پاسخ سوالات آزمون نوبت اول
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۲/۴/۲۷

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ، زنجان

انجمن ریاضی ایران

۱) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی است که برای هر $a,b\in\mathbb{R}$،

$$\int_a^{f(b)} f(t)dt=\int_{f(a)}^{b} f(t)dt$$

ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=x$.

پاسخ: اگر در رابطه صورت مسأله مقدار a,b را برابر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t=\int_{f(a)}^{a} f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t=0.$$

ادعا می‌کنیم $f(0)=0$. اگر $0<f(0)$ برای هر $t\in(0,f(0))$ داریم $f(0)<f(t)$ پس

$$0=\int_0^{f(0)} f(t)\mathrm{d}t>\int_0^{f(0)} f(0)\mathrm{d}t=f(0)^2>0.$$

که تناقض است. به همین ترتیب اگر $f(0)<0$ برای هر $t\in(f(0),0)$، $f(t)<f(0)$ و بنابراین

$$0=\int_{f(0)}^{0} f(t)\mathrm{d}t<\int_{f(0)}^{0} f(0)\mathrm{d}t=-f(0)^2<0.$$

که تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم $f(0)=0$.

از سوی دیگر با توجه به اکیداً صعودی بودن f برای هر $x>0$ داریم $f(x)>f(0)=0$ و برای هر $x<0$ داریم $f(x)<f(0)=0$. حال اگر $f(a)\neq a$ چون $\int_a^{f(a)} f(t)\mathrm{d}t=0$ و برای همه مقادیر t بین $a,f(a)$ علامت $f(t)$ با a یکسان است، مقدار انتگرال نمی‌تواند برابر صفر باشد که تناقض است. پس برای هر a، $f(a)=a$.

۲) فرض کنید G یک گروه نامتناهی باشد به‌طوری‌که مرتبهٔ هر زیرگروه نابدیهی آن عددی اول است. ثابت کنید

الف) G توسط ۲ عنصر تولید می‌شود،

ب) G یک گروه ساده است (گروه G ساده است هرگاه فاقد زیرگروه نرمال نابدیهی باشد).

پاسخ: نکته ۱. G دوری نیست زیرا هر گروه دوری و نامتناهی دارای زیرگروه نابدیهی و نامتناهی است.

نکته ۲. اگر H زیرگروه نابدیهی از G باشد و K یک زیرگروه G و بطور سره شامل H باشد آنگاه $K = G$ زیرا اگر $K \neq G$ آنگاه $|K| \mid |H| \neq 1$ و لذا $H = K$.

الف) اگر $e \neq x \in G$، آنگاه طبق نکته ۱، $y \in G$ هست که $y \notin <x>$ و لذا

$$<e> \neq <x> \subsetneq <x, y> .$$

پس طبق نکته ۲، $G = <x, y>$.

ب) اگر N زیرگروه نرمال نابدیهی از G باشد و $a \notin N$ آنگاه $<e> \neq N \subsetneq <a> N$ و لذا طبق نکته ۲ داریم $G = <a> N$ ، بنابراین $|G| \leq |<a>||N| < +\infty$ که خلاف فرض است.

۳) فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعداد طبیعی متمایز هستند. نشان دهید مجموعه

$$A = \{\frac{a_i}{a_j} | 1 \leq i, j \leq n\}$$

دارای حداکثر $n-1$ عدد اول متمایز است.

پاسخ: با برهان خلف فرض کنید حداقل n عدد اول متمایز به صورت $\frac{a_i}{a_j}$ قابل نوشتن باشند. فرض کنید این اعداد اول $p_1, \ldots, p_n$ باشند. گراف G با n راسی با رئوس $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را به صورت زیر می‌سازیم. به ازای هر عدد اول p_i، می‌دانیم که دو عدد مانند a_j, a_k که $1 \leq j, k \leq n$ وجود دارند به‌طوری‌که $p_i = \frac{a_j}{a_k}$. ممکن است تعداد جفت اعداد a_j, a_k با این خاصیت، بیش از یک جفت باشد. در این صورت فقط یک جفت از این اعداد را در نظر گرفته و در گراف G آنها را به یکدیگر متصل می‌کنیم. بنابراین گراف G شامل n یال و n راس است و لذا حتما یک دور مانند $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ دارد. حال دقت کنید که حاصلضرب $\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \times \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \times \cdots \frac{a_{i_m}}{a_{i_1}}$ از یک طرف برابر ۱ است و از طرف دیگر برابر است با حاصلضرب m عدد که هر کدام یا یک عدد اول هست یا وارون یک عدد اول و همگی این اعداد اول نیز متمایز هستند. این تناقض درستی حکم مساله را نشان می‌دهد.

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ، زنجان

۴) فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. اگر یک تابع $f : G \to G$ و $a \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\forall x \in G \qquad f(xa) = xf(x)$$

ثابت کنید مرتبه G فرد است.

پاسخ:

با استقرا ثابت می‌شود که

$$\forall m \geq 1 \quad f(xa^m) = xa^{m-1}xa^{m-2}\cdots axf(x)$$

فرض کنید $n = o(a)$. با استفاده از تساوی بالا برای $m = n$ و حذف $f(x)$ نتیجه می‌شود

$$(*) \quad \forall x \in G \quad xa^{n-1}xa^{n-2}\cdots ax = e$$

حال با فرض $x = e$ داریم $a^{\frac{n(n-1)}{2}} = e$ و لذا $n|\frac{n(n-1)}{2}$ که نتیجه می‌دهد n فرد است. قرار دهید $n = 2k + 1$. اگر $e \neq x \in G$ و $x^2 = e$ (و یا $x = x^{-1}$) آنگاه طبق رابطه $(*)$

$$(xa^{2k}x\cdots xa^{k+1})x(a^kx\cdots ax) = e$$

قرار می‌دهیم $g = xa^{2k}x\cdots xa^{k+1}$ با توجه به اینکه $(a^i)^{-1} = a^{n-i}$ داریم $g^{-1} = a^kx\cdots ax$ و لذا $gxg^{-1} = e$ یا $x = e$، تناقض. بنابراین G عنصری از مرتبه ۲ ندارد و طبق قضیه کوشی $|G|$ فرد است.

۵) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و تابع $f:X\to\mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که برای هر $x,y\in X$، $|f(x)-f(y)|\le d(x,y)+۱$. ثابت کنید تابع $g:X\to\mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$|g(x)-f(x)|\le ۱,\qquad |g(x)-g(y)|\le d(x,y)$$

پاسخ: تعریف کنید

$$g(a)=\inf\{f(x)+d(x,a):x\in X\}.$$

ادعا می‌کنیم تابع g خاصیت مورد نظر را دارد. اولاً برای هر $a,b\in X$، توجه کنید که

$$f(x)+d(x,a)\le f(x)+d(x,b)+d(b,a).$$

پس با اینفیمم گرفتن از دو طرف نابرابری داریم

$$g(a)\le g(b)+d(b,a),$$

معادلاً $g(a)-g(b)\le d(a,b)$. به دلیل تقارن a,b در رابطه اخیر به طور مشابه $g(b)-g(a)\le d(a,b)$ نیز برقرار و بنابراین برای هر $a,b\in X$

$$|g(a)-g(b)|\le d(a,b).$$

برای اثبات ویژگی دیگر g، توجه کنید که از یک طرف $g(a)\le f(a)+d(a,a)=f(a)$ و از طرف دیگر، برای هر $a,x\in X$،

$$f(x)-f(a)\ge -d(x,a)-۱,$$

که ایجاب می‌کند

$$f(x)+d(x,a)\ge f(a)-۱.$$

اگر در این رابطه a را تثبیت کنیم و از سمت بزرگ‌تر روی همه $x\in X$ اینفیمم بگیریم، طبق تعریف g نتیجه می‌شود $g(a)\ge f(a)-۱$. بنابراین در کل $f(a)\ge g(a)\ge f(a)-۱$ و اثبات تمام است.

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ، زنجان

انجمن ریاضی ایران

۶) فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعداد طبیعی هستند که بزرگترین مقسوم علیه مشترک همهٔ آن‌ها ۱ است. ثابت کنید می‌توان ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های صحیح و با دترمینان ۱ یافت که سطر اول آن $[a_1 \dots a_n]$ باشد.

پاسخ: حالت کلی‌تر حکم را با فرض اینکه بزرگترین مقسوم علیه مشترک $a_1, a_2, \dots, a_n$ برابر با d باشد ثابت می‌کنیم. به عبارت دیگر ثابت می‌کنیم می‌توان ماتریس $n \times n$ که سطر اول آن به شکل $[a_1 \dots a_n]$ و دترمینان آن برابر d باشد، پیدا کرد. اثبات به کمک استقرا روی n خواهد بود.

پایه استقرا: حکم برای $n = 2$ برقرار است زیرا اگر $\gcd(a_1, a_2)$ برابر d باشد، آنگاه اعداد صحیحی چون s و t وجود دارند که داریم $sa_1 + ta_2 = d$. کافی است ماتریس $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -t & s \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

حال فرض کنیم حکم برای $n-1$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای n نیز برقرار است. اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ برابر با e باشد، آنگاه می‌توان ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ مانند B_{n-1} یافت که سطر اول آن به شکل $[a_1 a_2 \dots a_{n-1}]$ باشد و دترمینان آن برابر e باشد. بنابراین B_{n-1} به شکل زیر خواهد بود

$$B_{n-1} = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \hline & & & \\ & A_{(n-2)\times(n-1)} & & \\ & & & \end{array}\right]$$

که در آن $A_{(n-2)\times(n-1)}$ یک ماتریس $(n-2) \times (n-1)$ با درایه‌های صحیح است. با توجه به اینکه بزرگترین مقسوم علیه مشترک a_n و e برابر d است، می‌توان اعداد صحیحی مانند s, t یافت که ماتریس

$$B_n = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \hline & & & & 0 \\ & A_{(n-2)\times(n-1)} & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline s\frac{a_1}{e} & s\frac{a_2}{e} & \cdots & s\frac{a_{n-1}}{e} & t \end{array}\right]$$

دارای دترمینان d باشد.