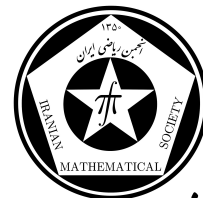




وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت اول
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷



انجمن ریاضی ایران

(۱) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی است که برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ،

$$\int_a^{f(b)} f(t) dt = \int_{f(a)}^b f(t) dt$$

ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = x$.

پاسخ: اگر در رابطه صورت مسأله مقدار a, b را برابر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\int_a^{f(a)} f(t) dt = \int_{f(a)}^a f(t) dt = - \int_a^{f(a)} f(t) dt \Rightarrow \int_a^{f(a)} f(t) dt = 0.$$

ادعا می‌کنیم $f(\circ) = \circ$. اگر $f(\circ) < \circ$ برای هر $t \in (\circ, f(\circ))$ داریم $f(\circ) < f(t)$ پس

$$0 = \int_{\circ}^{f(\circ)} f(t) dt > \int_{\circ}^{f(\circ)} f(\circ) dt = f(\circ)^2 > 0.$$

که تناقض است. به همین ترتیب اگر $f(\circ) > \circ$ برای هر $t \in (f(\circ), \circ)$ داریم $f(t) < f(\circ)$ و بنابراین

$$0 = \int_{f(\circ)}^{\circ} f(t) dt < \int_{f(\circ)}^{\circ} f(\circ) dt = -f(\circ)^2 < 0.$$

که تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم $f(\circ) = \circ$.

از سوی دیگر با توجه به اکیداً صعودی بودن f برای هر $x > \circ$ داریم $f(x) > f(\circ) = \circ$ و برای

هر $x < \circ$ داریم $f(x) < f(\circ) = \circ$. حال اگر $f(a) \neq a$ چون $\int_a^{f(a)} f(t) dt = 0$ و برای همه مقادیر

t بین $a, f(a)$ علامت $f(t)$ با a یکسان است، مقدار انتگرال نمی‌تواند برابر صفر باشد که تناقض

است. پس برای هر a ، $f(a) = a$.

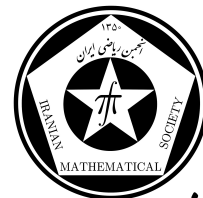
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت اول
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷



انجمن ریاضی ایران

۲) فرض کنید G یک گروه نامتناهی باشد به طوری که مرتبه هر زیرگروه نابديهی آن عددی اول است. ثابت کنید

الف) G توسط ۲ عنصر تولید می شود،

ب) G یک گروه ساده است (گروه G ساده است هرگاه فاقد زیرگروه نرمال نابديهی باشد).

پاسخ: نکته ۱. G دوری نیست زیرا هر گروه دوری و نامتناهی دارای زیرگروه نابديهی و نامتناهی است.

نکته ۲. اگر H زیرگروه نابديهی از G باشد و K یک زیرگروه G و بطور سره شامل H باشد آنگاه $G = K$ زیرا اگر $K \neq G$ آنگاه $|K| \mid |H|$ و لذا $H = K$.

الف) اگر $x \in G, x \neq e$ ، آنگاه طبق نکته ۱، $y \in G$ هست که $y \notin \langle x \rangle$ و لذا

$$\langle e \rangle \neq \langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle.$$

پس طبق نکته ۲، $G = \langle x, y \rangle$.

ب) اگر N زیرگروه نرمال نابديهی از G باشد و $a \notin N$ آنگاه $a \in N \subsetneq \langle a \rangle N \subsetneq G$ و لذا طبق نکته ۲ داریم $G = \langle a \rangle N$ ، بنابراین $|G| = |\langle a \rangle| |N|$ که خلاف فرض است.

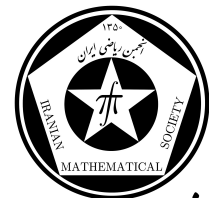
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت اول
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷



انجمن ریاضی ایران

۳) فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n اعداد طبیعی متمایز هستند. نشان دهید مجموعه

$$A = \left\{ \frac{a_i}{a_j} \mid 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

دارای حداکثر $n - 1$ عدد اول متمایز است.

پاسخ: با برهان خلف فرض کنید حداقل n عدد اول متمایز به صورت $\frac{a_i}{a_j}$ قابل نوشتن باشند. فرض کنید این اعداد اول p_1, \dots, p_n باشند. گراف n راسی G با رئوس a_1, a_2, \dots, a_n را به صورت زیر می‌سازیم. به ازای هر عدد اول p_i می‌دانیم که دو عدد مانند a_j, a_k که $1 \leq j, k \leq n$ وجود دارند به طوری که $p_i = \frac{a_j}{a_k}$. ممکن است تعداد جفت اعداد a_j, a_k با این خاصیت، بیش از یک جفت باشد. در این صورت فقط یک جفت از این اعداد را در نظر گرفته و در گراف G آنها را به یکدیگر متصل می‌کنیم. بنابراین گراف G شامل n یال و n راس است و لذا حتماً یک دور مانند a_{i_1}, \dots, a_{i_m} دارد. حال دقت کنید که حاصلضرب $\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \times \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \times \dots \times \frac{a_{i_m}}{a_{i_1}}$ از یک طرف برابر ۱ است و از طرف دیگر برابر است با حاصلضرب m عدد که هر کدام یا یک عدد اول هست یا وارون یک عدد اول و همگی این اعداد اول نیز متمایز هستند. این تناقض درستی حکم مساله را نشان می‌دهد.

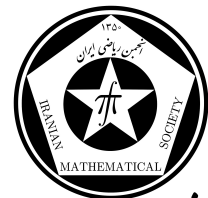
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت اول
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷



انجمن ریاضی ایران

(۴) فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. اگر یک تابع $f : G \rightarrow G$ و $a \in G$ موجود باشد به طوری که

$$\forall x \in G \quad f(xa) = xf(x)$$

ثابت کنید مرتبه G فرد است.

پاسخ:

با استقرا ثابت می شود که

$$\forall m \geq 1 \quad f(xa^m) = xa^{m-1}xa^{m-2} \dots axf(x)$$

فرض کنید $n = o(a)$. با استفاده از تساوی بالا برای $m = n$ و حذف $f(x)$ نتیجه می شود

$$(*) \quad \forall x \in G \quad xa^{n-1}xa^{n-2} \dots ax = e$$

حال با فرض $x = e$ داریم $a^{\frac{n(n-1)}{2}} = e$ و لذا $n \mid \frac{n(n-1)}{2}$ که نتیجه می دهد n فرد است. قرار دهید

$n = 2k + 1$ اگر $x \in G$ و $x \neq e$ و $x^2 = e$ (و یا $x = x^{-1}$) آنگاه طبق رابطه (*)

$$(xa^{2k}x \dots xa^{k+1})x(a^kx \dots ax) = e$$

قرار می دهیم $g = xa^{2k}x \dots xa^{k+1}$ با توجه به اینکه $(a^i)^{-1} = a^{n-i}$ داریم $g^{-1} = a^kx \dots ax$ و لذا

$g^{-1} = e$ یا $x = e$ تناقض. بنابراین G عنصری از مرتبه ۲ ندارد و طبق قضیه کوشی $|G|$ فرد است.

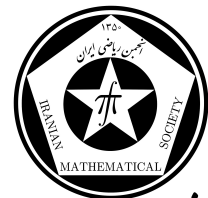
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت اول
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷



انجمن ریاضی ایران

(۵) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که برای هر $x, y \in X$ ، $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) + 1$. ثابت کنید تابع $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$|g(x) - f(x)| \leq 1, \quad |g(x) - g(y)| \leq d(x, y)$$

پاسخ: تعریف کنید

$$g(a) = \inf \{ f(x) + d(x, a) : x \in X \}.$$

ادعا می‌کنیم تابع g خاصیت مورد نظر را دارد. اولاً برای هر $a, b \in X$ ، توجه کنید که

$$f(x) + d(x, a) \leq f(x) + d(x, b) + d(b, a).$$

پس با اینفیمم گرفتن از دو طرف نابرابری داریم

$$g(a) \leq g(b) + d(b, a),$$

معادلاً $g(a) - g(b) \leq d(a, b)$. به دلیل تقارن a, b در رابطه اخیر به طور مشابه $g(b) - g(a) \leq d(a, b)$ نیز برقرار و بنابراین برای هر $a, b \in X$

$$|g(a) - g(b)| \leq d(a, b).$$

برای اثبات ویژگی دیگر g ، توجه کنید که از یک طرف $g(a) \leq f(a) + d(a, a) = f(a)$ و از طرف دیگر، برای هر $a, x \in X$

$$f(x) - f(a) \geq -d(x, a) - 1,$$

که ایجاب می‌کند

$$f(x) + d(x, a) \geq f(a) - 1.$$

اگر در این رابطه a را تثبیت کنیم و از سمت بزرگ‌تر روی همه $x \in X$ اینفیمم بگیریم، طبق تعریف g نتیجه می‌شود $g(a) \geq f(a) - 1$. بنابراین در کل $f(a) \geq g(a) \geq f(a) - 1$ و اثبات تمام است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

