رنگ آمیزی اعداد، الگوهای حسابی در اعداد گویا را آشکار می‌سازد*

لیلا اسلومان

ترجمه و تنظیم: سعید علیخانی**

چکیده: *در مقاله‌ای اخیر، دو ریاضی‌دان نشان دادند که وقتی اعداد گویا دسته‌بندی می‌شوند، وجود یک الگوی خاص در آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است.*

مت بوون[1]، یک‌سال بعد از شروع دورهٔ دکترای خود در ریاضیات در دانشگاه مک‌گیل، با چالشی سخت درگیر شده بود. او گفت: «من در امتحاناتِ صلاحیتی شرکت و به‌طرز وحشتناکی آن را خراب کرده بودم.» بوون مطمئن بود که نمرات او منعکس‌کننده مهارت‌های ریاضی‌اش نیست و تصمیم گرفت آن را نشان دهد. پائیز گذشته، زمانی بود که او و مشاورش، مارسین سابوک[2]، پیشرفت بزرگی را در زمینه‌ای از ریاضیات معروف به «نظریهٔ رمزی»[3] منتشر کردند.

برای تقریباً یک قرن، نظریه‌پردازانِ اعداد رمزی، شواهدی را جمع‌آوری کرده‌اند که نشان می‌دهد بعضی ساختارهای ریاضی در اعداد در شرایط محکمی پابرجا بوده و به‌همان صورت به موجودیت خود ادامه می‌دهند. آن ساختارها ممکن است مجموعه‌های بزرگی از اعداد مانند اعداد صحیح یا گویا را از هم جدا کنند یا اتصالات بین نقاط یک شبکه را برش دهند. آن‌ها سپس راه‌هایی برای اثبات اجتناب‌ناپذیر بودن ساختارهای خاص پیدا می‌کنند، حتی اگر سعی کنید با شکستن یا برش دادن به روشی هوشمندانه از ایجاد آن‌ها جلوگیری کنید.

وقتی نظریه‌پردازانِ رمزی در مورد تقسیم مجموعه‌ای از اعداد صحبت می‌کنند، اغلب از زبان رنگ‌آمیزی استفاده می‌کنند. چندین رنگ را انتخاب کنید: برای مثال قرمز، آبی و زرد. حالا به هر عدد در یک مجموعه، یک رنگ اختصاص دهید. حتی اگر این کار را به‌صورت تصادفی یا بی‌نظم انجام دهید، تا زمانی که فقط از تعداد محدودی از رنگ‌های مختلف استفاده می‌کنید و این تعداد بسیار زیاد باشد، الگوهای خاصی به‌ناچار ظاهر می‌شوند. نظریه‌پردازانِ رمزی سعی می‌کنند این الگوها را بیابند و به‌دنبال مجموعه‌های ساختاریافتهٔ اعدادی می‌گردند که «تک‌رنگ» هستند، به این معنا که به عناصر آن‌ها، یک رنگ اختصاص یافته‌اند.

اولین نتایج رنگ‌آمیزی به اواخر قرن ۱۹ برمی‌گردد. تا سال ۱۹۱۶، ایسای شور[4]، ثابت کرده بود که هرقدر که اعداد صحیح مثبت را رنگ آمیزی کنید (که اعداد طبیعی نیز نامیده می‌شوند)، همیشه یک جفت از اعداد x و y وجود خواهد داشت به طوری‌که x و y و $x+y$ همه یک‌رنگ هستند. در طول قرن بیستم، ریاضی‌دانان به کار بر روی مسائل رنگ‌آمیزی ادامه دادند. در سال ۱۹۷۴، نیل هایندمن[5]، نتیجه شور را گسترش داد تا زیرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد صحیح را شامل شود. مانند قضیهٔ شور، روش هایندمن، بدون توجه به رنگ آمیزی اعداد طبیعی (با تعداد محدود مداد رنگی) اعمال می‌شود. نه‌تنها این اعداد صحیح در مجموعهٔ هایندمن هم‌رنگ هستند، بلکه اگر مجموعه‌ای از آن‌ها را جمع‌بندی کنید، نتیجه نیز همان رنگ خواهد بود. چنین مجموعه‌هایی از این جهت، شبیه اعداد زوج هستند، همان‌گونه که هر مجموع اعداد زوج، همیشه زوج است، مجموع اعداد در یکی از مجموعه‌های هایندمن، نیز در آن مجموعه قرار می‌گیرد.

سابوک گفت: «قضیه هایندمن، قطعهٔ شگفت‌انگیزی از ریاضیات است. این داستانی است که ما می‌توانیم از آن فیلم بسازیم.» اما هایندمن فکر می‌کرد امکان بیشتری وجود دارد. او معتقد بود که می‌توان یک مجموعه تک‌رنگ به‌طور دلخواه بزرگ (اما متناهی) پیدا کرد که نه‌تنها مجموع اعضای آن، بلکه حاصل‌ضرب آن‌ها را نیز در برداشت. او گفت: «من برای دهه‌ها ادعا کرده‌ام که این یک واقعیت است، اما نمی‌توانم آن را اثبات کنم.»

---

[1] Matt Bowen [2] Marcin Sabok [3] Ramsey Theory [4] Issai Schur [5] Neil Hindman

حدس هایندمن

اگر از مجموع صرف‌نظر کنید و فقط بخواهید از همرنگ بودن حاصل‌ضرب‌ها اطمینان حاصل کنید، بررسی درستی قضیهٔ هایندمن با استفاده از توان برای تبدیل مجموع به ضرب ساده است. با این حال، رویارویی جمع‌ها و ضرب‌ها به‌طور هم‌زمان بسیار سخت‌تر است. جوئل موریرا[۶]، ریاضی‌دان دانشگاه وارویک، گفت: «بسیار سخت است که آن دو را وادار به صحبت کردن با یکدیگر کنیم. درک چگونگی ارتباط جمع و ضرب، به‌نوعی اساس کل نظریهٔ اعداد است.»

حتی یک نسخهٔ ساده‌تر که هایندمن برای اولین بار در دههٔ ۱۹۷۰ پیشنهاد کرد، چالش‌برانگیز بود. او حدس زد که هر رنگ‌آمیزی از اعداد طبیعی باید شامل مجموعه‌ای تک‌رنگ به شکل $\{x, y, xy, x+y\}$ باشد، یعنی شامل دو عدد x و y، و همچنین مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها. بوون گفت: «ریاضی‌دانان واقعاً برای چندین دهه هیچ پیشرفتی در این مسئله نداشتند و سپس ناگهان، در حدود سال ۲۰۱۰، شروع به اثبات مطالب بیشتر و بیشتری در مورد آن کردند.»

بوون در سال ۲۰۱۶ در ترم دوم دانشگاه، زمانی که یکی از استادانش در دانشگاه کارنگی ملون[۷]، مسئلهٔ $\{x, y, xy, x+y\}$ را در کلاس توضیح داد، آن را یاد گرفت. بوون از سادگی آن شگفت‌زده شد. او گفت: «این یکی از این چیزهای جالب است که من ریاضیِ زیادی در مورد آن نمی‌دانم، اما می‌توانم آن را بفهمم». در سال ۲۰۱۷، موریرا ثابت کرد که همیشه می‌توانید یک مجموعه تک‌رنگ حاوی سه عنصر از چهار عنصر موردنظر را پیدا کنید: x, xy و $x+y$. در همین‌حال، بوون در سال آخر تحصیل خود شروع به پرداختن به این سؤال کرد. او گفت: «در واقع نتوانستم مسئله را حل کنم. اما من هر شش ماه یا بیشتر به آن باز می‌گشتم.» پس از نمایش ضعیفش در امتحانات مقدماتی سال ۲۰۲۰ دورهٔ دکتری، او تلاش خود را دوچندان کرد. چند روز بعد، او حدس $\{x, y, xy, x+y\}$ را برای مورد دو رنگ اثبات کرد، نتیجه‌ای که ران گراهام[۸]، پیش‌تر در دههٔ ۱۹۷۰ با کمک یک رایانه ثابت کرده بود.

تصویری از عروسک‌های روسی که درون یک عروسک روسی بزرگ‌تر نشسته‌اند.

با این موفقیت، بوون با سابوک کار کرد تا نتیجه را به هر تعداد رنگ گسترش دهد. اما آن‌ها به‌سرعت درگیر جزئیات فنی شدند. سابوک گفت: «پیچیدگی مسئله زمانی که تعداد رنگ‌ها زیاد باشد، کاملاً از کنترل خارج می‌شود». به مدت ۱۸ ماه، آن‌ها تلاش کردند تا با کمی شانس خود را از مسئله دور کنند. سابوک گفت: «در طول این یک‌سال‌ونیم، ما حدود یک میلیون اثباتِ اشتباه داشتیم.» به‌ویژه یک مشکل باعث شد که این دو ریاضی‌دان پیشرفت نکنند. اگر دو عدد صحیح را به صورت تصادفی انتخاب کنید، احتمالاً نمی‌توانید آن‌ها را تقسیم کنید. تقسیم فقط در موارد نادری کار می‌کند که عدد نخست مضرب عدد دوم باشد. معلوم شد که این بسیار محدودکننده است. با این درک، بوون و سابوک به‌جای اثبات حدس $\{x, y, xy, x+y\}$، در اعداد گویا (همان‌گونه که ریاضی‌دانان آن‌ها را کسر می‌نامند) متمرکز شدند. در آن‌جا، اعداد را می‌توان آزادانه تقسیم کرد.

اثباتِ بوون و سابوک زمانی که همهٔ رنگ‌هایِ درگیر به‌طور مکرر در سراسر اعداد گویا ظاهر می‌شوند، بسیار زیباتر است. رنگ‌ها می‌توانند اغلب به روش‌های مختلف ظاهر شوند. هرکدام ممکن است تکه‌های بزرگی از خط اعداد را پوشش دهند. یا ممکن است به‌این‌معنی باشد که نمی‌توانید در امتداد خط اعداد خیلی دور بروید بدون اینکه هر رنگی را ببینید. بااین‌حال، معمولاً رنگ‌ها با چنین قوانینی مطابقت ندارند. سابوک توضیح داد که در این موارد، می‌توانید روی مناطق کوچکی در اعداد گویا تمرکز کنید، جایی که رنگ‌ها بیشتر ظاهر می‌شوند. او گفت: «اینجا بود که بخش عمدهٔ کار انجام شد.»

[6] Joel Moreira [7] Carnegie Mellon [8] Ron Graham

در اکتبر ۲۰۲۲، سابوک و بوون اثباتی را ارسال کردند که نشان می‌دهد اگر اعداد گویا را با رنگ‌های محدود رنگ آمیزی کنید، مجموعه‌ای به‌شکل $\{x, y, xy, x+y\}$ وجود خواهد داشت که همهٔ عناصر آن یک‌رنگ هستنند. ایمرِ لیدر[۹]، از دانشگاه کمبریج گفت: «این یک اثبات فوق‌العاده هوشمندانه است. از نتایج شناخته‌شده استفاده می‌کند. اما آن‌ها را به روشی کاملاً درخشان، بسیار بدیع و بسیار نوآورانه ترکیب می‌کند.»

سؤالات زیادی باقی مانده است. آیا می‌توان عدد سوم z را به‌همراه حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب جدید، به مجموعه اضافه کرد؟ پیش‌بینی‌های درست و جسورانهٔ هایندمن به‌معنای افزودن اعداد چهارم، پنجم و نهایتاً تعداد زیادی عدد دلخواه به دنباله است. همچنین نیاز به حرکت از اعداد گویا به اعداد طبیعی داشته و یافتن راهی برای دور زدن معمای تقسیم است که تلاش‌های بوون و سابوک را مختل کرده بود.

لیدر معتقد است که با توجه به اینکه موریرا، بوون و سابوک همه روی این مسئله کار می‌کنند، این اثبات ممکن است دور از دسترس نباشد. او گفت: «این افراد در یافتن راه‌های جدید برای انجام کارها، بسیار توانمند به‌نظر می‌رسند. بنابراین من به‌نوعی خوشبین هستم که آن‌ها یا برخی از همکاران‌شان ممکن است راه حل را پیدا کنند.»

سابوک در پیش‌بینی‌هایش محتاط‌تر است. اما او چیزی را رد نمی کند. او می‌گوید: «یکی از جذابیت‌های ریاضیات این است که قبل از اینکه مدرکی دریافت کنید، همه‌چیز ممکن است».

*Leila Sloman, *Coloring by Numbers Reveals Arithmetic Patterns in Fractions*, Quanta Magazine, March 15, 2023.

**دانشگاه یزد

[9] Imre Leader