۷) ثابت کنید با دو قرص به شعاع کمتر از ۱ نمی‌توان قرصی به شعاع ۱ را پوشاند. (منظور از قرص، گوی بسته در $\mathbb{R}^2$ است.)

پاسخ: فرض کنید که این کار امکان‌پذیر باشد. اشتراک قرص به شعاع کوچکتر از ۱ با دایره به شعاع ۱ یک کمان است. اگر دو قرص با شعاع کمتر از ۱ قرص بزرگتر از ۱ را بپوشانند حداقل یکی از آنها باید شامل یک نیم‌دایره به شعاع ۱ باشد یعنی باید شامل دو نقطه متقاطر و در نتیجه به فاصله ۲ باشد که غیرممکن است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۸) تابع $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تحلیلی و برای هر $z\in\mathbb{C}$، $f(z)=f(z-z^۲)$. ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

پاسخ: به برهان خلف فرض کنید f تابعی ثابت نباشد. پس $f(z)-f(۰)$ که تابعی تحلیلی است که برای ورودی $z=۰$ مقدار صفر می‌گیرد. چون f ثابت نیست، عدد صحیح $k\geq ۱$ و تابع تحلیلی g وجود دارد که $g(۰)\neq ۰$ و $f(z)-f(۰)=z^kg(z)$. در این صورت تساوی صورت مسأله به شکل زیر در می‌آید

$$f(۰)+z^kg(z)=f(۰)+(z-z^۲)^kg(z-z^۲).$$

با کم کردن $f(۰)$ از طرفین رابطه بالا و تقسیم بر z^k خواهیم داشت

$$g(z)=(۱-z)^kg(z-z^۲).$$

اگر از طرفین رابطه اخیر که توابعی تحلیلی بر حسب z هستند مشتق بگیریم، داریم

$$g'(z)=(۱-z)^k(۱-۲z)g'(z-z^۲)-k(۱-z)^{k-۱}g(z-z^۲)$$

که با جای‌گذاری $z=۰$ به فرم زیر در می‌آید

$$g'(۰)=g'(۰)-kg(۰).$$

که نتیجه می‌دهد $kg(۰)=۰$ که با توجه به $k\geq ۱$ و $g(۰)\neq ۰$ تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد f باید تابعی ثابت باشد.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۹) فرض کنید A یک ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی است به‌طوری‌که ماتریس $A+A^t$ خودتوان باشد. ثابت کنید مجموع همه درایه‌های A عددی نامنفی است. (ماتریس B را خودتوان گوییم هرگاه $B^۲=B$.)

پاسخ: قرار دهید $A=(a_{ij})$ و $B=A+A^t$. لذا $B^t=B$، از طرفی طبق فرض مسئله $B^۲=B$. بنابراین $BB^t=B$. حال اگر $B=(b_{ij})$ و $v_۱,\cdots,v_n$ بردارهای سطری B باشند آنگاه

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \frac{۱}{۲}\sum_{i,j} b_{ij} = \frac{۱}{۲}\sum_{i,j}\langle v_i, v_j\rangle = \frac{۱}{۲}\langle \sum_i v_i,\ \sum_j v_j\rangle = \frac{۱}{۲}|\sum_i v_i|^۲ \geq ۰.$$

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۱۰) ثابت کنید دنباله $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ از اعداد $\{-1, +1\}$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر برای $n \geq 1$ تعریف کنیم $x_n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n}{n}$ آنگاه مجموعه $\{x_n \mid n \geq 1\}$ در $\mathbb{R}$ چگال است.

پاسخ: فرض کنید $I_1 = (a_1, b_1), I_2 = (a_2, b_2), \dots$ همه بازه‌های باز در اعداد حقیقی باشند که هر دو سر آن‌ها اعداد گویا است (این بازه‌ها به دلیل شمارا بودن اعداد گویا، شمارا هستند). طول بازه I_i را با ℓ_i نمایش می‌دهیم.

نشان می‌دهیم می‌توان دنباله $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ از ± 1 و زیردنباله $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$ از اعداد طبیعی را به گونه‌ای انتخاب کرد که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\alpha_j}{j} \in I_k.$$

اثبات این حکم به وضوح حکم مسأله (چگال‌بودن $\{x_1, x_2, \dots\}$) را نتیجه می‌دهد.

دنباله‌های $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ و $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ را به شکل استقرایی می‌سازیم. به این صورت که فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}$ تعیین شده باشد به طوری که برای هر $i \leq k$، $x_{n_i} \in I_i$. اگر $x_{n_k} \in I_{k+1}$، $n_{k+1} = n_k$ شرط مسأله را برای $k+1$ برآورده می‌کند. اگر $x_{n_k} \leq a_{k+1}$، ابتدا عدد $m > m_k$ را به گونه‌ای می‌یابیم که $\ell_{k+1} < \frac{1}{m}$ و $\alpha_{n_k+1}, \dots, \alpha_m$ را برابر -1 تعریف می‌کنیم. با این شکل تعریف، حتماً $x_m \leq a_{k+1}$. حال n_{k+1} را کوچک‌ترین عدد طبیعی می‌گیریم که

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n_{k+1}} > a_{k+1} - x_m. \qquad (*)$$

از آن‌جا که سری $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j}$ واگراست عدد n_{k+1} با این خاصیت وجود دارد. ادعا می‌کنیم $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. اولاً طبق $(*)$،

$$x_{n_{k+1}} = x_m + \sum_{j=m+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{j} > x_m + (a_{k+1} - x_m) = a_{k+1},$$

و چون n_{k+1} کوچک‌ترین عددی است که خاصیت $(*)$ را دارد

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n_{k+1} - 1} \leq a_{k+1} - x_m,$$

که چون $\ell_{k+1} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n_{k+1}}$ نتیجه می‌دهد

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

$$x_{n_{k+1}} = x_m + \sum_{j=m+1}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n_{k+1}} < x_m + (a_{k+1} - x_m) + \ell_{k+1} = a_{k+1} + \ell_{k+1} = b_{k+1},$$

و اثبات $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ به اتمام می‌رسد.

اثبات در حالت $x_{n_k} \geq b_{k+1}$ نیز کاملاً مشابه است. ابتدا $\alpha_{n_k+1}, \dots, \alpha_m$ را برابر $+1$ تعریف می‌کنیم ($\frac{1}{m} < \ell_{k+1}$). سپس α_iهای بعدی را برابر -1 تعریف می‌کنیم تا به اندیس مناسبی مثل n_{k+1} برسیم که $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. با توجه به این که با انتخاب هر علامت -1 مقدار x_i به اندازه عددی کم‌تر از ℓ_{k+1} کوچک می‌شود و هم‌چنین با توجه به واگرا بودن سری $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j}$ حتماً چنین اندیس n_{k+1} یافت می‌شود.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۱۱) فضای $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی d را در نظر بگیرید. فرض کنید x یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^n$ است که هر مولفه آن به طور مستقل با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر ۱ و با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر -1 است. فرض کنید W یک زیرفضای k بُعدی از $\mathbb{R}^n$ باشد. مطلوب است محاسبه امید ریاضی $(\operatorname{dist}(x,W))^2$ که در آن $\operatorname{dist}(x,W)=\inf\{d(x,y)\ :\ y\in W\}$.

پاسخ: فرض کنید که P ماتریسی باشد که x را روی W تصویر می‌کند. دقت کنید $P^2x=Px$ و می‌توان ثابت کرد که $\operatorname{Im}(P)+\operatorname{Ker}(P)=\mathbb{R}^n$ و $P=P^t$. همچنین رتبه $\operatorname{Im}(P)$ برابر k است. چون $Pw=w$ برای هر عضو $w\in W$ و برای هر عضو v متعلق به زیر فضای عمود W در $\mathbb{R}^n$، یعنی $W^\perp$، داریم $Pv=0$. بنابراین P دارای k مقدار ویژه‌ی ۱ و $n-k$ مقدار ویژه‌ی ۰ است. بنابراین $\operatorname{trace}(P)=\sum_{i=1}^n P_{ii}=k$.

امید ریاضی مساله به شکل زیر محاسبه می‌شود.
اگر $x=(x_1,\dots,x_n)$ یک بردار تصادفی با طول n و با درایه‌های ±1 در فرض مساله باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\operatorname{dist}(x,W)^2) &= \mathbb{E}((d(x,Px))^2) \\
&= \mathbb{E}((x-Px).(x-Px)) \\
&= \mathbb{E}(x^tx-x^tP^tPx) && \text{از تعریف ضرب داخلی} \\
&= \mathbb{E}(x^tx-x^tP^2x) && \text{چون } P^t=P \\
&= \mathbb{E}(x^tx-x^tPx) && \text{چون } P^2=P \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iP_{ij}x_j\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i^2)-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(x_iP_{ij}x_j) && \text{خطی بودن امید ریاضی} \\
&= n-\sum_{i=1}^n P_{ii} && \text{از توضیح پایین} \\
&= n-k && \text{چون } \textstyle\sum_{i=1}^n P_{ii}=k
\end{aligned}$$

دقت کنید که اگر $i\neq j$ داریم $\mathbb{E}(x_iP_{ij}x_j)=P_{ij}\mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(x_j)=0$ و اگر $i=j$ داریم

$$\mathbb{E}(x_iP_{ij}x_j)=P_{ii}\mathbb{E}(x_i^2)=P_{ii}.$$

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۱۲) فرض کنید R یک دامنه (حوزه) صحیح باشد به طوری‌که هر چندجمله‌ای تکین در $R[x]$ یک ریشه در R داشته باشد و P و Q دو ایدهآل اول در R باشند. برای هر $a, b \in R$ که $ab \in P+Q$، ثابت کنید $a \in P+Q$ یا $b \in P+Q$.

پاسخ: طبق فرض، عناصر $p \in P$ و $q \in Q$ وجود دارند که $ab = p+q$. قرار دهید $f(x) = (x-a)(x-b)-p = x(x-(a+b))+q$. طبق فرض $f(x)$ ریشه‌ای مثل α در R دارد یعنی $f(\alpha) = 0$. در این صورت $(\alpha-b)(\alpha-a) = p \in P$ و چون P ایده ال اول است پس $\alpha - a \in P$ یا $\alpha - b \in P$. همچنین $\alpha(\alpha-(a+b)) = -q \in Q$ و چون Q نیز ایده ال اول است یا $\alpha \in Q$ یا $\alpha - (a+b) \in Q$. پس یکی از چهار حالت زیر اتفاق می افتد:

۱) $\alpha - a \in P$ و $\alpha \in Q$ در این صورت $a = \alpha - (\alpha - a) \in P+Q$

۲) $\alpha - a \in P$ و $\alpha - (a+b) \in Q$ در این صورت $b = \alpha - a - (\alpha-(a+b)) \in P+Q$

۳) $\alpha - b \in P$ و $\alpha \in Q$ در این صورت $b = b - \alpha + \alpha \in P+Q$

۴) $\alpha - b \in P$ و $\alpha - (a+b) \in Q$ در این صورت $a = \alpha - b - (\alpha-(a+b)) \in P+Q$

بنابراین حکم ثابت می‌شود.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety