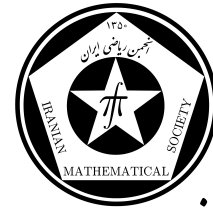




آزمون نوبت اول
چهل و ششمین مسابقه ریاضی دانشجویی
انجمن ریاضی ایران
جلسه اول ۱۴۰۳/۲/۱۱



انجمن ریاضی ایران

۱. ثابت کنید دنباله x_1, x_2, \dots از اعداد حقیقی وجود ندارد که $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) = 7$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+7}) = 3.$$

۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ ثابت کنید

$$\text{برای هر } x, y \in R \text{ داریم } (xy)^2 = x^2 y^2.$$

۳. فرض کنید (Ω, \mathbb{P}) یک فضای احتمال متناهی و E_1, E_2, \dots, E_n پیشامدهایی از Ω باشند. هر عضو

x در Ω این ویژگی را دارد که اگر $x \in E_i$ آنگاه x در حداکثر a_i تا از E_1, E_2, \dots, E_n قرار داشته

باشد. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(E_i)}{a_i} \leq 1.$$

۴. فرض کنید G یک گروه متناهی است به طوری که به ازای هر دو زیرگروه H و K از آن، $|H \cap K|$

برابر است با بزرگترین مقسوم علیه مشترک $|H|$ و $|K|$. ثابت کنید G یک گروه دوری است.

۵. فضای متریک کامل (X, d) دارای این خاصیت است که برای هر دنباله $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ از اعداد حقیقی

مثبت، می توان دنباله x_1, x_2, \dots از اعضای X یافت که $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\epsilon_i}(x_i)$. ثابت کنید X مجموعه ای

حداکثر شماراست. (برای $x \in X$ و $\epsilon > 0$ ، منظور از $B_{\epsilon}(x)$ گوی باز به شعاع ϵ به مرکز x است.)

۶. آیا ۱۰۰ عدد حقیقی دوه‌دو متمایز x_1, \dots, x_{100} را در اختیار دارد. هدف بردیا این است که

اندیس k را بیابد به طوری که $x_k = \min\{x_1, \dots, x_{100}\}$. برای این منظور، بردیا در هر گام دو عدد i

و j را از مجموعه اعداد $\{1, \dots, 100\}$ انتخاب می کند و از آیا می پرسد که «کدام یک از اعداد x_i

یا x_j کوچکتر است؟». پس از اینکه آیا به سوال بردیا پاسخ داد، بردیا سوال بعدی خود را می پرسد

و بازی به همین صورت ادامه می یابد. آیا اجازه دارد که حداکثر به یک سوال بردیا پاسخ غلط دهد.

کمترین تعداد سوال هایی را بیابد که بردیا با پرسیدن آنها به هدف خود می رسد. ادعای خود را

ثابت کنید.

موفق باشید