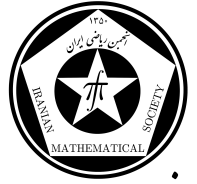




وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۷. ثابت کنید با دو قرص به شعاع کمتر از ۱ نمی توان قرصی به شعاع ۱ را پوشاند. (منظور از قرص، گوی بسته در  $\mathbb{R}^2$  است).

۸. تابع  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تحلیلی و برای هر  $z \in \mathbb{C}$ ،  $f(z) = f(z - z^2)$  ثابت کنید  $f$  یک تابع ثابت است.

۹. فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی با درایه های حقیقی است به طوری که ماتریس  $A + A^t$  خودتوان باشد. ثابت کنید مجموع همه درایه های  $A$  عددی نامنفی است. (ماتریس  $B$  را خودتوان گوئیم هرگاه  $B^2 = B$ ).

۱۰. ثابت کنید دنباله  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  از اعداد  $\{-1, +1\}$  وجود دارد به طوری که اگر برای  $n \geq 1$  تعریف کنیم  $x_n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n}{n}$  آنگاه مجموعه  $\{x_n \mid n \geq 1\}$  در  $\mathbb{R}$  چگال است.

۱۱. فضای  $\mathbb{R}^n$  با متر اقلیدسی  $d$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $x$  یک بردار تصادفی در  $\mathbb{R}^n$  است که هر مولفه آن به طور مستقل با احتمال  $\frac{1}{2}$  برابر ۱ و با احتمال  $\frac{1}{2}$  برابر  $-1$  است. فرض کنید  $W$  یک زیرفضای  $k$  بُعدی از  $\mathbb{R}^n$  باشد. مطلوب است محاسبه امید ریاضی  $(\text{dist}(x, W))^2$  که در آن  $\text{dist}(x, W) = \inf\{d(x, y) : y \in W\}$ .

۱۲. فرض کنید  $R$  یک دامنه (حوزه) صحیح باشد به طوری که هر چندجمله ای تکین در  $R[x]$  یک ریشه در  $R$  داشته باشد و  $P$  و  $Q$  دو ایدآل اول در  $R$  باشند. برای هر  $a, b \in R$  که  $ab \in P + Q$ ، ثابت کنید  $a \in P + Q$  یا  $b \in P + Q$ .

موفق باشید