۱) ثابت کنید دنباله $x_۱, x_۲, \dots$ از اعداد حقیقی وجود ندارد که $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+x_{n+۳}) = ۷$ و $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۷}) = ۳$.

پاسخ: با استفاده از فرضیات مسئله

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۴}+x_{n+۵}+x_{n+۶}) = \lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+x_{n+۳}) = ۷$$

و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۶}) = ۱۴,$$

بنابراین چون

$$x_{n+۷} = (x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۷}) - (x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۶})$$

نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ۳ - ۱۴ = -۱۱$$

که این به طور خاص نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+x_{n+۳}) = -۳۳$$

و با فرض‌های مسئله تناقض دارد.

۲) فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ ثابت کنید برای هر $x, y \in R$ داریم $(xy)^2 = x^2y^2$.

پاسخ: طبق فرض $x^2 + y^2 = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$ که نتیجه می دهد برای هر x, y در R داریم $xy = -yx$. با فرض $x = y$ داریم $x^2 = -x^2$. بنابراین $(xy)(xy) = x(yx)y = -x^2y^2 = x^2y^2$.

۳) فرض کنید $(\Omega, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال متناهی و $E_۱, E_۲, \dots, E_n$ پیشامدهایی از Ω باشند. هر عضو x در Ω این ویژگی را دارد که اگر $x \in E_i$ آنگاه x در حداکثر a_i تا از $E_۱, E_۲, \dots, E_n$ قرار داشته باشد. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} \leq ۱.$$

پاسخ: فرض کنید برای عضوی مانند $w \in \Omega$، m_w تعداد E_iهایی باشد که w در آنها قرار دارد دارد بنابراین اگر $w \in E_i$ داریم $m_w \leq a_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n} \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{w \in E_i} \frac{\mathbb{P}(w)}{a_i} \\
&= \sum_{w \in \Omega} \sum_{E_i \ni w} \frac{\mathbb{P}(w)}{a_i} \\
&= \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \sum_{E_i \ni w} \frac{۱}{a_i} \\
&= \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \frac{m_w}{a_i} \\
&\leq \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \\
&= ۱.
\end{aligned}$$

۴) فرض کنید G یک گروه متناهی است به‌طوری‌که به ازای هر دو زیرگروه H و K از آن، $|H\cap K|$ برابر است با بزرگترین مقسوم علیه مشترک $|H|$ و $|K|$. ثابت کنید G یک گروه دوری است.

پاسخ: فرض کنید H,K دو زیرگروه G باشند به طوری که $|H| \mid |K|$. بنابراین طبق فرض $|H\cap K|=|H|$. در نتیجه $H\subseteq K$. بنابراین اگر $|H|=|K|$. آنگاه $H=K$. هم‌چنین هر زیرگروه G نرمال است زیرا $|gHg^{-1}|=|H|$. اگر N زیرگروه G نرمال باشد آنگاه هر زیرگروه G/N به شکل H/N می باشد. بنابراین

$$\gcd(|H/N|,|K/N|)=\gcd\left(\frac{|H|}{|N|},\frac{|K|}{|N|}\right)=\frac{\gcd(|H|,|K|)}{|N|}$$
$$=\frac{|H\cap K|}{|N|}=|H\cap K/N|=|H/N\cap K/N|.$$

در نتیجه G/N نیز همین خاصیت را دارد. حال حکم را با استقرا روی G ثابت می‌کنیم. برای $|G|=1$ حکم بدیهی است. فرض کنید $|G|>1$ و p یک عامل اول $|G|$ و a یک عضو مرتبه p در G باشد. بنابراین $N=\langle a\rangle\lhd G$ و گروه G/N طبق فرض استقرا دوری می‌باشد. اگر $G/N=\langle bN\rangle$ آنگاه $G=MN$ که $M=\langle b\rangle$. قرار دهید $m=|M|$. اگر $p\mid m$ آنگاه $N\subseteq M$ و $G=MN=M$ دوری است. اگر $p\nmid m$ آنگاه $aba^{-1}b^{-1}\in M\cap N=\{e\}$. بنابراین $ab=ba$. در نتیجه $G=MN\cong M\times N\cong \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_p\cong\mathbb{Z}_{mp}$ دوری است.

۵) فضای متریک کامل (X,d) دارای این خاصیت است که برای هر دنباله $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ از اعداد حقیقی مثبت، می‌توان دنباله $x_1, x_2, \ldots$ از اعضای X یافت که $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\epsilon_i}(x_i)$. ثابت کنید X مجموعه‌ای حداکثر شماراست. (برای $x \in X$ و $\epsilon > 0$، منظور از $B_\epsilon(x)$ گوی باز به شعاع ϵ به مرکز x است.)

پاسخ: به برهان خلف فرض کنید X مجموعه‌ای ناشمارا باشد. خاصیت بیان‌شده در صورت مسئله (پوشش مجموعه با دنباله‌ای از گوی‌های با شعاع داده‌شده) را خاصیت $(*)$ می‌نامیم.

ادعای ۱. اگر (X,d) یک فضای متریک کامل دارای خاصیت $(*)$ باشد، هر زیرمجموعه بسته ناتهی $Y \subset X$ نیز (با متریک القایی) خاصیت $(*)$ را دارد.

اثبات ادعای ۱. می‌دانیم که هر زیرمجموعه بسته از یک فضای متریک کامل، خود کامل است. پس تنها باید برقرای خاصیت $(*)$ را برای Y ثابت کنیم.

برای دنباله $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ از اعداد مثبت، طبق خاصیت $(*)$ برای X، دنباله $x_1, x_2, \ldots$ از اعضای X یافت می‌شود که $X = \bigcup_i B_{\epsilon_i/2}(x_i)$. حال دنباله $y_1, y_2, \ldots$ از Y را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \cap Y \neq \emptyset$، y_i را نقطه دل‌خواهی در این اشتراک می‌گیریم و اگر $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \cap Y = \emptyset$، y_i را برابر عضو دل‌خواهی از Y می‌گیریم. با این شکل تعریف چون اگر $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \cap Y \neq \emptyset$، $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \subset B_{\epsilon_i}(y_i)$. نتیجه می‌گیریم $Y \subset \bigcup_i B_{\epsilon_i}(y_i)$ و بنابراین Y نیز خاصیت $(*)$ را دارد.

ادعای ۲. برای هر فضای متریک کامل ناشمارای X با خاصیت $(*)$، $z_* \in X$ یافت می‌شود که هر گوی باز به مرکز z_* شامل ناشمارا نقطه از X باشد.

اثبات ادعای ۲. طبق $(*)$ برای دنباله ثابت $\epsilon_i = 1$، می‌توان شمارا گوی باز به شعاع ۱ یافت که اجتماع آن‌ها X را بپوشاند و چون X ناشماراست، دست‌کم یکی از این گوی‌ها مثل $\overline{B_1(z_0)}$ ناشماراست. طبق ادعای قبلی $\overline{B_1(z_0)}$ خاصیت مسئله را دارد. طبق خاصیت $(*)$ برای این مجموعه و دنباله ثابت $\epsilon_i = \frac{1}{2}$ می‌توان گوی $\overline{B_{1/2}(z_1)}$ یافت که شامل ناشمارا نقطه باشد. با ادامه همین

روند به صورت استقرایی می‌توان دنباله $z_0, z_1, z_2, \dots$ از اعضای X یافت که برای هر n، $B_{1/2^{n+1}}(z_n)$ ناشمارا باشد و $d(z_n, z_{n+1}) < 1/2^n$. بنابراین دنباله $\{z_n\}_{n\geq 1}$ کوشی است و چون X کامل است به عضوی مثل z_* هم‌گراست که خاصیت مورد نظر را دارد.

ادعای ۳. برای هر فضای متریک کامل ناشمارای X با خاصیت $(*)$ و هر $r > 0$ دو گوی بسته مجزا با شعاع کم‌تر از r در X یافت می‌شود که هر یک شامل ناشمارا نقطه باشند.

اثبات ادعای ۳. طبق ادعای قبلی $z_* \in X$ یافت می‌شود که هر گوی باز حول آن شامل ناشمارا نقطه باشد. برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $B_n := B_{1/n}(z_*)$ و $A_n := \overline{B_n} \setminus B_{n+1}$. به وضوح A_iها مجموعه‌ای بسته و مجزا هستند و اجتماع‌شان $\overline{B_1} \setminus \{z_*\}$ است. بنابراین $n_0 \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود که A_{n_0} ناشمارا عضوی باشد. حال طبق ادعای ۲، $z'_* \in A_{n_0}$ وجود دارد که هر گوی باز به مرکز آن ناشمارا باشد. پس برای $s < \min\{\frac{1}{2}d(z_*, z'_*), r\}$، $\overline{B_s(z_*)}$ و $\overline{B_s(z'_*)}$ شرط مسئله را دارد.

حال برای اثبات حکم اصلی ابتدا به کمک ادعای ۳ برای $r = \frac{1}{2}$ گوی‌های بسته و مجزای S_1, S_2 می‌یابیم که هر دو شعاع کم‌تر از $\frac{1}{2}$ دارند. سپس با استفاده از ادعای اول S_1, S_2 هر یک فضاهای متریک کامل با خاصیت $(*)$ هستند. به کمک ادعای ۳ برای $r = \frac{1}{4}$ می‌توان گوی‌های بسته و مجزای $S_{11}, S_{12} \subset S_1$ و $S_{21}, S_{22} \subset S_2$ یافت که همگی شعاع کم‌تر از $\frac{1}{4}$ دارند. به همین ترتیب به صورت استقرایی با استقاده از ادعاهای بالا، برای هر $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ می‌توان گوی‌های بسته مجزای $S_{i_1 \cdots i_n 1}, S_{i_1 \cdots i_n 2} \subset S_{i_1 \cdots i_n}$ یافت که شعاع کم‌تر از $1/2^n$ دارند.

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$، ϵ_n را عددی مثبت بگیرید که از نصف فاصله دوبه‌دوی مجموعه‌های $S_{i_1 \cdots i_n}$ کم‌تر باشد. طبق فرض مسئله برای دنباله $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$، می‌توان نقاط $x_1, x_2, \dots$ از اعضای X یافت که اجتماع $B_{\epsilon_i}(x_i)$ها X را بپوشانند. با توجه به این شکل تعریف ϵ_i، برای هر n، $B_{\epsilon_n}(x_n)$ حداکثر با یکی از مجموعه‌های به فرم $S_{i_1 \cdots i_n}$ اشتراک دارد.

حال دنباله $j_1, j_2, \dots \in \{1, 2\}$ را به صورت استقرایی می‌سازیم که $S_{j_1 j_2 \cdots j_n} \cap B_{\epsilon_n}(x_n) = \emptyset$. فرض کنید $j_1, \dots, j_{n-1}$ ساخته شده باشد. در این صورت $B_{\epsilon_n}(x_n)$ دست کم با یکی از دو مجموعه

$S_{j_1\cdots j_{n-1}1}, S_{j_1\cdots j_{n-1}2}$ اشتراک تهی دارد. اگر با $S_{j_1\cdots j_{n-1}1}$ اشتراک تهی داشته باشد، $j_n = 1$ و در غیر این صورت $j_n = 2$ را تعریف می‌کنیم.

حال چون

$$\cdots \subset S_{j_1\cdots j_{n-1}j_n} \subset S_{j_1\cdots j_{n-1}} \subset \cdots \subset S_{j_1}$$

برای هر n، $B_{\epsilon_n}(x_n)$ با اشتراک گوی‌های بالا اشتراک ندارد. از طرفی چون قطر $S_{j_1\cdots j_{n-1}j_n}$ با افزایش n به صفر میل می‌کند و فضای متریک X کامل است، اشتراک همه این مجموعه‌ها نقطه یکتایی مثل x_* است. چون $S_{j_1j_2\cdots j_n} \cap B_{\epsilon_n}(x_n) = \emptyset$ و $x_* \in S_{j_1j_2\cdots j_n}$ پس $x_* \notin B_{\epsilon_n}(x_n)$ و این با فرض که اجتماع $B_{\epsilon_n}(x_n)$ها X را می‌پوشاند تناقض دارد.

۶) آیلا ۱۰۰ عدد حقیقی دوبه‌دو متمایز $x_{۱},\dots,x_{۱۰۰}$ را در اختیار دارد. هدف بردیا این است که اندیس k را بیابد به‌طوری‌که $x_k=\min\{x_{۱},\dots,x_{۱۰۰}\}$. برای این‌منظور، بردیا در هر گام دو عدد i و j را از مجموعه اعداد $\{۱,\dots,۱۰۰\}$ انتخاب می‌کند و از آیلا می‌پرسد که «کدام یک از اعداد x_i یا x_j کوچکتر است؟». پس از اینکه آیلا به سوال بردیا پاسخ داد، بردیا سوال بعدی خود را می‌پرسد و بازی به همین‌صورت ادامه می‌یابد. آیلا اجازه دارد که حداکثر به یک سوال بردیا پاسخ غلط دهد. کمترین تعداد سوال‌هایی را بیابید که بردیا با پرسیدن آن‌ها به هدف خود می‌رسد. ادعای خود را ثابت کنید.

پاسخ: حکم را در حالت کلی برای n عدد دوبه‌دو متمایز $x_{۱},\dots,x_n$ اثبات می‌کنیم. نشان می‌دهیم که می‌توان با $۲n-۱$ سوال، اندیس k را یافت که $x_k=\min\{x_{۱},\dots,x_n\}$ و با کمتر از این تعداد سوال، الزاما نمی‌توان اندیس k را یافت. برای قسمت اول این مراحل را در نظر بگیرید. در هر گام، کوچکترین عدد از بین ℓ جمله‌ای که تا کنون بررسی شده اند را در نظر می‌گیریم و دو بار با جمله‌ی $(\ell+۱)$ام دنباله مقایسه می‌کنیم. اگر هر دو بار یک نتیجه حاصل شد یعنی نتیجه‌ی مقایسه قطعا درست است و سپس اندیس جمله‌ی کوچکتر را به عنوان اندیس کوچکترین جمله بین $\ell+۱$ جمله اول دنباله در نظر گرفته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. اگر حاصل دو مقایسه متفاوت بود یعنی دقیقا یکی از دو مقایسه درست و دیگری اشتباه بوده است. لذا در این حالت مقایسه سومی را انجام می‌دهیم و طبق فرض می‌دانیم نتیجه‌ی مقایسه سوم قطعا صحیح است. در چنین وضعیتی می‌دانیم که از الان به بعد تمام مقایسه ها صحیح خواهند بود لذا بعد از این مرحله دیگر نیازی به انجام دوباره‌ی یک مقایسه نیست. پس اگر در یک مرحله نیاز به ۳ مقایسه داشتیم در تمام مقایسه های بعدی می‌توانیم با یک بار مقایسه کردن، اندیس کوچکترین جمله‌ی دنباله تا آن مرحله را بیابیم. پس در کل تعداد $۲(n-۱)+۱=۲n-۱$ مقایسه انجام شده است و اندیس کوچکترین عضو نیز پیدا می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که با تعداد کمتری سوال نمی‌توان الزاما اندیس کوچکترین عضو دنباله را پیدا کرد. برای این بخش یک گراف جهت دار بدین صورت می‌سازیم. مجموعه‌ی راس‌های این

گراف را برابر با $\{x_1, \ldots, x_n\}$ می‌گیریم. هرگاه بین دو جمله x_i و x_j مقایسه‌ای انجام شود، بین این دو جمله (که راس‌هایی از گراف هستند) یک یال جهت دار رسم می‌کنیم. جهت این یال از راسی که در نتیجه مقایسه کوچکتر اعلام شده است به سمت راسی که بزرگتر اعلام شده است خواهد بود.

ادعا: اگر اندیس کوچکترین جمله‌ی دنباله پس از انجام تعدادی مقایسه به صورت یکتا مشخص شود، آنگاه هر راسی غیر از راس متناظر کوچکترین جمله، حداقل باید دو یال ورودی داشته باشد.

برهان ادعا: فرض کنید راس متناظر کوچکترین جمله، x_p باشد. فرض کنید راس دیگری مانند x_q وجود داشته باشد که درجه ورودی آن حداکثر ۱ است. حال اگر یال ورودی به x_q به اشتباه بیان شده باشد (به عبارتی نتیجه مقایسه برای دو سر این یال به غلط گزارش شده‌باشد) آن‌گاه هیچ مسیر جهتداری از x_p به x_q (پس از در نظر گرفتن جهت اصلاح شده‌ی آن یال) وجود ندارد و لذا نمی‌توان الزاما x_p را کوچکترین جمله دنباله دانست زیرا دلیلی وجود ندارد که x_q از x_p کمتر باشد و این تناقض است. از آنجایی که هر راس x_i به جز x_p دست کم دو یال ورودی دارد پس تعداد یال‌ها (تعداد سوال‌ها) حداقل برابر با $۲(n-۱)$ خواهد بود.

حال نشان می‌دهیم بجز این $۲(n-۱)$ یال دست کم یک یال دیگر هم می‌بایست وجود داشته باشد. فرض کنید $x_{p'}$ دومین جمله کوچک این دنباله باشد. در این صورت تنها دلیلی که می‌تواند ما را از این که « x_p از $x_{p'}$ کوچکتر است» مطمئن کند این است که x_p و $x_{p'}$ به صورت مستقیم مقایسه شده باشند. حال اگر تعداد دفعاتی که x_p و $x_{p'}$ مقایسه شده باشند دقیقا دو بار بوده باشد آنگاه ممکن است یکی از دو مقایسه درست گزارش شده و مقایسه دیگری به صورت اشتباه گزارش شده باشد. (یعنی یک یال از x_p به $x_{p'}$ و یال دیگر در جهت برعکس باشد) که در این صورت نمی‌توان با اطمینان اعلام کرد که x_p کوچکتر است. پس دست کم سه مقایسه بین این دو لازم است که بتوان با اطمینان x_p را به عنوان راس متناظر کوچکترین جمله اعلام کرد. دراین‌صورت درجه ورودی راس x_p برابر با ۱ خواهد بود که به همراه سایر $۲n-۲$ یال دیگر باعث می‌شود که گراف دست کم $۲n-۱$ یال داشته باشد یعنی $۲n-۱$ سوال الزامیست.