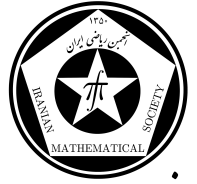




وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

آزمون نوبت اول  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷



انجمن ریاضی ایران

۱. فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی اکیداً صعودی است که برای هر  $a, b \in \mathbb{R}$ ،

$$\int_a^{f(b)} f(t) dt = \int_{f(a)}^b f(t) dt$$

ثابت کنید برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) = x$ .

۲. فرض کنید  $G$  یک گروه نامتناهی باشد به طوری که مرتبه هر زیرگروه نابديهی آن عددی اول است. ثابت کنید

الف)  $G$  توسط ۲ عنصر تولید می شود،

ب)  $G$  یک گروه ساده است (گروه  $G$  ساده است هرگاه فاقد زیرگروه نرمال نابديهی باشد).

۳. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  اعداد طبیعی متمایز هستند. نشان دهید مجموعه

$$A = \left\{ \frac{a_i}{a_j} \mid 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

دارای حداکثر  $n - 1$  عدد اول متمایز است.

۴. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد. اگر یک تابع  $f : G \rightarrow G$  و  $a \in G$  موجود باشد به طوری که

$$\forall x \in G \quad f(xa) = xf(x)$$

ثابت کنید مرتبه  $G$  فرد است.

۵. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و تابع  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  دارای این خاصیت است که برای هر

$$x, y \in X \quad |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) + 1$$

برای هر  $x, y \in X$  داشته باشیم

$$|g(x) - f(x)| \leq 1, \quad |g(x) - g(y)| \leq d(x, y)$$

۶. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  اعداد طبیعی هستند که بزرگترین مقسوم علیه مشترک همه آنها

۱ است. ثابت کنید می توان ماتریسی  $n \times n$  با درایه های صحیح و با دترمینان ۱ یافت که سطر

اول آن  $[a_1 \dots a_n]$  باشد.

موفق باشید