بارم سوال ۱)

راه معمول اعلام شده

الف) بدست آوردن $\int_a^{f(a)} f(t)\,dt = 0 \quad \forall a:$ (۵ **نمره)**

ب) اثبات $f(0) = 0$ (۷ **نمره)**

ج) قسمت پایانی راه حل (۸ **نمره)**

راه دوم: استفاده از فرض اضافی پیوستگی برای f و کاربرد قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها روی فواصل مجزا به‌فرم $\int_a^{f(a)} f(t)\,dt = 0$ و به‌دست آوردن ریشه‌های متمایز برای f و تناقض یا اکیداً صعودی بودن f (۱۵ **نمره)**

-موارد جزئی و بدیهی مثل اینکه هر تابع اکیداً صعودی یک به یک است نمره ندارد.

بارم سوال ۲)

الف) ابتدا دقت شود که G دوری نیست زیرا هر گروه دوری نامتناهی دارای زیرگروه نابدیهی و نامتناهی است (**۵ نمره**).
اکنون فرض کنید $e \neq x \in G$ آنگاه طبق مشاهده بالا، $y \in G$ وجود دارد که $y \notin \langle x \rangle$ و لذا داریم

$$\langle e \rangle \neq \langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle$$

فرض کنید $\langle x, y \rangle \neq G$ آنگاه چون مرتبه زیرگروه‌های سره متناهی و از مرتبه اول است، داریم

$$۱ \neq |\langle x \rangle| \,\big|\, |\langle x, y \rangle|$$

لذا $\langle x \rangle = \langle x, y \rangle$ که تناقض است. (**۵ نمره**)

ب) فرض کنید N یک زیرگروه نرمال نابدیهی G باشد و $a \notin N$. آنگاه

$$\langle e \rangle \neq N \subsetneq \langle a \rangle N$$

و مشابه استدلال بالا $G = \langle a\rangle N$. **(۵ نمره)** حال داریم

$$|\langle a\rangle N| \leq |\langle a\rangle||N|$$

و لذا

$$|G| \leq |\langle a\rangle||N| < \infty$$

که تناقض با فرض نامتناهی بودن G است **(۵ نمره)**.

$(*)$ اثبات‌های دیگر هم دیده شد و به تناسب نمره داده شده است.

بارم سوال ۳)

(۱) تعریف گراف مرتبه n مطابق راه‌حل (۶ **نمره**).

(۲) از یال‌های با برچسب یکسان همه به جز یکی حذف شوند (۴ **نمره**).

(۳) استفاده از قضیه وجود دور در گراف مرتبه n با اندازه حداقل n (۳ **نمره**).

(۴) استدلال نهایی برای رسیدن به تناقض (به روش برهان خلف) یا حکم مسأله در روش مستقیم (۷ **نمره**).

($*$) استدلال ناقص در بند (۴)، حداکثر (۲ **نمره**) دارد.

بارم سوال۴)

(۸ **نمره**) با استقرا ثابت می‌شود که

$$\forall m \geq ۱ \qquad f(xa^m) = xa^{m-۱}xa^{m-۲}\cdots axf(x)$$

فرض کنید $n = o(a)$. با استفاده از تساوی بالا برای $m = n$ و حذف $f(x)$ نتیجه می‌شود

$$(*) \qquad \forall x \in G \qquad xa^{n-۱}xa^{n-۲}\cdots ax = e$$

(۲ **نمره**) حال با فرض $x = e$ داریم $a^{\frac{n(n-۱)}{۲}} = e$ و لذا $n|\frac{n(n-۱)}{۲}$ که نتیجه می‌دهد n فرد است.

(۸ **نمره**) قرار دهید $n = ۲k + ۱$. اگر $e \neq x \in G$ و $x^۲ = e$ (و یا $x = x^{-۱}$) آنگاه طبق رابطه (*)

$$(xa^{۲k}x\cdots xa^{k+۱})x(a^kx\cdots ax) = e$$

قرار می‌دهیم $g = xa^{۲k}x\cdots xa^{k+۱}$ با توجه به اینکه $(a^i)^{-۱} = a^{n-i}$ داریم $g^{-۱} = a^kx\cdots ax$ و لذا $gxg^{-۱} = e$ یا $x = e$، تناقض. بنابراین G عنصری از مرتبه ۲ ندارد

(۲ **نمره**) طبق قضیه کوشی $|G|$ فرد است.

ملاحظات

* اشاره به قضیه کوشی (۱ **نمره**)
* محاسبه $f(a^n) = a^{\binom{n}{۲}}f(a)$ با استقراء (۳ **نمره**)
* اثبات اینکه $o(a)$ فرد است(۲**نمره**)
* بقیه موارد **نمره** خاصی در نظر گرفته نشده است.

بارم سوال ۵)

(<u>۱۰</u> **نمره)** تعریف تابع g به فرم راه حل اصلی یا روش‌های دیگر

(<u>۵</u> **نمره)** چک کردن شرط $|f(x) - g(x)| \leq ۱$

(<u>۵</u> **نمره)** چک کردن شرط $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$

$(*)$ به پاسخ در حالت‌های خاص مانند در نظر گرفتن فضای $X = \mathbb{R}$ یا یک متر خاص نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

بارم سوال ۶

(∗) در استقرا، اگر حکم را تعمیم نداده باشند، باید در مورد $(a_1, \cdots, a_k) = 1$ در تحدید شرایط بین حکم و فرض حتما صحبت و بررسی کرده باشند. نکته مهم در کل، بررسی شرایط سوال در فرض استقرا است.

(∗) پایه استقرا (<u>۴</u> **نمره**) دارد. اشکال محاسباتی ۱ نمره کم شده است.

(∗) حالت $n = 2$ بدون اشاره به استقرا در همان ابتدا (<u>۲</u> **نمره**) دارد.

(∗) نوشتن قضیه بِزو نمره ندارد!

(∗) مثال‌های عددی نمره ندارد.

(∗) معادل سازی و بخش عبارت $\det$ بر حسب سطر اول به این صورت که کافی است $\sum a_i x_i = 1$ را برای پیدا کردن x_iها حل کنیم، نمره ندارد.

(∗) حل مسأله برای $n = 3$ (با استفاده از $n = 2 \to n = 3$) (<u>۳</u> **نمره**) دارد.

(∗) استقرا $n \to 2n$ کامل باشد، (<u>۷</u> **نمره**) دارد.

(∗) اگر $n = 2$ را نوشته باشد و در ادامه به استقرا اشاره کرده باشد، $n = 2$ به عنوان پایه استقراء در نظر گرفته نمی‌شود مگر اینکه اشاره مستقیم کرده باشد.

بارم سوال ۷) بیان و اثبات این نکته که اشتراک هر قرص با شعاع کمتر از یک با محیط قرص واحد یک کمان است که طول آن کمتر از π است. (**۱۲ نمره**)

- تکمیل راه حل (برهان خلف یا برهان مستقیم) (**۸ نمره**)
- بیان این نکته که دو سر هیچ قطری متعلق به یک قرص با شعاع کمتر از یک نیستند تنها ۲ نمره دارد.

بارم سوال ۸)

راه اول ابتدا بسط مکلورن f را نوشته و از اتحاد $f(z)=f(z-z^{۲})$ استفاده کرده و نشان داده شود

$$f^{(n)}(\circ)=\circ \qquad n=۱,۲,\ldots$$

با توجه به یک مرحله‌ای بودن این راه حل، فقط به پاسخ‌های کامل نمره داده شده است.

راه دوم (اصل ماکسیمم قدر مطلق) برای R به‌قدر کافی بزرگ نشان داده می‌شود ماکسیمم f می‌تواند در داخل دایره‌ی $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq R\}$ رخ دهد و این اثبات می‌کند که f تابع ثابت است.

ایده (**۵ نمره**)

اثبات با جزئیات نمره کامل

راه سوم (استفاده از قضیه لیوویل) اثبات کرانداری f روی کل $\mathbb{C}$: نشان داده می‌شود برای ، برد f روی $\mathbb{C}$ برابر برد f روی $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leq R\}$ می‌باشد و لذا f کراندار می‌شود.

ایده (**۵ نمره**)

اثبات با جزئیات نمره کامل

راه چهارم ساختن دنباله‌ای با جملات متمایز و همگرا که f روی آن دنباله ثابت باشد.

ایده (**۵ نمره**)

معرفی دنباله و اثبات با جزئیات نمره کامل

بارم سوال ۹) قرار دهید $A=(a_{ij})$ و $B=A+A^t$. لذا $B^t=B$، از طرفی طبق فرض مسأله $B^۲=B$. بنابراین $BB^t=B$. حال اگر $B=(b_{ij})$ و $v_۱,\cdots,v_n$ بردارهای سطری B باشند آنگاه

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \frac{۱}{۲}\sum_{i,j} b_{ij} = \frac{۱}{۲}\sum_{i,j}\langle v_i, v_j\rangle = \frac{۱}{۲}\langle \sum_i v_i,\ \sum_j v_j\rangle = \frac{۱}{۲}|\sum_i v_i|^۲ \geq ۰.$$

۱- اثبات مسأله برای ماتریس‌های ۲×۲. (۲ یا ۱ **نمره**) (برحسب جزئیات اثبات)

۲- اشاره به متقارن بودن ماتریس $B=A+A^T$ (۱ **نمره**)

۳- حل مسأله برای ماتریس‌های وارون‌پذیر. (۲ یا ۱ **نمره**) (برحسب جزئیات اثبات)

۴- جمع درایه‌های B دو برابر A است. (۱ **نمره**)

بارم سوال ۱۰)

۱- معرفی دنباله $\{\alpha_n\}$ به صورت کامل (<u>۱۵</u> **نمره)**

۲- بررسی چگال بودن دنباله $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ به صورت کامل (<u>۵</u> **نمره)**

بارم سوال ۱۱) توضیحات دقیق در باب خواص ماتریس تصویر x روی W: **(۵ نمره)**

توصیف غیردقیق **(۲ نمره)**

اشاره به خطی بودن E در محاسبات صحیح و مرتبط **(۱ نمره)**

بحث در باب عبارت‌های درون E **(۲ نمره)**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{dist}(x,W)^{۲}) &= \mathbb{E}((d(x,Px))^{۲}) \\
&= \mathbb{E}((x-Px).(x-Px)) && \text{۳ نمره} \\
&= \ldots = \mathbb{E}(x^t x - x^t P^t P x) && \text{۲ نمره} \\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=۱}^{n} x_i^{۲} - \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} x_i P_{ij} x_j)) && \text{۱ نمره} \\
&= \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(x_i^{۲}) - \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} \mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) && \text{۱ نمره} \\
&= n - \sum_{i=۱}^{n} P_{ii} && \text{۲نمره}
\end{aligned}$$

توصیف همراه با محاسبه حالت خاص **(۲ نمره)**

جواب پایانی به تنهایی نمره ندارد.

بارم سوال ۱۲)

راه حل کامل (۲۰ **نمره**) دارد.