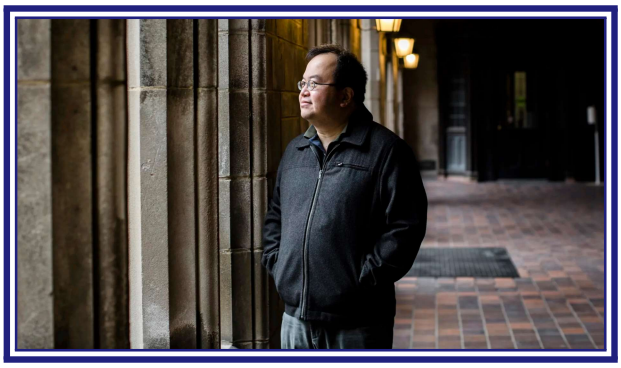
یک ریاضی‌دانِ کاربردی با جعبهٔ ابزاری غیرمنتظره*

ریچِل کِراول

مترجم: فرشید عبدالهی**

چکیده: *لِک-هِنگ لیم از ابزارهایی در جبر، هندسه و توپولوژی برای پاسخ به سؤالات در یادگیری ماشین استفاده می‌کند.*



لِک-هِنگ لیم، ریاضی‌دانِ کاربردی دانشگاه شیکاگو، می‌گوید: «وقتی مبحثی پیشرفته و پیچیده می‌شود، به‌صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود.»

لِک-هِنگ لیم[1] آرزوی بازگشت به دورانی را دارد که ریاضیات محض و کاربردی را دوباره متحد کند. او به این نکته اشاره می‌کند که تمایزی که در ریاضیات مُدرن اساسی به‌نظر می‌رسد، در واقع جدید است. لیم گفت: «این گُسست بین ریاضی محض و کاربردی در ۸۰ سالِ گذشته رخ داده است و من برای بازگشت به روزهای بسیار دور بحث می‌کنم.»

تحقیقات لیم ما را به این اتحاد نزدیک‌تر می‌کند. او با استفاده از ابزارهایی که در زمینه‌های ریاضی محض مانند جبر، هندسه و توپولوژی توسعه داده شده‌اند، در حوزه‌هایی مانند یادگیریِ ماشین و موضوعات دیگر کاربردی فعالیت می‌کند. لیم در حال حاضر استادِ دانشگاه شیکاگو است، اما در سنگاپور بزرگ شده است و به گفته وی «به ریاضیات علاقهٔ چندانی نداشت». سپس در دبیرستان، با یک معلم فیزیک که در مقطع کارشناسی ارشد تحصیل می‌کرده، در مورد پژوهش‌های معلم صحبت می‌کند. این گفت‌وگو او را به نظریهٔ پیمانه‌ای[2] علاقه‌مند می‌کند. او گفت: «مطمئناً موضوع فیزیک است، اما با مدل کردن کمیت‌های فیزیکی به‌عنوان اشیای ریاضی، بسیار ریاضی است.» این گفت‌وگو او را به سوی تبدیل شدن به یک ریاضی‌دان هدایت کرد.

لیم می‌گوید: «بیشتر آن‌ها را فراموش کرده‌ام، اما برخی از اصطلاحات با من ماند. وقتی بعدها در تحصیلاتم با آن‌ها برخورد کردم، احساس کردم دوباره با دوستِ قدیمی خودم ملاقات کرده‌ام.»

در سال ۲۰۲۲، لِک-هِنگ لیم بورسیه گوگنهایم[3] را دریافت کرد. سایان موکرجی[4]، استادِ آمارِ دانشگاه دوک، در توصیهٔ او برای بورسیهٔ گوگنهایم نوشت: «لِک-هِنگ ریاضی‌دانی استثنایی است؛ او قوی‌ترین ریاضی‌دان کاربردیِ نسلِ خود است که در رابطه با روش‌های عددی، جبر و الگوریتم‌هایِ علوم داده کار می‌کند.»

این مصاحبه به‌منظور روشن‌تر شدن، تنظیم و ویرایش شده است.

لیم گفت: «من فقط از پر کردنِ شکاف‌هایِ دانشم خوشحال هستم.»

آیا توصیف رابطهٔ بین ریاضیات محض و کاربردی، به‌عنوان رابطه‌ای همواره در حال تحول، منصفانه است؟

- بله. این واقعیت که ما حتی در مورد رابطهٔ بین ریاضی محض و کاربردی بحث می‌کنیم، کمی تأسف‌آور است. این بدان معناست که

[1] Lek-Heng Lim [2] gauge theory [3] Guggenheim [4] Sayan Mukherjee

آن‌ها به‌عنوان دو موجودِ جداگانه درنظر گرفته می‌شوند. نگاهی به روزگارانِ دور بیندازید. به کارهای گاوس، فِرما یا اویلر نگاه کنید. حتی افرادی مانند فون نویمان یا هیلبرت هم، این تفاوت را قائل نبودند. برای آن‌ها، همه چیز ریاضی محض و ریاضی کاربردی بود.

کارِ گاوس تنها مربوط به تقابل درجهٔ دوم[۵] و انحنایِ گاوسی نیست، بلکه چیزی شبیه مسائل کمترین توان‌های دوم و تلاش برای پیدا کردنِ مسیرهای سیارات نیز می‌شود. در واقع، او رگرسیون خطی، مبحثی که در آمار بسیار مهم است، را ابداع کرد. به فهرست معروف هیلبرت از ۲۳ مسئله نگاه کنید. برخی از آن‌ها ریشهٔ عمیقی در ریاضیات کاربردی و سیستم‌های دینامیکی دارند و برخی دیگر ریشه در ریاضیات محض و منطق. فون نویمان به موضوعاتی مانند مکانیک کوانتومی، منطقِ ریاضی، آنالیز عددی، نظریهٔ بازی‌ها و جبر عملگری علاقه داشت. البته هر دو حوزه به اندازهٔ کافی گسترده هستند که برای هر شخصی امکان ندارد همه چیز را بداند. به نظرِ من، یک ریاضی‌دانِ محض باید برخی از مسائل در ریاضیات کاربردی را بداند و صادقانه بگویم، ریاضی‌دانانِ کاربردی با افزایش آگاهی خود از ابزارهای مدرن در هندسه، توپولوژی و جبر، چیزهای زیادی به‌دست می‌آورند.

لیم از انجمنِ بنیادهای ریاضیاتِ محاسباتی جایزه‌ای به شکل گُمبُت[۶] دریافت کرد.

در مقاله‌ای در سال ۲۰۲۰، شما شبکه‌های عصبی عمیق را با توپولوژی مرتبط کردید. چگونه؟

- پیش‌تر، رایانه برای انجام چیزی که یک انسان به راحتی می‌تواند انجام دهد، به‌عنوان مثال تشخیص اینکه یک فنجان قهوه گربه نیست، با مشکل مواجه بود. حتی یک کودک می‌تواند به آسانی این کار را انجام دهد، اما یک کامپیوتر این نوع ظرفیت را نداشت. این مسئله در حدود سال ۲۰۱۲ شروع به تغییر کرد. شبکه‌های عصبی عمیق، به‌معنای شبکه‌های عصبی با لایه‌های زیاد، گشاینده بودند. آنچه اتفاق افتاد، حدس می‌زنم و برداشتِ من این است، این بود که لایه‌ها معنایی دارند. من با دانشجوی دکترای خود، گرگ نایتزات[۷] که اکنون در فیس‌بوک است، این موضوع را مورد مطالعه قرار دادیم. ایده این بود: بیایید، به‌عنوان مثال، مجموعهٔ تصاویر گربه و مجموعهٔ تصاویری که گربه نیستند را بگیرید. ما آن‌ها را به‌عنوان شکل‌های توپولوژیکی یا منیفلد می‌بینیم. یکی از آن‌ها منیفلدِ گربه‌ها و دیگری منیفلدِ غیرگربه‌ها است. اینها به‌روشی پیچیده در هم تنیده شده‌اند. چرا؟ زیرا چیزهای خاصی وجود دارند که بسیار شبیه به گربه هستند ولی گربه نیستند. گاهی اوقات شیرهای کوهی با گربه اشتباه می‌شوند. نکته مهم این است که دو منیفلد به شیوه‌ای بسیار پیچیده در هم تنیده شوند.

چگونه این‌ها به شبکه‌های عصبی کمک می‌کنند؟

- ما آزمایش‌هایی انجام دادیم تا نشان دهیم که این منیفلدها ساده می‌شوند. در اصل، دو شکلِ پیچیده و به‌طور پیچیده در هم تنیده شده، اما ساده شده بودند. چگونه می‌توانیم این ساده‌سازی را در اشکال اندازه‌گیری کنم؟ ابزاری وجود دارد که اساس و پایهٔ توپولوژی محاسباتی است و این امکان را می‌دهد که شکلِ این اجسام را اندازه‌گیری کنیم.

این ابزار چیست؟

- این ابزار هومولوژی پایدار[۸] است. اولین چیزی که باید در مورد هومولوژی بدانید این است که هومولوژی یک روش برای طبقه‌بندی

---

[۶] مترجم: گُمبُت (Gömböc) یک جسم همگن سه‌بعدی محدب است که وقتی روی یک سطح صاف قرار می‌گیرد فقط یک نقطهٔ تعادل پایدار و یک نقطهٔ تعادل ناپایدار دارد. وجود آن توسط ریاضی‌دان روسی ولادیمیر آرنولد در سال ۱۹۹۵ حدس زده شد و در سال ۲۰۰۶ توسط دانشمندان مجارستانی گابور دوموکوس و پیتر وارکانی اثبات شد. شکل گمبت یکتا نیست و دارای انواع بی شماری است که اکثر آن‌ها نزدیک به یک کره هستند. (ویکی‌پدیا)

[5] quadratic reciprocity [7] Greg Naitzat [8] persistent homology

حفره‌های مختلف از انواع مختلف اشیای هندسی براساس تغییر شکل است. اگر من به‌جای داشتن دانش کامل از یک منیفلد، فقط نقاطی را که از آن نمونه‌برداری شده‌اند را داشته باشم، چه می‌شود؟ به‌عنوان مثال، تصویر یک گربه: چه تفاوتی بین تصویر یک گربه که روی صفحه نمایش رایانه می‌بینید و گربهٔ واقعی وجود دارد؟ تصویر کامپیوتری دارای تعدادی متناهی پیکسل است، بنابراین اگر به اندازه کافی بزرگ‌نمایی[9] کنید، فقط نقاط گسسته را مشاهده خواهید کرد. در چنین حالتی، چگونه می‌توانم در مورد هومولوژی صحبت کنم؟

هومولوژی پایدار یک ابزار است که برای حلِ این مسئله ابداع شده است: چگونه می‌توان هومولوژی را در زمانی که نقاطی از یک منیفلد به‌جای خود منیفلد نمونه‌برداری شده‌اند، بحث کرد؟ در هر نقطه، یک گوی کوچک در اطراف آن را در نظر بگیرید. من مشخص می‌کنم که دو گوی در کجا با یکدیگر همپوشانی دارند، سه گوی در کجا با یکدیگر همپوشانی دارند و به همین ترتیب گوی‌های بیشتر. از این داده‌ها، می‌توانیم به تخمینی از هومولوژی منیفلدِ پایه برسیم. این به ما این امکان را می‌دهد تا با نمونه‌برداری از نقاط گُسستهٔ یک منیفلد در مورد هومولوژی آن صحبت کنیم. من از این ابزار برای اندازه‌گیری شکل منیفلد در طول لایه‌های یک شبکهٔ عصبی استفاده می‌کنم. در نهایت، می‌توانم نشان دهم که به ساده‌ترین شکل ممکن کاهش می‌یابد.

آیا این نتایج به ما کمک می‌کند تا درک بهتری از اینکه در شبکه‌های عصبی چه اتفاقی می‌افتد، داشته باشیم؟

- «هوش مصنوعی توضیح‌پذیر»، یک مفهوم جدیدی است که در حوزهٔ هوش مصنوعی به‌کار می‌رود. در اصل، شبکه‌های عصبی و مدل‌های یادگیری ماشینی، یک پاسخ را به شما ارائه خواهند داد و شما می‌خواهید بدانید که چگونه به آن پاسخ رسیده‌اند. به‌عبارت دیگر، شما به‌دنبال توضیحاتی هستید که نشان دهند چطور فرایند تصمیم‌گیری در این مدل‌ها انجام می‌شود. می‌توانید یک شبکه عصبی را به‌عنوان یک دستگاه برای ساده‌سازی توپولوژی منیفلدهای موردمطالعه درنظر بگیرید. حال می‌توانید توضیح دهید که این شبکه چگونه به آن پاسخ رسیده است.

چه چیزی شما را به فهمیدن این موضوع که ابزارهای ریاضی محض می‌توانند در پژوهش‌های ریاضیات کاربردی شما مفید باشند، سوق داد؟

- من به چیزهایی که مردم به‌عنوان موضوعات معتبر در ریاضیات کاربردی درنظر نمی‌گیرند، علاقه‌مند هستم. به‌همین دلیل، می‌توانم ارتباط برخی از ابزارهایی که برای شخصی که به‌طور سنتی در ریاضیات کاربردی آموزش دیده است، قابل فهم نیست، را درک کنم.

یک مثال دیگر از استفادهٔ شما از این ابزارها چیست؟

- دانشجوی دکترای من، زی‌هوا لای[10] و من نشان دادیم که یک حدس بزرگ در یادگیری ماشین، نادرست است. مسائل یادگیری ماشین مدرن اغلب شامل جفت‌وجور کردن تعداد زیادی پارامتر با مقدار بسیار زیادی داده هستند. شایعه است که GPT-4، نسخهٔ بعدی موتور ChatGPT، یک تا صد تریلیون پارامتر دارد. هیچ کامپیوتری در حال حاضر نمی تواند همهٔ این پارامترها را به‌طور هم‌زمان پردازش کند. بنابراین در هر مرحله، الگوریتم‌ها یک زیرمجموعهٔ کوچک تصادفی از پارامترها (هر تعدادی که کامپیوتر بتواند پردازش کند) را انتخاب کرده و فقط با آن‌ها کار می‌کنند.

لیم می‌گوید «من به چیزهایی که مردم به‌عنوان موضوعات معتبر در ریاضیات کاربردی درنظر نمی‌گیرند، علاقه‌مند هستم.»

انتخاب یک زیرمجموعهٔ تصادفی کوچک، نمونه‌برداری نامیده می‌شود. حال سؤال این است: در مراحل بعدی الگوریتم، آیا باید پارامترهایی را که در مراحلِ قبل انتخاب کرده‌ایم، دوباره انتخاب کنیم یا آن‌ها را حذف کنیم؟ به‌عبارت دیگر، آیا باید پارامترها را با جایگزینی نمونه‌برداری کنیم یا بدون جایگزینی؟ این سؤالی است که زمانی‌که الگوریتم ما شامل تصادفی‌سازی است، باید درنظر داشته باشیم و این یک سؤال بسیار بنیادین و مهم است.

[9] zoom in [10] Zehua Lai

حدود ۱۰ سال پیش، بن ریخت[11] و کریس ری[12]، نشان دادند در صورتی که شرایط خاصی از یک نامساوی برقرار باشد، بهتر است بدون جایگزینی نمونه‌برداری کنیم تا با جایگزینی. سال‌ها، افراد موارد مختلفی از این نامساوی را اثبات کردند؛ ما نشان دادیم که در کل، این نامساوی برقرار نیست!

چگونه این کار را انجام دادید؟

- در نهایت، راه پاسخ به این سؤال استفاده از ابزاری از هندسهٔ جبری به نام قضیهٔ مکان نقاط مثبت[13] ناجابجایی بود. قضیهٔ مکان نقاط مثبت نابجایی نسخهٔ پیچیده‌تری از قضیهٔ مکان نقاط مثبت است و برای چندجمله‌ای‌هایی است که متغیرهای آن با هم جابه‌جا نمی‌شوند

- در آنجا، یک عبارت مانند xyx^2 نمی‌تواند به‌صورت x^3y ساده شود. چنین چندجمله‌ای‌های ناجابه‌جا زمانی که بخواهیم به جای x و y ماتریس‌ها را قرار دهیم، بسیار مفید هستند. احتمالاً افرادی که به الگوریتم‌های تصادفی علاقه‌مند هستند، دربارهٔ قضیهٔ مکان نقاط مثبت اطلاعی ندارند، زیرا این موضوع مربوط به هندسهٔ جبری است. حتی در هندسهٔ جبری نیز، این موضوع به‌عنوان یک دانش عمومی شناخته نشده است.

از انجام چه جنبه‌هایی از پژوهش‌های ریاضی بیشترین لذت را می‌برید؟

من از اینکه فقط کنجکاوی خودم را برطرف کنم، راضی هستم. افرادی وجود دارند که می‌خواهند حدس‌های بزرگی را حل کنند؛ بهتر بگوییم، آن‌ها دوست دارند برج‌های بلندی بسازند. من فقط از پُر کردن شکاف‌های دانشم خوشحال هستم. هر موضوعی که پیشرفته و پیچیده می‌شود، به‌صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود. برای مثال، اقتصاد، علوم اجتماعی، روان‌شناسی و هر چیز دیگری که به ذهنم می‌رسد، در نهایت به ریاضی ختم خواهد شد. به‌عنوان یک ریاضی‌دانِ کاربردی، شما از آزادی برای کشف سایر زمینه‌های دیگری که به آن‌ها علاقه دارید، برخوردار هستید. اگر شما یکی از افراد کنجکاوی هستید که به مسائل مختلف علاقه‌مندید، این می‌تواند بسیار رضایت‌بخش باشد.

*Rachel Crowell, *An applied mathematician with an unexpected toolbox*, Quanta Magazine, 2023.

**دانشگاه شیراز

لیم با دانشجوی خود، زی‌هوا لای، همکاری کرد و ثابت کردند که یک حدسِ بزرگ، که مدت طولانی در حوزه یادگیری ماشین مطرح بود، غلط است.

[11] Ben Recht [12] Chris Ré [13] Positivstellensatz