پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۱۳۸۹/۲/۲

۷) فرض کنید تعدادی سنگ‌ریزه را به n قسمت با وزن‌های $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_n$ تقسیم کرده باشیم. بار دیگر همان سنگ‌ریزه‌ها را به n قسمت با وزن‌های $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_n$ تقسیم می‌کنیم. نشان دهید برای هر $1 \leqslant k \leqslant n$ داریم

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_k.$$

پاسخ:

می‌دانیم $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = A$. دو حالت را در نظر می‌گیریم

$$1)\quad w_k \leqslant v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \ldots + w_k \leqslant kw_k \leqslant kv_k \leqslant v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

$$2)\quad w_k > v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \ldots + w_k = A - (w_{k+1} + \ldots + w_n) \leqslant A - (n-k)w_k$$
$$\leqslant A - (n-k)v_k \leqslant A - (v_{k+1} + \ldots + v_n) = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

۸)همه‌ی اعداد حقیقی مانند c را بیابید که برای آنها تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f''(x) > f'(x) + c\ ,\ \ f'(x) > f(x) + c.$$

پاسخ:

ادعا می‌کنیم پاسخ مسأله $c \leqslant ۰$ است. برای $c \leqslant ۰$ می‌توان تابع $f(x) = e^{۲x}$ را در نظر گرفت. اکنون اثبات می‌کنیم که برای $c > ۰$ هیچ تابع fی که در شرایط مسأله صدق کند وجود ندارد. قرار می‌دهیم $g = f' - f$. پس برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$g(x), g'(x) > c.$$

برای $y < x$ با توجه به قضیه‌ی مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند $z \in (y, x)$ موجود است که

$$g(x) - g(y) = g'(z)(x - y) > c(x - y).$$

لذا

$$g(x) - cx > -cy + g(y) > -cy + c = c(۱ - y).$$

حال اگر x را ثابت فرض کنیم و y را به سمت $-\infty$ میل دهیم به تناقض می‌رسیم چون سمت چپ نامساوی فوق مقداری ثابت است.

۹) گروه G مفروض است به طوری که در G همواره از $ab \neq ba$ نتیجه می‌شود $a^{2} = b^{2}$.

الف) ثابت کنید هر زیرگروه G نرمال است.

ب) مثالی از یک گروه غیر آبلی G بیاورید که شرط بالا را داشته باشد.

پاسخ:

راه حل اول:

فرض کنید H زیرگروهی از G بوده، $h \in H$ و g عضو دلخواهی در G باشد. اگر $ghg^{-1} = h$ پس $ghg^{-1} \in H$. در غیر این صورت $ghg^{-1} \neq h$ یعنی g و h جابجا نمی‌شوند پس $g^{2} = h^{2}$ هم‌چنین h و g^{-1} هم جابجا نمی‌شوند پس $g^{-2} = h^{2}$ پس $g^{2} = g^{-2}$ و در نتیجه $g^{4} = e$.

به طور مشابه چون g و h جابجا نمی‌شوند، g و $g^{-1}h$ هم جابه‌جا نمی‌شوند و در نتیجه $g^{2} = (g^{-1}h)^{2} = g^{-1}hg^{-1}h$ پس با ضرب طرفین در g^{2} و استفاده از رابطه‌ی $g^{4} = e$ داریم $e = ghg^{-1}h$ پس $ghg^{-1} = h^{-1} \in H$ بنابراین H نرمال است.

هم‌چنین گروه چهارگان‌های همیلتونی $Q_{8} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ مثالی غیرآبلی از گروهی است که در شرط‌های مسأله صدق می‌کند.

راه حل دوم:

به طور مشابه با حل اول، اگر g و h با هم جابه جا نشوند آنگاه gh و h هم جابه جا نمی‌شوند لذا $(gh)^{2} = h^{2}$ پس $ghg = h$ بنابراین $ghg^{-1} = hg^{-2} = h(g^{2})^{-1} = hh^{-2} = h^{-1} \in H$ پس H نرمال است.

(برگرفته شده از راه حل‌های دانشجویان)

۱۰) فرض کنید $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد به گونه‌ای که بر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $[0,1]$ مقادیر آن حقیقی است. ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)\in\mathbb{R}$.

پاسخ:

تابع $g(z)=\overline{f(\bar{z})}-f(z)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به بسط تیلور تابع f ، می‌توان نتیجه گرفت که g نیز تحلیلی است.

اکنون تابع تحلیلی g روی زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $[0,1]$ مانند A برابر 0 است. با توجه به این که $[0,1]$ فشرده است A دارای نقطه‌ای حدی مانند x_0 است. پس دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود است که $x_n\to x_0$ و تابع تحلیلی g روی $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_0\}$ برابر 0 است. بنابراین $g\equiv 0$. در نتیجه $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ برای هر $z\in\mathbb{C}$. حال برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم

$$f(x)=f(\bar{x})=\overline{f(x)}$$

و لذا $f(x)\in\mathbb{R}$.

۱۱) تابع $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را یک اَبَر چندجمله‌ای می‌نامیم اگر دنباله‌ی $P_1(x)$، $P_2(x)$، ... از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر عدد صحیح مانند x فقط تعدادی متناهی از $P_i(x)$ها ناصفر باشند و $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$.

الف) اگر $P_n(x) = x(x^2-1)(x^2-4)\dots(x^2-n^2)$، نشان دهید $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ یک اَبَرچندجمله‌ای است ولی هیچ چندجمله‌ای مانند $Q(x)$ وجود ندارد که برای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، $f(x) = Q(x)$.

ب) ثابت کنید یک اَبَرچندجمله‌ای ناصفر حداکثر تعداد متناهی ریشه در اعداد صحیح دارد.

پاسخ:

الف) چون هر m ریشه‌ی همه $P_n(x)$ها برای $n \geqslant |m|$ می‌باشد پس $P_n(x)$ها شرط مسأله را دارا هستند. حال با برهان خلف فرض کنید یک چندجمله‌ای درجه k مثل $Q(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = Q(x)$.

فرض کنید $n_\circ$ چنان باشد که $k-2 < \square\square\square P_{n_\circ} = 2n_\circ + 1 \leqslant k$ بنابراین

$$\sum_{n_\circ = n_\circ + 1}^{\infty} P_n(x) = Q(x) - \sum_{n=1}^{n_\circ} P_n(x).$$

حال سمت راست تساوی یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر k است که حداکثر k ریشه دارد ولی سمت چپ بیش از k ریشه دارد زیرا اعداد $0, 1, 2, \dots, k$ ریشه‌های سمت چپ تساوی هستند.

ب) فرض کنید اعداد صحیح $a_1, a_2, a_3, \dots$ ریشه‌های ابرچندجمله‌ای $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ باشند. برای هر عدد صحیح a، $P_n(a)$ها از جایی به بعد صفر هستند. بنابراین برای هر دوعدد صحیح a و b عددی مانند N وجود دارد که برای $n > N$، $P_n(a) = P_n(b) = 0$. بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ وجود دارد به طوری که $P(a) = f(a)$ و $P(b) = f(b)$.

بنابراین $b - a | f(b) - f(a)$. حال اگر برای $b \in \mathbb{Z}$، $f(b) \neq 0$ چون $f(a_j) = 0$ آنگاه برای هر j، $b - a_j | f(b)$ پس $f(b)$ بر بی‌نهایت عدد بخش‌پذیر است که این تناقض است.

۱۲) الف) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و متناهی باشد که بیش از $\frac{۲}{۳}$ اعضای آن خودتوان هستند. ثابت کنید همه‌ی عناصر R خودتوان هستند.

ب) ثابت کنید برای هر k، حلقه‌ای متناهی با بیش از k عضو وجود دارد که دقیقاً $\frac{۲}{۳}$ اعضای آن خودتوان هستند.

پاسخ:

الف) راه حل اول: مجموعه‌ی اعضای خودتوان R را با $B(R)$ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که هر ایدآل ماکسیمال M حداقل نیمی از اعضای خودتوان را دارد چون اگر $x^۲ = x$ پس $x(x-۱) = ۰$ پس یا x یا $x-۱$ عضو M هستند. بنابراین داریم: $|M| \geqslant \frac{۱}{۲}|B(R)| > \frac{۱}{۲}\frac{۲}{۳}|R|$ پس $|\frac{R}{M}| < ۳$ یعنی $|\frac{R}{M}| = ۲$ پس $۲(۱+M) = M$ یعنی $۲ \in M$ و در نتیجه $۲ \in J(R)$. حال از آنجا که $(۲+B(R)) \cap B(R) \neq \emptyset$ پس اعضای خودتوان $e_۱$ و $e_۲$ وجود دارند که

$$\begin{aligned}
&۲ + e_۱ = e_۲\\
&\Rightarrow ۴ + ۴e_۱ + e_۱ = e_۲ = ۲ + e_۱\\
&\Rightarrow ۲ + ۴e_۱ = ۰ \Rightarrow ۲(۱ + ۲e_۱) = ۰
\end{aligned}$$

اما $۲ \in J(R)$ پس $۱ + ۲e_۱$ معکوس پذیر است پس $۲ = ۰$. حال برای هر x دلخواه چون $(x + B(R)) \cap B(R) \neq \emptyset$ پس $a, b \in B(R)$ وجود دارند که $x = a + b$ چون $-۱ = ۱$ پس $x = a + b$ و بنابراین

$$x^۲ = a^۲ + b^۲ = a + b = x$$

یعنی هر x خودتوان است!

راه حل دوم:

فرض کنیم مسأله درست نباشد و R را حلقه‌ای غیر بولی با کمترین تعداد خودتوان می‌گیریم که $|\frac{R}{B(R)}| < \frac{۳}{۲}$. اگر $e \neq ۰, ۱$ خودتوانی در R باشد چون $R = Re \times R(۱-e)$ پس حداقل یکی از دو حلقه‌ی Re و $R(۱-e)$ غیر بولی هستند مثلاً Re اما $|\frac{Re}{B(Re)}| \leqslant |\frac{R}{B(R)}| < \frac{۳}{۲}$ و تعداد خودتوان‌های Re حداقل یکی کمتر از تعداد خودتوان‌های R است [چون $۱-e \notin Re$] که تناقض با انتخاب R دارد. پس $B(R) = \{۰, ۱\}$ و چون $|\frac{R}{B(R)}| < \frac{۳}{۲}$ پس $|R| < ۳$ یعنی $|R| = ۲$ پس R بولی است که باز هم تناقض است.

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۱۳۸۹/۲/۲

راه حل سوم:

فرض کنید n تعداد اعضای حلقه باشد و $B(R)$ را مجموعه‌ی اعضای خودتوان بگیرید. داریم: $|B(R)|+|-B(R)| > \frac{۲}{۳}n + \frac{۲}{۳}n = \frac{۴}{۳}n$. پس $|B(R)\cap(-B(R))| > \frac{n}{۳}$.

x را عضوی دلخواه بگیرید. داریم:

$$|x+[B(R)\cap(-B(R))]| + |B(R)| > \frac{n}{۳} + \frac{۲n}{۳} = n \Rightarrow (x+[B(R)\cap(-B(R))])\cap B(R) \neq \emptyset$$

پس عضو a وجود دارد که a و $-a$ و $x+a$ خودتوان هستند. داریم:

$$\begin{cases} a^۲ = a \\ (-a)^۲ = (-a) \end{cases} \Rightarrow a = -a \Rightarrow ۲a = ۰$$

$$x+a = (x+a)^۲ = x^۲ + ۲ax + a^۲ = x^۲ + a \Rightarrow x^۲ = x.$$

ب) به راحتی دیده می‌شود حلقه‌ی $R = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \cdots \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۳$ یک جواب مسأله است که در آن $\mathbb{Z}_۲$ ها به تعداد k مرتبه در هم ضرب شده‌اند.