



به نام خدا
مسائل ریاضی انجمن ریاضی ایران
بهمن ماه ۱۴۰۲

۱. یک جدول $n \times n$ داده شده است. در این جدول k^3 رخ قرار دارد به طوری که در هر سطر و یا ستون حداکثر k رخ وجود دارد. ثابت کنید حداقل $\frac{k}{4}$ رخ وجود دارد که هیچ دوتایی از آن‌ها در یک سطر و یا یک ستون قرار ندارند.

۲. فرض کنید $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته یکنواخت باشد به طوری که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx$$

موجود و متناهی باشد. نشان دهید

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

۳. فرض کنید V یک فضای از بعد متناهی و $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ نشان دهید

$$\dim \text{Ker}(T^{n+1}) = \dim \text{Ker}(T) + \sum_{k=1}^n \dim (\text{Im}(T^k) \cap \text{Ker}(T)),$$

و

$$\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Im}(T^{n+1}) + \sum_{k=1}^n \dim (\text{Im}(T^k) \cap \text{Ker}(T)).$$

۴. مقدار حد زیر را محاسبه نمایید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{1}{m} + \frac{5}{4m^2} \right).$$

۵. نشان دهید تابع تحلیلی $f: \mathbb{C}/\{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ وجود ندارد به طوری که برای هر z ناصفر در صفحه مختلط داشته باشیم

$$|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

لطفاً پاسخ هر پرسش را تایپ کنید یا به صورت کاملاً خوانا بنویسید و تصویر واضح آن را در قالب فایل pdf به همراه مشخصات خود حداکثر تا پایان فروردین ماه ۱۴۰۳ به نشانی زیر ارسال فرمایید.

mathematicalmonthly@gmail.com