بارم سوال اول

اثبات هم‌گرایی دنباله x_n **(۱۵ نمره)**

کامل کردن راه حل. **(۵ نمره)**

نمرات جزئی:

- یک نمره محاسبه حد $\lim_{n\to\infty}(x_{n+4} + \cdots + x_{n+7})$
- در صورت ایرادهای محاسباتی نمرات جزئی کسر شده
- در صورت استفاده از هم‌گرایی x_n یا چیزی معادل با آن بدون اثبات نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

بارم سوال دوم

طبق فرض برای هر x و y در حلقه R داریم:

$$x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲ = x^۲ + y^۲ + xy + yx$$

لذا $xy = -yx$. **(۱۰ نمره)**

اگر فرض کنیم $x = y$ آنگاه داریم $x^۲ = -x^۲$. **(۵ نمره)**

$$(xy)^۲ = (xy)(xy) = x((yx)y = x(-xy)y = -x^۲y^۲ = x^۲y^۲ \quad \textbf{(۵ نمره)}$$

تبصره: اگر دانشجویی فرض کرده حلقه R یکدار است در بهترین حالت **(۱۵ نمره)** در نظر گرفته شده است (به شرطی که همه مراحل را درست انجام داده باشد)

$$(x+۱)^۲ = x^۲ + ۱^۲ \Rightarrow x = -x$$

پس $xy = -yx$ نتیجه می‌دهد که $xy = yx$. لذا حلقه جابه‌جایی است و رابطه به راحتی اثبات می‌شود.

بارم سوال سوم

فرض کنید برای عضوی مانند $w \in \Omega$، m_w تعداد E_iهایی باشد که w در آنها قرار دارد بنابراین اگر $w \in E_i$ داریم $m_w \leq a_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{w \in E_i} \frac{\mathbb{P}(w)}{a_i} \\
&= \sum_{w \in \Omega} \sum_{E_i \ni w} \frac{\mathbb{P}(w)}{a_i} \\
&= \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \sum_{E_i \ni w} \frac{1}{a_i} \\
&= \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \frac{m_w}{a_i} \\
&\leq \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

- اگر داوطلبی راه حل فوق را نداشته باشد اما در ابتدای راه حل فضای Ω را یکنواخت فرض کرده باشد **(۵ نمره)**
- اثبات $\sum_{\omega \in E_i} \frac{1}{a_i} \leq 1$ **(۸ نمره)**
- نوشتن $P(E_i)$ به صورت $\sum_{x \in E_i} P(x)$ **(۲ نمره)**

بارم سوال چهارم

فرض کنید H, K دو زیرگروه G باشند به طوری که $|H| \mid |K|$. بنابراین طبق فرض $|H \cap K| = |H|$. در نتیجه $H \subseteq K$. بنابراین اگر $|K| = |H|$. آنگاه $H = K$. همچنین هر زیرگروه G نرمال است زیرا $|gHg^{-1}| = |H|$.

(۸ نمره)

اگر N زیرگروه G نرمال باشد آنگاه هر زیرگروه G/N به شکل H/N می باشد. بنابراین

$$\gcd(|H/N|, |K/N|) = \gcd\left(\frac{|H|}{|N|}, \frac{|K|}{|N|}\right) = \frac{\gcd(|H|, |K|)}{|N|}$$
$$= \frac{|H \cap K|}{|N|} = |H \cap K/N| = |H/N \cap K/N|.$$

در نتیجه G/N نیز همین خاصیت را دارد. **(۵ نمره)**

حال حکم را با استقرا روی G ثابت می‌کنیم. برای $|G| = 1$ حکم بدیهی است. فرض کنید $|G| > 1$ و p یک عامل اول $|G|$ و a یک عضو مرتبه p در G باشد. بنابراین $G \rhd \langle a \rangle = N$ و گروه G/N طبق فرض استقرا دوری می‌باشد. اگر $G/N = \langle bN \rangle$ آنگاه $G = MN$ که $M = \langle b \rangle$. **(۵ نمره)**

قرار دهید $m = |M|$. اگر $p \mid m$ آنگاه $N \subseteq M$ و $G = MN = M$ دوری است. اگر $p \nmid m$ آنگاه $aba^{-1}b^{-1} \in M \cap N = \{e\}$. بنابراین $ab = ba$. در نتیجه $\underbrace{G = MN \cong M \times N \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{mp}}_{\text{(۲ نمره)}}$ دوری است.

- اگر همه زیرگروه‌های سره یک گروه، نرمال و دوری باشند، G لزوماً دوری نیست (مثال: Q_8)
- اگر $a \in G$، آن‌گاه ممکن است به ازای هر $b \in G \setminus \langle a \rangle$، a توانی از b باشد (مثال: فرض کنید $Z(Q_8) = \langle a \rangle$. دراین‌صورت $a = b^2$ به ازای هر $b \in G \setminus \langle a \rangle$.)

بارم سوال پنجم

- اثبات ادعای ۱: **(۳ نمره)**
- اثبات ادعای ۲: **(۳ نمره)**
- اثبات ادعای ۳: **(۷ نمره)**
- تکمیل اثبات: **(۷ نمره)**

* متفرقه: اثبات حکم با فرض همبندی X: **(۵ نمره)**

بارم سوال ششم

- فقط ۱۹۹ **(۱ نمره)**
- ۱۹۹ با استدلال **(۵ نمره)**
- هر استدلالی که $O\left(n\right)$ را نتیجه بدهد **(۲ نمره)**
- استدلال کمتر از ۱۹۹ نمی‌شود **(۱۵ نمره)**

* توضیح در مورد اینکه چطور می‌توان فهمید یک سوال را دروغ جواب داده است (تکرار سوال) ۱+ **نمره** در قسمت پاسخ ۱۹۹ دارد.

بارم سوال هفتم

اثبات یکی از $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$ یا $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i$ هر کدام (**۱۰ نمره**)

* توضیحات ناقص با توجه به نوع ایراد نمره کم شده است.

* حل سوال برای مثال خاص و حالت $t = 0$ نمره ندارد.

بارم سوال هشتم

اثبات اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ همه مقادیر ویژه A با احتساب تکرار باشند آن‌گاه $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ همه مقادیر ویژه A^2 با احتساب تکرار و $\lambda_1 - \lambda_1^2, \dots, \lambda_n - \lambda_n^2$ همه مقادیر ویژه $A - A^2$ با احتساب تکرار هستند. **(۸ نمره)**

چون $A - A^2$ پوچتوان است تمام مقادیر ویژه آن صفرند پس به ازای هر i، $\lambda_i - \lambda_i^2 = 0$ در نتیجه $\lambda_i = \lambda_i^2$. **(۸ نمره)**

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه A یعنی $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ با چندجمله‌ای مشخصه A^2 یعنی $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i^2)$ برابر است. **(۴ نمره)**

بارم سوال نهم

- تعریف تابع φ با اشاره به پیوستگی. **(۷ نمره)**
- وجود مینیمم برای تابع φ و در نظر گرفتن آن. **(۷نمره)**
- اثبات این که نقطه مینیمم جواب مسئله است. **(۶ نمره)**

* به گزاره‌هایی مثل این که تابع پیوسته روی مجموعه فشرده مینیمم دارد نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

* به صرف اشاره به قضیه نقطه ثابت باناخ یا قضیه‌های دیگر نقطه ثابت معروف نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

بارم سوال دهم

- برای $n = ۲$ ارائه مثال ۳تایی (**۱ نمره**)
- ارائه یک مثال با $۲^{n-۲} \times ۳$ عضو و اثبات آن (**۵ نمره**)
- اثبات کران داده شده (**۱۵ نمره**)

بارم سوال یازدهم

بیان درست قضیه مقدار میانگین که حکم را نتیجه دهد. **(۵ نمره)**

تعریف تابع f و اشاره به همساز بودن $\ln|f|$. **(۸ نمره)**

محاسبه میانگین f و اتمام راه‌حل. **(۷ نمره)**

راه‌حل مبتنی بر قضیه روشه

- معرفی توابع مناسب برای به کارگیری قضیه روشه. **(۵ نمره)**
- چک کردن نابرابری مناسب. **(۱۰نمره)**
- تمام کردن راه‌حل **(۵نمره)**

نمرات جزئی

- صرف اشاره به قضیه مقدار میانی برای اثبات حکم **(۱نمره)**
- تلاش برای اثبات حکم به کمک قضیه مقدار میانگین و انتگرال یک تابع روی دایره. هر چند که تابع مورد نظر نباشد. **(۵نمره)**
- صرف اشاره به قضیه روشه یا سایر قضیه‌های آنالیز مختلط نمره‌ای ندارد.
- در صورت عدم اثبات هارمونیک بودن $\ln|f|$ نمره‌ای کسر نمی‌شود.

بارم سوال دوازدهم

ایده‌آل I را برابر مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال R در نظر بگیرید. اگر $\Sigma = \{J \lhd R : I \cap J = 0\}$ آنگاه طبق لم زرن Σ عضو ماکزیمالی مثل K دارد. توجه کنید $IK \subset I \cap K = 0$ که نتیجه می‌دهد $IK = 0$. **(۴نمره)**

قرار دهید K $J = I \bigoplus K$، نشان می‌دهیم J در R بزرگ است. اگر L یک ایده‌آل ناصفر باشد و $J \cap L = 0$ آنگاه $L \nsubseteq J$ و لذا $L \nsubseteq K$. بنابراین $K + L \notin \Sigma$. در نتیجه $I \cap (K+L) \neq 0$. حال اگر $0 \neq i = l + k \in I \cap (K+L)$ آنگاه $l = i - k \in J \cap L = 0$. بنابراین $l = 0$ و $i = k \in I \cap K = 0$ که تناقض است. این نشان می‌دهد که J یک ایده‌آل بزرگ در R است. **(۸نمره)**

طبق فرض مسأله J شامل عنصری مانند x است که مقسوم‌علیه صفر نیست. قرار دهید $x = i + k$ به‌طوری‌که $i \in I, k \in K$. اگر A یک ایده‌آل مینیمال R باشد آنگاه $0 \neq xA \subseteq A$ نتیجه می‌دهد $xA = A$. بنابراین $xI = I$. در نتیجه $e \in I$ وجود دارد که $xe = i$. چون $ek \in IK = 0$ داریم $xe = (i+k)e = ie = xe^{2}$. پس $x(e - e^{2}) = 0$ که نتیجه می‌دهد $e = e^{2}$. واضح است که $Re \subseteq I$. برای هر $a \in I$ عنصر $z \in I$ وجود دارد که $a = xz$. بنابراین $a = (i+k)z = iz = exz \in Re$. در نتیجه $I = Re$. **(۸نمره)**