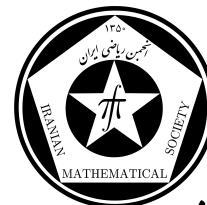




آزمون نوبت دوم
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲



انجمن ریاضی ایران

۷. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $\{a_1, \dots, a_n\}$ و $\{b_1, \dots, b_n\}$ دو مجموعه n عضوی از اعداد حقیقی باشند. اگر برای هر عدد حقیقی t داشته باشیم $\sum_{i=1}^n |a_i - t| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - t|$ ، ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

۸. فرض کنید A یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی باشد. اگر $A - A^2$ یک ماتریس پوچتوان باشد، ثابت کنید چند جمله‌ای‌های مشخصه A و A^2 برابرند.

۹. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد. تابع پیوسته $T : X \rightarrow X$ دارای این خاصیت است که برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ عدد طبیعی n وجود دارد که $d(T^n(x), T^n(y)) < d(x, y)$ ثابت کنید $x_* \in X$ وجود دارد که $T(x_*) = x_*$ (منظور از T^n ، n بار ترکیب T با خودش است).

۱۰. فرض کنید $2 \leq n$ عددی طبیعی و A مجموعه همه بردارهای به طول n با مولفه‌های $0, 1$ یا $*$ باشد. برای هر دو بردار $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در A فاصله x و y را برابر با تعداد i های بین 1 تا n تعریف می‌کنیم که $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$. ثابت کنید بیشترین تعداد اعضای A که فاصله دوه‌دو آن‌ها حداقل 1 و حداکثر $n - 1$ است برابر است با $3 \times 2^{n-2}$.

۱۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و z_1, z_2, \dots, z_n اعدادی مختلط با قدر مطلق 1 باشند و

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

برای هر عدد حقیقی $r < 1$ ثابت کنید $z_* \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $|z_*| = r$ و $|P(z_*)| = r^n$.

۱۲. فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابجایی باشد. ایده‌آل I در R را بزرگ گوییم هرگاه I با هر ایده‌آل ناصفر در R ، اشتراک ناصفر داشته باشد. فرض کنید هر ایده‌آل بزرگ در R شامل یک عنصر باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست. ثابت کنید مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال در R توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

موفق باشید