ریاضیات در سال ۲۰۲۲

کنستانتین کاکایس *

ترجمه و تنظیم: ماریا افشاری راد **

چکیده: *در سال ۲۰۲۲ چهار مدال فیلدز بابت دستاوردهای بنیادین در حوزه‌های هندسه، ترکیبیات، فیزیک آماری و نظریهٔ اعداد، اهدا شد. این در حالی است که ریاضی‌دانان، کماکان، سرگرم تغییراتی هستند که کامپیوتر در دانش ریاضی ایجاد کرده و می‌کند.*

می‌توان ریاضی‌دانان را به‌مثابهٔ باستان‌شناسانی نگریست که با تقلای فراوان، می‌کوشند گردوغبارِ نشسته بر ساختارهای پنهانِ جهان را بروبند. اما ساختارهایی که ریاضی‌دانان از پسِ گردوغبارها آشکار می‌سازند، نه‌تنها پایدار و مانا، بلکه اجتناب‌ناپذیرند. اجتناب‌ناپذیر از این حیث که هرگز نمی‌توانسته‌اند به‌نحو و روشی دیگر بوده باشند. وانگهی، این ساختارها ارتباط و پیوندی ملموس و جالب‌توجه با هم دارند: اگرچه هرساله، با اکتشافات جدید، مرزهای ریاضی توسعه می‌یابد، اما پراکندگی زیرشاخه‌های ریاضی نیز هرساله اندکی کاهش می‌یابد و بارزترین علت این امر، آن است که ارتباطات بین حوزه‌هایی از ریاضی که همواره دور از هم تلقی می‌شده‌اند، هرساله بیش‌تر و بیش‌تر آشکار می‌گردد.

فهماندن همین موضوع به افراد غیرمتخصص، که برخی ارتباط‌ها چقدر شگفت‌آور و تکان‌دهنده‌اند، می‌تواند بسیار دشوار باشد؛ با این حال، ما در سال ۲۰۲۲ نیز همچون همیشه تلاش کردیم این تفهیم را به بهترین نحو ممکن انجام دهیم.

سال ۲۰۲۲، هم سال مقالات کوتاه (مثلاً یک اثباتِ شش‌صفحه‌ای برای تبیین زمان پیدایش ساختار در گراف‌های تصادفی) و هم سال مقالات بلند بود (مثلا یک مقالهٔ ۹۱۲ صفحه‌ای که نشان می‌داد سیاه‌چاله‌هایی که به کُندی می‌چرخند، تا پایان زمان، کُندی چرخش خود را حفظ خواهند کرد.)

برخی از نتایج ریاضی نه‌تنها برای عموم، بلکه برای سایر ریاضی‌دانان نیز غیرقابل تفهیم هستند. در این راستا، مجلهٔ کوانتا با دو ریاضی‌دانِ بِنام در همین باره صحبت کرده است:

- با خانم لیلیان پیرس[۱]، نظریه‌پرداز اعداد در دانشگاه دوک، دربارهٔ کارش برای قابل‌فهم کردن اثبات‌ها و تکنیک‌های مهم برای طیف وسیع‌تری از ریاضی‌دانان؛ و

- با آقای وی هو[۲]، که مرزهای جدیدی را در تعداد جواب‌های اعداد صحیح برای معادلات موسوم به منحنی‌های بیضوی کشف کرده است. [در همین راستا] الکس کنتوروویچ[۳] در یک ویدئو همراه با توضیحات، به بحث پیرامون برنامهٔ گستردهٔ لنگلندز[۴] پرداخته است که حوزه‌های مختلف ریاضیات را به‌هم پیوند می‌دهد.

اگرچه بسیاری از این نتایج هیچ کاربرد عملی فوری و بلافصلی ندارند، اما نمی‌توان به‌راحتی دریافت که کدام نتایج انتزاعی، نهایتاً برای رسیدن به رمزهای رمزنگاری جدید و ایمن، یا برای به‌روز رسانی کدهای تصحیح خطا، حیاتی خواهد بود؛ حال آن‌که این موارد، نیاز اساسی کارکرد ارتباطات مدرن است.

مرور پوشش اخبار مربوط به ریاضی در مجله کوآنتای سال ۲۰۲۲، نشان می‌دهد که برای تبدیل شدن به ریاضی‌دانی که بتواند حقیقتی اساسی (که دیگران قادر به کشفش نبوده‌اند) را کشف کند، هیچ راه و روش واحدی وجود ندارد. برخی از ریاضی‌دانان از سنین جوانی منحصراً بر ریاضیات متمرکز هستند و برخی دیگر بعداً در طول زندگی به آن می‌رسند؛ برخی، نماد بارز نخبگانِ گیج هستند و برخی نه.

جون هو، یکی از چهار برندهٔ جوان مدال فیلدز

*Konstantin Kakaes [1]Lillian Pierce [2]Wei Ho [3]Alex Kontorovich [4]Langlands program

به قول جون هو[5]، وقتی صحبت از چگونگی جهش ذهن انسان در استدلال ریاضی می‌شود، «خوب است اعتراف کنیم که نمی‌دانیم چه خبراست».

ریاضیات و جوایزش

اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی[6] هر چهار سال، یک سکهٔ طلا که تمثال ارشمیدس روی آن حک شده است را به حداکثر چهار ریاضی‌دان جوان (با سن کمتر از ۴۰ سال) اعطا می‌کند. هدف این مدال‌ها چنین عنوان شده است: «به‌رسمیت شناختن دستاوردهای ریاضی برجسته، برای کارهایی که انجام شده، و برای نوید به دستاوردهای آینده». مدال فیلدز ۲۰۲۲ به جون هو، جیمز مینارد[7]، مارینا ویازوفسکا[8] و هوگو دومینیل کوپن[9] اختصاص یافت.

جون هو در یکی از صفحات پروفایل خود نوشته است که «ریاضیات چیزی را به او می‌دهد که شعر نمی‌تواند: توانِ جست‌وجوی زیبایی بیرون از خود؛ و توانِ تلاش برای درک چیزی بیرونی، عینی و واقعی.» از جمله عللی که سبب اهدای جایزه به او شد، اثبات یک‌سری از حدس‌های متفاوت بود. او با اثبات چیزی که به «حدس ریدز»[10] معروف است، توانست یک ساختار هندسی عمیق را پی بریزد که «شالودهٔ ویژگی‌های ترکیبیاتیِ گراف‌ها» است.

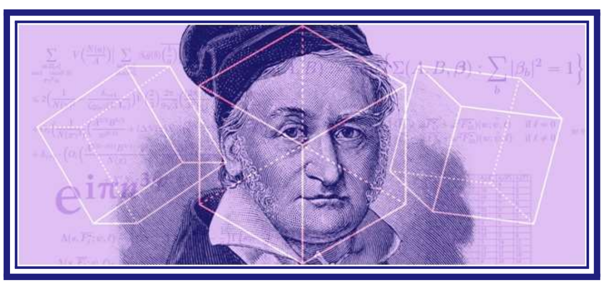
جایزهٔ مینارد به دلیل اکتشافات وی در نظریهٔ تحلیلی اعداد به او تعلق گرفت. مینارد تقریباً تازه از دبیرستان فارغ‌التحصیل شده بود که ثابت کرد تعداد نامتناهی از جفت اعداد اول وجود دارند که تفاضل آن‌ها ۶۰۰ یا کمتر است. این اثبات، نتیجه‌ای خیره‌کننده و نقطهٔ عطفی در نظریهٔ اعداد اول بود، اما در صورتی می‌توانست بسیار چشم‌گیرتر باشد، که چند ماه قبل از آن، ریاضی‌دان دیگری، وجود یک کرانِ متناهی در فواصل بین جفت‌های اول را اثبات نکرده بود. این اثبات، نمونهٔ چشم‌گیری از پیشرفت موازی در یک مسئلهٔ مربوط به توزیع اعداد اول بود. اما مینارد در کار خود درباب فواصل اعداد اول، ثابت کرد که تعداد نامتناهی از اعداد اول وجود دارد که هیچ‌یک شامل رقم داده‌شده‌ای مانند ۷ نیست.

از قدیم‌الایام می‌دانسته‌ایم که متراکم‌ترین راه برای جادادن دایره‌ها در یک صفحه، روش لانه‌زنبوری است؛ همچنین یک دهه پیش، فرضی از قرن هفدهم اثبات شد که مربوط به کارآمدترین روش جادادن رویه‌ها در سه‌بعد بود. اما فضاهای با بعد بالاتر، اکثراً ناشناخته و رازآلود هستند. ویازوفسکا ثابت کرد که یک مشبکهٔ[11] هشت‌بعدی خاص، کارآمدترین روش برای جا دادن رویه‌ها در فضای هشت‌بعدی است. متعاقباً، او و همکارانش نتیجهٔ خود را تعمیم دادند و ثابت کردند که این مشبکه، انرژی یک سیستم در زمینه‌های بسیار متنوعی را کمینه می‌کند.

نفر چهارم نیز به‌خاطر نظریهٔ تعمیم یافته‌اش درباره نحوهٔ جریان یافتن مایعات در محیط‌های متخلخل، برندهٔ جایزه فیلدز شد.

البته جوایز ریاضی‌ای که امسال اهدا شد، محدود به مدال‌های فیلدز نبود. دنیس سالیوان[12] برای نقش علمی‌اش در بحث توپولوژی، برندهٔ جایزهٔ آبل شد. او روشی جدید برای طبقه‌بندی انواع خاصی از منیفلدها ارائه کرد (منیفلدها فضاهایی هستند که در مقیاس کوچک، تخت به‌نظر می‌رسند، اما وقتی کلیت‌شان را مورد بررسی قرار دهیم، بسیار پیچیده‌تر هستند).

همچنین، اسویتلانا جیتومیرسکایا[13] به‌خاطر رسیدن به درکی بهتر از عملگرهای معروف به شبه‌تناوبی (که برای مدل‌کردن رفتار الکترون استفاده می‌شوند) اولین جایزهٔ لادیژانسکایا[14] در فیزیکِ ریاضی را بُرد.



گاوس، طراح: کریستینا آرمیتاژ، مجلهٔ کوانتا

اثبات‌هایی جدید برای مسئله‌های قدیمی نظریهٔ اعداد

سال ۲۰۲۱ برای پژوهشگران حوزهٔ نظریه اعداد، سالی بسیار پراهمیت بود. یک دانش‌آموز دبیرستانی، به نام دانیل لارسن[15]، یک کران بر فواصل بین شبه‌اول‌ها یافت. شبه‌اول‌ها همان اعداد موسوم به اعداد کارمیشل[16] هستند که با یک تعریف ریاضی خاص شبیه اعداد اول

[5] June Huh [6] International Mathematical Union [7] James Maynard [8] MarynaViazovska [9] Hugo Duminil-Copin [10] Read's conjecture [11] lattice [12] Dennis Sullivan [13] Svetlana Jitomirskaya [14] Ladyzhenskaya [15] Daniel Larsen [16] Carmichael

هستند، اما قابل تجزیه‌اند (مثلا عدد ۵۶۱ یک عدد شبه اول است که داریم $561 = 3 \times 11 \times 17$).

جارد لیختمن[۱۷]، فارغ‌التحصیل دانشگاه آکسفورد، نشان داد که اعداد اول واقعی، با درنظر گرفتن یک اندازهٔ خاص، بزرگ‌ترین نمونهٔ چیزی هستند که «مجموعهٔ اولیه» [۱۸] نامیده می‌شود.

دو ریاضی‌دان در انستیتو تکنولوژی کالیفرنیا، یک حدس مربوط به سال ۱۹۷۸ را ثابت کردند که پیش‌بینی می‌کرد مجموع گاوس مکعبی (مجموع اعداد به فرم $e^{\frac{2i\pi n^3}{p}}$ برای عدد اول p) همواره به $p^{\frac{5}{6}}$ می‌رسد. در اثبات آن‌ها درستی نظریه‌ای به نام نظریهٔ تعمیم‌یافته ریمان مفروض است. درواقع ریاضی‌دانان زیادی معتقدند که این فرضیه درست است ولی تاکنون اثبات نشده است. در همین اثنا، نسخهٔ ساده‌تری از نظریهٔ ریمان موسوم به مسئلهٔ زیرمحدبی نیز اثبات شد.

دو ریاضی‌دان نیز نشان دادند که اینکه یک عدد صحیح تعداد فرد عامل اول داشته باشد و یا تعداد زوج، هیچ تأثیری بر اینکه عدد صحیح قبل یا بعد از آن تعداد فرد یا زوج عامل اول داشته باشد، ندارد.

گروه دیگری نیز نشان دادند دست‌کم $\frac{2}{21}$ و نه‌بیشتر از $\frac{5}{6}$ اعداد صحیح نمی‌توانند به صورت مجموع مکعب دو کسر نوشته شوند.

در سال ۱۹۹۳ ریاضی‌دانی به‌نام پیتر استیون‌هاگن[۱۹] حدس زد که معادلهٔ $x^2 - dy^2 = -1$ جواب صحیحی دارد که از بین مقادیر مجازی که برای d تعریف می‌شود تا معادله جواب داشته باشد، حدود ۵۸٪ مواقع جواب صحیح دارد. سال ۲۰۲۲ این فرض اثبات شد.

حال به یکی از قدیمی‌ترین حدس‌هایی می‌پردازیم که همواره به‌نظر درست می‌آمد. حدس سی‌ساله آندره اورت[۲۰] درباره ساختاری موسوم به گونه‌های شیمورا [۲۱] بالاخره اثبات شد. همچنین حدس ۵۸ ساله وان-در-واردن[۲۲] که تعداد چندجمله‌هایی را برآورد می‌کرد که دارای ریشه‌های غیرقابل تعویض هستند.

پال اردوش[۲۳] و رونالد گراهام[۲۴] در دهه ۱۹۷۰ حدس زدند که هر مجموعه اعداد صحیح که به‌تعداد کافی عضو داشته باشد، شامل زیرمجموعه‌ای است که مجموع معکوس اعضای آن برابر با یک است. این حدس نیز امسال ثابت شد. همچنین نشان داده شده که این مجموعه‌های بزرگ از اعداد صحیح باید شامل چیزی موسوم به مجموعه جمعی [۲۵] باشند؛ این حدس با استفاده از روش‌های مبتنی بر سیستم‌های دینامیکی اثبات شد.

ماشین‌های یادگیری ریاضی

یادگیری عمیق، که بیش از همه در تکنیک هوش مصنوعی به‌کار می‌رود و به‌راحتی قادر به شکست حریفان در بازی‌هایی مثل شطرنج است و دقت بسیار بالایش در انجام کارهایی مثل شناسایی گفتار مشخص شده است نیز در بعضی از حوزه‌های ریاضی، مورد استفاده واقع شده است. محققان از این تکنیک برای جستجوی تکین‌های نامعمول، نقاط شکست در معادلاتی که جریان سیالات را مدل‌سازی می‌کنند، استفاده کردند. همچنین، یک تیم جداگانه، از اثبات‌هایی که به‌کمک کامپیوتر به‌دست آمده بود برای اثبات قطعی این مسئله استفاده کرد که حالت خاصی از معادلات اویلر (که انواع خاصی از سیالات ایده‌آل را مدل می‌کند) قابل شکستن است. درعین‌حال، گروه دیگری از محققان، به سراغ معادلات ناویر-استوکس رفتند که سیالات دنیای واقعی را با دقت بیشتری مدل‌سازی می‌کند. این محققان می‌خواستند دریابند که آیا مدل‌سازی آن‌ها نیز در نهایت شکست می‌خورد یا خیر (هر کسی بتواند نشان دهد که چنین مدل‌سازی‌ای ممکن است، از انستیتو ریاضیات کِلِی، یک میلیون دلار جایزه خواهد گرفت).

گروه‌های متعدد دیگری نیز از یادگیری ماشینی برای حل مسئله‌هایی در نظریهٔ گراف و ترکیبیات استفاده کردند، تکنیک‌های بهتری برای ضرب ماتریس‌ها ارائه نمودند، و به حدس‌های جدیدی در نظریهٔ گره [۲۶] رسیدند. سباستین بوبک[۲۷] و مارک سِلکه[۲۸]، با استفاده از تکنیک‌های ریاضی در تحلیل شبکه‌های عصبی، ورق را برگرداند و ثابت کردند که این شبکه‌ها برای آن‌که استوار باشند، باید بسیاربزرگ باشند.

استیو استروگاتز[۲۹] در اپیزودهایی از مجلهٔ کوانتا تحت عنوان «لذتِ چرا» از کوین بوزارد [۳۰] می‌پرسد که آیا کامپیوترها می‌توانند ریاضی‌دان شوند؟ او در همین پادکست، با ملانی ماچِت وود [۳۱] درباره این موضوع صحبت کرده است که «واقعاً باید چه‌اتفاقی بیفتد تا ریاضی‌دان‌ها باور کنند فلان نتیجه، واقعاً اثبات شده است؟»

[17] Jared Lichtman [18] primitive set [19] Peter Stevenhagen [20] André-Oort [21] Shimura [22] Van der Waerden [23] Paul Erdős [24] Ronald Graham
[25] sumset [26] knot theory [27] Sébastien Bubeck [28] Mark Sellke [29] Steve Strogatz [30] Kevin Buzzard [31] Melanie Matchett Wood

حباب‌ها، شکل‌ها و فضاها

هندسه‌دانان نیز نباید در این حیطه فراموش شوند، چرا که آن‌ها نیز سال شلوغی را پشت سر گذاشتند. امانوئل میلمن[۳۲]، و جو نینان[۳۳]، توانستند شکل خوشه‌های حباب‌هایی را بیابند که می‌توانند به مؤثرترین گونه سه یا چهار حجم را از هر بُعدی محصور کنند.

ایزابل گت[۳۴]، و اریک لارسون[۳۵]، مسئله دورن‌یابی را حل کردند. سؤالی قدیمی دربارهٔ اینکه انواع مشخصی از منحنی‌ها می‌توانند از چه تعداد عدد تصادفی در فضای با بُعد بالا عبور کنند.

اندراس ماته[۳۶]، اولگ پیخورکو[۳۷]، و جاناتان نوئل[۳۸] مسئله حتی قدیمی‌تری را حل کردند. آن‌ها کشف کردند که چگونه یک دایره می‌تواند به قطعات قابل‌دیدن تقسیم شود به‌گونه‌ای که بتوان آن قطعات را دوباره به‌شکل یک مربع کنار هم چید (یک ستون در مجلهٔ کوانتا فرایند ساده‌تری را توضیح می‌دهد که آیا دو چندضلعی دارای مساحت‌های برابر هستند یا خیر).

ماترین و اریک دِمین[۳۹] (پدر و پسر) مقاله‌ای را منتشر کردند که نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک چندوجهی را گرفته و آن را به شکلی مسطح تا کرد، با این پیش‌فرض که بی‌نهایت تا کردن نیز مجاز است (ستونی در مجله کونتا توضیح می‌دهد که پنج‌وجهی ـهرمـ روابط بسیار پیچیده‌تری را بین زوایای داخلی خود نسبت به مثلث‌ها ـمشابه دوبعدی آن‌ها ـ دارد). در ماه آگوست، جمعی از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان مقاله‌ای را منتشر کردند که نظریهٔ جدیدی از این موضوع را بنیان نهاد: چگونه انحنای مواد نازک می‌تواند بر چین چروک‌هایی تاثیر بگذارد که زمانی که مسطح شده‌اند، به وجود آمده‌اند.

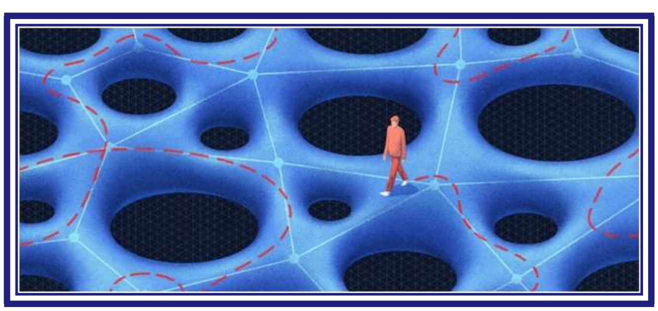
دوسا مک‌داف[۴۰] و تنی‌چند از همکارانش ساختارهای پیچیدهٔ فرکتالی‌ای را کشف کردند که زمانی که در تلاش برای نشاندن شکل‌هایی موسوم به بیضی‌گون در چیزی به نام رویه‌های هرزبروک بودند، ظاهر شد. رویه‌های هرزبروک[۴۱] جایی است که هیچ‌کس انتظار نداشت در آنجا بتوان فرکتالی یافت.

ریاضی‌دانان دیگر نیز در راستای اثبات حدس کاکیا[۴۲] پیشرفت‌هایی نمودند. درواقع آن‌ها فهمیدند که یک فضا چقدر لازم است بزرگ باشد تا اینکه بتوان یک سوزن را به گونه‌ای دور آن چرخاند که بتواند به هر جهتی قرار بگیرد - البته شک‌هایی نیز وجود دارد که آیا اساساً این حدس در حوزهٔ اعداد حقیقی درست است یا خیر.

ماجراجویی در توپولوژی

مجلهٔ کوانتا امسال کار ویل هاید[۴۳] و مایکل مگی[۴۴] را نیز پوشش داد که با استفاده از تکنیک‌های نظریهٔ گراف وجود انواعی از رویه‌های جنس‌بالا را اثبات کردند که عمیقاً با خودشان در ارتباط هستند. زمان زیادی بود که وجود چنین رویه‌هایی تصور می‌شد، اما هرگز اثبات نشده بود.

ایان آگول[۴۵] حدسی از سال ۱۹۸۱ را ثابت می‌کرد چگونه می‌توان پیچیدگی گره‌ها را رتبه‌بندی کرد. گره‌های دوبعدی برای ترسیم مرزهای رویه‌ای موسوم به رویه سایفرت[۴۶] مورد استفاده قرار می‌گیرند. زوج رویه‌های سایفرت زیادی هستند که حتی اگر با دست‌کاری در فضای سه‌بعدی توصیف شوند بازهم با یکدیگر متمایزند، اما می‌توانند با دست‌کاری در فضای ۴ بعدی معادل شوند. دانشمندان توپولوژی برای نخستین‌بار زوج رویهٔ سایفرتی را یافتند که حتی در فضای ۴ بعدی نیز متمایز از یکدیگر باقی می‌مانند. ستونی از مجلهٔ کوانتا به منشأ نظریهٔ گره‌ها پرداخته بود و کالین آدامز[۴۷] و لیزا پیکیریلو[۴۸] دربارهٔ اشتیاق خود به مسئلهٔ گره‌ها با استیون استروگاتز[۴۹] در قسمتی از پادکست «لذت چرا» به گفت‌وگو پرداختند.



طراح: میریم وارز

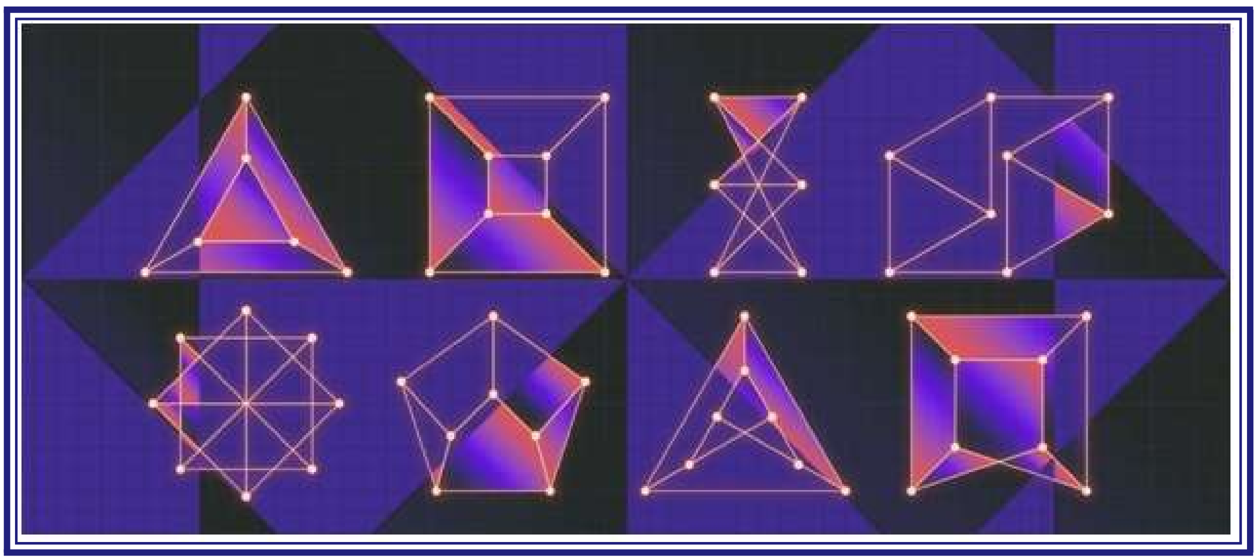
[32]Emanuel Milman [33] Joe Neenan [34]Isabel Vogt [35]Eric Larson [36]Andras Máthé [37]Oleg Pikhurko [38]Jonathan Noel [39]Martin and Erik Demaine [40]Dusa McDuff [41]Hirzebruch [42]Kakeya conjecture [43]Will Hide [44]Michael Magee [45]Ian Agol [46]Seifert surface [47]Colin Adams [48]Lisa Piccirillo [49]Steven Strogatz

ضرورت ساختارهای تصادفی

یک اثبات کوتاه بسیار قابل‌توجه که در ماه مارس منتشر شد، حدس کوهن-کالای[1] را اثبات کرد. این حدس شرایطی را پیش‌رو می‌گذاشت که تحت آن‌ها ساختارها در گراف‌های تصادفی ظهور می‌کنند. این اثبات دنبالهٔ اثباتی در ماه ژانویه بود که نشان داد همواره می‌توان یک «ابرگراف» -نوعی از گراف تعمیم‌یافته که همبندی بسیار بالایی دارد- به‌گونه‌ای ساخت که در دو معیار به‌ظاهر ناسازگار صدق کند، به‌شرطی که ابرگراف موردنظر به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد. ظواهر نتایج جدید نظریهٔ گراف همچنان ادامه یافت. در آوریل ۲۰۲۲ الیور جنزر[2] و بنی سودوکوف[3] توانستند سؤالی با نیم‌قرن سابقه را پاسخ دهند. سؤال این بود که چه زمانی گراف‌ها باید ناگزیر «منتظم» شوند، و یا میان‌همبند[4] شوند به‌گونه‌ای که هر گره به تعداد ثابتی از یال‌ها متصل باشد. در کوانتا مقدمه‌ای بر نظریهٔ گراف برای یک بازی موسوم به مهمانی یخ‌شکنی به چاپ رسید.

* Konstantin Kakaes, The Year in Math, Quanta Magazine, March 22, 2022.

**دانشگاه علم و فناوری مازندران



طراح: کریستینا آرمیتاژ، مجلهٔ کوانتا

[1]Kahn-Kalai [2]Oliver Janzer [3]Benny Sudakov [4]interconnected