آزمون نوبت اول

چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی

انجمن ریاضی ایران

جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱

۱. ثابت کنید دنباله $x_۱, x_۲, \ldots$ از اعداد حقیقی وجود ندارد که $\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+x_{n+۳}) = ۷$ و $\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱}+x_{n+۲}+\cdots+x_{n+۷}) = ۳$.

۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $(x+y)^۲ = x^۲ + y^۲$ ثابت کنید برای هر $x, y \in R$ داریم $(xy)^۲ = x^۲y^۲$.

۳. فرض کنید $(\Omega, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال متناهی و $E_۱, E_۲, \ldots, E_n$ پیشامدهایی از Ω باشند. هر عضو x در Ω این ویژگی را دارد که اگر $x \in E_i$ آنگاه x در حداکثر a_i تا از $E_۱, E_۲, \ldots, E_n$ قرار داشته باشد. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} \leq ۱.$$

۴. فرض کنید G یک گروه متناهی است به‌طوری‌که به ازای هر دو زیرگروه H و K از آن، $|H \cap K|$ برابر است با بزرگترین مقسوم علیه مشترک $|H|$ و $|K|$. ثابت کنید G یک گروه دوری است.

۵. فضای متریک کامل (X, d) دارای این خاصیت است که برای هر دنباله $\epsilon_۱, \epsilon_۲, \ldots$ از اعداد حقیقی مثبت، می‌توان دنباله $x_۱, x_۲, \ldots$ از اعضای X یافت که $X = \bigcup_{i=۱}^{\infty} B_{\epsilon_i}(x_i)$. ثابت کنید X مجموعه‌ای حداکثر شماراست. (برای $x \in X$ و $\epsilon > ۰$، منظور از $B_\epsilon(x)$ گوی باز به شعاع ϵ به مرکز x است.)

۶. آیلا ۱۰۰ عدد حقیقی دوبه‌دو متمایز $x_۱, \ldots, x_{۱۰۰}$ را در اختیار دارد. هدف بردیا این است که اندیس k را بیابد به‌طوری‌که $x_k = \min\{x_۱, \ldots, x_{۱۰۰}\}$. برای این‌منظور، بردیا در هر گام دو عدد i و j را از مجموعه اعداد $\{۱, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب می‌کند و از آیلا می‌پرسد که «کدام یک از اعداد x_i یا x_j کوچکتر است؟». پس از اینکه آیلا به سوال بردیا پاسخ داد، بردیا سوال بعدی خود را می‌پرسد و بازی به همین‌صورت ادامه می‌یابد. آیلا اجازه دارد که حداکثر به یک سوال بردیا پاسخ غلط دهد. کمترین تعداد سوال‌هایی را بیابید که بردیا با پرسیدن آن‌ها به هدف خود می‌رسد. ادعای خود را ثابت کنید.

موفق باشید