



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



۷) فرض کنید تعدادی سنگریزه را به  $n$  قسمت با وزن‌های  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$  تقسیم کرده باشیم. بار دیگر همان سنگریزه‌ها را به  $n$  قسمت با وزن‌های  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$  تقسیم می‌کنیم. نشان دهید برای هر  $1 \leq k \leq n$  داریم

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k \leq v_1 + v_2 + \dots + v_k.$$

پاسخ:

می‌دانیم  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = A$  دو حالت را در نظر می‌گیریم

- ۱)  $w_k \leq v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_k \leq kw_k \leq kv_k \leq v_1 + v_2 + \dots + v_k$
- ۲)  $w_k > v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_k = A - (w_{k+1} + \dots + w_n) \leq A - (n - k)w_k \leq A - (n - k)v_k \leq A - (v_{k+1} + \dots + v_n) = v_1 + v_2 + \dots + v_k$



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



۸) همهی اعداد حقیقی مانند  $c$  را بیابید که برای آنها تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  موجود باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داشته باشیم

$$f''(x) > f'(x) + c, \quad f'(x) > f(x) + c.$$

**پاسخ:**

ادعا می‌کنیم پاسخ مسأله  $c \leq 0$  است. برای  $c \leq 0$  می‌توان تابع  $f(x) = e^{cx}$  را در نظر گرفت. اکنون اثبات می‌کنیم که برای  $c > 0$  هیچ تابع  $f$  که در شرایط مسأله صدق کند وجود ندارد. قرار می‌دهیم  $g = f' - f$  پس برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم

$$g(x), g'(x) > c.$$

برای  $y < x$  با توجه به قضیه‌ی مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند  $z \in (y, x)$  موجود است که

$$g(x) - g(y) = g'(z)(x - y) > c(x - y).$$

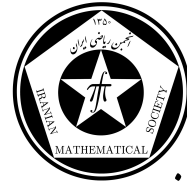
لذا

$$g(x) - cx > -cy + g(y) > -cy + c = c(1 - y).$$

حال اگر  $x$  را ثابت فرض کنیم و  $y$  را به سمت  $-\infty$  میل دهیم به تناقض می‌رسیم چون سمت چپ نامساوی فوق مقداری ثابت است.



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



انجمن ریاضی ایران

۹) گروه  $G$  مفروض است به طوری که در  $G$  همواره از  $ab \neq ba$  نتیجه می‌شود  $a^2 = b^2$ .  
الف) ثابت کنید هر زیرگروه  $G$  نرمال است.

ب) مثالی از یک گروه غیر آبدلی  $G$  بیاورید که شرط بالا را داشته باشد.

**پاسخ:**

راه حل اول:

فرض کنید  $H$  زیرگروهی از  $G$  بوده،  $h \in H$  و  $g$  عضو دلخواهی در  $G$  باشد. اگر  $ghg^{-1} = h$  پس  $ghg^{-1} \in H$ . در غیر این صورت  $ghg^{-1} \neq h$  یعنی  $g$  و  $h$  جابجا نمی‌شوند پس  $g^2 = h^2$  هم‌چنین  $h$  و  $g^{-1}$  هم جابجا نمی‌شوند پس  $g^{-2} = h^2$  پس  $g^2 = g^{-2}$  و در نتیجه  $g^4 = e$ .  
به طور مشابه چون  $g$  و  $h$  جابجا نمی‌شوند،  $g$  و  $g^{-1}h$  هم جابجا نمی‌شوند و در نتیجه  $g^2 = (g^{-1}h)^2$ .  
 $ghg^{-1}h$  پس با ضرب طرفین در  $g^2$  و استفاده از رابطه‌ی  $g^4 = e$  داریم  $e = ghg^{-1}h$  پس  $ghg^{-1} = h^{-1}$  بنابراین  $h^{-1} \in H$  نرمال است.

هم‌چنین گروه چهارگان‌های همیلتونی  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  مثالی غیر آبدلی از گروهی است که در شرط‌های مسأله صدق می‌کند.

راه حل دوم:

به طور مشابه با حل اول، اگر  $g$  و  $h$  با هم جابجا نشوند آنگاه  $gh$  و  $h$  هم جابجا نمی‌شوند لذا  $h^2 = (gh)^2$  پس  $ghg = h$  بنابراین  $h^{-1} \in H$  زیرا  $h^{-1} = hh^{-2} = h(g^2)^{-1} = hg^{-2} = ghg^{-1}$  پس  $H$  نرمال است.  
(برگرفته شده از راه حل‌های دانشجویان)



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



۱۰ فرض کنید  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی تحلیلی باشد به گونه‌ای که بر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از  $[0, 1]$  مقادیر آن حقیقی است. ثابت کنید برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) \in \mathbb{R}$ .

### پاسخ:

تابع  $g(z) = \overline{f(\bar{z})} - f(z)$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به بسط تیلور تابع  $f$ ، می‌توان نتیجه گرفت که  $g$  نیز تحلیلی است.

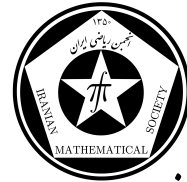
اکنون تابع تحلیلی  $g$  روی زیرمجموعه‌ای نامتناهی از  $[0, 1]$  مانند  $A$  برابر ۰ است. با توجه به این که  $[0, 1]$  فشرده است  $A$  دارای نقطه‌ای حدی مانند  $x$  است. پس دنباله‌ای مانند  $\{x_n\}$  در  $A$  موجود است که  $x_n \rightarrow x$  و تابع تحلیلی  $g$  روی  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  برابر ۰ است. بنابراین  $g \equiv 0$ . در نتیجه  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  برای هر  $z \in \mathbb{C}$  حال برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم

$$f(x) = f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$$

و لذا  $f(x) \in \mathbb{R}$ .



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



انجمن ریاضی ایران

(۱۱) تابع  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  را یک ابر چندجمله‌ای می‌نامیم اگر دنباله‌ی  $P_1(x), P_2(x), \dots$  از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر عدد صحیح مانند  $x$  فقط تعدادی متناهی از  $P_i(x)$ ‌ها ناصفر باشند و  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ .

الف) اگر  $P_n(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \dots (x^2 - n^2)$ ، نشان دهید  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  یک ابر چندجمله‌ای است ولی هیچ چندجمله‌ای مانند  $Q(x)$  وجود ندارد که برای هر  $x \in \mathbb{Z}$ ،  $f(x) = Q(x)$ .  
ب) ثابت کنید یک ابر چندجمله‌ای ناصفر حداکثر تعداد متناهی ریشه در اعداد صحیح دارد.

### پاسخ:

الف) چون هر  $m$  ریشه‌ی همه  $P_n(x)$ ‌ها برای  $|m| \geq n$  می‌باشد پس  $P_n(x)$ ‌ها شرط مسأله را دارا هستند. حال با برهان خلف فرض کنید یک چندجمله‌ای درجه  $k$  مثل  $Q(x)$  وجود داشته باشد به طوری که  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = Q(x)$

فرض کنید  $n_0$  چنان باشد که  $k - 2 < P_{n_0} = 2n_0 + 1 \leq k$  بنابراین

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} P_n(x) = Q(x) - \sum_{n=1}^{n_0} P_n(x).$$

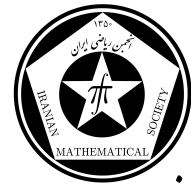
حال سمت راست تساوی یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر  $k$  است که حداکثر  $k$  ریشه دارد ولی سمت چپ بیش از  $k$  ریشه دارد زیرا اعداد  $0, 1, 2, \dots, k$  ریشه‌های سمت چپ تساوی هستند.

ب) فرض کنید اعداد صحیح  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ریشه‌های ابر چندجمله‌ای  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  باشند. برای هر عدد صحیح  $a$ ،  $P_n(a)$ ‌ها از جایی به بعد صفر هستند. بنابراین برای هر دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  عددی مانند  $N$  وجود دارد که برای  $n > N$ ،  $P_n(a) = P_n(b) = 0$ . بنابراین چندجمله‌ای  $P(x)$  وجود دارد به طوری که  $P(a) = f(a)$  و  $P(b) = f(b)$ .

بنابراین  $b - a \mid f(b) - f(a)$ . حال اگر برای  $b \in \mathbb{Z}$ ،  $f(b) \neq 0$  چون  $f(a_j) = 0$  آنگاه برای هر  $j$ ،  $b - a_j \mid f(b)$ . پس  $f(b)$  بر بی‌نهایت عدد بخش پذیر است که این تناقض است.



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



انجمن ریاضی ایران

(۱۲) الف) فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابجایی، یک‌دار و متناهی باشد که بیش از  $\frac{2}{3}$  اعضای آن خودتوان هستند. ثابت کنید همه‌ی عناصر  $R$  خودتوان هستند.

ب) ثابت کنید برای هر  $k$ ، حلقه‌ای متناهی با بیش از  $k$  عضو وجود دارد که دقیقاً  $\frac{2}{3}$  اعضای آن خودتوان هستند.

### پاسخ:

الف) راه حل اول: مجموعه‌ی اعضای خودتوان  $R$  را با  $B(R)$  نشان می‌دهیم. توجه کنیم که هر ایدال ماکسیمال  $M$  حداقل نیمی از اعضای خودتوان را دارد چون اگر  $x^2 = x$  پس  $x(x-1) = 0$  پس  $x$  یا  $x-1$  عضو  $M$  هستند. بنابراین داریم:  $\frac{1}{2}|B(R)| > \frac{1}{3}|R|$  پس  $|M| \geq \frac{1}{3}|B(R)| > \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}|R|$  یعنی  $|\frac{R}{M}| = 2$  پس  $2(1+M) = M$  یعنی  $2 \in M$  و در نتیجه  $2 \in J(R)$ . حال از آنجا که  $(2+B(R)) \cap B(R) \neq \emptyset$  پس اعضای خودتوان  $e_1$  و  $e_2$  وجود دارند که

$$\begin{aligned} 2 + e_1 &= e_2 \\ \Rightarrow 4 + 4e_1 + e_1 &= e_2 = 2 + e_1 \\ \Rightarrow 2 + 4e_1 &= 0 \Rightarrow 2(1 + 2e_1) = 0 \end{aligned}$$

اما  $2 \in J(R)$  پس  $1 + 2e_1$  معکوس پذیر است پس  $2 = 0$ . حال برای هر  $x$  دلخواه چون  $(x+B(R)) \cap B(R) \neq \emptyset$  پس  $a, b \in B(R)$  وجود دارند که  $x = a + b$  چون  $1 = -1$  پس  $x = a + b$  و بنابراین

$$x^2 = a^2 + b^2 = a + b = x$$

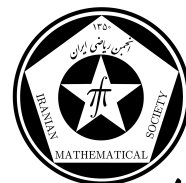
یعنی هر  $x$  خودتوان است!

راه حل دوم:

فرض کنیم مسأله درست نباشد و  $R$  را حلقه‌ای غیر بولی با کمترین تعداد خودتوان می‌گیریم که  $|\frac{R}{B(R)}| < \frac{3}{4}$ . اگر  $e \neq 0, 1$  خودتوانی در  $R$  باشد چون  $R = Re \times R(1-e)$  پس حداقل یکی از دو حلقه‌ی  $Re$  و  $R(1-e)$  غیر بولی هستند مثلاً  $Re$  اما  $|\frac{Re}{B(Re)}| \leq |\frac{R}{B(R)}| < \frac{3}{4}$  و تعداد خودتوان‌های  $Re$  حداقل یکی کمتر از تعداد خودتوان‌های  $R$  است [چون  $1-e \notin Re$ ] که تناقض با انتخاب  $R$  دارد. پس  $B(R) = \{0, 1\}$  و چون  $|\frac{R}{B(R)}| < \frac{3}{4}$  پس  $|R| < 3$  یعنی  $|R| = 2$  پس  $R$  بولی است که باز هم تناقض است.



پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۲/۲/۱۳۸۹



انجمن ریاضی ایران

راه حل سوم:

فرض کنید  $n$  تعداد اعضای حلقه باشد و  $B(R)$  را مجموعه‌ی اعضای خودتوان بگیریم. داریم:  $|B(R)| +$

$$|B(R) \cap (-B(R))| > \frac{n}{3} \text{ پس } |-B(R)| > \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}n$$

$x$  را عضوی دلخواه بگیریم. داریم:

$$|x + [B(R) \cap (-B(R))]| + |B(R)| > \frac{n}{3} + \frac{2n}{3} = n \Rightarrow (x + [B(R) \cap (-B(R))]) \cap B(R) \neq \emptyset$$

پس عضو  $a$  وجود دارد که  $a$  و  $-a$  و  $x+a$  خودتوان هستند. داریم:

$$\begin{cases} a^2 = a \\ (-a)^2 = (-a) \end{cases} \Rightarrow a = -a \Rightarrow 2a = 0$$

$$x + a = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + a \Rightarrow x^2 = x.$$

(ب) به راحتی دیده می‌شود حلقه‌ی  $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  یک جواب مسأله است که در آن

$\mathbb{Z}_2$  ها به تعداد  $k$  مرتبه در هم ضرب شده‌اند.