آزمون نوبت دوم

چهل وششمین مسابقه ریاضی دانشجویی

انجمن ریاضی ایران

جلسه دوم ۱۴۰۳/۲/۱۲

---

۷. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $\{a_1, \ldots, a_n\}$ و $\{b_1, \ldots, b_n\}$ دو مجموعه n عضوی از اعداد حقیقی باشند. اگر برای هر عدد حقیقی t داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} |a_i - t| \leq \sum_{i=1}^{n} |b_i - t|$، ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

۸. فرض کنید A یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی باشد. اگر $A - A^2$ یک ماتریس پوچتوان باشد، ثابت کنید چندجمله‌ای‌های مشخصه A و A^2 برابرند.

۹. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد. تابع پیوسته $T : X \to X$ دارای این خاصیت است که برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ عدد طبیعی n وجود دارد که $d(T^n(x), T^n(y)) < d(x, y)$. ثابت کنید $x_* \in X$ وجود دارد که $T(x_*) = x_*$. (منظور از T^n، n بار ترکیب T با خودش است.)

۱۰. فرض کنید $n \geq 2$ عددی طبیعی و $\mathcal{A}$ مجموعه همه بردارهای به طول n با مولفه‌های ۰، ۱ یا $*$ باشد. برای هر دو بردار $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ در $\mathcal{A}$ فاصله $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را برابر با تعداد i های بین ۱ تا n تعریف می‌کنیم که $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$. ثابت کنید بیشترین تعداد اعضای $\mathcal{A}$ که فاصله دوبه‌دو آن‌ها حداقل ۱ و حداکثر $n - 1$ است برابر است با $2^{n-2} \times 3$.

۱۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $z_1, z_2, \ldots, z_n$ اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ باشند و

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

برای هر عدد حقیقی $r > 1$ ثابت کنید $z_* \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $|z_*| = r$ و $|P(z_*)| = r^n$.

۱۲. فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابجایی باشد. ایده‌آل I در R را بزرگ گوییم هرگاه I با هر ایده‌آل ناصفر در R، اشتراک ناصفر داشته باشد. فرض کنید هر ایده‌آل بزرگ در R شامل یک عنصر باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست. ثابت کنید مجموع تمام ایده‌آل‌های مینیمال در R توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

موفق باشید