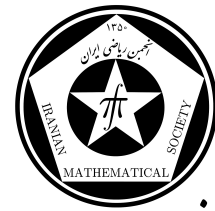




پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

۱) ثابت کنید دنباله  $x_1, x_2, \dots$  از اعداد حقیقی وجود ندارد که  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) = 7$

و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+7}) = 3$

پاسخ: با استفاده از فرضیات مسئله

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+4} + x_{n+5} + x_{n+6}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) = 7$$

و بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+6}) = 14,$$

بنابراین چون

$$x_{n+7} = (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+7}) - (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+6})$$

نتیجه می گیریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 - 14 = -11$$

که این به طور خاص نتیجه می دهد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) = -33$$

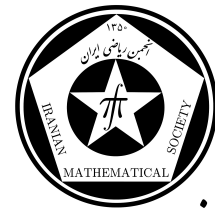
و با فرض های مسئله تناقض دارد.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

۲) فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. اگر برای هر  $x, y \in R$  داشته باشیم  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  ثابت کنید برای هر  $x, y \in R$  داریم  $(xy)^2 = x^2y^2$ .

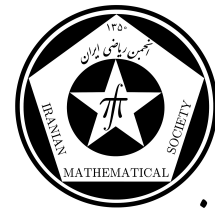
پاسخ: طبق فرض  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$  که نتیجه می دهد برای هر  $x, y$  در  $R$  داریم  $xy = -yx$ . با فرض  $x = y$  داریم  $x^2 = -x^2$  بنابراین  $(xy)(xy) = x(yx)y = x^2y^2 = -x^2y^2$ .

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

۳) فرض کنید  $(\Omega, \mathbb{P})$  یک فضای احتمال متناهی و  $E_1, E_2, \dots, E_n$  پیشامدهایی از  $\Omega$  باشند. هر عضو  $x$  در  $\Omega$  این ویژگی را دارد که اگر  $x \in E_i$  آنگاه  $x$  در حداکثر  $a_i$  تا از  $E_1, E_2, \dots, E_n$  قرار داشته باشد. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} \leq 1.$$

پاسخ: فرض کنید برای عضو  $w$  مانند  $w \in \Omega$ ،  $m_w$  تعداد  $E_i$ هایی باشد که  $w$  در آنها قرار دارد

بنابراین اگر  $w \in E_i$  داریم  $m_w \leq a_i$ .

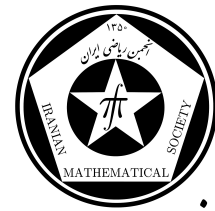
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} &= \sum_{i=1}^n \sum_{w \in E_i} \frac{\mathbb{P}(w)}{a_i} \\ &= \sum_{w \in \Omega} \sum_{E_i \ni w} \frac{\mathbb{P}(w)}{a_i} \\ &= \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \sum_{E_i \ni w} \frac{1}{a_i} \\ &= \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \frac{m_w}{a_i} \\ &\leq \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(w) \\ &= 1. \end{aligned}$$

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

۴) فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی است به طوری که به ازای هر دو زیرگروه  $H$  و  $K$  از آن،  $|H \cap K|$  برابر است با بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $|H|$  و  $|K|$ . ثابت کنید  $G$  یک گروه دوری است.

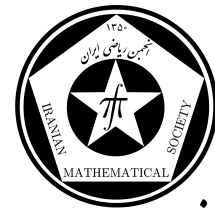
**پاسخ:** فرض کنید  $H, K$  دو زیرگروه  $G$  باشند به طوری که  $|H| \mid |K|$ . بنابراین طبق فرض  $|H \cap K| = |H|$ . در نتیجه  $H \subseteq K$ . بنابراین اگر  $|H| = |K|$ . آنگاه  $H = K$ . هم چنین هر زیرگروه  $G$  نرمال است زیرا  $|gHg^{-1}| = |H|$ . اگر  $N$  زیرگروه  $G$  نرمال باشد آنگاه هر زیرگروه  $G/N$  به شکل  $H/N$  می باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \gcd(|H/N|, |K/N|) &= \gcd\left(\frac{|H|}{|N|}, \frac{|K|}{|N|}\right) = \frac{\gcd(|H|, |K|)}{|N|} \\ &= \frac{|H \cap K|}{|N|} = |H \cap K/N| = |H/N \cap K/N|. \end{aligned}$$

در نتیجه  $G/N$  نیز همین خاصیت را دارد. حال حکم را با استقرا روی  $G$  ثابت می کنیم. برای  $|G| = 1$  حکم بدیهی است. فرض کنید  $|G| > 1$  و  $p$  یک عامل اول  $|G|$  و  $a$  یک عضو مرتبه  $p$  در  $G$  باشد. بنابراین  $N = \langle a \rangle \triangleleft G$  و گروه  $G/N$  طبق فرض استقرا دوری می باشد. اگر  $G/N = \langle bN \rangle$  آنگاه  $G = MN$  که  $M = \langle b \rangle$ . قرار دهید  $m = |M|$ . اگر  $p \mid m$  آنگاه  $N \subseteq M$  و  $G = MN = M$  دوری است. اگر  $p \nmid m$  آنگاه  $aba^{-1}b^{-1} \in M \cap N = \{e\}$ . بنابراین  $ab = ba$ . در نتیجه  $G = MN \cong M \times N \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{mp}$  دوری است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



۵) فضای متریک کامل  $(X, d)$  دارای این خاصیت است که برای هر دنباله  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  از اعداد حقیقی مثبت، می توان دنباله  $x_1, x_2, \dots$  از اعضای  $X$  یافت که  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\epsilon_i}(x_i)$  ثابت کنید  $X$  مجموعه ای حداکثر شماراست. (برای  $x \in X$  و  $\epsilon > 0$ ، منظور از  $B_{\epsilon}(x)$  گوی باز به شعاع  $\epsilon$  به مرکز  $x$  است.)

پاسخ: به برهان خلف فرض کنید  $X$  مجموعه ای ناشمارا باشد. خاصیت بیان شده در صورت مسئله (پوشش مجموعه با دنباله ای از گوی های با شعاع داده شده) را خاصیت (\*) می نامیم.

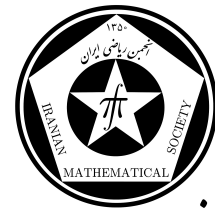
ادعای ۱. اگر  $(X, d)$  یک فضای متریک کامل دارای خاصیت (\*) باشد، هر زیرمجموعه بسته ناتهی  $Y \subset X$  نیز (با متریک القایی) خاصیت (\*) را دارد.

اثبات ادعای ۱. می دانیم که هر زیرمجموعه بسته از یک فضای متریک کامل، خود کامل است. پس تنها باید برقرای خاصیت (\*) را برای  $Y$  ثابت کنیم.

برای دنباله  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  از اعداد مثبت، طبق خاصیت (\*) برای  $X$ ، دنباله  $x_1, x_2, \dots$  از اعضای  $X$  یافت می شود که  $X = \bigcup_i B_{\epsilon_i/2}(x_i)$ . حال دنباله  $y_1, y_2, \dots$  از  $Y$  را به این صورت تعریف می کنیم که اگر  $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \cap Y \neq \emptyset$ ،  $y_i$  را نقطه دل خواهی در این اشتراک می گیریم و اگر  $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \cap Y = \emptyset$ ،  $y_i$  را برابر عضو دل خواهی از  $Y$  می گیریم. با این شکل تعریف چون  $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \cap Y \neq \emptyset$ ،  $B_{\epsilon_i/2}(x_i) \subset B_{\epsilon_i}(y_i)$ . نتیجه می گیریم  $Y \subset \bigcup_i B_{\epsilon_i}(y_i)$  و بنابراین  $Y$  نیز خاصیت (\*) را دارد.

ادعای ۲. برای هر فضای متریک کامل ناشمارای  $X$  با خاصیت (\*).  $z_* \in X$  یافت می شود که هر گوی باز به مرکز  $z_*$  شامل ناشمارا نقطه از  $X$  باشد.

اثبات ادعای ۲. طبق (\*) برای دنباله ثابت  $\epsilon_i = 1$ . می توان شمارا گوی باز به شعاع ۱ یافت که اجتماع آن ها  $X$  را بپوشاند و چون  $X$  ناشماراست، دست کم یکی از این گوی ها مثل  $\overline{B_1(z_*)}$  ناشماراست. طبق ادعای قبلی  $\overline{B_1(z_*)}$  خاصیت مسئله را دارد. طبق خاصیت (\*) برای این مجموعه و دنباله ثابت  $\epsilon_i = \frac{1}{2}$  می توان گوی  $\overline{B_{1/2}(z_1)}$  یافت که شامل ناشمارا نقطه باشد. با ادامه همین



روند به صورت استقرایی می توان دنباله  $z_0, z_1, z_2, \dots$  از اعضای  $X$  یافت که برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $B_{1/2^{n+1}}(z_n)$  ناشمارا باشد و  $d(z_n, z_{n+1}) < 1/2^n$ . بنابراین دنباله  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  کوشی است و چون  $X$  کامل است به عضوی مثل  $z_*$  هم گراست که خاصیت مورد نظر را دارد.

**ادعای ۳.** برای هر فضای متریک کامل ناشمارای  $X$  با خاصیت (\*) و هر  $0 < r$  دو گوی بسته مجزا با شعاع کم تر از  $r$  در  $X$  یافت می شود که هر یک شامل ناشمارا نقطه باشند.

**اثبات ادعای ۳.** طبق ادعای قبلی  $z_* \in X$  یافت می شود که هر گوی باز حول آن شامل ناشمارا نقطه باشد. برای  $n \in \mathbb{N}$  تعریف می کنیم  $B_n := B_{1/n}(z_*)$  و  $A_n := \overline{B_n} \setminus B_{n+1}$ . به وضوح  $A_i$ ها مجموعه ای بسته و مجزا هستند و اجتماع شان  $\overline{B_1} \setminus \{z_*\}$  است. بنابراین  $n_0 \in \mathbb{N}$  یافت می شود که  $A_{n_0}$  ناشمارا عضوی باشد. حال طبق ادعای ۲،  $z'_* \in A_{n_0}$  وجود دارد که هر گوی باز به مرکز آن ناشمارا باشد. پس برای  $s < \min\{\frac{1}{2}d(z_*, z'_*), r\}$ ،  $\overline{B_s(z_*)}$  و  $\overline{B_s(z'_*)}$  شرط مسئله را دارد.

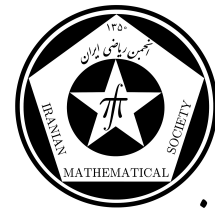
حال برای اثبات حکم اصلی ابتدا به کمک ادعای ۳ برای  $r = \frac{1}{4}$  گوی های بسته و مجزای  $S_1, S_2$  می یابیم که هر دو شعاع کم تر از  $\frac{1}{4}$  دارند. سپس با استفاده از ادعای اول  $S_1, S_2$  هر یک فضاهای متریک کامل با خاصیت (\*) هستند. به کمک ادعای ۳ برای  $r = \frac{1}{4}$  می توان گوی های بسته و مجزای  $S_{11}, S_{12} \subset S_1$  و  $S_{21}, S_{22} \subset S_2$  یافت که همگی شعاع کم تر از  $\frac{1}{4}$  دارند. به همین ترتیب به صورت استقرایی با استفاده از ادعاهای بالا، برای هر  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$  می توان گوی های بسته مجزای  $S_{i_1 \dots i_n} \subset S_{i_1 \dots i_{n-1}}, S_{i_1 \dots i_n} \subset S_{i_1 \dots i_n}$  یافت که شعاع کم تر از  $1/2^n$  دارند.

حال برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\epsilon_n$  را عددی مثبت بگیرد که از نصف فاصله دوبه دوی مجموعه های  $S_{i_1 \dots i_n}$  کم تر باشد. طبق فرض مسئله برای دنباله  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  می توان نقاط  $x_1, x_2, \dots$  از اعضای  $X$  یافت که اجتماع  $B_{\epsilon_i}(x_i)$ ها  $X$  را بپوشانند. با توجه به این شکل تعریف  $\epsilon_i$ ، برای هر  $n$ ،  $B_{\epsilon_n}(x_n)$  حداکثر با یکی از مجموعه های به فرم  $S_{i_1 \dots i_n}$  اشتراک دارد.

حال دنباله  $j_1, j_2, \dots \in \{1, 2\}$  را به صورت استقرایی می سازیم که  $S_{j_1 j_2 \dots j_n} \cap B_{\epsilon_n}(x_n) = \emptyset$  فرض کنید  $j_1, \dots, j_{n-1}$  ساخته شده باشد. در این صورت  $B_{\epsilon_n}(x_n)$  دست کم با یکی از دو مجموعه



پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

این صورت  $j_n = 2$  را تعریف می کنیم.

حال چون

$$\dots \subset S_{j_1, \dots, j_{n-1}, j_n} \subset S_{j_1, \dots, j_{n-1}} \subset \dots \subset S_{j_1}$$

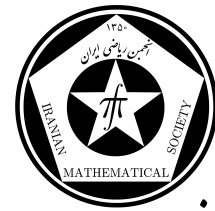
برای هر  $n$ ،  $B_{\epsilon_n}(x_n)$  با اشتراک گوی‌های بالا اشتراک ندارد. از طرفی چون قطر  $S_{j_1, \dots, j_{n-1}, j_n}$  با افزایش  $n$  به صفر میل می کند و فضای متریک  $X$  کامل است، اشتراک همه این مجموعه‌ها نقطه یکتایی مثل  $x_*$  است. چون  $S_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap B_{\epsilon_n}(x_n) = \emptyset$  و  $x_* \in S_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  پس  $x_* \notin B_{\epsilon_n}(x_n)$  و این با فرض که اجتماع  $B_{\epsilon_n}(x_n)$  ها  $X$  را می پوشاند تناقض دارد.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

۶) آیا ۱۰۰ عدد حقیقی دوه‌دو متمایز  $x_1, \dots, x_{100}$  را در اختیار دارد. هدف بردیا این است که اندیس  $k$  را بیابد به طوری که  $x_k = \min\{x_1, \dots, x_{100}\}$ . برای این منظور، بردیا در هر گام دو عدد  $i$  و  $j$  را از مجموعه اعداد  $\{1, \dots, 100\}$  انتخاب می‌کند و از آیا می‌پرسد که «کدام یک از اعداد  $x_i$  یا  $x_j$  کوچکتر است؟». پس از اینکه آیا به سوال بردیا پاسخ داد، بردیا سوال بعدی خود را می‌پرسد و بازی به همین صورت ادامه می‌یابد. آیا اجازه دارد که حداکثر به یک سوال بردیا پاسخ غلط دهد. کمترین تعداد سوال‌هایی را بیابید که بردیا با پرسیدن آن‌ها به هدف خود می‌رسد. ادعای خود را ثابت کنید.

**پاسخ:** حکم را در حالت کلی برای  $n$  عدد دوه‌دو متمایز  $x_1, \dots, x_n$  اثبات می‌کنیم. نشان می‌دهیم که می‌توان با  $2n - 1$  سوال، اندیس  $k$  را یافت که  $x_k = \min\{x_1, \dots, x_n\}$  و با کمتر از این تعداد سوال، الزاما نمی‌توان اندیس  $k$  را یافت. برای قسمت اول این مراحل را در نظر بگیرید. در هر گام، کوچکترین عدد از بین  $\ell$  جمله‌ای که تا کنون بررسی شده اند را در نظر می‌گیریم و دو بار با جمله‌ی  $(\ell + 1)$ ام دنباله مقایسه می‌کنیم. اگر هر دو بار یک نتیجه حاصل شد یعنی نتیجه‌ی مقایسه قطعا درست است و سپس اندیس جمله‌ی کوچکتر را به عنوان اندیس کوچکترین جمله بین  $\ell + 1$  جمله اول دنباله در نظر گرفته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. اگر حاصل دو مقایسه متفاوت بود یعنی دقیقا یکی از دو مقایسه درست و دیگری اشتباه بوده است. لذا در این حالت مقایسه سومی را انجام می‌دهیم و طبق فرض می‌دانیم نتیجه‌ی مقایسه سوم قطعا صحیح است. در چنین وضعیتی می‌دانیم که از الان به بعد تمام مقایسه‌ها صحیح خواهند بود لذا بعد از این مرحله دیگر نیازی به انجام دوباره‌ی یک مقایسه نیست. پس اگر در یک مرحله نیاز به ۳ مقایسه داشتیم در تمام مقایسه‌های بعدی می‌توانیم با یک بار مقایسه کردن، اندیس کوچکترین جمله‌ی دنباله تا آن مرحله را بیابیم. پس در کل تعداد  $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$  مقایسه انجام شده است و اندیس کوچکترین عضو نیز پیدا می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که با تعداد کمتری سوال نمی‌توان الزاما اندیس کوچکترین عضو دنباله را پیدا کرد. برای این بخش یک گراف جهت دار بدین صورت می‌سازیم. مجموعه‌ی راس‌های این

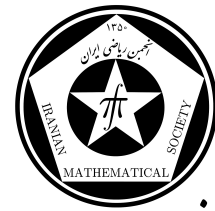
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety





پاسخ سوالات آزمون نوبت اول  
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی  
انجمن ریاضی ایران  
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

گراف را برابر با  $\{x_1, \dots, x_n\}$  می‌گیریم. هرگاه بین دو جمله  $x_j$  و  $x_i$  مقایسه‌ای انجام شود، بین این دو جمله (که راس‌هایی از گراف هستند) یک یال جهت دار رسم می‌کنیم. جهت این یال از راسی که در نتیجه مقایسه کوچکتر اعلام شده است به سمت راسی که بزرگتر اعلام شده است خواهد بود.

**ادعا:** اگر اندیس کوچکترین جمله‌ی دنباله پس از انجام تعدادی مقایسه به صورت یکتا مشخص شود، آنگاه هر راسی غیر از راس متناظر کوچکترین جمله، حداقل باید دو یال ورودی داشته باشد. **برهان ادعا:** فرض کنید راس متناظر کوچکترین جمله،  $x_p$  باشد. فرض کنید راس دیگری مانند  $x_q$  وجود داشته باشد که درجه ورودی آن حداکثر ۱ است. حال اگر یال ورودی به  $x_q$  به اشتباه بیان شده باشد (به عبارتی نتیجه مقایسه برای دو سر این یال به غلط گزارش شده باشد) آن‌گاه هیچ مسیر جهتداری از  $x_p$  به  $x_q$  (پس از در نظر گرفتن جهت اصلاح شده‌ی آن یال) وجود ندارد و لذا نمی‌توان الزاما  $x_p$  را کوچکترین جمله دنباله دانست زیرا دلیلی وجود ندارد که  $x_q$  از  $x_p$  کمتر باشد و این تناقض است. از آنجایی که هر راس  $x_i$  به جز  $x_p$  دست کم دو یال ورودی دارد پس تعداد یال‌ها (تعداد سوال‌ها) حداقل برابر با  $2(n-1)$  خواهد بود.

حال نشان می‌دهیم بجز این  $2(n-1)$  یال دست کم یک یال دیگر هم می‌بایست وجود داشته باشد. فرض کنید  $x_{p'}$  دومین جمله کوچک این دنباله باشد. در این صورت تنها دلیلی که می‌تواند ما را از این که « $x_{p'}$  از  $x_p$  کوچکتر است» مطمئن کند این است که  $x_{p'}$  و  $x_p$  به صورت مستقیم مقایسه شده باشند. حال اگر تعداد دفعاتی که  $x_{p'}$  و  $x_p$  مقایسه شده باشند دقیقاً دو بار بوده باشد آنگاه ممکن است یکی از دو مقایسه درست گزارش شده و مقایسه دیگری به صورت اشتباه گزارش شده باشد. (یعنی یک یال از  $x_p$  به  $x_{p'}$  و یال دیگر در جهت برعکس باشد) که در این صورت نمی‌توان با اطمینان اعلام کرد که  $x_p$  کوچکتر است. پس دست کم سه مقایسه بین این دو لازم است که بتوان با اطمینان  $x_p$  را به عنوان راس متناظر کوچکترین جمله اعلام کرد. در این صورت درجه ورودی راس  $x_p$  برابر با ۱ خواهد بود که به همراه سایر  $2n-2$  یال دیگر باعث می‌شود که گراف دست کم  $2n-1$  یال داشته باشد یعنی  $2n-1$  سوال الزامیست.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @SCoIMS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety