F}'|.$$

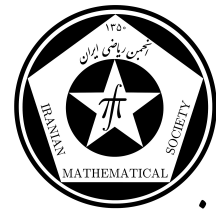
از طرف دیگر، با توجه به تعریف مجموعه‌ی  $\mathcal{F}$ ، از بین هر بردار در  $\{0, 1\}^n$  و متمم آن فقط یکی می‌تواند در  $\mathcal{F}'$  باشد. (منظور از متمم یک بردار  $x$  با مولفه‌های  $0$  و  $1$ ، بردار یکتایی مانند  $y$  با مولفه‌های  $0$  و  $1$  است که فاصله  $y$  با  $x$  برابر  $n$  باشد.) بنابراین  $|\mathcal{F}'| \leq 2^{n-1}$ .

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

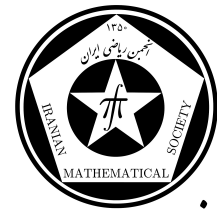
اکنون داریم

$$\begin{aligned} 2|\mathcal{F}| &= 2(|\mathcal{F}^*| + |\mathcal{F}'|) \leq 2^n - |\mathcal{F}'| + 2|\mathcal{F}'| \\ &\leq 2^n + |\mathcal{F}'| \\ &\leq 2^n + 2^{n-1} \\ &= 6 \times 2^{n-2}. \end{aligned}$$

برای اثبات اینکه مجموعه‌ای از بردارها وجود دارد که کران  $3 \times 2^{n-2}$  برای آنها اتفاق می‌افتد همه بردارهای  $n$  تایی را در نظر بگیرید که مولفه اول و دوم آنها به شکل  $(0, *)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  هستند و مولفه‌های سوم تا  $n$ م آنها ستاره ندارد (فقط  $0$  یا  $1$  در این مولفه‌ها بیاید) تعداد همه این بردارها برابر است با  $3 \times 2^{n-2}$ .

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



(۱۱) فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد و  $z_1, z_2, \dots, z_n$  اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ باشند و

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

برای هر عدد حقیقی  $1 < r$  ثابت کنید  $z_* \in \mathbb{C}$  وجود دارد که  $|z_*| = r$  و  $|P(z_*)| = r^n$ .

پاسخ: کافی است ثابت کنیم

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |P(re^{it})| dt = \ln r^n \quad (*)$$

در این صورت طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال می توان  $0 \leq t_* \leq 2\pi$  یافت که

$$\ln |P(re^{it_*})| = \ln r^n$$

و بنابراین  $z_* = re^{it_*}$  شرط مسأله را دارد.

برای اثبات رابطه (\*) تعریف می کنیم:

$$f(z) = (z - r^2 z_1) \cdots (z - r^2 z_n)$$

توجه کنید که برای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $|r^2 z_i| = r^2$ . پس  $f(z)$  هیچ ریشه‌ای در مجموعه زیر ندارد

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}.$$

این نتیجه می دهد که تابع  $\ln |f(z)|$  روی  $C_r$  تابعی همساز است و لذا

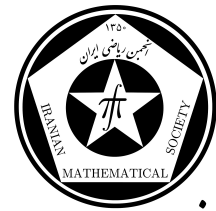
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt = \ln |f(0)| = \ln (r^{2n} |z_1 \cdots z_n|) = 2n \ln r$$

از طرف دیگر برای هر  $1 \leq i \leq n$  و هر  $z \in \mathbb{C}$  که  $|z| = r$

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

$$\begin{aligned}|z - r^2 z_i|^2 &= (z - r^2 z_i)(\bar{z} - r^2 \bar{z}_i) \\ &= |z|^2 + r^4 |z_i|^2 - r^2 z_i \bar{z} - r^2 \bar{z}_i z \\ &= r^2 (1 + r^2 - z_i \bar{z} - \bar{z}_i z) \\ &= r^2 (z - z_i)(\bar{z} - \bar{z}_i) \\ &= r^2 |z - z_i|^2\end{aligned}$$

حال چون  $P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$  پس برای هر  $z$  که  $|z| = r$  داریم

$$|f(z)| = |z - r^2 z_1| \cdots |z - r^2 z_n| = r^n |z - z_1| \cdots |z - z_n| = r^n |P(z)|$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |P(re^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln (r^{-n} |f(re^{it})|) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt - n \ln r = n \ln r$$

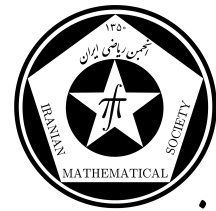
و به این ترتیب اثبات حکم به پایان می‌رسد.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

۱۲) فرض کنید  $R$  یک حلقه یکدار و جابجایی باشد. ایده‌آل  $I$  در  $R$  را بزرگ گوییم هرگاه  $I$  با هر ایده‌آل ناصفر در  $R$ ، اشتراک ناصفر داشته باشد. فرض کنید هر ایده‌آل بزرگ در  $R$  شامل یک عنصر باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست. ثابت کنید مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال در  $R$  توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

**پاسخ:** ایده‌آل  $I$  را برابر مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال  $R$  در نظر بگیرید. اگر  $\Sigma = \{J \triangleleft R : I \cap J = 0\}$  آنگاه طبق لم زرن  $\Sigma$  عضو ماکزیمالی مثل  $K$  دارد. توجه کنید  $IK \subset I \cap K = 0$  که نتیجه می‌دهد  $IK = 0$ . قرار دهید  $J = I \oplus K$ ، نشان می‌دهیم  $J$  در  $R$  بزرگ است. اگر  $L$  یک ایده‌آل ناصفر باشد و  $J \cap L = 0$  آنگاه  $L \not\subseteq J$  و لذا  $L \not\subseteq K$ . بنابراین  $K + L \notin \Sigma$ . در نتیجه  $I \cap (K + L) \neq 0$ . حال اگر  $i = l + k \in I \cap (K + L) \neq 0$  آنگاه  $l = i - k \in J \cap L = 0$ . بنابراین  $l = 0$  و  $i = k \in I \cap K = 0$  که تناقض است. این نشان می‌دهد که  $J$  یک ایده‌آل بزرگ در  $R$  است. طبق فرض مسأله  $J$  شامل عنصری مانند  $x$  است که مقسوم‌علیه صفر نیست. قرار دهید  $x = i + k$  به طوری که  $i \in I, k \in K$  اگر  $A$  یک ایده‌آل مینیمال  $R$  باشد آنگاه  $xA \subseteq A \neq 0$  نتیجه می‌دهد  $xA = A$ . بنابراین  $xI = I$ . در نتیجه  $e \in I$  وجود دارد که  $xe = i$  چون  $ek \in IK = 0$  داریم  $ek = 0$  پس  $xe = (i + k)e = ie = xe^2$  که نتیجه می‌دهد  $e = e^2$ . واضح است که  $Re \subseteq I$ . برای هر  $a \in I$  عنصر  $z \in I$  وجود دارد که  $a = xz$ . بنابراین  $a = (i + k)z = iz = exz \in Re$ . در نتیجه  $I = Re$ .

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety