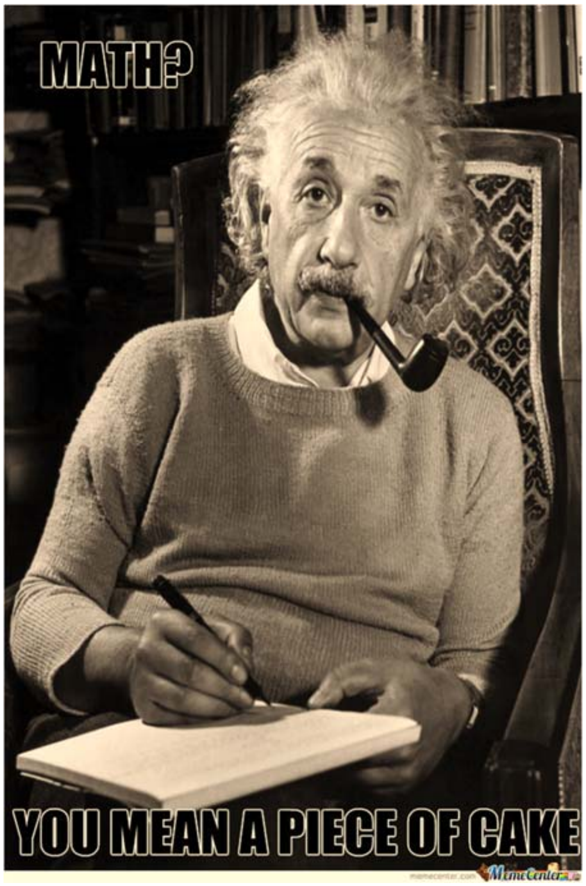


ریاضیات دوست داشتنی؟!

ویژه

اولیاء، آموزگاران و دبیران

(جهت آشتی‌دادن دانش‌آموزان با ریاضی)

تألیف

اسمعیل بابلیان

عضو هیئت علمی دانشگاه خوارزمی

۱۳۹۹

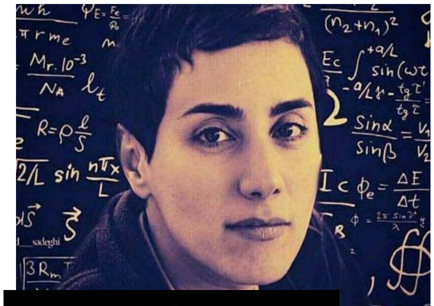
babolian@khu.ac.ir

فهرست مطالب کتاب

عنوان موضوع	شماره صفحه

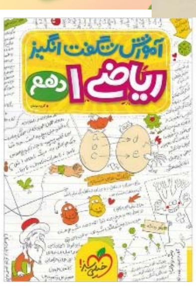
شرح کامل موضوع ها

پیشگفتار



قبل از پرداختن به اصل موضوع‌های کتاب، مطالبی ضروری در مورد وضعیت فعلی ریاضیات کشور و اهداف کتاب ارائه می‌شود.

درباره‌ی وضعیت ریاضی در کشور



ریاضیات در ایران حال خوبی ندارد، هرچند فرزندان نخبه این کشور، یعنی **مریم میرزاخانی**، اولین ایرانی و اولین زن دنیاست که برنده جایزه فیلدز ریاضی شد و بعد از او **کوچر بیرکار** دومین ایرانی برنده این جایزه است. معلم و شاگرد دچار اضطراب هستند. دانش‌آموزان با انبوهی از کتاب‌های جنبی، آزمونی و کنکوری با نام‌های عجیب غریب کلاغ سفید، آس، سیر تا پیاز، الوان(سبز، زرد و ...) رو به رو هستند و به اصرار اولیاء، آشنایان و همسایگان مجبورند در آزمون‌های گوناگون ورود به این یا آن مدرسه فرزانگان، تیزهوشان، نمونه مردمی، شاهد و ... شرکت کنند و به سؤالات غیراستاندارد و غالباً خارج از عرف آموزشی پاسخ دهند، تا در مدرسه‌ای ادامه تحصیل دهند که در آن بجز رقابت، چشم و هم‌چشمی و تخریب شخصیت خبر دیگری نیست. این آزمون‌ها به همراه فشار نامعقول خانواده‌ها در نخبه جلوه دادن فرزندانشان و تحمل هزینه‌های سنگین در این رهگذر، اضطراب ناخواسته‌ای به کل جامعه تزریق کرده‌است. علاوه بر اینها، مشکلات کتاب‌های درسی ریاضی و ناهماهنگی در آموزش ریاضی، ریاضیات را به عنوان یکی از دروس شاخص در ناکامی اکثر دانش‌آموزان جلوه داده است. نامطلوب بودن افق کاری فارغ‌التحصیلان رشته‌های مهندسی و علوم ریاضی سبب افت شدید انتخاب رشته ریاضی در سال‌های اخیر شده و اکثر دانش‌آموزان رشته‌های علوم تجربی را انتخاب می‌کنند، به امید آنکه به شغل نان و آب‌دار پزشکی و درآمدهای نجومی تعداد اندک آنها دستیابی پیدا کنند؛ غافل از آنکه به زودی برای فارغ التحصیلان رشته پزشکی هم شغل مناسبی وجود نخواهد داشت.

علوم پایه، و به ویژه علوم ریاضی، جزء نیازهای هر کشور برای توسعه پایدار است و صنعت و کشاورزی پیشرفته با داشتن علوم پایه قوی میسر است، اکثر کشورهای پیشرفته جهان برای ورود نخبه‌ها به علوم پایه یارانه سخاوتمندانه اختصاص می‌دهند و راه‌های دستیابی به مشاغل آبرومند را برای آنها هموار می‌کنند. متأسفانه با تأسیس دانشگاه فرهنگیان و عدم وجود بخش تحقیقاتی در مراکز صنعتی و کشاورزی و شرکت ندادن پژوهشگران علوم پایه در طرح‌های پژوهشی فنی و مهندسی علوم پایه کشور در حال انقراض است.

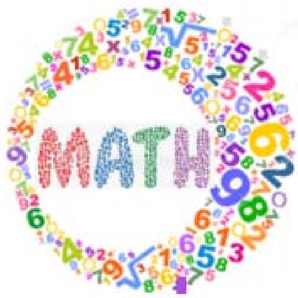
اهداف کتاب

به دلایل مختلف دانش آموزان به سختی با درس ریاضی کنار می‌آیند. این دلایل متعدد است و بازگو کردن آنها مشکلی را حل نمی‌کند. هدف اصلی این کتاب «آشتی دادن دانش‌آموزان با ریاضی» است. در این راستا، ضمن ارائه و بررسی برخی از موضوع‌های مناسب، زیبایی‌ها و شگفتی‌های ریاضی، بازی‌های ریاضی و کاربردهای متنوع دانش ریاضی شناسانده می-شود. در ضمن، زمینه‌های تعامل دانش‌آموزان، اولیاء و فرزندانشان و معلم و دانش‌آموزان فراهم می‌شود. نتیجه بررسی برخی موضوع‌ها سبب می‌شود که بررسی کننده، بیشتر دانش‌آموزان، مربیان را مورد سؤال قرار دهند و به دنبال چرایی نتیجه باشند. به عبارت دیگر، دانش آموز به دنبال «اثبات» و «دلیل» است و با اشتیاق (نه با اجبار) حاضر است به چرایی نتیجه گوش فرا دهد.

موضوع‌های انتخاب شده، تلفیق غیرآشکار ریاضی با فارسی، با داد و ستد، شعبده بازی، معما و بازی است. بازی-ریاضی‌هایی که در این کتاب مطرح شده اند رقابت فکری سالم، و در عین حال توأم با استفاده از دانش ریاضی را آموزش می‌دهند. برخی از بررسی‌ها تمرینی «جهت‌دار» از موضوع‌های ریاضی کتاب درسی دانش‌آموز است، که به طور غیرمستقیم به آن پرداخته می‌شود و نتیجه جذاب آن سبب می‌شود که دانش‌آموز بررسی آن را به دفعات زیاد تکرار کند (و احتمالاً با هم سن‌هایش در همسایگان و فامیلش در میان بگذارد).

هدف دیگر، علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان به ریاضی است، به گونه‌ای که خودشان رشته ریاضی را انتخاب کنند. در این کتاب، برای دانش‌آموزان هر پایه، از اول ابتدایی تا پایان دوره متوسطه اول، مطالب ریاضی مناسبی ارائه شده است. البته، برخی از آنها برای یک پایه و برخی برای پایه‌های بالاتر از آن قابل اجرا و استفاده هستند. لازم به ذکر است که اثبات چرایی برخی از نتایج شگفت‌انگیز، مناسبِ دانش‌آموزان نیست بلکه برای مربیان با سطح سواد حداقل دیپلم قابل استفاده‌اند و در فصل دوم کتاب آمده‌اند.

مخاطبان کتاب



گرچه مخاطب اصلی کتاب دانش‌آموزان پایه اول تا پایان دوره متوسطه اول است ولی محتوای کتاب ابتدا بایستی توسط آموزشگران (مربیان، آموزگاران و دبیران)، اولیای دانش‌آموزان، دانشجو معلمان و علاقه‌مندان به آموزش ریاضی مطالعه شود و پس از اشراف به محتوای هر موضوع و نحوه‌ی اجرای آن مبادرت به ارائه آن به فرزندان یا دانش‌آموزان، یا هر مخاطب دیگر کنند.

در بررسی بسیاری از موضوع‌ها لازم است که مربی یک بار بررسی موضوع را به طور واضح برای مخاطب خود توضیح دهد و به سؤالات احتمالی او به روشنی پاسخ دهد، گاهی لازم می‌شود این کار را بیش از یک بار انجام دهد. البته، مربیان محترم باید کمی خوددار باشند و دانش‌آموزان را رها کنند تا خودشان دلیل رسیدن به برخی نتایج را کشف کنند و فوراً دلیل نتیجه حاصل را **بازگو نکنند.**

در بازی‌هایی که باید توسط دو نفر انجام شود لازم است مربیان همیشه بازی را از دانش‌آموزان **نبرند!** و به آنها اجازه دهند که طعم پیروزی را بچشند! دانش‌آموزان، یا مخاطبین، کم‌کم و با تکرار انجام بازی‌های این کتاب در خواهند یافت که برای برنده شدن در هر بازی بایستی از برخی اطلاعات ریاضی استفاده کنند و این ارزش اطلاعات ریاضی را در نظر آنها بالا خواهد برد.

در برخی از موضوع‌ها، مثلاً با عنوان «شیر فروش» یا «تمبر فروش» یا «پیدا کردن سکه تقلبی»، دانش‌آموزان بدون داشتن شیر، پیمانه، تمبر یا سکه بایستی با تفکر و تخیل به حل مسئله بپردازند و این به تقویت تخیل و تفکر آنها می‌انجامد. برخی از موضوع‌های این کتاب قابل انجام در مهمانی‌ها و دورهمی‌ها است و ارائه کننده موضوع می‌تواند برتری خود را در برخی بازی‌ها به رخ دیگران بکشد و ارزش دانش ریاضی را نشان دهد.

ویژگی موضوع‌ها

موضوع‌های مطرح شده در این کتاب را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد:

۱- **تمرین محور:** در هر یک از این موضوع‌ها مخاطبین تعدادی عمل ریاضی، نوشتنی، یا شکلی انجام می‌دهند. نتایج این فعالیت‌ها غالباً برای مخاطب جالب، جذاب یا شگفت‌انگیز است و او را به انجام مکرر آن ترغیب می‌کند و در نهایت چرایی نتیجه فکر او را مشغول می‌کند. برخی از این موضوع‌ها تحت عنوان «سیاه‌چاله‌های ریاضی» شناخته شده‌اند[۱].

۲- **معرفی اعداد خاص:** در برخی از موضوع‌ها مخاطب با انجام مکررِ چند عمل که روی دسته‌ای از اعداد مثلاً اعداد سه رقمی یا تمام اعداد طبیعی، انجام می‌شود به **عدد خاصی** می‌رسد که او را متعجب می‌کند. در ریاضیات این اعداد کم نیستند و در این کتاب به چند تا از آنها پرداخته می‌شود(عدد کاپرکار و عدد تاکسی).

۳- **ابتکاری(تخیلی):** تهیه چند لیتر شیر با استفاده از پیمانه‌های موجود، تأمین تمبر برای ارسال مرسوله‌های پستی و پیداکردن سکه تقلبی از بین چند سکه مشابه، در زمره این دسته هستند.

۴- **بازی-ریاضی:** تعدادی بازی دو نفره‌ی ساده! ارائه شده است که هر کدام دارای استراتژی (راهبرد) برد هستند به شرط آنکه شرایط برد مهیا باشد. با اشراف به استراتژی برد می‌توان از هر مخاطبی پیشی گرفت و بازی را از او برد. شوق ذاتی به برنده شدن در بازی‌ها سبب می‌شود که دانش‌آموزان به کرات این بازی‌ها را با رفقا یا والدین خود انجام دهند (بازی با چوب کبریت‌ها از این نمونه‌اند[۲]).

شرح کامل موضوع‌های مورد بررسی

در فصل اول کتاب، ضمن معرفی هر موضوع، نحوه‌ی انجام آن به روشنی و با مثال(هایی) بیان می‌شود. شرح کامل هر موضوع، و دلایل و چرایی‌های نتایج آن، در فصل دوم آمده است. برخی از دلایل قابل ارائه به دانش‌آموزان است ولی بقیه در پایه‌های بعد یا در دبیرستان قابل فهم است. معهذا، برای نتایجی که دلیل وجود داشته است سعی شده با توضیح کافی و استدلال قابل قبول علت رسیدن به یک نتیجه یا پیروز شدن در یک بازی دو نفره شرح داده شود. مربیان در پاسخ به سؤال در مورد اینکه «چرا چنین می‌شود؟» یا «چرا همیشه به عدد ۱۰۸۹ می‌رسیم؟» یا «چرا همیشه نفر اول برنده بازی است؟»، دلیل قابل فهم ارائه کنند یا بگویند «در سال‌های بعد یا در دبیرستان خواهی فهمید(یا برایت توضیح می‌دهند).»

این خود انگیزه‌ای برای ادامه تحصیل و کشف حقایق پیشرفته خواهد شد خوبی برخی از موضوع‌های مطرح شده در این است که دانش‌آموز از شما «دلیل» می‌خواهد نه اینکه شما به زور او را در کلاس نگه دارید که مطلبی را برای او «اثبات» کنید. فراموش نکنید که «انسان ذاتاً دارای غریزه کنجکاوی و پرسشگری است»؛ متأسفانه هر چه حضور دانش‌آموزان در مدرسه بیشتر می‌شود «پرسشگری آنها کمتر می‌شود!» که نتیجه آموزش غلط برخی از معلمان و سرکوب «پرسش‌گری» به عناوین مختلف توسط اولیاء، مربیان و آموزشگران است.

لازم به ذکر است که موضوع‌های مورد بررسی قرار گرفته بر حسب پایه دانش‌آموزان مرتب و ارائه شده‌اند. هرچه پایه دانش‌آموز بالاتر باشد از تعداد بیشتری از موضوع‌ها می‌تواند استفاده کند.

امید است که محتوای این کتاب، ضمن محکم کردن پیوند بین دانش‌آموزان و اولیاء و مربیان آنها، تنفر از ریاضی و اضطراب ریاضی را نیز کاهش دهد و طعم شیرین و لذتِ ریاضی ورزی را به آنها بچشاند.

فصل اول

طرح موضوع ها

موضوع ۱: نوشتن اعداد با حروف

این موضوع ویژه‌ی پایه‌ی اول ابتدایی است ولی در سال‌های بعد هم قابل اجرا است.

نوشتن اعداد با حروف یکی از مواردی است که ریاضی با دیکته تلفیق می‌شود. توجه دارید که در نوشتن اسناد رسمی، چک و سفته حتماً باید مبالغ عددی علاوه با **ارقام** با **حروف** نیز نوشته شوند. بنابراین آموزش نوشتن اعداد با حروف لازم است.

فرض کنید عدد ۲۹ را انتخاب کرده‌ایم. این عدد را به فارسی بیان می‌کنیم و با حروف می‌نویسیم:

بیست و نه

تعداد حروفی که برای نوشتن ۲۹ به کار بردیم را می‌شماریم تا عدد ۷ به دست آید.
حالا عدد ۷ را با حروف می‌نویسیم: **هفت.**
عدد ۷ را با ۳ حرف نوشتیم. این عدد با حروف نوشته می‌شود **سه** که ۲ حرف دارد. اگر ۲ را با حروف بنویسیم می‌شود **دو** که ۲ حرف دارد و هرچه این عمل را تکرار کنیم به عدد **۲** می‌رسیم. جالب نیست؟

آیا با هر عددی شروع کنیم به ۲ می‌رسیم؟ امتحان کنید.

حالا از هر یک از دانش آموزان بخواهید که یک عدد انتخاب کنند، آن را به فارسی بیان و با حروف بنویسند و تعداد حرف‌های به کار رفته را بشمارند و عدد حاصل را با ارقام بنویسند و … . هرکس در نهایت به چه عددی می‌رسد؟ چرا با هر عددی شروع می‌کنیم به این عدد یا اعداد می‌رسیم؟

جالب این است که اگر عدد را به زبان ترکی یا کردی یا انگلیسی بیان و با حروف مربوط بنویسیم در نهایت به اعداد متفاوتی می‌رسیم!؟

در صفحه بعد این کار برای عدد ۲۹ در چند زبان مختلف انجام شده است.

فارسی	ترکی	کردی	انگلیسی
۲۹	۲۹	۲۹	29
بیست و نه	ییرمی دُکوز	بیس و نه	Twenty nine
۷	۹	۶	10
هفت	دُکوز	شیش	Ten
۳	۴	۳	3
سه	دُرت	سه	Three
۲	۳	۲	5
دو	اوچ	دو	Five
۲	۳	۲	4
			Four
			4

با تکرار این کار با اعداد مختلف در کلاس، و با زبان‌های مختلف، ضمن اهمیت دادن به فرهنگ و زبان دانش‌آموزان با گویش‌های متفاوت، در نهایت دانش‌آموزان با یک شگفتی مواجه می‌شوند که حتماً در مورد چرایی آن از شما سؤال خواهند کرد.

بحث در مورد این موضوع و پاسخگویی به سؤالات مطرح شده را در صفحه ۲۸ مطالعه کنید.

موضوع ۲ : ارقام زوج و فرد

این موضوع را در پایه‌ی دوم ابتدایی می‌توان انجام داد. خواهید دید که دانش آموزان پس از انجام آن با شعف فراوان از شما سؤال می‌کنند چرا چنین می‌شود. البته چرایی نتیجه را نمی‌توان به راحتی برای آنها توضیح کامل داد ولی می‌توانید بگویید «در سال های بعد دلیل آن را برایت خواهند گفت!» البته شرح دلیل را می‌توانید در صفحه ۲۹ مطالعه نمایید.

یک عدد، با هر تعداد رقم، بنویسید، مثلاً عدد زیر:

۱۳۵۴۰۲۹۷۶۲۸۱۸۹۷

با شمردن تعداد رقم‌های این عدد، تعداد رقم‌های فرد این عدد و تعداد رقم‌های زوج آن، عدد زیر حاصل می‌شود:

تعداد رقم‌های زوج

۱۵۸۷

تعداد رقم‌های فرد

تعداد رقم‌های عدد

مجدداً تعداد رقم‌های عدد ۱۵۸۷، تعداد رقم‌های فرد و تعداد رقم‌های زوج نوشته می‌شود:

۴۳۱

و با تکرار اعمال گفته شده به عدد زیر می‌رسیم:

۳۲۱

تکرار اعمال بالا روی این عدد مجدداً همین عدد را نتیجه می‌دهد.!؟
حال از فرزند خود یا از دانش‌آموزان بخواهید هر یک عدد دلخواهی انتخاب کنند و با تکرار اعمال شرح داده شده نتیجه را اعلام کنند. جالب این است که حتی اگر در شمارش تعداد ارقام عدد و تعداد ارقام زوج و فرد هم اشتباه کنند باز به عدد ۳۲۱ خواهند رسید!؟ در زیر، این موضوع برای چند عدد دیگر انجام شده که می‌تواند راهنمایی برای پیدا کردن دلیل خاتمه آن به ۳۲۱ باشد.

۸	۹	۷۴	۸۱۸۹۱۷۲۰۱۰۰۳۴۸۹۲۷
↓	↓	↓	↓
۱۰۱	۱۱۰	۲۱۱	۱۷۸۹
↓	↓	↓	↓
۳۲۱	**۳۲۱**	**۳۲۱**	۴۳۱
			↓
			۳۲۱

اگر از یک عدد هزار رقمی شروع کنیم به سرعت به یک عدد سه رقمی خواهیم رسید. چرا؟
آیا با هر عدد سه رقمی شروع کنیم به ۳۲۱ می‌رسیم؟ امتحان کنید.

موضوع ۳: شعبده بازی

این موضوع برای پایه‌ی سوم ابتدایی و پایه‌های بالاتر قابل اجرا است. برای شروع لازم است نوشتن **مقلوب** یک عدد تعریف (آموزش داده) شود.

مقلوب عدد ۱۴۸ عدد ۸۴۱ است. یعنی، ترتیب نوشتن ارقام عدد را وارونه می‌کنیم. مقلوب عدد ۳۰۸۲۹ عدد ۹۲۸۰۳ و مقلوب ۲۹۰ عدد ۰۲۹ است.

حالا عدد **۱۰۸۹** را روی یک تکه کاغذ بنویسید و کاغذ را تا کنید و در محلی قرار دهید. از یک دانش آموز (یا فرزندتان) بخواهید که یک عدد سه رقمی دلخواه با رقم‌های یکان و صدگان متفاوت بنویسد. مثلاً می نویسد ۴۸۱. از او بخواهید که اختلاف این عدد را با مقلوب آن تعیین کند:

$$\begin{array}{r} ۴۸۱ \\ -۱۸۴ \\ \hline ۲۹۷ \end{array}$$

حالا از او بخواهید که عدد به دست آمده را با مقلوب آن جمع کند:

$$\begin{array}{r} ۲۹۷ \\ +۷۹۲ \\ \hline ۱۰۸۹ \end{array}$$

حالا از او بخواهید که کاغذی را که تا زده بودید بازکند. چه عددی را ملاحظه می‌کند؟

همان عددی را می‌بینند که به دست آورده است! احتمالاً برای او جالب خواهد بود.

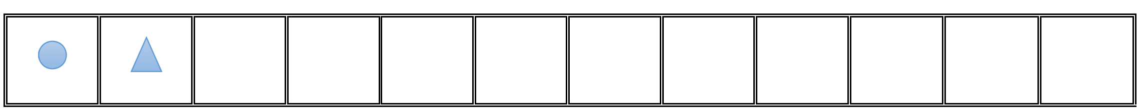
از او بخواهید که این اعمال را با عدد سه رقمی دیگری تکرار کند. دلیل اینکه با شروع از یک عدد سه رقمی با ارقام یکان و صدگان متفاوت حتماً به عدد ۱۰۸۹ می‌رسید را در صفحه ۲۹ مطالعه کنید.

در زیر این فعالیت با اعداد ۸۹۲ و ۲۹۰ تکرار شده است.

$$\begin{array}{r} ۸۹۲ \\ -۲۹۸ \\ \hline ۵۹۴ \\ +۴۹۵ \\ \hline ۱۰۸۹ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۲۹۰ \\ -۰۹۲ \\ \hline ۱۹۸ \\ +۸۹۱ \\ \hline ۱۰۸۹ \end{array}$$

موضوع ۴: بازی با مهره‌ها

این موضوع برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم و بالاتر قابل اجرا است. فرض کنید یک مستطیل به عرض یک و طول یک عدد طبیعی بزرگتر از ۴ داریم که در خانه‌های شماره ۱ و ۲ آن دو مهره قرار دارد. مهره‌ای به شکل مثلث و مهره‌ای به شکل دایره (مهره‌ها می‌توانند هر دو به یک شکل ولی رنگ‌های متفاوت باشند، علت متفاوت گرفتن آنها به دلیل توضیح دادن نحوه اجرای بازی است). شکل زیر حالت ۱۲ × ۱ را نشان می‌دهد. (با یک مقوا می‌توان مستطیلی با هر تعداد مربع ساخت.)

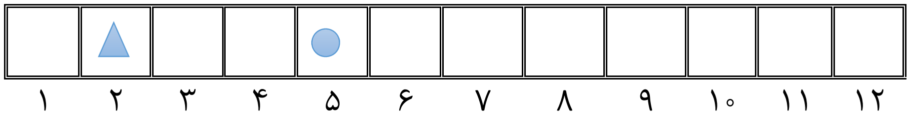


۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲

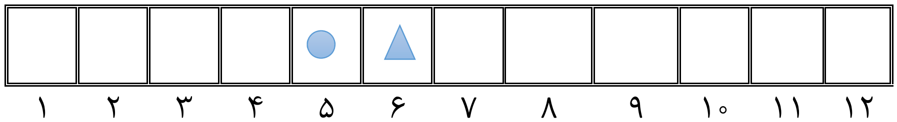
این بازی دو نفره است. نفر اول یکی از مهره‌ها را به دلخواه در مربعی قرار می‌دهد و نفر دوم مهره دیگر را **به جلو می‌برد** و در خانه دیگری قرار می‌دهد (دو مهره نباید در یک مربع قرار گیرند و پریدن از روی مهره بدون اشکال است، هیچ مهره‌ای به خانه‌های قبل بر نمی‌گردد). کسی در این بازی بازنده است که در نوبت خود نتواند مهره‌ای را حرکت دهد. توجه کنید که هر نفر در نوبت خود یکی از مهره‌ها را حرکت می‌دهد.

مراحل انجام این بازی توسط دو نفر در زیر نمایش داده شده است.آیا متوجه می‌شوید که نفر دوم چگونه مهره‌ها را حرکت داده و برنده شده است؟

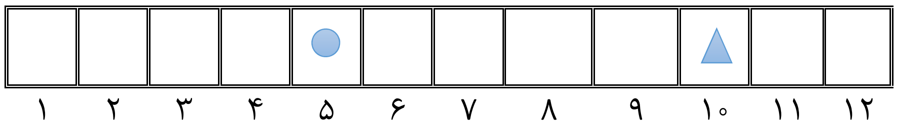
حرکت نفر اول



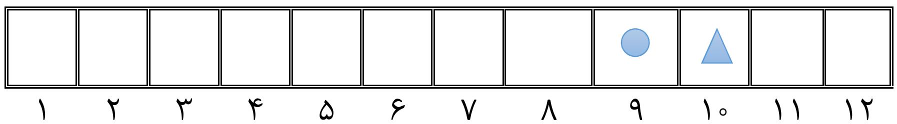
حرکت نفر دوم



حرکت نفر اول



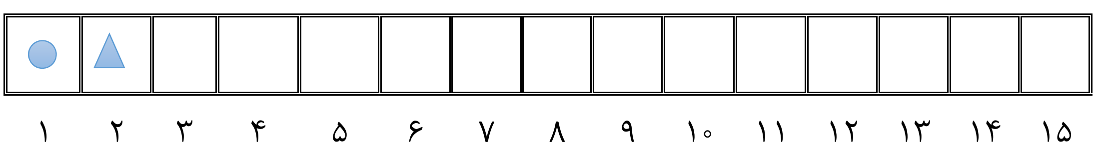
حرکت نفر دوم



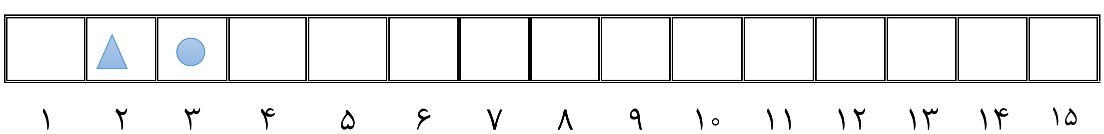
توجه کنید که حالا نفر اول باید حرکت کند و مهره‌ای را در یکی از مربع‌های ۱۱ یا ۱۲ قرار دهد. نفر دوم مهره دیگر را در مربع باقی‌مانده قرار می‌دهد و لذا بعد از آن نفر اول نمی‌تواند حرکت کند.

وقتی تعداد مربع‌ها عددی زوج است(در بالا ۱۲ مربع) **نفر دوم**، صرف نظر از اینکه نفر اول چه مهره‌ای در چه مربعی قرار دهد، می‌تواند(با جفت جفت در نظر گرفتن مربع‌ها) **برنده شود**. این بازی را چندبار تکرار کنید، حتماً متوجه حرکات لازم خواهید شد.

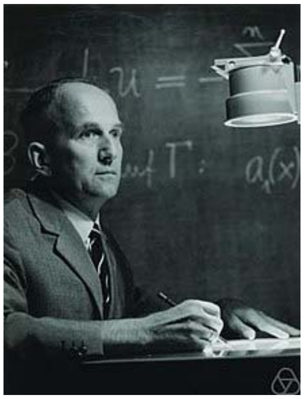
برای حالتی که تعداد مربع‌ها فرد باشد، مثلاً ۱۵ مربع، نفر اول می‌تواند بازی را به حالت تعداد زوج مربع (مثلاً ۱۴ مربع) تبدیل کند که در نتیجه نفر دوم حتماً بازنده خواهد بود. در زیر اولین حرکت نفر اول نشان داده شده است.



حرکت نفر اول



اگر توجه کنید مثل اینکه در وضعیتی هستیم که یک مستطیل ۱۴ × ۱ داریم، با صرفنظر از مربع شماره ۱، که در دو مربع اول آن دو مهره قرار دارد و **نفر دوم** باید حرکت کند. چون تعداد مربع‌های بعد از دو مهره زوج است شروع کننده (یعنی نفر دوم) حتماً بازنده و نفر اول برنده است. شرح این فعالیت را در صفحه ۳۰ ملاحظه کنید.



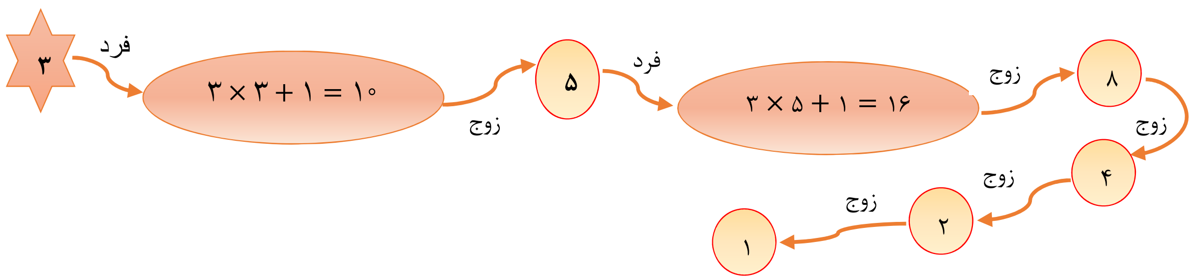
موضوع ۵: حدس کولاتس[1]

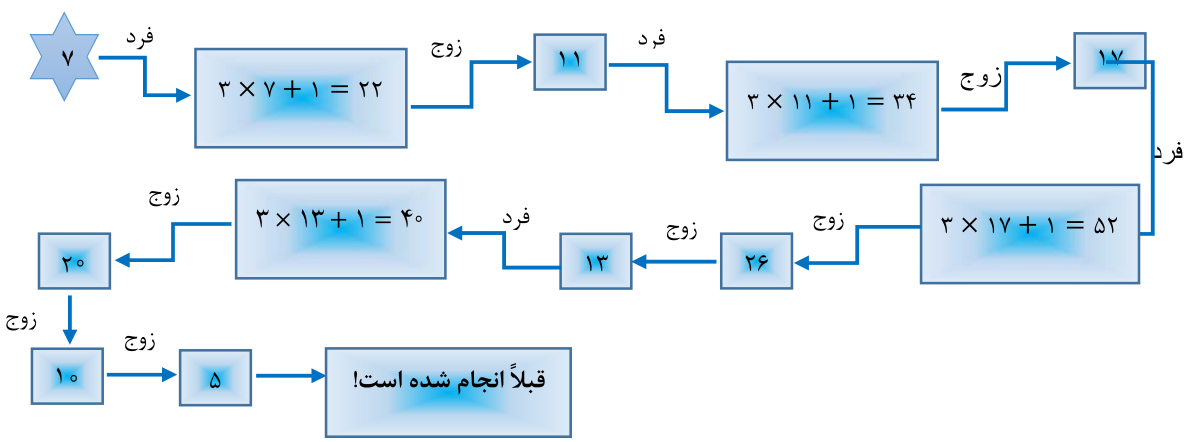
این موضوع برای پایه‌ی سوم ابتدایی و بالاتر مناسب است.

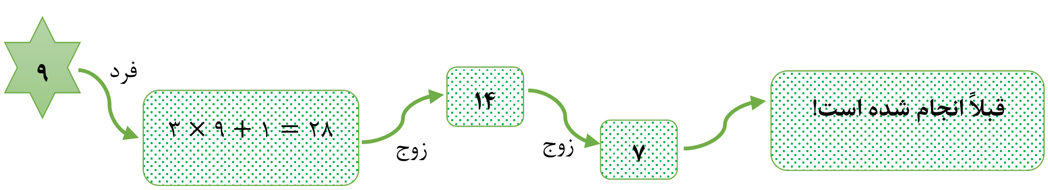
همانند موضوع زوج و فرد، یک عدد دلخواه انتخاب کنید، سعی می‌کنیم از این عدد، عدد دیگری بسازیم.

اگر عدد انتخاب شده زوج بود آن را **نصف کنید** اگر فرد بود **سه برابر آن را با یک جمع کنید.**

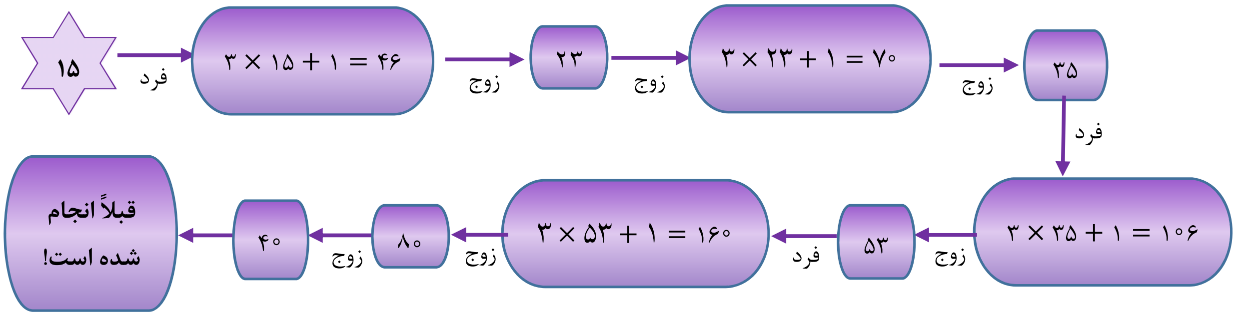
این عمل را تکرار کنید و نتیجه را بیان نمایید. این کار را با چند عدد انجام می‌دهیم.



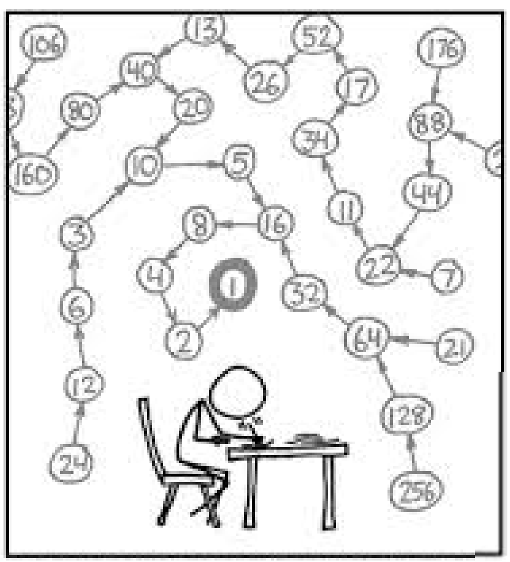


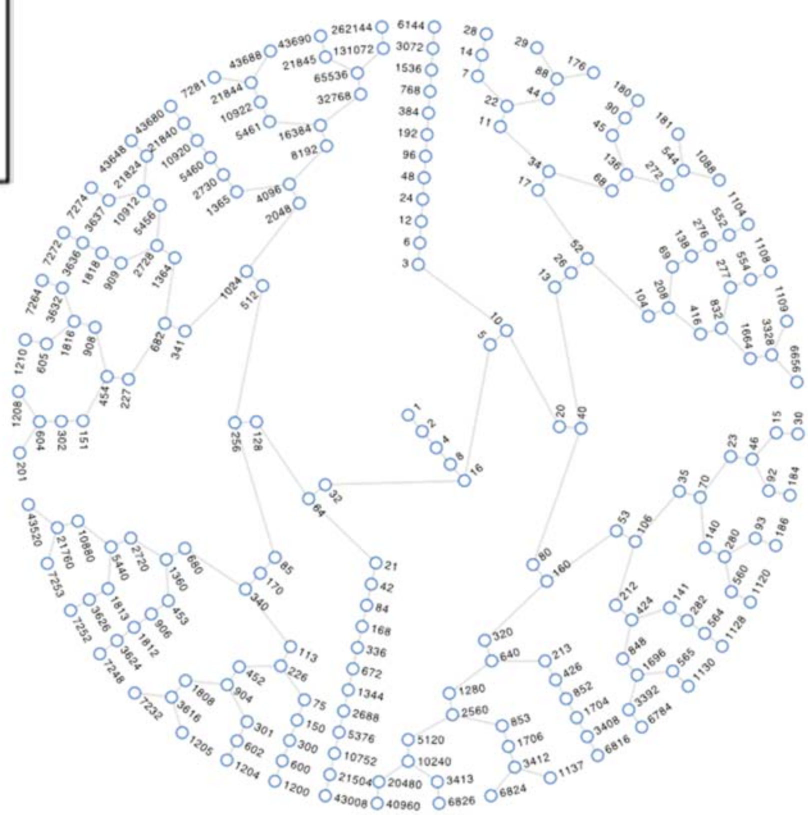


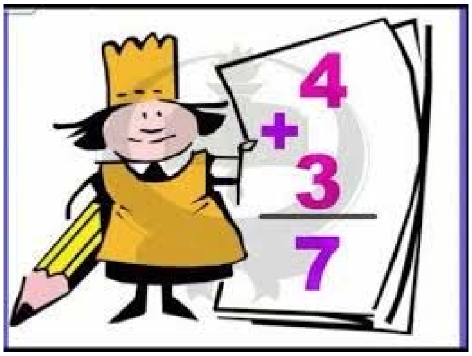
[1] Collatz conjecture



از هر دانش‌آموز(یا فرزندتان) بخواهید که این اعمال را با دو عدد دو رقمی (یکی زوج و یکی فرد) انجام دهند، البته کمی حوصله به خرج دهند. آیا جالب نیست که با هر عددی شروع کنیم به عدد ۱ می‌رسیم!؟ هنوز دلیلی برای اینکه حتماً به "عدد یک" می‌رسیم ارائه نشده است، بلکه این یک **حدس** است که هنوز رد نشده است.







موضوع ۶: نوشتن یک عدد به صورت مجموع چند عدد

این موضوع از پایه‌ی سوم به بعد قابل بررسی است.

می‌دانید که هر عدد را می‌توان به صورت مجموع چند عدد کوچکتر از خودش نوشت. مثلاً عدد ۳ را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

۱+۱+۱   ۱+۲   ۲+۱   ۳

در اینجا می‌خواهیم با یک محدودیت، حالت‌های نوشتن یک عدد به صورت مجموع **فقط ارقام ۱ و ۲** را تعیین کنید. این کار را برای چند عدد انجام می‌دهیم:

دو حالت				۱+۱	۲	**۲:**
سه حالت			۱+۱+۱	۱+۲	۲+۱	**۳:**
پنج حالت	۱+۱+۱+۱	۱+۲+۱	۲+۱+۱	۱+۱+۲	۲+۲	**۴:**

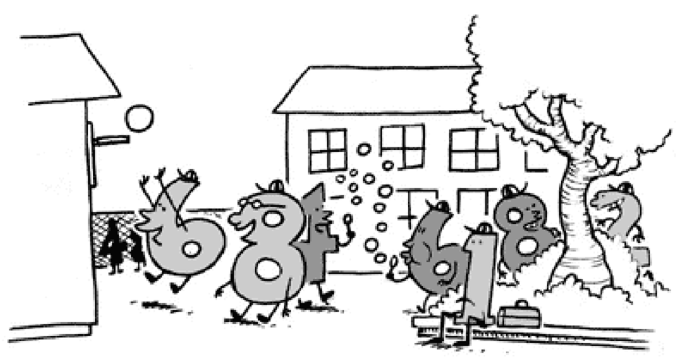
با دقت به آنچه برای عدد ۴ نوشته شده است، حالت های مختلف را برای اعداد ۵ و ۶ بنویسید.

مسئله مشابه آنچه ملاحظه کردید، چنین است.

تعداد حالت‌های نوشتن اعداد بزرگتر یا مساوی ۳ را، با استفاده از خود عدد و عددهای کوچکتر از آن **غیر از یک** به دست آورید. مثلاً

یک حالت			۳	**۳:**
دو حالت		۲+۲	۴	**۴:**
سه حالت	۲+۳	۳+۲	۵	**۵:**

توضیحات بیشتر را در صفحه ۳۰ ملاحظه کنید.

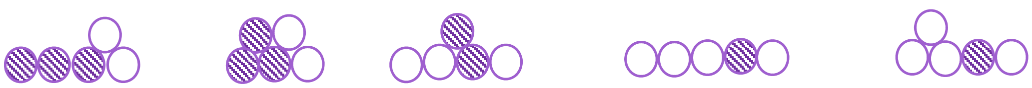


موضوع ۷: چیدن سکه ها

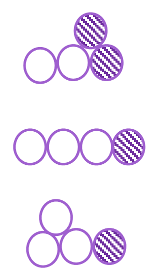
این موضوع برای پایه‌ی چهارم ابتدایی و بالاتر مناسب است.

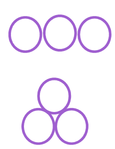
تعدادی سکه همانند(مثلاً همه ۱۰۰ ریالی یا ۲۰۰ ریالی یا ۵۰۰ ریالی هستند) داریم.

می‌خواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان آنها را در یک ردیف یا دو ردیف قرار داد، البته هر سکه در ردیف بالا بایستی با دو سکه از ردیف پایین تماس داشته باشد(شکل‌های زیر برای قرار دادن ۵ سکه در دو ردیف).



در زیر حالت های مختلف برای ۲، ۳و ۴ سکه نمایش داده شده است.

<table>
<tr><td rowspan="2">چهار سکه

سه حالت</td><td>دو سکه

یک حالت</td></tr>
<tr><td>سه سکه

دو حالت</td></tr>
</table>

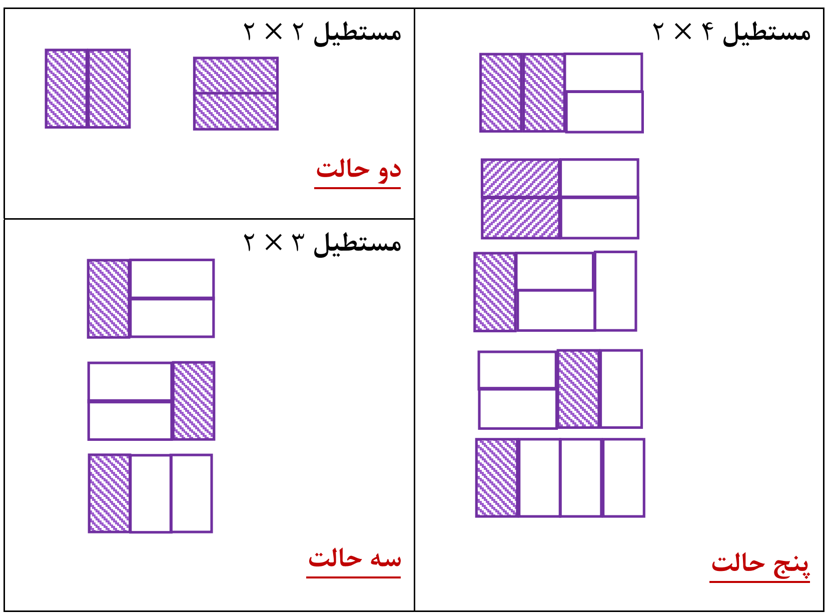
نحوه رسم حالت‌های مختلف چهار سکه را با توجه به سکه‌هایی که هاشور زده شده و حالت‌های مربوط به یک و دو سکه به دقت نگاه کنید و حالت‌های مختلف قرار گرفتن ۵ سکه و بعد ۶ سکه را رسم کنید. اینکه برای ۷، ۸، ... سکه چند حالت وجود دارد را در صفحه ۳۱ ملاحظه کنید.

موضوع ۸: فرش کردن

این موضوع برای پایه ی چهارم و بالاتر مناسب است.

فرض کنید یک راهرو مستطیل شکل به عرض دو و طول حداقل دو و به تعداد لازم مستطیل ۱ × ۲، که به آن می‌توان گفت یک آجر یا دومینو داریم.

می‌خواهیم با قرار دادن آجرها در مستطیل به صورت عمودی یا افقی تعیین کنیم، به چند طریق می‌توان مستطیل را فرش کرد. برای مستطیل‌هایی با طول ۲، ۳ یا ۴ حالت‌های مختلف نشان داده شده اند.



نحوه فرش کردن مستطیل ۴ × ۲ را، با توجه به حالت‌های مربوط به مستطیل‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۲ به دقت ملاحظه کنید. حالا تعداد حالت‌های مربوط به مستطیل‌های ۵ × ۲ و ۶ × ۲ را مشخص کنید. آیا این موضوع شباهتی با موضوع‌های ۶ و ۷ دارد؟

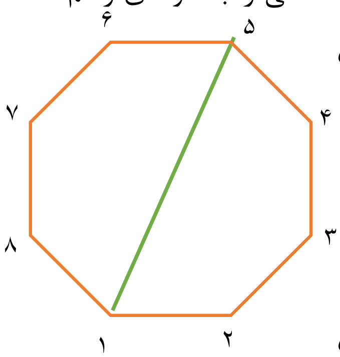
برای توضیح کامل به صفحه‌ی ۳۲ مراجعه کنید.

موضوع ۹: بازی رسم قطرهای چندضلعی

این بازی برای پایه‌ی چهارم و بالاتر مناسب است. لازم به توضیح است که رسم چندضلعی منتظم ساده نیست و برای انجام این بازی هم ضروری نیست.

یک چند ضلعی با تعدادی زوج ضلع(مثلاً ۴ یا ۶ یا ۸ یا ۱۰ یا ...) رسم شده است.

این بازی را دو نفر به نوبت انجام می‌دهند. هر نفر در نوبت خود قطری از این چندضلعی را به گونه‌ای رسم می‌کند که هیچ قطر قبلاً رسم شده را **قطع نکند**. نفری بازنده است که نتواند قطری رسم کند.



در شکل رو به رو یک هشت ضلعی رسم شده است. نفر اول قطر ۵-۱

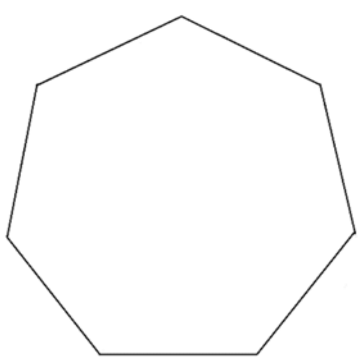
را رسم کرده است.

حالا نوبت نفر دوم است که یک قطر رسم کند که این قطر را قطع نکند. مطابق شکل دو پنج ضلعی که یک ضلع آن سبز رنگ است، داریم که در هر یک می‌توان قطری رسم کرد که قطر رسم شده را قطع نکند.

نفر دوم هر قطری که در یکی از این پنج ضلعی‌ها رسم کند نفر اول قطری از پنج ضلعی دیگر را رسم می‌کند. پس آخرین قطر توسط نفر اول رسم می‌شود و نفر دوم بازنده است! آیا حتماً باید با رسم قطر ۱-۵ شروع کنیم؟

به نظر شما چند قطر غیرمتقاطع در یک ۱۰، ۱۲ یا ۱۴ ضلعی می‌توان رسم کرد؟

اگر یک چندضلعی با تعداد فرد ضلع رسم شده باشد، کدام یک از نفر اول یا نفر دوم بازنده می‌شود؟



بازی را روی شکل رو به رو انجام دهید. برای بحث در مورد تعداد قطرهای غیرمتقاطع یک چندضلعی و نحوه ی عمل هر نفر به صفحه ۳۳ مراجعه کنید.

موضوع ۱۰: ثابت کاپرِکار[2]

این موضوع برای پایه‌ی چهارم و بالاتر مناسب است.

یک عدد چهار رقمی، با حداقل دو رقم متفاوت بنویسید، مثلاً ۸۰۸۲. بزرگ‌ترین عددی که با ارقام این عدد می‌توان نوشت را بنویسید، یعنی ۸۸۲۰. اختلاف این عدد را با مقلوب آن به دست آورید.

$$\begin{array}{r} ۸۸۲۰ \\ -\ ۰۲۸۸ \\ \hline ۸۵۳۲ \end{array}$$

مجدداً بزرگترین عدد با ارقام عدد حاصل را بنویسید و اختلاف آن را با مقلوبش به دست آورید.

با این عدد هم همان کارها را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} ۸۵۳۲ \\ -\ ۲۳۵۸ \\ \hline ۶۱۷۴ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۷۶۴۱ \\ -\ ۱۴۶۷ \\ \hline ۶۱۷۴ \end{array}$$

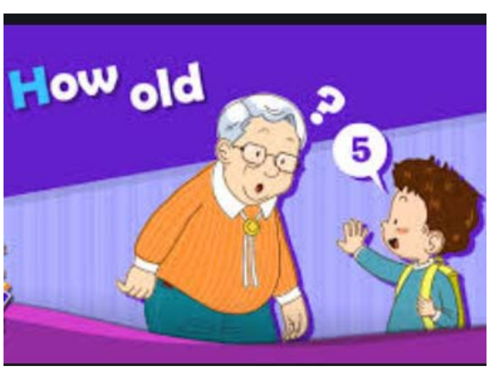
عدد ۶۱۷۴ را عدد ثابت کاپرِکار نامند.

حالا از هر دانش آموز بخواهید یک عدد چهار رقمی با حداقل دو رقم متفاوت بنویسد و اعمال بالا را روی آن انجام دهد و عدد نهایی را گزارش نماید. چون ممکن است لازم باشد اعمال چندین بار تکرار شوند(حداکثر ۷ بار) بهتر است از ماشین حساب برای تعیین اختلاف اعداد استفاده شود. اینکه چرا حتماً به عدد ۶۱۷۴ می‌رسیم در صفحه ۳۴ توضیح داده شده است.

موضوع ۱۱: بازیابی سن

این فعالیت مناسب پایه‌ی پنجم و بالاتر است.

از یک نفر(پدر، مادر، دانش آموز،...) بخواهید که عدد سنش را در عدد **۷** ضرب کند. بعد حاصل را در عدد **۱۴۴۳** ضرب کند. اگر عملیات ضرب را درست انجام داده باشد عدد مربوط به سنش را سه بار در حاصلضرب نهایی ملاحظه خواهد کرد!



برای مثال فرض کنید پدر شما سنش ۷۳ سال باشد.

$$۷۳ \times \underline{۷} = ۵۱۱$$

$$۵۱۱ \times \underline{۱۴۴۳} = ۷۳۷۳۷۳$$

[2] Kaprekar

اگر سن فرزند شما ۱۲ سال باشد داریم:

$$۱۲ \times \underline{۷} = ۸۴$$

$$۸۴ \times \underline{۱۴۴۳} = ۱۲۱۲۱۲$$

حالا از چند نفر که در دسترس شما هستند(مثلاً در یک مهمانی یا جلسه دورهمی!) بخواهید که این عملیات را انجام دهند و نتیجه را اعلام کنند.

آیا برای افراد صد ساله و مسن‌تر(حضرت نوح یا ...) هم جواب درست حاصل می‌شود؟ چرا؟

پاسخ خود را در صفحه ۳۵ ملاحظه کنید.

موضوع ۱۲: بازی با خط زدن اعداد

این بازی مناسب پایه‌ی ششم به بعد است. فرض بر این است که بررسی‌کنندگان این موضوع دو عدد متباین (نسبت به هم اول) را می‌شناسد.

این بازی توسط دو نفر انجام می‌شود. اعداد ۱، ۲، ... ،۱۲ را در یک ردیف و با فاصله بنویسید. (به جای عدد ۱۲ می‌توانید هر عدد طبیعی دیگری را اختیار کنید.)

۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

هر نفر در نوبت خود یک عدد را خط می‌زند. پس از ۵ دور بازی **دو عدد باقی می‌ماند**. اگر این دو عدد نسبت به هم اول بودند نفر دوم برنده است و الاّ نفر اول برنده است. این فعالیت را با فرزند خود یا یک دانش‌آموز انجام دهید. اگر نفر دوم **هوشمندانه** حرکت کند حتماً برنده خواهد بود (راهنمایی: اعداد را جفت جفت در نظر بگیرید[۲]).

این فعالیت را می‌توانید با اعداد ۲، ۳، ... ، ۱۳ (یا عدد فرد دلخواهی) نیز انجام دهید.

۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲

به نظر شما شروع کننده برنده است یا نفر دوم؟

برای تعیین استراتژی برد در این فعالیت صفحه ۳۶ را ملاحظه کنید.

موضوع ۱۳: بازی خط زدن عدد و مقسوم علیه‌هایش

این بازی مناسب پایه‌ی ششم به بعد است.

اعداد۱، ۲، ... ، ۶ را با فاصله، بنویسید. هر بازیکن در نوبت خود یک عدد را انتخاب می‌کند و آن عدد و مقسوم علیه‌هایش را (در صورت وجود) خط می‌زند. بازیکنی برنده است که آخرین عدد باقی مانده را خط می‌زند (یا کسی بازنده است که نتواند بازی را ادامه دهد). مثلاً اگر اعداد ۱ تا ۶ را بنویسیم و نفر اول عدد ۶ را انتخاب کند داریم:

~~۶~~ ۵ ۴ ~~۳~~ ~~۲~~ ~~۱~~

حالا نفر دوم ۴ یا ۵ را خط می‌زند که در نتیجه نفر اول ۵ یا ۴ را خط می‌زند و برنده می‌شود! برای ۴ یا ۵ عدد نیز در زیر شروع بازی توسط نفر اول را ملاحظه می‌کنید.

۴: ~~۱~~ ~~۲~~ ۳ ۴

۵: ~~۱~~ ~~۲~~ ۳ ~~۴~~ ۵

ملاحظه می‌کنید که وقتی دو، یا تعدادی زوج، عدد متباین باقی می‌ماند هرکسی شروع کند بازنده است. آیا برای ۷ هم به همین راحتی نفر اول می‌تواند برنده شود؟ امتحان کنید.

با افزایش تعداد اعداد یافتن رهیافت برنده شدن برای نفر اول دشوار می‌شود. به هر جهت با استدلال منطقی ثابت می‌شود که **همیشه** نفر اول می‌تواند با بازی هوشمندانه؟! برنده شود.(صفحه‌های ۳۶ و ۳۷ را ملاحظه کنید).

موضوع ۱۴: عدد شاد

این فعالیت برای پایه هفتم و بالاتر مناسب است.

به نحوه‌ی به دست آمدن اعداد دور دایره رو به رو، شروع از عدد چهار، توجه کنید. ابتدا به دانش‌آموز (فرزندتان) بگویید که ضرب یک عدد در خودش را با توان دوم آن عدد نشان می‌دهیم. مثلاً $۹^۲ = ۹ \times ۹ = ۸۱$.

در بین اعدادی که روی دایره به دست آمده‌اند عدد ۱۴۵ را **عدد شاد** می‌نامند. چرا؟ یک عدد دلخواه انتخاب کنید و مانند آنچه در مورد اعداد دور دایره انجام شده است، مجموع توان دوم ارقام آن را به دست آورید و این عمل را تکرار کنید. آیا به ۱۴۵ می‌رسید؟

امتحان می‌کنیم. با عدد ۳ شروع می‌کنیم.

$$۳ \to ۳^۲ = ۹ \to ۹^۲ = ۸۱ \to ۸^۲ + ۱^۲ = ۶۵ \to ۶^۲ + ۵^۲ = ۶۱ \to ۶^۲ + ۱^۲ = ۳۷ \xrightarrow{\text{دایره}} ۱۴۵$$

توجه کنید ۳۷ یکی از عددهای دور دایره است.

حالا با عدد ۶ شروع می‌کنیم.

$$۶ \to ۳۶ \to ۳^۲ + ۶^۲ = ۹ + ۳۶ = ۴۵ \to ۴^۲ + ۵^۲ = ۴۱ \to ۴^۲ + ۱^۲ = ۱۷ \to ۱^۲ + ۷^۲ = ۵۰ \to$$
$$\to ۵^۲ + ۰^۲ = ۲۵ \to ۲^۲ + ۵^۲ = ۲۹ \to ۲^۲ + ۹^۲ = ۸۵ \to ۸^۲ + ۵^۲ = \underline{۸۹} \to ۱۴۵$$

توجه کنید ۸۹ یکی از عددهای دور دایره است.

حالا از دانش‌آموزانتان بخواهید هر یک عدد دلخواهی انتخاب کنند (غیر از ۳، ۶ و اعداد دور دایره) و با تکرار آن چه عمل شد، ملاحظه کنند که آیا حتماً به ۱۴۵ می‌رسند؟ آیا به عدد دیگری هم می‌رسند؟ بحث در مورد این فعالیت را در صفحه ۳۸ مطالعه کنید.

موضوع ۱۵ : عدد تاکسی

این موضوع برای پایه هفتم و بالاتر مناسب است.

پروفسور **گادفری هارولد هاردی**[3] ریاضیدان انگلیسی و تخصص او کار با اعداد (نظریه اعداد) بود. هاردی دانشجوی با استعداد و نابغه‌ای به نام **راموناجان**[4]داشت که هم فقیر و هم مریض بود. روزی هاردی به عیادت راموناجان رفت که در بیمارستانی بستری بود. راموناجان از هاردی پرسید شماره تاکسی که با آن آمدی چه بود؟

هاردی گفت عدد کسل‌کنندهٔ **۱۷۲۹**. رامونوجان پس از کمی تأمل گفت: این عدد بسیار جالبی است. کوچک‌ترین عدد چهار رقمی است که برابر با مجموع مکعب دو عدد است، آن هم به دو صورت!

$$۱۷۲۹ = ۱۲^۳ + ۱^۳ = ۱۰^۳ + ۹^۳$$

(کوچک‌ترین عددی که به سه طریق مختلف مساوی مجموع مکعب‌های دو عدد باشد نیز به دست آمده‌است:

$$۸۷۵۳۹۳۱۹ = ۴۱۴^۳ + ۲۵۵^۳ = ۴۲۳^۳ + ۲۲۸^۳ = ۴۳۶^۳ + ۱۶۷^۳$$

جستجو برای پیدا کردن این اعداد نیاز به ماشین حساب و رایانه دارد.)

ضمناً ارتباطی بین عدد تاکسی و عدد ۱۰۸۹ که در موضوع ۳ با آن آشنا شدید وجود دارد. به سادگی می توانید ملاحظه کنید که

$$۱۰۸۹ = ۹ \times ۱۲۱ = ۳^۲ \times ۱۱^۲$$

حالا تمام مقسوم علیه‌های عدد ۱۰۸۹ را بنویسید و مجموع آنها را حساب کنید. توجه کنید که عدد ۱۰۸۹ دارای ۹ مقسوم علیه است که مجموع آنها برابر است با ....!!

ضمناً با ارقام عدد ۱۷۲۹ می‌توان بیش از ۲۰ عدد اول به دست آورد. تعدادی از آنها

۷, ۱۷, ۲۹, ۱۹, ۲+۹=۱۱, ۷۹, ۹۷, ۷۱, ...

بقیه اعداد اول را در صفحه‌ی ۳۸ ببینید.

---

[3] Godfrey Harold Hardy
[4] Srinivasa Ramanujan

موضوع ۱۶ : اعداد خودشیفته[۱]

این موضوع برای پایه‌ی هفتم به بعد مناسب است. فرض بر این است که بررسی کننده این موضوع تعریف مکعب یک عدد را می‌داند. ابتدا تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

$$۱^۳ + ۵^۳ + ۳^۳ = ۱۵۳ , \qquad ۳^۳ + ۷^۳ + ۱^۳ = ۳۷۱$$

$$۳^۳ + ۷^۳ + ۰^۳ = ۳۷۰, \qquad ۴^۳ + ۰^۳ + ۷^۳ = ۴۰۷$$

به چهار عدد ۱۵۳، ۳۷۰، ۳۷۱ و ۴۷۰ اعداد خودشیفته گویند.

یک عدد مضرب ۳، مثلاً ۹، انتخاب کنید. مکعب آن را به دست آورید. سپس مجموع مکعب ارقام عدد حاصل را حساب کنید و این عمل را تکرار کنید.

$$۹^۳ = ۷۲۹ \to ۷^۳ + ۲^۳ + ۹^۳ = ۱۰۸۰ \to ۱^۳ + ۸^۳ = ۵۱۳ \to ۵^۳ + ۱^۳ + ۳^۳ = \underline{۱۵۳}$$

با عدد ۳ شروع می‌کنیم.

$$۳ \to ۳^۳ = ۲۷ \to ۲^۳ + ۷^۳ = ۸ + ۳۴۳ = ۳۵۱ \to ۳^۳ + ۵^۳ + ۱^۳ = \underline{۱۵۳}$$

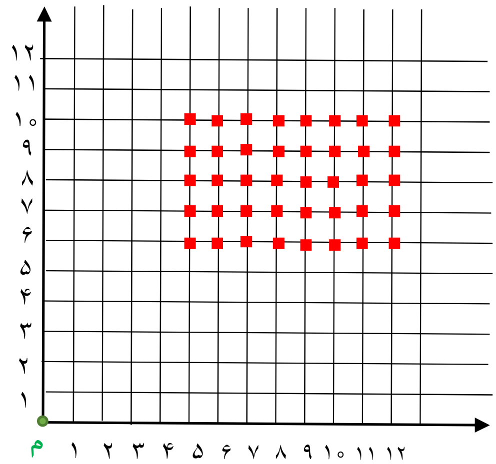
از فرزند یا دانش‌آموز خود بخواهید که عددی **مضرب ۳** انتخاب و مانند بالا عمل کند و عدد نهایی را گزارش نماید.

حالا از آنها بخواهید یک عدد **مضرب ۳ به اضافه یک** (مثلاً ۴ یا ۷ یا ۱۳ یا ...) انتخاب کنند و عدد نهایی را گزارش کنند.

بعد از آنها بخواهید یک عدد **مضرب ۳ به اضافه دو** (مثلاً ۵، ۱۱، ۲۶، ...) انتخاب کنند و عدد نهایی را گزارش کنند. آیا از هر عددی شروع کنیم به یکی از چهار عدد خود شیفته می‌رسیم؟

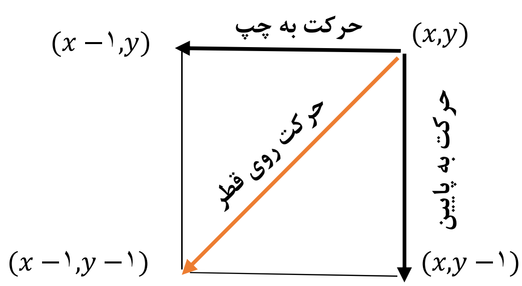
جواب را در صفحه ۳۹ مطالعه کنید.

موضوع ۱۷: بازی حرکت در صفحه مختصات



این بازی برای پایه هفتم و بالاتر مناسب است. بازی توسط دو نفر انجام می‌شود. نفر اول یکی از نقاط مشخص شده در صفحه را انتخاب می‌کند و روی یک ضلع مربع **به چپ یا به پایین می‌رود یا از طریق طی کردن قطر مربع** به رأس دیگر مربع می‌رود.

نحوه حرکت هر نفر و تغییر مختصات در شکل زیر، با بزرگ کردن یک مربع از صفحه مختصات، نشان داده شده است:



ملاحظه می‌شود که وقتی دو نفر، با شروع از یک نقطه، یکی از حرکات مجاز را انجام دهند کم‌کم به پایین صفحه هدایت می‌شوند. برنده کسی است که به نقطه‌ی م برسد.

پدر و فرزند یا مادر و فرزند یا دو دانش‌آموز یا معلم و یک دانش آموز، می‌توانند چندین بار این بازی را انجام دهند. سؤال این است که فرد شروع کننده از چه نقطه‌ای شروع کند، و چگونه، صرفنظر از حرکت طرف مقابل، حرکت کند تا حتماً برنده شود؟

شرح این فعالیت و پاسخ سؤال را در صفحه‌ی ۴۰ ملاحظه کنید.

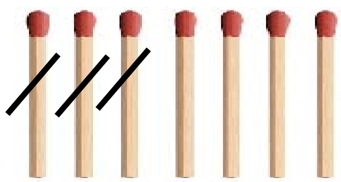
موضوع ۱۸: بازی با چوب کبریت (۱)

این بازی دونفره برای پایه‌ی هفتم و بالاتر مناسب است.

تعدادی چوب کبریت داریم (حداقل چهار چوب کبریت). هر بازیکن در نوبت خود ۱ یا ۲ یا ۳ چوب کبریت برمی‌دارد. کسی بازنده است که نتواند بازی را ادامه دهد.

این بازی را بدون چوب کبریت هم می‌توان انجام داد. به تعداد چوب کبریت‌ها خط عمودی رسم کنید و به جای برداشتن آنها رویشان خط بکشید (یا علامت دیگری قرار دهید).

برای ۷ چوب کبریت اگر نفر اول ۳ چوب کبریت را خط بزند داریم:



حالا نوبت نفر دوم است. اگر نفر دوم یک یا دو یا سه چوب کبریت را خط بزند نفر اول، به ترتیب، ۳ یا ۲ یا ۱ چوب کبریتِ باقی‌مانده را خط می‌زند و برنده می‌شود!

سؤال مهم در این بازی چنین است: نفر اول با چه تعداد چوب کبریت و چگونه بازی را شروع کند تا حتماً برنده شود و یا تعداد چوب کبریت‌ها چند تا باشد تا نفر دوم با بازی هوشمندانه حتماً برنده شود. شرح این بازی و پاسخ به این سؤالات را در صفحه ۴۰ ملاحظه کنید.

موضوع ۱۹ :ادامه بازی با چوب کبریت

بازی‌های دونفره زیر نیز برای پایه هفتم و بالاتر مناسب است. شرط برنده (بازنده) شدن همان است که در بازی با چوب کبریت (۱) عنوان شد.

بازی با چوب کبریت (۲): هر بازیکن در نوبت خود دو یا سه چوب کبریت برمی‌دارد (یا خط می‌زند). در این بازی به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که اگر تعداد چوب کبریت‌ها دو یا سه یا چهار باشد نفر اول برنده است(چرا؟).

بازی با چوب کبریت (۳): هر بازیکن در نوبت خود ۳ یا ۵ چوب کبریت برمی‌دارد(یا خط می‌زند) .

بازی با چوب کبریت (۴): هر بازیکن در نوبت خود ۲ یا ۳ یا ۴ چوب کبریت برمی دارد(یا خط می‌زند) .

اگر تعداد چوب کبریت ها ۶ یا ۷ باشد، نفر دوم، صرف نظر از اینکه نفر اول چگونه بازی کند، برنده خواهد شد(چرا؟).

بازی با چوب کبریت (۵): هر بازیکن در نوبت خود توانی از ۲ چوب کبریت یعنی۱ یا ۲ یا ۴ یا ۸ یا ...، چوب کبریت را بر می دارد(یا خط می زند).

می‌توان نشان داد که اگر تعداد **چوب کبریت‌ها** مضرب ۳ باشد نفر دوم با بازی هوشمندانه می‌تواند برنده شود.

شرح کامل بازی با چوب کبریت (۲) تا (۵) را می‌توانید در صفحه‌های ۴۱ و ۴۲ ملاحظه کنید و از تعداد چوب کبریت‌ها برای برنده شدن نفر اول (یا نفر دوم) با خبر شوید.

موضوع ۲۰: شیرفروش

این موضوع در عین سادگی نیاز به تخیل و انجام اعمال ذهنی دارد. البته با جدول هم قابل انجام است و برای دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم و بالاتر مناسب است.

یک مخزن بزرگ پر از شیر، یک پیمانه ۳ لیتری، یک پیمانه ۵ لیتری و یک ظرف بزرگ خالی داریم. شرح دهید چگونه می‌توان با استفاده از دو پیمانه و ظرف خالی به هر مشتری هر مقدار شیر بخواهد تحویل داد.(توجه کنید که هیچ کدام از ظروف، و حتی مخزن شیر!، در اختیار نیستند و با تخیل و محاسبات ریاضی باید عمل کنید.)

مثلاً اگر یک مشتری یک لیتر شیر بخواهد چنین عمل می‌کنیم:

دوبار ظرف ۳ لیتری را پر می‌کنیم و در ظرف خالی می‌ریزیم، این ظرف شامل ۶ لیتر شیر خواهد شد.

سپس با شیر این ظرف، ظرف ۵ لیتری را پر می‌کنیم، بدیهی است که یک لیتر شیر خواهد ماند که تحویل مشتری می‌دهیم.

اگر مشتری ۲ لیتر شیر بخواهد: ظرف ۵ لیتری را پر می‌کنیم و بعد ظرف ۳ لیتری را با شیرهای آن پر می‌کنیم، بدیهی است که دو لیتر شیر در پیمانه ۵ لیتری باقی می‌ماند که به مشتری تحویل می‌دهیم!

حالا شما جدول زیر را کامل کنید(علامت – یعنی خالی کردن شیر در ظرفی مناسب). آیا هر چند لیتر شیر نیاز باشد می‌توان تحویل داد؟ چگونه؟ صفحه ۴۳ را ملاحظه کنید. مضارب ۳ و ۵ لیتری در جدول نیامده‌اند.

لیتر شیر	پیمانه ۳ لیتری	پیمانه ۵ لیتری	لیتر (شیر تحویل داده شده)
۱	۲	۱−	۲ × ۳ − ۱ × ۵ = ۱
۲	۱−	۱	۱ × ۵ − ۱ × ۳ = ۲
۴	۳	۱−	۳ × ۳ − ۱ × ۵ = ۴
۷			
۸			

موضوع ۲۱: تمبر فروش

مشابه موضوع ۲۰ ولی با کمی تفاوت، فرض کنید در یک شعبه از پست فقط تمبرهای ۳ تومانی و ۵ تومانی موجود است. اگر هزینه پست مرسولات به تومان باشد آیا تمبر لازم برای ارسال هر مرسوله‌ای را می‌توان با تمبرهای ۳ و ۵ تومانی تأمین کرد؟

با کمی تأمل واضح است که اگر هزینه مرسوله‌ای یک یا دو تومان یا چهار تومان باشد امکان ندارد. جدول زیر هزینه پست مرسولات و تأمین آنها با تمبرهای ۳ و ۵ تومانی را نشان می‌دهد. مضارب ۳ و ۵ در جدول نیامده‌اند.

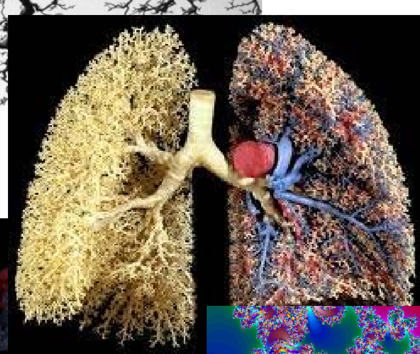
وضعیت تأمین تمبر	تعداد تمبر ۵ تومانی	تعداد تمبر ۳ تومانی	هزینه پست
✗	--	--	۷
✓	۱	۱	۸
✓	۱	۲	۱۱
✓	۲	۱	۱۳
✓	۱	۳	۱۴

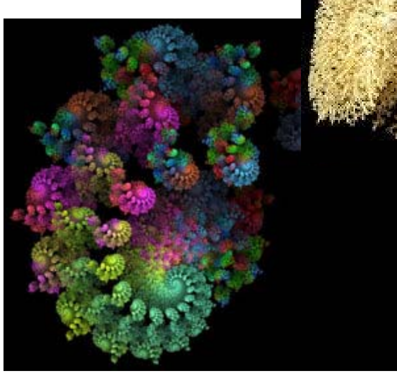
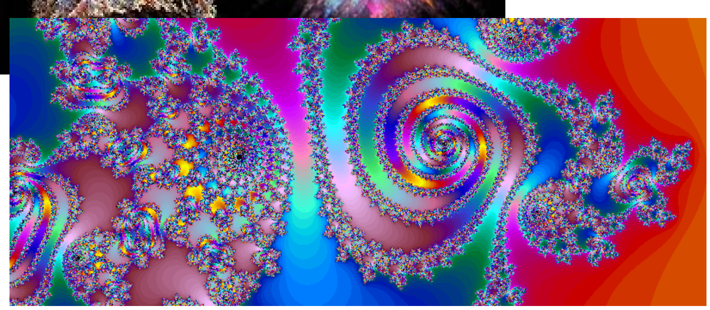
آیا به غیر از هزینه‌های ۱، ۲، ۴، ۷، که نمی‌توان تمبر به ازای آنها تأمین کرد، بقیه هزینه‌های پست را می‌توان تأمین کرد؟ با جدول بالا ظاهراً جواب مثبت است. حالا از فرزندان خود(یا دانش‌آموزان) بخواهید جدول بالا را برای اعداد ۱۶، ۱۷، ۱۹ و ۲۰ ادامه دهند. برای شرح کامل به صفحه ۴۴ مراجعه کنید.

موضوع ۲۲: ساخت فرکتال

این موضوع برای دانش آموزان متوسطه اول مناسب است.

فرکتال به شکلی گفته می‌شود که اعضاء آن مشابه کل شکل است! کوه‌ها و ابرها نمونه‌هایی از فرکتال‌ها هستند. گل کلم نیز نمونه دیگری از فرکتال است.

در زیر یک نمونه از فرکتال به نام **مثلث سرپینسکی**[5] را می‌سازید.

مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۱۶ سانتی‌متر رسم کنید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث شماره ۱ حاصل شود. سپس این مثلث را رنگ بزنید. بعد با سه مثلث رنگ نشده همین کار را انجام دهید.

دو بار دیگر روی مثلث‌های رنگ نشده همین کار را انجام دهید. ادامه این کار به دفعات بیشتر شکلی به نام مثلث سرپینسکی ایجاد می‌کند. برای مشاهده و ساخت فرکتال‌های بیشتر به [۳] مراجعه کنید.

موضوع ۲۳ : رد و اثبات

این موضوع برای دانش‌آموزان پایه نهم مناسب است.

آیا مجموع هر دو عدد طبیعی متوالی بر دو بخش‌پذیر است؟ بدیهی است که نه چون مجموع هر ۲ عدد طبیعی متوالی فرد است و بر دو بخش‌پذیر نیست.

آیا مجموع هر ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است؟

اگر جواب بله است دلیل بیاورید و اگر جواب منفی است مثال نقض بزنید(آن را رد کنید). آیا مجموع هر ۴ عدد طبیعی متوالی بر ۴ بخش پذیر است؟

سوال بالا را برای مجموع هر پنج (یا ۶ یا ۷) عدد طبیعی متوالی و بخش پذیر بودن آن بر ۵ (یا ۶ یا ۷) بررسی کنید.

پاسخ به سؤلات مطرح شده و بررسی کلی موضوع را در صفحه ۴۴ ملاحظه کنید.

[5] Sierpiński triangle

موضوع ۲۴: پیدا کردن سکه تقلبی

این موضوع برای دانش‌آموزان متوسطه اول و بالاتر مناسب است.

تعدادی سکه‌ی کاملاً مشابه داریم که یکی از آنها از بقیه سبک‌تر(تقلبی) است. ضمناً، یک ترازوی دو کفه‌ای و دقیق هم داریم. می‌خواهیم با کمترین توزین(وزن کردن با ترازو) یا کمترین دفعات استفاده از ترازو، سکه تقلبی را مشخص کنیم. چند حالت را با هم بررسی می‌کنیم. اگر ۳ سکه داشته باشیم در هر کفه ترازو یک سکه قرار می‌دهیم. اگر ترازو میزان ایستاد، سکه سوم تقلبی است و الاّ ترازو سکه سبک‌تر را مشخص می‌کند. بنابراین، برای ۳ سکه با **یک بار** استفاده از ترازو، سکه تقلبی مشخص می‌شود.

حالا فرض کنیم که ۵ سکه داریم. اگر در هر کفه ترازو دو سکه قرار دهیم، اگر ترازو میزان ایستاد سکه پنجم تقلبی است.

و الاّ ترازو دو سکه‌ای را مشخص می‌کند که دارای وزن کمتری از دو سکه دیگر هستند. واضح است که، طبق حالت دو سکه، با یک بار دیگر استفاده از ترازو می‌توان سکه تقلبی را یافت. حالا شما بگویید اگر ۷ یا ۹ سکه داشته باشیم حداکثر چند بار باید از ترازو استفاده کنیم تا سکه تقلبی مشخص شود (سعی کنید حداکثر با دوبار استفاده از ترازو سکه تقلبی را بیابید).

حالا حالت‌هایی که ۲۳ یا ۸۰ سکه داشته باشیم را بررسی کنید و حداکثر تعداد دفعاتی را تعیین کنید که باید از ترازو استفاده کنید تا سکه تقلبی مشخص شود.

شرح کامل این موضوع و تعیین حداکثر تعداد دفعات استفاده از ترازو برای هر تعداد سکه را در صفحات ۴۵ و ۴۶ ملاحظه کنید.

فصل دوم

شرح کامل موضوع ها

درباره موضوع ۱: نوشتن اعداد با حروف

اگر به روند کار توجه کنید، با هر عددی که شروع کنید به سرعت به یک عدد **یک رقمی** می‌رسید. مثلاً، اگر با عدد ۱۲۸۵۳۶۷ شروع کنید داریم:

یک میلیون و دویست و هشتاد و پنج هزار و سیصد و شصت و هفت ← ۴۱ ← چهل و یک ← ۶ ← شش ← ۲

بنابراین، کافی است برای اعداد یک رقمی بررسی را انجام دهیم. به صورت زیر:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
یک	دو	سه	چهار	پنج	شش	هفت	هشت	نه
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۲	۲	۲	۴	۳	۲	۳	۳	۲
				↓		↓	↓	
				۲		۲	۲	

ملاحظه می‌شود که علاوه بر عدد ۲ به عدد ۴ هم می‌رسیم. مثلاً، در اعداد ۱۷، ۱۸ و ۲۰ و اعداد بسیار دیگری نیز به عدد ۴ می‌رسیم. بنابراین،

با بررسی موضوع در زبان فارسی به اعداد ۲ یا ۴ می‌رسیم.

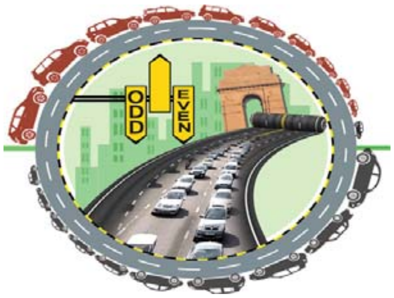
به سادگی، و به طریقی که در بالا گفته شد، اگر بررسی موضوع را در زبان انگلیسی روی اعداد ۱ تا ۹ انجام دهید حتماً به عدد ۴ می‌رسید. مثلاً،

1 → One → 3 → Three → 4 → Four → 4

برای زبان‌های ترکی و کردی نیز می‌توان تحقیق بالا را انجام داد. به نظر می‌رسد که برای زبان‌های کامل، مثل عربی، فرانسه و انگلیسی، حتماً به عدد ۴ خواهیم رسید!؟

با تغییر پایه پولی، از ریال به تومان، عبارات مربوط به وجه چک‌ها و سفته‌ها بسیار کوتاه می‌شود.

درباره موضوع ۲: ارقام زوج و فرد



همان‌طور که در ادامه بررسی‌ها ملاحظه شد با شروع از هر عدد (خیلی بزرگ، دو رقمی یا یک رقمی) به سرعت به یک عدد سه رقمی می‌رسیم. پس کافی است بررسی را برای اعداد سه رقمی انجام دهیم. آیا باید از ۱۰۰ تا ۹۹۹ را امتحان کنیم؟!

لازم نیست. کافی است توجه کنیم که انواع اعداد سه رقمی از نظر تعداد ارقام فرد و زوج چگونه هستند. در زیر این حالت‌های مختلف نوشته شده‌اند و نتیجه بررسی روی آنها ملاحظه می‌شود.

سه رقم زوج	یک رقم فرد و دو رقم زوج	دو رقم فرد و یک رقم زوج	۳ رقم فرد
۳۰۳	۳۱۲	۳۲۱	۳۳۰
↓	↓		↓
۳۲۱	۳۲۱		۳۲۱

ملاحظه کنید که وقتی به عدد سه رقمی می‌رسید با حداکثر یک مرحله دیگر به عدد ۳۲۱ می‌رسید[۱،۷].

درباره موضوع ۳: (عدد ۱۰۸۹)

یک راه آن است که تمام اعداد سه رقمی که یکان و صدگان متفاوت دارند را انتخاب کنیم و اعمال گفته شده را روی آنها انجام دهیم و نتیجه را ملاحظه نماییم. راه دیگر که برای دانش آموزان دوره دوم دبیرستان و بالاتر قابل فهم است به قرار زیر است:

فرض کنید $a\ b\ c$ عدد سه رقمی انتخاب شده باشد و $a > c$.

$$\begin{array}{rccc}
 & a & b & c \\
- & c & b & a \\
\hline
 & [a-(c+1)] & 9 & [10+c-a] \\
+ & [10+c-a] & 9 & [a-(c+1)] \\
\hline
 & 10 & 8 & 9
\end{array}$$

یکان حاصل تفریق

صدگان حاصل تفریق

مقلوب حاصل تفریق

درباره موضوع ۴: بازی با مهره‌ها

اگر این بازی را چند بار انجام دهید حتماً متوجه می‌شوید که هر بازیکن سعی می‌کند در خاتمه هر دور از بازی تعداد خانه‌های خالی سمت راست زوج باشد تا در نهایت دو خانه زوج در سمت راست باقی بماند که در نتیجه شروع‌کننده بازنده خواهد بود. لذا، ملاحظه می‌کنید که در حالت زوج بودن تعداد خانه‌ها، نفر دوم در دور اول بازی خانه شماره ۶ را پر می‌کند و در دور دوم بازی خانه شماره ۹ را، و در هر حالت تعداد خانه‌های بعد از مهره‌ها زوج است.

بنابراین، با نحوه‌ی بازی که شرح داده شد، اگر تعداد مربع‌ها زوج باشد حتماً نفر دوم برنده است و اگر تعداد مربع‌ها فرد باشد و شروع کننده مهره اول را در خانه سوم قرار دهد حتماً برنده خواهد شد.

درباره موضوع ۶ : نوشتن اعداد به صورت مجموع چند عدد

اگر با دقت به حالت‌های نوشتن عدد ۴ به صورت مجموع اعداد ۱ و ۲ توجه کنید ملاحظه می‌کنید که با افزودن عدد ۲ به حالت‌های مربوط به عدد ۲ و افزودن ۱ به حالت‌های عدد ۳، تمام حالت‌های مربوط به عدد ۴ به دست می‌آیند. در مورد عدد ۵ داریم:

افزودن ۲ به حالت‌های عدد ۳   ۱+۱+۱+۲   ۱+۲+۲   ۲+۱+۲   ۵:

۱+۱+۱+۱+۱   ۱+۲+۱+۱   ۲+۱+۱+۱   ۱+۱+۲+۱   ۲+۲+۱

افزودن یک به حالت های نوشتن عدد ۴ به صورت مجموع اعداد ۱ و ۲

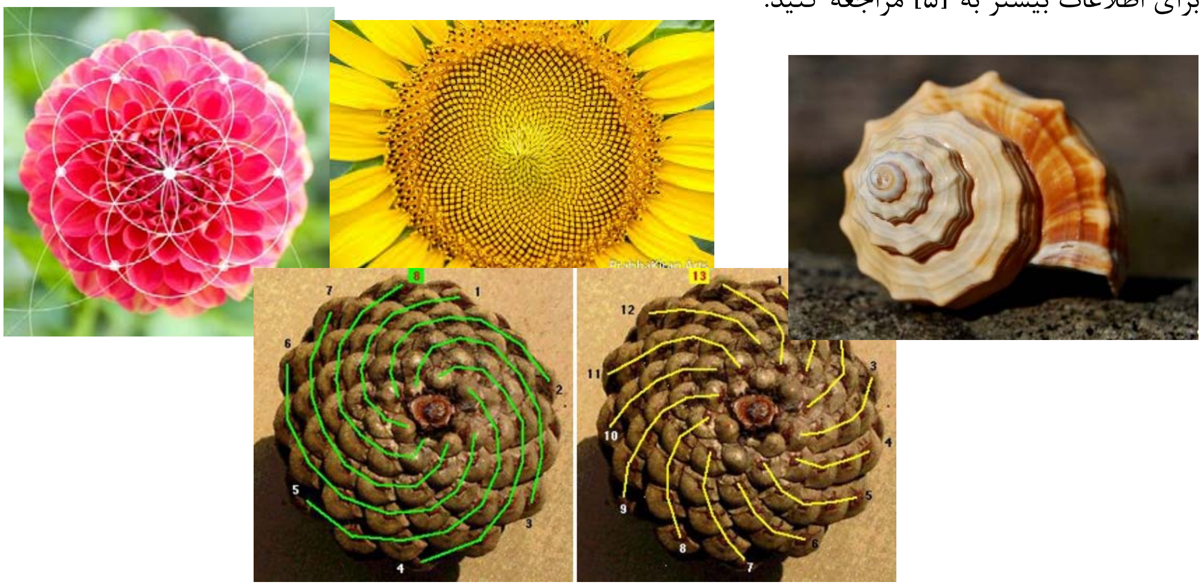
بنابراین تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۵ به صورت مجموع اعداد ۱ و ۲ برابر است با ۸ (=۵+۳).

اعدادی که برای تعداد حالت‌های نوشتن اعداد به صورت مجموع اعداد ۱ و ۲ به دست آمدند در زمره **اعداد فیبوناچی** هستند.

دنباله اعداد فیبوناچی با دو عدد یک شروع می‌شوند و از عدد سوم به بعد هر عدد مساوی مجموع دو عدد قبل آن است.

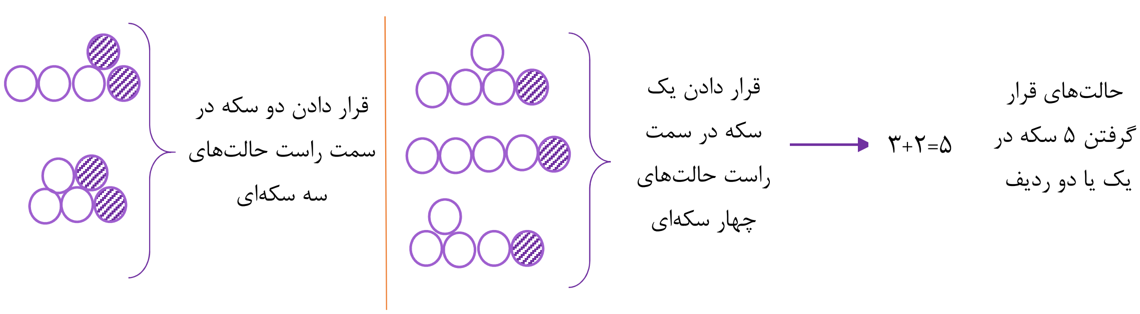
۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸.۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴

اعداد فیبوناچی را می‌توان در تعداد گلبرگ‌های گیاهان مختلف، میوه کاج، لاک حلزون و … مشاهده کرد. برای اطلاعات بیشتر به [۵] مراجعه کنید.

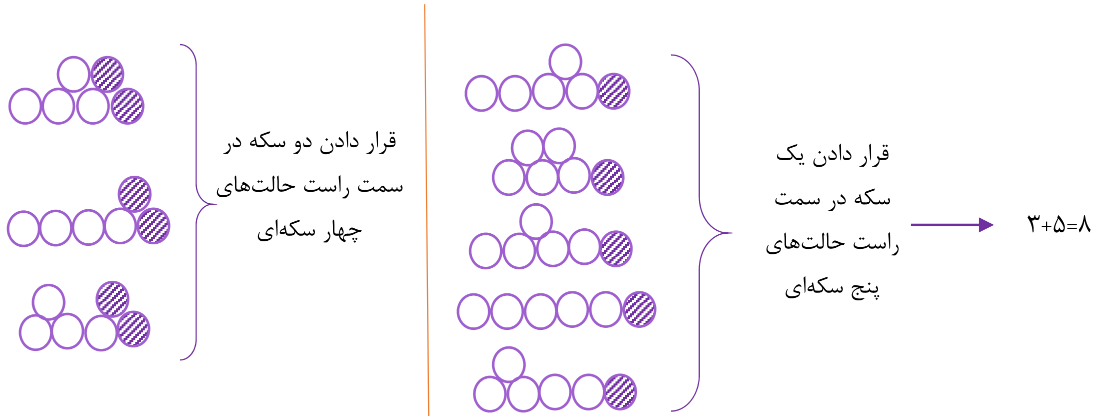


درباره موضوع ۷ : چیدن سکه‌ها

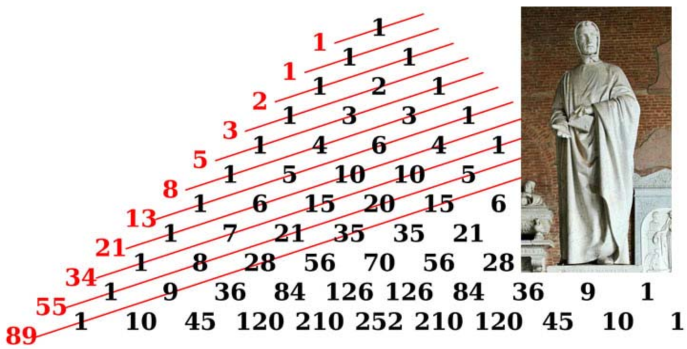
اگر به مستطیل سمت راست صفحه ۹ توجه کنید متوجه می‌شوید که حالتها قرار گرفتن چهار سکه در دو ردیف را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: دسته اول آنهایی که، در سمت راست، سکه آخر زیر یک سکه در ردیف دوم قرار دارد (این وضعیت را می‌توان از یک حالتی که برای قرار گرفتن دو سکه داریم به دست آورد) و دسته دوم آنهایی که سکه آخر زیر سکه ای از ردیف دوم قرار ندارند (این حالت‌ها را می‌توان با قرار دادن یک سکه در سمت راست آخرین سکه از حالت‌های مربوط به ۳ سکه به دست آورد). اگر این روند را برای ۵ سکه انجام دهیم داریم:



با تکرار این روند، در زیر حالت‌های مختلف قرار گرفتن ۶ سکه را در یک یا دو ردیف ملاحظه می‌کنید.



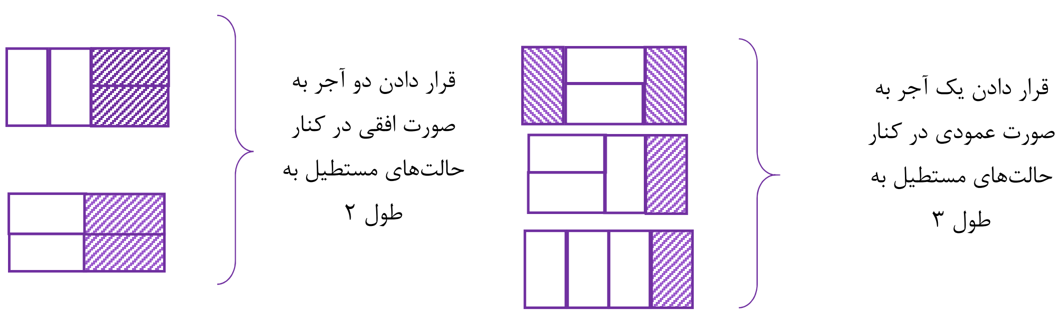
بنابراین برای ۷ سکه ۱۳(=۸+۵) حالت و برای ۸ سکه ۲۱(=۱۳+۸) حالت وجود دارد. این اعداد در زمره‌ی اعداد فیبوناچی هستند[۵].



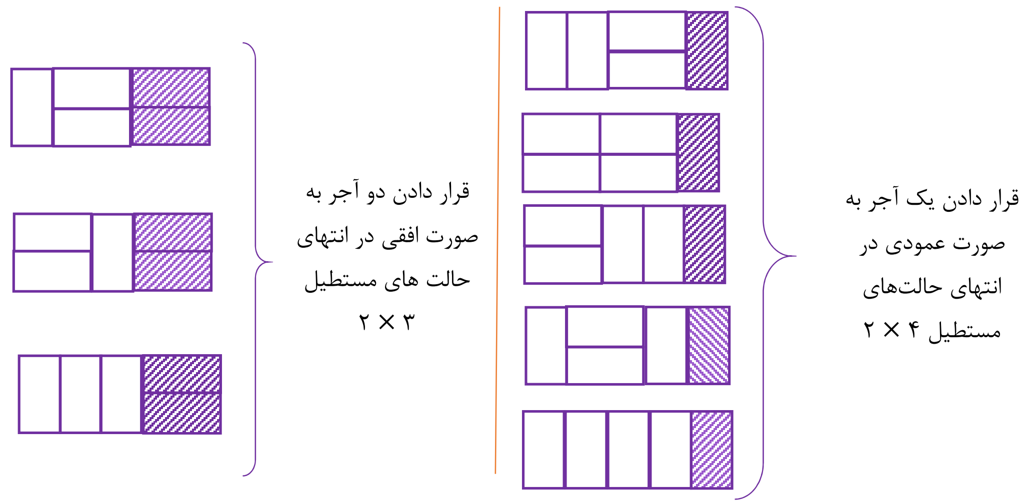
شکل بالا نشان می‌دهد که اعداد فیبوناچی را می‌توان با استفاده از اعداد مثلث پاسکال نیز به دست آورد.

درباره موضوع ۸ : فرش‌کردن مستطیل

یکبار دیگر حالت‌های فرش‌کردن یک مستطیل ۴ × ۲ را رسم می‌کنیم:

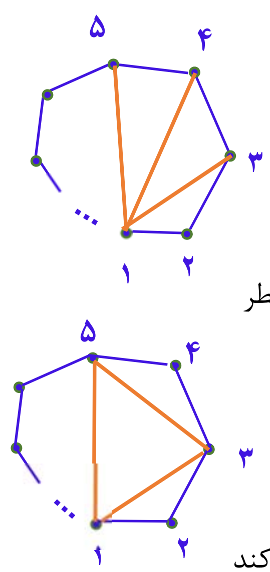


بنابراین تعداد حالت‌ها برای مستطیل ۴ × ۲ عبارت است از : ۵=۳+۲ . حالت های مختلف برای فرش کردن یک مستطیل ۵ × ۲ در زیر آورده شده است.



بنابراین، تعداد حالت‌های فرش‌کردن یک مستطیل ۵ × ۲ برابر است با ۸(=۵+۳). همانند چیدن سکه‌ها، می‌توان تعداد حالتها فرش‌کردن مستطیل‌های ۶ × ۲، ۷ × ۲ و ۸ × ۲ و ... را به دست آورد(بدون اینکه آنها را رسم کنید). تعداد این حالت‌ها، به ترتیب، ۱۳، ۲۱ و ۳۴ هستند(بازهم اعداد فیبوناچی!)[۵].

درباره موضوع ۹ : بازی رسم قطرهای چندضلعی



به سادگی ملاحظه می‌شود که اگر یک رأس چند ضلعی را ثابت نگه داریم و سه رأس غیر مجاور آن را که متوالی هستند انتخاب کنیم حتماً از این رأس و آن سه رأس دیگر ۳ قطر غیرمتقاطع رسم می‌شود.

به دو شکل رو به رو توجه کنید. بنابراین، یک n ضلعی محدب دارای $(n-۳)$ قطر غیرمتقاطع است.

بنابراین، اگر تعداد اضلاع زوج باشد تعداد قطرهای غیرمتقاطع فرد خواهد بود و نفر اول، با هر درجه از هوش و خلاقیت که باشد، بازنده است! چون در هر دور از بازی دو قطر رسم می‌شود و در انتها یک قطر باقی می‌ماند که نفر دوم رسم می‌کند و برنده می‌شود. اگر تعداد اضلاع چندضلعی فرد باشد تعداد قطرهای غیر متقاطع آن زوج می‌شود و نفر اول هر طور شروع کند در انتها برنده است (چرا؟).

درباره موضوع ۱۰ : عدد کاپرِکار

در مقاله جالب زیر

Yutaka Nishiyama, mysterious number 6174

می‌خوانیم: در سال ۱۹۴۹ ریاضیدان هندی از شهر دِولالی[۶] د. ر. کاپرِکار[۷] فرایندی موسوم به عمل کاپرکار، ابداع کرد. این فرایند وقتی روی اعداد چهار رقمی، که تمام ارقامشان یکسان نباشد، اجرا شود، در حداکثر ۷ مرحله به عدد ۶۱۷۴ می‌رسد. عدد ۶۱۷۴ را هسته[۸]این فرایند نامند. اگر بعد از ۷ بار تکرار فرایند کاپرکار به عدد ۶۱۷۴ نرسیدید برگردید و عملیات خود را تکرار کنید، حتماً اشتباه کرده‌اید. (ضمناً برای اعداد سه رقمی به عدد ۴۹۵ خواهیم رسید و برای اعداد دو رقمی به ۹ می‌رسیم!)

اگر ارقام عدد کاپرکار را متوالیاً، جمع کنیم به عدد ۹ می‌رسیم:

$$۶۱۷۴ \to ۶ + ۱ + ۷ + ۴ = ۱۸ \to ۱ + ۸ = ۹$$

$$۴۹۵ \to ۴ + ۹ + ۵ = ۱۸ \to ۱ + ۸ = ۹$$

$$۹ \to ۹$$

برای اطلاع بیشتر به مقاله آقای یاتاکانیشی‌یاما [۶] مراجعه کنید. رجوع به گوگل نیز توصیه می‌شود!

خواص دیگر عدد ۶۱۷۴:

$$۶۱۷۴ = (۶ + ۱ + ۷ + ۴) \times ۲۴۳$$

$$۶۱۷۴ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۷ \times ۷ \times ۷$$

$$۲^۲ + ۳^۲ + ۳^۲ + ۷^۲ + ۷^۲ + ۷^۲ = ۶۱۷۴$$

در صفحه‌ی بعد به توضیح رسیدن به عدد ۶۱۷۴ می پردازیم. البته این دلیل در حد دانش‌آموزان نیست.

فرض کنید عدد a b c d را با شرط (⁕) $۹ \geq a > b > c > d > ۰$ داریم:

که در آن

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ -\,d\,c\,b\,a \\ \hline A\,B\,C\,D \end{array}$$

[۶] Devlali
[۷] Kaprekar
[۸] Kernel

$$D = ۱۰ + d - a \left(a > d \text{ چون}\right),$$

$$C = ۱۰ + c - ۱ - b = ۹ + c - b \left(b > c - ۱ \text{ چون}\right),$$

$$B = b - ۱ - c \quad \left(b > c \text{ چون}\right),$$

$$A = a - d.$$

عدد $a\ b\ c\ d$ تحت فرایند کاپرکار تکرار می‌شود، اگر عدد $A\ B\ C\ D$ را بتوان با استفاده از چهار رقم اولیه a، b، c، d نوشت. لذا می‌توان هسته‌های عمل کاپرکار را با بررسی ترکیبات ممکن $\{a,b,c,d\}$ و اینکه آیا آنها در شرط (⁕) صدق می‌کنند تحقیق کرد. هر یک از ۲۴ (= !۴) ترکیب حروف a، b، c، d یک دستگاه چهارمعادله و چهار مجهول می‌دهند که می‌توان آن را برای تعیین a، b، c، d حل کرد.

نشان داده می‌شود که فقط یکی از این ترکیبات جواب صحیح دارد که در شرط (⁕) صدق می‌کند. این ترکیب عبارت است از $ABCD = bdac$ و جواب $d = ۱$، $c = ۴$، $b = ۶$ و $a = ۷$ است. ضمناً هیچ جواب قابل قبولی برای دستگاه‌های حاصل از ترکیباتی که برخی از ارقام مساوی باشند حاصل نمی‌شود. لذا، ۶۱۷۴ تنها عدد کاپرکار چهار رقمی است. برای اعداد سه رقمی هم عدد ۴۹۵ تنها عدد کاپرکار است (امتحان کنید).

درباره موضوع ۱۱ : بازیابی سن

برای تعیین علت رسیدن به این نتیجه که سن هر فرد در عدد نهایی ۳ بار تکرار می‌شود، توجه کنید که عدد سن یک بار در عدد ۷ و بار دیگر در عدد ۱۴۴۳ ضرب می‌شود. پس یک عدد دو رقمی (سن پدر یا مادر یا یک دانش‌آموز پایه پنجم ابتدایی) در عدد زیر ضرب می‌شود:

$$۷ \times ۱۴۴۳ = ۱۰۱۰۱$$

$$\begin{array}{r} ۱۰۱۰۱ \\ \times\, ab \\ \hline b0b0b \\ +\, a0a0a \\ \hline ababab \end{array}$$

هر عدد دو رقمی که در عدد ۱۰۱۰۱ ضرب شود در حاصل ضرب سه بار تکرار خواهد شد.

بدیهی است که اگر عدد سن دارای سه رقم یا بیشتر! باشد، نتیجه حاصل نمی‌شود.
مثلاً، اگر سن فرزند شما ۵ سال باشد:

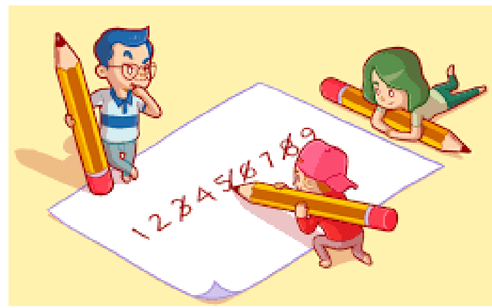
$۵ \times ۷ = ۳۵$ و $۳۵ \times ۱۴۴۳ = ۵۰۵۰۵$

که البته سه بار ۵ به دست می‌آید ولی دو تا ۵۰ هم ملاحظه می‌شود! و اگر سن پدر شما ۱۰۵ سال باشد داریم:

۱۰۵ × ۱۰۱۰۱ = ۱۰۶۰۶۰۵

که به زحمت ۱۰۵ از آن استخراج می‌شود!

درباره موضوع ۱۲ : خط‌زدن اعداد



در راهنمایی این بازی گفته شده است: «اعداد را جفت جفت در نظر بگیرید»

می‌دانیم که دو عدد متوالی نسبت به هم اولند. بنابراین، اگر اعداد را به صورت زیر «در نظر» بگیریم

(۱۲و۱۱) و ... و (۴و۳) و (۲ و ۱)

نفر اول هر عددی را خط زد نفر دوم جفت آن را خط می‌زند. در نهایت دو عدد در یکی از جفت پرانتزهای بالا باقی می‌ماند که نسبت به هم اولند و نفر دوم برنده می‌شود!

این راهبرد، پیروزی حتمی برای نفر دوم به ارمغان می آورد ولی راه‌های دیگری هم وجود دارد که با تکرار این بازی به دست می‌آید (امتحان کنید).

در مورد اعداد ۲ تا ۱۳ اگر به همان ترتیب بالا عمل شود، باز هم نفر دوم برنده است[۸]:

(۱۳ و ۱۲) و ... و (۵ و ۴) و (۳ و ۲)

درباره موضوع ۱۳ : بازی خط زدن عدد و مقسوم علیه‌هایش

با استدلال منطقی زیر ثابت می شود که نفر اول می‌تواند با بازی هوشمندانه برنده شود[۸]. فرض کنید نفر دوم، صرف نظر از هر بازی که نفر اول انجام دهد، دارای راهبرد پیروزی است. اگر نفر اول در شروع بازی عدد ۱ را انتخاب و خط بزند نفر دوم عددی غیر از یک را انتخاب و آن عدد و مقسوم علیه‌هایش را (در صورت وجود) خط می‌زند و در ادامه نفر اول به هر صورت بازی کند، نفر دوم برنده می‌شود. خوب اگر در شروع بازی، عددی که نفر دوم در دور اول بازی انتخاب کرد، توسط نفر اول انتخاب شود و همانند بازی نفر دوم را ادامه دهد نفر اول برنده می‌شود و فرض اولیه باطل است.

در مورد عدد ۷، اگر نفر اول در مرحله اول عدد ۱ را خط بزند حتماً برنده می‌شود.

~~۱~~ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

زیرا، اگر نفر دوم اعداد ۴ و ۲ را خط بزند، در دور دوم، نفر اول ۶ و ۳ را خط می‌زند و دو عدد ۵ و۷ باقی می‌ماند که یکی را نفر دوم و آخری را نفر اول خط می‌زنند و برنده می‌شود.

اگر نفر دوم ۶، ۳ و ۲ را خط بزند سه عدد۴، ۵ و ۷ می‌مانند که چون نفر اول شروع کننده است برنده می‌شود.

اگر نفر دوم عدد ۲ (یا ۳) را خط بزند نفر اول عدد ۳ (یا ۲) را خط می زند، و چون چهار عدد باقی می‌ماند که هیچ دوتای آنها بر هم بخش‌پذیر نیستند، و شروع‌کننده نفر دوم است حتماً نفر اول برنده می‌شود(چرا؟).

برای عدد ۸ نفر اول حتماً باید در مرحله اول اعداد ۲ و ۱ را خط بزند (امتحان کنید). برای عدد ۹ هم نفر اول بایستی با خط زدن عدد یک شروع کند(امتحان کنید).

با وجود اینکه نفر اول همیشه با هوشمندانه بازی کردن می‌تواند برنده شود ولی ظاهراً شروع بازی برای نفر اول مشخص نیست و بستگی به تعداد اعداد دارد.

درباره موضوع بازی‌های دونفره[۸]

اینکه آیا هر بازی دو نفره دارای **راهبرد پیروزی** و برنده است قابل بررسی است. هستند بازی‌هایی که پس از خاتمه آنها هیچ برنده‌ای برای آن نیست.

مثال: فرض کنید یک مکعب داریم. هر بازیکن در نوبت خود سه یال مکعب را رنگ می‌کند (اولی آبی دومی قرمز). بازیکنی برنده است که اولین بار یک وجه مکعب را با یال‌های همرنگ، می‌سازد.

اگر هر بازیکن سه یال از یک وجه مکعب را رنگ کند وقتی بازی تمام می‌شود هیچ وجهی دارای یال‌های یکرنگ نخواهد بود، یعنی بازی برنده ندارد.

تعریف: بازی G را دو ارزشی گوییم هرگاه در انتهای بازی برقرار نشدن شرط پیروزی برای یک بازیکن به منزله برد حریف او باشد.

در رابطه با بازی‌های دو ارزشی قضیه زیر را داریم.

قضیه: اگر در یک بازی دو ارزشی تعداد حرکت‌های هر بازیکن در هر دور از بازی ثابت باشد می‌توان شخص برنده و راهبرد پیروزی را تعیین کرد. بازی‌های دونفره که در موضوع‌های ۱۲ و ۱۳ مطرح شدند دو ارزشی هستند. آیا می‌توان راهبرد پیروزی برای بازی موضوع ۱۶ مشخص کرد؟

درباره موضوع ۱۴ : عدد شاد

ابتدا نشان می‌دهیم که از هر عدد، با هر تعداد رقم،که شروع کنید در نهایت به عددی با تعداد رقم کمتر می‌رسید. (اگر عدد انتخاب شده توانی از ۱۰ باشد مجموع مربع ارقام آن ۱ می‌شود[۱].)

فرض کنید یک عدد ۱۰۰۰ رقمی انتخاب کرده‌اید. بزرگترین رقم ۹ است پس مجموع مربع ارقام عدد انتخاب شده حداکثر برابر است با $۱۰۰۰ \times ۹^{۲} = ۸۱۰۰۰$ که یک عدد **پنج رقمی** است. اما مجموع مربع ارقام یک عدد ۵ رقمی حداکثر برابر است با

$$۵ \times ۹^{۲} = ۴۰۵$$

تعداد ارقام عدد بعدی بستگی به ارقام عدد سه رقمی حاصل دارد ولی آنچه مسلم است به سرعت به عددی سه رقمی می‌رسیم که حداکثر $۲۴۳(= ۸۱ \times ۳)$ است. لذا، بایستی اعداد ۲ تا ۲۴۳ را، که به صورت توانی از ۱۰ نیستند، آزمایش کنیم، این کار توسط رایانه قابل انجام است.(البته در یک کلاس ۳۰ نفری، اگر هر نفر بررسی این موضوع را روی ۸ عدد انجام دهد و نتیجه را گزارش کند، ادعای موضوع ۱۰ ثابت می‌شود!)

درباره موضوع ۱۵ : عدد تاکسی

عدد تاکسی ۱۷۲۹ است با جمع و تفریق و جابجایی ارقام این عدد می‌توان اعداد اول زیادی نوشت. مثلاً

$$۱۷۲۹ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۹۲۷۱ \to ۹۷۲۱ \to ۹۱۲۷ \to ۲۱۷۹$$

$$۱۷۲۹ \to (۱ + ۷)۲۹ = ۸۲۹ \ \checkmark$$

$$۱۷۲۹ \to ۱(۷ + ۲)۹ = ۱۹۹ \checkmark \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۹۹۱ \xrightarrow{\text{جابجایی ارقام}} ۹۱۹ \checkmark$$

$$۱۷۲۹ \to ۲۷۱\left(\left(\text{عدد اول رقم سه}\right) ۱۷۲ \text{ وارون}\right) \xrightarrow{\text{جابجایی ارقام}} ۱۲۷ \checkmark$$

آیا اعداد اول دیگری هم می‌توان ساخت؟ اگر سعی کنید؟ آری!

درباره موضوع ۱۶ : اعداد خودشیفته

ابتدا متذکر می‌شویم که اگر یک عدد ۱۰۰۰ رقمی انتخاب کنید مجموع مکعب ارقام آن حداکثر برابر است با $۷۲۹۰۰۰ = (۱۰۰۰ \times ۹^۳)$ یعنی به یک عدد که حداکثر شش رقم دارد، می‌رسیم. از این عدد نیز حداکثر به عدد $۴۹۷۴ = (۶ \times ۹^۳)$ می‌رسیم که ۴ رقمی است. بنابراین، از هر عددی، هر چقدر بزرگ، شروع کنیم به سرعت به عددی می‌رسیم که حداکثر ۴ رقم دارد. لذا، باید تحقیق کنیم که اگر با عددی کمتر از ۱۰۰۰۰۰ شروع کنیم (که توانی از ۱۰ نباشد) چه اتفاقی می‌افتد.

اولاً با استفاده از اتحادها و خاصیت بخش‌پذیری اعداد بر عدد ۳ می‌توان نشان داد که اگر عدد دلخواهی انتخاب شود که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۳ عدد r باشد (که $r = ۰ , ۱ , ۲$)، باقی‌مانده تقسیم مجموع مکعب ارقام آن هم بر ۳ مساوی r خواهد بود. مثلاً، عدد سه رقمی abc را در نظر بگیرید. اگر باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳ مساوی r باشد، با توجه به اینکه

$$(a+b+c)^۳ = [a^۳+b^۳+c^۳] + ۳(a^۲b+ab^۲+b^۲c+bc^۲+c^۲a+ca^۲+۲abc)$$

باقی‌مانده تقسیم $(a^۳+b^۳+c^۳)$ بر ۳ برابر باقی‌مانده تقسیم $(a+b+c)^۳$ بر ۳ خواهد بود که همان باقی‌مانده تقسیم عدد $a+b+c$ بر ۳ شده است.

این روند را برای اعداد چهار رقمی هم می‌توان تکرار کرد. بنابراین، وقتی یک عدد انتخاب می‌شود، باقی‌مانده این عدد در تقسیم بر ۳، هر چه باشد باقی‌مانده تقسیم عددی که از مجموعه مکعب ارقام آن هم به دست می‌آید. همان خواهد شد. یعنی اگر با عددی که مضرب ۳ است شروع کنید در طول بررسی موضوع اعدادی به دست می‌آورید که مضرب ۳ هستند.

نشان داده می‌شود (با رایانه) که با هر عدد مضرب ۳ که شروع کنید در انتهای فعالیت به عدد ۱۵۳ خواهید رسید.

اما برای مضارب ۳ به اضافه یک چنین نیست. مثلاً، اگر عدد ۲۵ را انتخاب کنید

$$۲۵ \rightarrow ۸+۱۲۵ \rightarrow ۱۳۳ \rightarrow ۱+۲۷+۲۷=۵۵ \rightarrow ۱۲۵+۱۲۵=۲۵۰ \rightarrow ۱۳۳$$

بنابراین، اعداد زیر (و حاصل‌ضرب آنها در توانی از عدد ۱۰) به **۱۳۳** ختم می‌شوند:

۲۵ ۱۳۳ ۵۵

همچنین داریم:

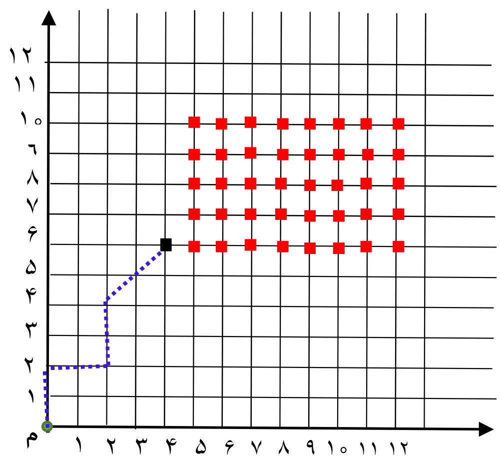
$$۹۱۹ \rightarrow ۹^۳+۱+۹^۳ = ۱۴۵۹ \rightarrow ۱+۶۴+۱۲۵+۷۲۹ = ۹۱۹$$

بنابراین، اگر عددی طبیعی انتخاب کنید و بررسی موضوع را روی آن انجام دهید به یکی از اعداد زیر خواهید رسید:

۱, ۱۳۳, ۱۵۳, ۳۷۰, ۳۷۱, ۴۰۷, ۹۱۹

بررسی این ادعا نیاز به مهارت برنامه‌نویسی و اجرای برنامه با رایانه دارد.

درباره موضوع ۱۷ : بازی حرکت در صفحه‌ی مختصات



در شکل مقابل انتخاب نقطه با مختصات (۴,۶)توسط نفر اول را ملاحظه می‌کنید. ملاحظه می‌کنید که اگر نفر دوم در هر دور از بازی عین حرکت نفر اول را انجام دهد در نهایت به نقطه **م** می‌رسد. (حرکت نفر اول با خط چین و حرکت نفر دوم با خط پر نشان داده شده است.) بنابراین، اگر نفر اول با نقطه‌ای با مختصات زوج شروع کند و نفر دوم در هر دور از بازی همان حرکتی را انجام دهد که نفر اول انجام داده، حتماً برنده می‌شود. حالا اگر نفر اول نقطه‌ای با مختصات غیرزوج (یعنی، هر دو فرد یا یکی فرد و یکی زوج) را انتخاب کند با توضیح زیر می‌تواند حتماً برنده شود. اگر نقطه انتخابی توسط نفر اول دارای مختصات فرد باشد حرکت روی قطر مختصات نقطه جدید را زوج می‌کندکه چون نفر دوم با نقطه‌ای با مختصات زوج شروع می‌کند (بنابر استدلال بالا) حتماً بازنده و نفر اول برنده می‌شود. اگر نقطه انتخابی توسط نفر اول دارای مختصات زوج و فرد باشد و با حرکت به سمت چپ (اگر x فرد باشد) یا به سمت پایین (اگر y فرد باشد) مختصات نقطه جدید زوج خواهد شد و چون نفر دوم با این نقطه شروع می‌کند حتماً بازنده و نفر اول برنده است.

درباره موضوع ۱۸ : بازی با چوب کبریت(۱) [۲]

بازی با ۷ چوب کبریت که در صفحه ۲۱ شرح داده شد نشان می‌دهد که هر بازیکنی که با مضربی از ۴ چوب کبریت شروع کند بازنده است، زیرا نفر شروع کننده هر تعداد چوب کبریت که بردارد، نفر دوم متمم آن تا ۴ چوب کبریت را برمی‌دارد! و در نهایت آخرین چوب کبریت‌ها را نفر دوم برمی‌دارد و برنده می‌شود.

بنابراین، اگر تعداد چوب کبریت‌ها $۴k$ باشد نفر دوم برنده است. اما اگر تعداد چوب کبریت‌ها $۴k+۱$ یا $۴k+۲$ یا $۴k+۳$ باشد نفر اول، به ترتیب، با برداشتن یک، دو یا سه چوب کبریت تعداد آنها را به مضربی از چهار تبدیل می‌کند که در نتیجه نفر دوم بازنده خواهد شد.

توجه : اگر نفر اول با $۴k$ چوب کبریت شروع کند ولی نفر دوم در دور اول بازی متمم تعداد چوب کبریت‌های برداشته شده توسط نفر اول را (تا عدد ۴) بر ندارد باز هم نفر اول می‌تواند برنده شود(چگونه؟). یک بار چنین عمل کنید و نتیجه را ملاحظه نمایید. همچنین اگر نفر اول با مثلاً $۴k + ۲$ چوب کبریت شروع کند و در دوره اول ۲ چوب کبریت برندارد نفر دوم می‌تواند با بازی هوشمندانه برنده شود (امتحان کنید).

بدیهی است که بازیکنی که از راهبرد پیروزی اطلاع دارد شانس پیروزی بیشتری خواهد داشت.

درباره موضوع ۱۹ : ادامه بازی با چوب کبریت

در مورد حالت (۲)، که هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند ۲ یا ۳ چوب کبریت را بردارد، ابتدا به جدول زیر توجه کنید[۲]:

برنده	تعداد برداشته شده توسط نفر دوم	باقی‌مانده	تعداد برداشته شده توسط نفر اول	تعداد چوب کبریت‌ها
نفر اول		۱	۳	۴
نفر دوم	۳	۳	۲	۵
نفر دوم	۲	۲	۳	
نفر دوم	۳	۳ یا ۴	۳ یا ۲	۶
بنابر سطر دوم جدول(نفر اول)		۵	۲	۷
بنابر سطر دوم جدول(نفر اول)		۵	۳	۸
بنابر سطر سوم جدول (نفر اول)		۶	۳	۹

جدول بالا نشان می‌دهد که اگر نفر اول با $۵k$ یا $۵k + ۱$ چوب کبریت شروع کند و نفر دوم متمم چوب-کبریت‌های برداشته شده توسط نفر اول را، تا ۵ بردارد، برنده خواهد شد. در صورتی که نفر اول با $۵k + ۲$ یا $۵k + ۳$ یا $۵k + ۴$ چوب‌کبریت شروع کند می‌تواند، به ترتیب، با برداشتن ۲ یا ۳ یا ۳ چوب‌کبریت وضعیت را به حالت $۵k$ یا $۵k + ۱$ درآورد که نفر دوم با شروع با این تعداد چوب‌کبریت بازنده خواهد بود.

در مورد بازی‌های (۳) و (۴)، با رسم جدولی نظیر جدول بالا ابتدا حدس بزنید اگر نفر اول با چه تعداد چوب‌کبریت شروع کند حتماً برنده (یا بازنده) است و بعد برای حدس خود دلیل بیاورید.

در بازی (۵)، هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند توانی از ۲ یعنی ۱ یا ۲ یا ... یا ۱۶ یا ...، چوب‌کبریت بردارد. ابتدا به جدول زیر توجه کنید.

برنده	تعداد برداشته شده توسط نفر دوم	باقی‌مانده	تعداد برداشته شده توسط نفر اول	تعداد چوب کبریت‌ها
نفر اول	--	۰	۱	۱
نفر اول	--	۰	۲	۲
نفر دوم	۱ یا ۲	۱ یا ۲	۲ یا ۱	۳
نفر اول	--	۰	۴	۴
بنابر سطر سوم جدول(نفر اول)		۳	۲	۵
بنابر سطرهای دوم و چهارم و پنجم جدول(نفر دوم)		۵ یا ۴ یا ۲	۱ یا ۲ یا ۴	۶
نفر اول		۳	۴	۷
نفر دوم		۸ یا ۷ یا ۵ یا ۱	۱ یا ۲ یا ۴ یا ۸	۹

به نظر می‌آید که اگر نفر اول با مضربی از ۳ چوب‌کبریت شروع کند می‌بازد!؟

ابتدا توجه کنید که باقی‌مانده تقسیم ۲^s بر ۳ عدد ۱ یا ۲ است، بر حسب اینکه s زوج یا فرد باشد. بنابراین، $۲^s + ۲^{s-۱}$ (و $۲^s + ۲^{s+۱}$) مضرب ۳ هستند(چرا؟)

حال به استقرای قوی ثابت می‌کنیم که اگر نفر اول با $۳k$چوب‌کبریت شروع به بازی کند نفر دوم با بازی هوشمندانه‌ای (که در حین اثبات مشخص می‌شود) می‌تواند برنده بازی باشد.

فرض کنید اگر نفر اول با مضربی از ۳ چوب‌کبریت که کمتر از $۳k$ است شروع کند، نفر دوم برنده باشد(فرض استقرا) و اینک نفر اول با $۳k$ چوب‌کبریت شروع کرده است. اگر نفر اول در دور اول بازی ۲^s چوب کبریت بردارد نفر دوم $۲^{s-۱}$ یا $۲^{s+۱}$ چوب‌کبریت برمی‌دارد (هرکدام که ممکن باشد). بنابر آنچه در بالا توضیح داده شد تعداد چوب کبریت‌های باقی‌مانده پس از دوره اول بازی مضرب ۳ خواهد بود (زیرا مضربی از ۳ چوب-کبریت از $۳k$ چوب‌کبریت برداشته شده است) و بنا بر فرض استقرا نفر دوم برنده خواهد بود. بدیهی است که اگر نفر اول با $۳k + ۱$ یا$۳k + ۲$ چوب‌کبریت شروع کند و در دوره اول ۱ یا ۲ چوب‌کبریت بردارد، بنابر قسمت قبل برنده خواهد بود.

درباره موضوع ۲۰ : شیر فروش

در جدول صفحه ۲۳ مضارب ۳ و ۵ را ننوشتیم زیرا اگر یک مشتری، مثلاً ۱۸ لیتر شیر طلب کند ۶ بار پیمانه ۳ لیتری را پر می‌کنیم و در ظرف مشتری خالی می‌کنیم. یا اگر ۲۵ لیتر شیر بخواهد ۵ بار پیمانه ۵ لیتری را پر می‌کنیم و در ظرف مشتری می‌ریزیم. جدول تکمیل شده چنین است:

لیتر (شیر تحویل داده شده)	پیمانه ۵ لیتری	پیمانه ۳ لیتری	لیتر شیر
$۲ \times ۳ - ۱ \times ۵ = ۱$	۱-	۲	۱
$۱ \times ۵ - ۱ \times ۳ = ۲$	۱	۱-	۲
$۳ \times ۳ - ۱ \times ۵ = ۴$	۱-	۳	۴
$۲ \times ۵ - ۱ \times ۳ = ۷$	۲	۱-	۷
$۱ \times ۵ + ۱ \times ۳ = ۸$	۱	۱	۸

اما اینکه اگر یک مشتری n لیتر شیر طلب کند و $n > ۸$ چه باید کرد؟ نیاز به استفاده از رابطه تقسیم داریم. فرض کنید

$$n = ۳ \times k + r, \quad r = ۱ \text{ یا } r = ۲$$

به عبارت ساده، بیشترین مضرب ۳ از عدد n را تعیین می‌کنیم (یعنی عدد k را مشخص می‌کنیم). بعد k بار پیمانه ۳ لیتری را پر می‌کنیم و در ظرف خالی می‌ریزیم. حالا باید r لیتر شیر اضافه کنیم. از جدول بالا برای تهیه یک یا دو لیتر شیر کمک می‌گیریم. جواب نهایی چنین است:

$$n = ۳(k - ۳) + ۲ \times ۵ = ۳k + ۱ \qquad \text{اگر } r = ۱$$

$$= ۳(k - ۱) + ۱ \times ۵ = ۳k + ۲ \qquad \text{اگر } r = ۲$$

درباره موضوع ۲۱ : فروش تمبر

همانند موضوع ۲۰، اگر بیشترین تعداد تمبر ۳ تومانی را برای تأمین هزینه پست n تومانی تأمین کنیم باقی‌مانده یکی از اعداد صفر یا ۱ یا ۲ خواهد بود. اگر

$$n = ۳k + r, \quad r = ۱ \text{ یا } ۲,$$

جدول زیر تعداد تمبرهای ۵ تومانی و ۳ تومانی را بر حسب مقادیر r نشان می‌دهد. بنابراین،

تعداد تمبر ۵ تومانی	تعداد تمبر ۳ تومانی	r	n
۰	k	۰	$۳k + r$
۲	$k - ۳$	۱	
۱	$k - ۱$	۲	

فقط تمبر مرسولاتی که هزینه پست آنها ۱، ۲، ۴ یا ۷ تومان باشد را نمی‌توان تأمین کرد.

بررسی این موضوع برای دانش‌آموزان پایه ششم و بالاتر مناسب است.

درباره موضوع ۲۳ : رد یا اثبات

اینکه آیا مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخشپذیر است، ساده است. فرض کنید عدد وسطی n باشد پس جمع ۳ عدد متوالی به صورت زیر خواهد شد:

$$(n - ۱) + n + (n + ۱) = ۳n$$

که حاصل، مضرب ۳ است. برای چهارعدد مثال نقض زیر را داریم:

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰$$

که ۱۰ بر ۴ بخشپذیر نیست. در حالت کلی اگر k عدد طبیعی متوالی داشته باشیم و k فرد باشد و عدد وسطی را n بنامیم(با فرض $k = ۲s + ۱$) داریم

$$(n - s) + \cdots + (n - ۱) + n + (n + ۱) + \cdots + (n + s) = kn.$$

آیا اگر k زوج باشد مجموع k عدد طبیعی متوالی بر k بخش‌پذیر نیست؟ تحقیق می‌کنیم.

اگر اولین عدد را m فرض کنیم داریم

$$\begin{aligned} m + (m + ۱) + \cdots + (m + k - ۱) &= km + (۱ + ۲ + \cdots + k - ۱) \\ &= km + \frac{(k - ۱)k}{۲} \end{aligned}$$

برای اینکه مجموع این k عدد بر k بخش‌پذیر باشد باید $\frac{(k-۱)k}{۲}$ بر k بخش‌پذیر باشد و این وقتی امکان دارد که

$$\frac{(k-۱)k}{۲} = lk \Rightarrow k-۱ = ۲l \Rightarrow k = ۲l+۱$$

یعنی k حتماً باید فرد باشد. آیا مجموع هر ۹۹ عدد طبیعی متوالی بر ۹۹ بخش پذیر است؟ آری!

درباره موضوع ۲۴ : پیدا کردن سکه تقلبی

در مورد ۷ یا ۹ سکه سعی می‌کنیم با یک بار استفاده از ترازو، ۳ سکه شامل سکه تقلبی در اختیار بگیریم. مثلاً، در حالت ۷ سکه، در هر کفه‌ی ترازو ۳ سکه قرار می‌دهیم. اگر ترازو میزان ایستاد، سکه هفتم تقلبی است و الا ترازو ۳ سکه شامل سکه تقلبی را مشخص می‌کند. بعد می‌دانیم که با یک بار استفاده از ترازو می‌توانیم از بین این ۳ سکه، سکه تقلبی را مشخص کنیم. پس در کل با حداکثر ۲ بار استفاده از ترازو سکه تقلبی مشخص می‌شود.

در مورد ۹ سکه نیز در هر کفه‌ی ترازو ۳ سکه قرار می‌دهیم. اگر ترازو میزان ایستاد سکه تقلبی در ۳ سکه دیگر است و الا ترازو، ۳ سکه تقلبی را مشخص می‌کند. بعد با یک بار استفاده از ترازو از بین این ۳ سکه، سکه تقلبی مشخص می‌شود.

در مورد ۲۳ سکه سعی کنید ۹ سکه به دست آورید که یکی از آنها سکه تقلبی باشد. وقتی تعداد سکه‌ها ۸۰ است سعی کنید ۲۷سکه شامل سکه‌ی تقلبی در اختیار بگیرید (علت را در بررسی حالت کلی، در زیر، دریابید).

قضیه: فرض کنید n سکه مشابه داریم که یکی از آنها از بقیه سبک‌تر(تقلبی) است و $۳^{k-1} < n \leq ۳^k$ که k عددی طبیعی است. آنگاه با حداکثر k بار استفاده از یک ترازوی دقیق دو کفه‌ای می‌توان سکه‌ی تقلبی را مشخص کرد.

اثبات: اثبات به استقرا روی k است[۴]. اگر $k = ۱$ تعداد سکه‌ها، یعنی n، ۲ یا ۳ عدد است که نشان دادیم با یک بار استفاده از ترازو می‌توان سکه تقلبی را مشخص کرد. اینک فرض می‌کنیم برای $l \geq ۱$ اگر $۳^{l-۱} < n \leq ۳^l$ حداکثر با l بار استفاده از ترازو می‌توان سکه تقلبی را یافت(فرض استقرا).

اگر $۳^l < n < ۳^{l+۱}$ سعی می‌کنیم با یک بار استفاده از ترازو ۳^l سکه شامل سکه‌ی تقلبی را در اختیار بگیریم. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $۳^l < n \leq ۲ \times ۳^l$ آنگاه اگر n زوج (فرد) باشد در هر کفه از ترازو به تعداد $\frac{n}{۲}$ ($\frac{n-۱}{۲}$) سکه قرار می‌دهیم اگر ترازو میزان ایستاد تعداد بقیه سکه‌ها را، که شامل سکه تقلبی هستند، به ۳^l سکه

می‌رسانیم، اگر ترازو میزان نایستاد تعداد سکه‌هایی که وزن کمتری داشتند به ۳^l می‌رسانیم. (اگر $n = ۲ \times ۳^l$ که $\frac{n}{۲} = ۳^l$ ، در غیر اینصورت $\frac{n}{۲} < ۳^l$ و از سکه‌های سالم به $\frac{n}{۲}$ سکه اضافه می‌کنیم تا تعدادشان ۳^lسکه شود که شامل سکه‌ی تقلبی هم باشد). بنابراین با یک بار استفاده از ترازو ۳^l سکه شامل سکه‌ی تقلبی داریم، که بنا بر فرض استقرا با حداکثر l توزین می‌توان سکه تقلبی را یافت، و در مجموع با حداکثر $l + ۱$ بار توزین سکه تقلبی مشخص می‌شود.

حالت دوم: $۲ \times ۳^l < n \leq ۳^{l+۱}$. در هر کفه‌ی ترازو ۳^l سکه قرار می‌دهیم اگر ترازو میزان ایستاد سکه تقلبی در m سکه باقی‌مانده است که $۰ < m \leq ۳^l$ و با افزودن تعدادی سکه به آن ۳^lسکه شامل سکه‌ی تقلبی پیدا می‌کنیم. اگر ترازو میزان نایستاد ۳^l سکه مشخص می‌شود که شامل سکه‌ی تقلبی است و با حداکثر l بار استفاده از ترازو می‌توان سکه‌ی تقلبی را یافت و در مجموع با حداکثر $(l + ۱)$ بار استفاده از ترازو سکه تقلبی مشخص می‌شود.

بدیهی است که استدلال بالا برای دانش آموزان متوسطه دوم و دبیران ریاضی قابل فهم است، ولی در اثنای اثبات مشخص شد که بایستی برای هر تعداد مشخص سکه چگونه عمل کرد (یعنی، در هر کفه از ترازو چند سکه قرار داد).

منابع و مراجع

۱- استفاده از کامپیوتر در اثبات احکام ریاضی، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۵۹ و ۶۰.

۲- نظریه بازی‌ها، قسمت اول بازی با چوب کبریت‌ها. اسمعیل بابلیان، حمید حسن زاده، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۶۶، ۱۳۸۰.

۳- ویژگی‌ها و تولید فرکتال‌ها، اسمعیل بابلیان، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۵۳، پاییز ۱۳۷۷.

۴- معمای تعیین مهره‌ای خاص از بین k مهره مشابه، اسمعیل بابلیان، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۲۴، زمستان ۱۳۶۸.

۵- درباره اعداد فیبوناچی، اسمعیل بابلیان، مجله رشد آموزش ریاضی شماره‌های ۵ و۶، بهار و تابستان ۱۳۶۴.

6-Nishyama, Yutaha, Kurashi no Algorithm, Kyoto, Nakamishiya (1993).

۷- مجموعه مقالات علمی و جزوات آموزشی اولین مدرسه تابستانی علوم پایه، فصل ششم: سیاه‌چاله‌ها در ریاضیات، انجمن توسعه ایران نوین، تابستان ۱۳۸۱.

۸- مجموعه مقالات علمی و جزوات آموزشی اولین مدرسه تابستانی علوم پایه، فصل پنجم: نظریه بازی‌ها، انجمن توسعه ایران نوین، تابستان ۱۳۸۱.