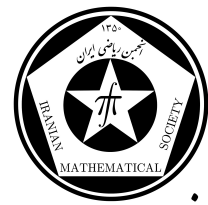




وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۷) ثابت کنید با دو قرص به شعاع کمتر از ۱ نمی‌توان قرصی به شعاع ۱ را پوشاند. (منظور از قرص، گوی بسته در  $\mathbb{R}^2$  است.)

**پاسخ:** فرض کنید که این کار امکان‌پذیر باشد. اشتراک قرص به شعاع کوچکتر از ۱ با دایره به شعاع ۱ یک کمان است. اگر دو قرص با شعاع کمتر از ۱ قرص بزرگتر را بپوشانند حداقل یکی از آنها باید شامل یک نیم‌دایره به شعاع ۱ باشد یعنی باید شامل دو نقطه متقاطع و در نتیجه به فاصله ۲ باشد که غیرممکن است.

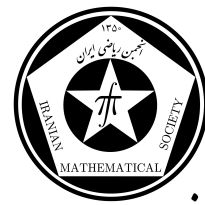
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۸) تابع  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تحلیلی و برای هر  $z \in \mathbb{C}$ ،  $f(z) = f(z - z^2)$  ثابت کنید  $f$  یک تابع ثابت است.

**پاسخ:** به برهان خلف فرض کنید  $f$  تابعی ثابت نباشد. پس  $f(z) - f(0)$  که تابعی تحلیلی است که برای ورودی  $z = 0$  مقدار صفر می‌گیرد. چون  $f$  ثابت نیست، عدد صحیح  $k \geq 1$  و تابع تحلیلی  $g$  وجود دارد که  $g(0) \neq 0$  و  $f(z) - f(0) = z^k g(z)$  در این صورت تساوی صورت مسأله به شکل زیر در می‌آید

$$f(0) + z^k g(z) = f(0) + (z - z^2)^k g(z - z^2).$$

با کم کردن  $f(0)$  از طرفین رابطه بالا و تقسیم بر  $z^k$  خواهیم داشت

$$g(z) = (1 - z)^k g(z - z^2).$$

اگر از طرفین رابطه اخیر که توابعی تحلیلی بر حسب  $z$  هستند مشتق بگیریم، داریم

$$g'(z) = (1 - z)^k (1 - 2z)g'(z - z^2) - k(1 - z)^{k-1} g(z - z^2)$$

که با جای گذاری  $z = 0$  به فرم زیر در می‌آید

$$g'(0) = g'(0) - kg(0).$$

که نتیجه می‌دهد  $kg(0) = 0$  که با توجه به  $k \geq 1$  و  $g(0) \neq 0$  تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد  $f$  باید تابعی ثابت باشد.

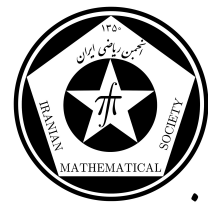
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۹) فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی است به طوری که ماتریس  $A + A^t$  خودتوان باشد. ثابت کنید مجموع همه درایه‌های  $A$  عددی نامنفی است. (ماتریس  $B$  را خودتوان گوئیم هرگاه  $B^t = B$ ).

پاسخ: قرار دهید  $A = (a_{ij})$  و  $B = A + A^t$ . لذا  $B^t = B$ ، از طرفی طبق فرض مسئله  $B^t = B$ . بنابراین  $BB^t = B$ . حال اگر  $B = (b_{ij})$  و  $v_1, \dots, v_n$  بردارهای سطری  $B$  باشند آنگاه

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} b_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{4} \langle \sum_i v_i, \sum_j v_j \rangle = \frac{1}{4} \left| \sum_i v_i \right|^2 \geq 0.$$

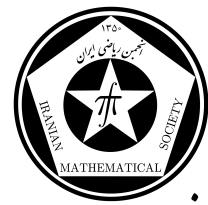
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۱۰) ثابت کنید دنباله  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  از اعداد  $\{-1, +1\}$  وجود دارد به طوری که اگر برای  $n \geq 1$  تعریف کنیم  $x_n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n}{n}$  آنگاه مجموعه  $\{x_n \mid n \geq 1\}$  در  $\mathbb{R}$  چگال است.

**پاسخ:** فرض کنید  $I_1 = (a_1, b_1), I_2 = (a_2, b_2), \dots$  همه بازه‌های باز در اعداد حقیقی باشند که هر دو سر آن‌ها اعداد گویا است (این بازه‌ها به دلیل شمارا بودن اعداد گویا، شمارا هستند). طول بازه  $I_i$  را با  $\ell_i$  نمایش می‌دهیم. نشان می‌دهیم می‌توان دنباله  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  از  $\pm 1$  و زیردنباله  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots$  از اعداد طبیعی را به گونه‌ای انتخاب کرد که برای هر  $k \in \mathbb{N}$

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\alpha_j}{j} \in I_k.$$

اثبات این حکم به وضوح حکم مسأله (چگال بودن  $\{x_1, x_2, \dots\}$ ) را نتیجه می‌دهد. دنباله‌های  $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$  و  $(n_i)_{i=1}^{\infty}$  را به شکل استقرایی می‌سازیم. به این صورت که فرض کنید  $n_{k+1} = n_k$ ,  $x_{n_k} \in I_{k+1}$  اگر  $x_{n_i} \in I_i$  برای هر  $i \leq k$  تعیین شده باشد به طوری که برای هر  $k+1$  برآورده می‌کند. اگر  $x_{n_k} \leq a_{k+1}$  ابتدا عدد  $m > m_k$  را به گونه‌ای می‌یابیم که  $\frac{1}{m} < \ell_{k+1}$  و  $\alpha_{n_{k+1}}, \dots, \alpha_m$  را برابر  $-1$  تعریف می‌کنیم. با این شکل تعریف، حتماً  $x_m \leq a_{k+1}$  حال  $n_{k+1}$  را کوچک‌ترین عدد طبیعی می‌گیریم که

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n_{k+1}} > a_{k+1} - x_m. \quad (*)$$

از آن جا که سری  $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j}$  واگراست عدد  $n_{k+1}$  با این خاصیت وجود دارد. ادعا می‌کنیم  $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$  اولاً طبق (\*),

$$x_{n_{k+1}} = x_m + \sum_{j=m+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{j} > x_m + (a_{k+1} - x_m) = a_{k+1},$$

و چون  $n_{k+1}$  کوچک‌ترین عددی است که خاصیت (\*) را دارد

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n_{k+1}-1} \leq a_{k+1} - x_m,$$

که چون  $\frac{1}{n_{k+1}} < \frac{1}{m} < \ell_{k+1}$  نتیجه می‌دهد

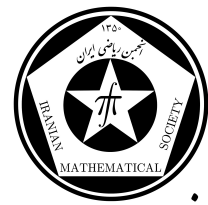
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گوازنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

$$x_{n_{k+1}} = x_m + \sum_{j=m+1}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n_{k+1}} < x_m + (a_{k+1} - x_m) + \ell_{k+1} = a_{k+1} + \ell_{k+1} = b_{k+1},$$

و اثبات  $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$  به اتمام می‌رسد.

اثبات در حالت  $x_{n_k} \geq b_{k+1}$  نیز کاملاً مشابه است. ابتدا  $\alpha_{n_{k+1}}, \dots, \alpha_m$  را برابر  $+1$  تعریف می‌کنیم ( $\frac{1}{m} < \ell_{k+1}$ ). سپس  $\alpha_i$  های بعدی را برابر  $-1$  تعریف می‌کنیم تا به اندیس مناسبی مثل  $n_{k+1}$  برسیم که  $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ . با توجه به این که با انتخاب هر علامت  $-1$  مقدار  $x_i$  به اندازه عددی کم‌تر از  $\ell_{k+1}$  کوچک می‌شود و همچنین با توجه به واگرا بودن سری  $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j}$  حتماً چنین اندیس  $n_{k+1}$  یافت می‌شود.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گاوزنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

(۱۱) فضای  $\mathbb{R}^n$  با متر اقلیدسی  $d$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $x$  یک بردار تصادفی در  $\mathbb{R}^n$  است که هر مولفه آن به طور مستقل با احتمال  $\frac{1}{2}$  برابر ۱ و با احتمال  $\frac{1}{2}$  برابر -۱ است. فرض کنید  $W$  یک زیرفضای  $k$  بُعدی از  $\mathbb{R}^n$  باشد. مطلوب است محاسبه امید ریاضی  $(\text{dist}(x, W))^2$  که در آن  $\text{dist}(x, W) = \inf\{d(x, y) : y \in W\}$ .

**پاسخ:** فرض کنید که  $P$  ماتریسی باشد که  $x$  را روی  $W$  تصویر می‌کند. دقت کنید  $P^2 x = Px$  و می‌توان ثابت کرد که  $\text{Im}(P) + \text{Ker}(P) = \mathbb{R}^n$  و  $P = P^t$ . همچنین رتبه  $\text{Im}(P)$  برابر  $k$  است. چون  $Pw = w$  برای هر عضو  $w \in W$  و برای هر عضو  $v$  متعلق به زیر فضای عمود  $W^\perp$  در  $\mathbb{R}^n$ ، یعنی  $Pv = 0$ . بنابراین  $P$  دارای  $k$  مقدار ویژه ۱ و  $n - k$  مقدار ویژه ۰ است. بنابراین  $\text{trace}(P) = \sum_{i=1}^n P_{ii} = k$ .

امید ریاضی مساله به شکل زیر محاسبه می‌شود. اگر  $x = (x_1, \dots, x_n)$  یک بردار تصادفی با طول  $n$  و با درایه‌های  $\pm 1$  در فرض مساله باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{dist}(x, W)^2) &= \mathbb{E}((d(x, Px))^2) \\ &= \mathbb{E}((x - Px) \cdot (x - Px)) \\ &= \mathbb{E}(x^t x - x^t P^t P x) && \text{از تعریف ضرب داخلی} \\ &= \mathbb{E}(x^t x - x^t P^2 x) && \text{چون } P^t = P \\ &= \mathbb{E}(x^t x - x^t P x) && \text{چون } P^2 = P \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i P_{ij} x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i^2) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) && \text{خطی بودن امید ریاضی} \\ &= n - \sum_{i=1}^n P_{ii} && \text{از توضیح پایین} \\ &= n - k && \text{چون } \sum_{i=1}^n P_{ii} = k \end{aligned}$$

دقت کنید که اگر  $i \neq j$  داریم  $\mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) = P_{ij} \mathbb{E}(x_i) \mathbb{E}(x_j) = 0$  و اگر  $i = j$  داریم

$$\mathbb{E}(x_i P_{ij} x_j) = P_{ii} \mathbb{E}(x_i^2) = P_{ii}.$$

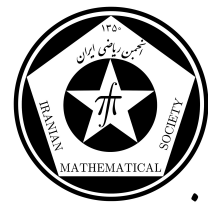
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گوازنگ، زنجان

پاسخ سوالات آزمون نوبت دوم  
چهل و پنجمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۱۴۰۲/۴/۲۸



انجمن ریاضی ایران

۱۲) فرض کنید  $R$  یک دامنه (حوزه) صحیح باشد به طوری که هر چندجمله‌ای تکین در  $R[x]$  یک ریشه در  $R$  داشته باشد و  $P$  و  $Q$  دو ایده‌آل اول در  $R$  باشند. برای هر  $a, b \in R$  که  $ab \in P+Q$  ثابت کنید  $a \in P+Q$  یا  $b \in P+Q$ .

**پاسخ:** طبق فرض، عناصر  $p \in P$  و  $q \in Q$  وجود دارند که  $ab = p + q$ . قرار دهید

$f(x) = (x-a)(x-b) - p = x(x-(a+b)) + q$ . طبق فرض  $f(x)$  ریشه‌ای مثل  $\alpha$  در  $R$  دارد یعنی  $f(\alpha) = 0$ . در این صورت  $(\alpha - b)(\alpha - a) = p \in P$  و چون  $P$  ایده‌آل اول است پس  $\alpha - a \in P$  یا  $\alpha - b \in P$ . همچنین  $\alpha(\alpha - (a+b)) = -q \in Q$  و چون  $Q$  نیز ایده‌آل اول است  $\alpha \in Q$  یا  $\alpha - (a+b) \in Q$ . پس یکی از چهار حالت زیر اتفاق می‌افتد:

$$(1) \quad a = \alpha - (\alpha - a) \in P + Q \text{ در این صورت } \alpha \in Q \text{ و } \alpha - a \in P$$

$$(2) \quad b = \alpha - a - (\alpha - (a+b)) \in P + Q \text{ در این صورت } \alpha - (a+b) \in Q \text{ و } \alpha - a \in P$$

$$(3) \quad b = b - \alpha + \alpha \in P + Q \text{ در این صورت } \alpha \in Q \text{ و } \alpha - b \in P$$

$$(4) \quad a = \alpha - b - (\alpha - (a+b)) \in P + Q \text{ در این صورت } \alpha - (a+b) \in Q \text{ و } \alpha - b \in P$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety