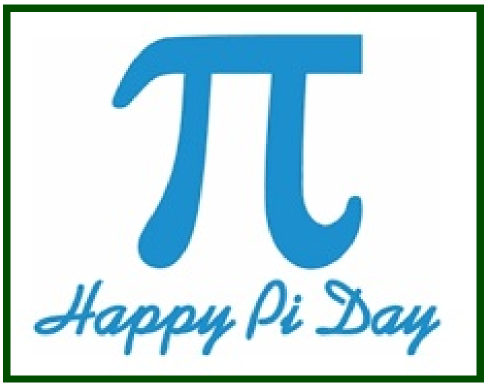

فرمول‌های عجیب رامانوجان برای عدد π

«به‌مناسبت ۱۴ مارس، روز عدد π»

حسن حقیقی* **و داود خجسته سالکویه****

چکیده:

سیری‌نیواسا رامانوجان[1] *(۱۸۸۷ - ۱۹۲۰) چندین سری برای محاسبهٔ عدد پی (π) ارائه کرد که بسیار سریع به حدشان که کسری از عدد پی است همگرا هستند و امروزه پایه و اساس الگوریتم‌های کارا برای محاسبهٔ عدد π می‌باشند. در این مقاله به مرور برخی از این سری‌ها و بیان نکاتی دربارهٔ آن‌ها می‌پردازیم.*

سیری‌نیواسا رامانوجان

تقریب عدد پی با دو رقم اعشار برابر با ۳/۱۴ است. به‌همین دلیل روز چهاردهم از ماه سوم میلادی (۱۴ مارس) به‌عنوان روز عدد π نام‌گذاری شده است. این روز بهانهٔ خوبی است جهت برگزاری جشن‌ها و همایش‌ها برای ایجاد علاقه و انگیزه در دانش‌آموزان و دانشجویان. برای اطلاع از رویدادهای عمومی برای عدد π می‌توان به وبگاه piday.com مراجعه کرد.

عدد π مهم‌ترین و پر رمز و رازترین عددی است که در اغلب شاخه‌های علوم و مهندسی، به‌ویژه برای بیان برخی روابط ریاضی و صورت‌بندی‌های قوانین فیزیک ظاهر می‌شود. این عدد ابتدا به صورت نسبت محیط یک دایره به قطر آن تعریف شده است. در اواخر قرن هجدهم، لامبرت ثابت کرد این عدد گویا نیست و در اواخر قرن نوزدهم لیندمان، بر اساس اثبات هرمیت از متعالی بودن عدد e، ثابت کرد این عدد متعالی است، به این معنی که در هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح صدق نمی‌کند. یک کنجکاوی دیرینه و پایان‌ناپذیر سبب شده است تا بشر این عدد را بیشتر بشناسد و خواص بیشتری از آن را آشکار کند. به‌ویژه، محاسبهٔ بسط اعشاری این عدد و جستجوی الگوهای معین در این بسط، موضوع مطالعات گوناگون بوده است. این تلاش‌ها، به‌طور بی‌وقفه از زمان ارشمیدس، اولین فردی که موفق شد از طریق محاسبهٔ محیط چندضلعی‌های محیطی و محاطی در یک دایره به شعاع واحد، تا دو رقم بعد از اعشار، این عدد را محاسبه نماید، تا به امروز ادامه دارد. با پیشرفت چشمگیر رایانه‌ها، با استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر سری‌هایی که به‌نوعی به عدد پی همگرا هستند، کارشناسان علوم رایانه موفق شده‌اند که این عدد را تا ۱۰۰ تریلیون رقم بعد از اعشار محاسبه کنند. بررسی رفتار تک‌تک ارقام بعد از اعشار عدد، یا رفتار رقم‌های اعشاری آن را در قالب‌های چندتایی همچنان مورد مطالعه و بررسی قرار دارد و هر موفقیت جدید با یک نوآوری بی‌بدیل همراه است.

از جمله افرادی که فرمول‌هایی بسیار متفاوت با فرمول‌های رایج برای عدد π، به‌دست آورد سیری‌نیواسا رامانوجان بود. در سال

[1] Srinivasa Ramanujan

۱۹۱۴، رامانوجان در اولین مقاله خود [۵]، براساس تقریب‌هایی برای انتگرال‌های بیضوی ([۳] رابببینید) و محیط بیضی، ۱۷ سری معرفی کرد که همگی آن‌ها به مضرب صحیحی از $\frac{1}{\pi}$ همگرا می‌شوند. او در این مقاله، طرح اثباتی از اینکه چرا سه سری اول از این سری‌ها به مضرب صحیحی از معکوس π همگرا هستند ارائه کرده بود ولی برای بقیهٔ آن‌ها، اثباتی ارائه نکرده بود. همچنین براساس یک استدلال هندسی، توانست فرمول

$$\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}=3.14159265258\ldots$$

را به دست آورد (صفحه ۲۵۳ از [۲] را ببینید) و بدون استفاده از ماشین حساب مقدار آن را محاسبه نماید. در این محاسبه تمام رقم‌های قرمزشده (۸ رقم ابتدائی اعشار) درست هستند.

بیشتر سری‌هایی که برای محاسبهٔ عدد π مورد استفاده قرار می‌گیرند حدشان به کسری که صورت آن عدد π است همگرا می‌شوند، درصورتی که سری‌هایی که توسط رامانوجان معرفی شده‌اند حدشان کسری است که مخرج آن عدد π است. این هم هوش خارق‌العاده رامانوجان را نشان می‌دهد و هم اینکه نشان می‌دهد سرعت همگرایی سری‌های او به سمت عدد π به‌مراتب بیشتر از بقیهٔ سری‌های مورد استفاده برای محاسبهٔ ارقام بعد از اعشار π است. این ویژگی برای کسانی که می‌خواهند آن را برای محاسبه توسط رایانه استفاده کنند خیلی مناسب است، زیرا زمان کمتری از رایانه را برای محاسبهٔ آن می‌گیرد و پیچیدگی آن در مقایسه با سایر فرمول‌هایی که برای محاسبهٔ این عدد مورد استفاده قرار می‌گیرد و عمدتاً مبتنی بر بسط تیلر توابع مثلثاتی است، بسیار کمتر است.

تا سال‌ها بعد، این سری‌ها مورد توجه جامعهٔ ریاضی قرار نگرفت. بعد از ساخته شدن اولین رایانه و افزایش قدرت محاسباتی بشر، لزوم یافتن الگوریتم‌هایی سریع و با پیچیدگی کمتر، برای محاسبهٔ ارقام بعد از اعشار این عدد، فعالان این حوزه را واداشت تا به جستجوی سری‌هایی بپردازند که به نحو سریع‌تری به عدد پی همگرا هستند. سری‌های معرفی‌شده توسط رامانوجان دارای این ویژگی مهم بودند و در کانون توجه این گروه قرار گرفت.

شاید زیباترین و کاربردی‌ترینِ این سری‌ها به‌صورت

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}},\qquad (1.2)$$

است. در سال ۱۹۸۵، بیل گاسپر[2]، یکی از اساتید ریاضی و علوم کامپیوتر از دانشگاه «ام آی تی»، از سری (۱.۲) استفاده کرد و تا ۱۷ میلیون رقم بعد از اعشار این عدد را محاسبه کرد. او که قبلاً تعداد زیادی ارقام بعد از اعشار عدد π را با استفاده از کسرهای مسلسل محاسبه کرده بود، مشاهده کرد که ارقام بعد از اعشار محاسبه‌شده براساس سری (۱.۲) و ارقام بعد از اعشار عدد π که بر اساس کسرهای مسلسل محاسبه شده بود، در بسیاری از مکان‌های بعد از اعشار، با هم تطابق دارند. این مشاهده این حدس را تقویت کرد که سری‌های ادعایی رامانوجان به مضربی از $\frac{1}{\pi}$ همگرا هستند.

تا اینکه در سال ۱۹۸۷، برادارن بُروایِن، جوناتان و پیتر[3]، ثابت کردند حدهای ادعایی رامانوجان درست است و از یکی از این سری‌ها استفاده کردند و موفق شدند با مقدار دهی هر جملهٔ از این سری، ۵۰ رقم بعد از اعشار این عدد را محاسبه نمایند.

اخیراً نگ در [۶] این سری را مورد مطالعهٔ بیشتری قرار داده است. سری‌هایی که رامانوجان معرفی کرده است، در حال حاضر به‌عنوان پایه و اساس الگوریتم‌هایی است که برای محاسبهٔ سریع عدد π به‌کار می‌روند. همان‌گونه که هاردی در خصوص رامانوجان نوشت: «کشفیات رامانوجان به‌طور نامتعارفی ارزشمند هستند، اما در نگاه اول نمی‌توان ارزش آن‌ها را دریافت». این نکته در خصوص سری بالا نیز درست است.

اگر تنها یک جمله از سری (۱.۲) را درنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi}\approx\frac{2\sqrt{2}}{9801}\frac{0!(1103+26390\times 0)}{(0!)^4 396^{4\times 0}}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\times 1103.$$

درنتیجه

$$\pi\approx\frac{9801}{2206\times\sqrt{2}}=3.14159273\ldots$$

که به‌طور شگفت‌انگیزی، شش رقم اعشار آن با بسط اعشار عدد π یکسان است. همچنین، اگر تنها دو جمله از این سری را درنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi}\approx\frac{2\sqrt{2}}{9801}\frac{1103+4!(1103+26390)}{(1!)^4\times 396^4},$$

که تقریب زیر را به‌دست می‌دهد

$$\pi\approx\frac{9801}{2206\times\sqrt{2}}=3.14159265358979323\ldots,$$

که ۱۴ رقم اعشار آن با قسمت اعشاری عدد π یکسان است.

اجازه دهید جزئیات بیشتری از این سری را مطالعه کرده و دلیل این اتفاق را جستوجو کنیم. این سری را می‌توان به صورت زیر

[2] Bill Gosper [3] Jonathan and Peter Borwein

نوشت (صفحهٔ اینستاگرام (vibingmath) را ببینید)

$$\frac{۱}{\pi}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۹۸۰۱}\sum_{k=۰}^{\infty}\underbrace{\frac{(۴k)!}{(k!)^{۴}۴^{۴k}}}_{\alpha_k}\times\underbrace{(۱۱۰۳+۲۶۳۹۰k)}_{\beta_k}\times\underbrace{\frac{۱}{۹۹^{۴k}}}_{\gamma_k}.$$

ضریب ثابت $\frac{۲\sqrt{۲}}{۹۸۰۱}$ تأثیری در سرعت همگرایی سری ندارد. داریم

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+۱}}{\alpha_k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{(۴k+۴)!}{((k+۱)!)^{۴}\times ۴^{۴k+۴}}\times\frac{۴^{۴k}(k!)^{۴}}{(۴k)!}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{(۴k+۱)(۴k+۲)(۴k+۳)}{(۴k+۴)^{۳}}=۱\end{aligned}$$

همچنین

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\beta_{k+۱}}{\beta_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{۱۱۰۳+۲۶۳۹۰(k+۱)}{۱۱۰۳+۲۶۳۹۰k}=۱.$$

ازاین‌رو، زمانی که k افزایش پیدا می‌کند مقدار $\alpha_k\beta_k$ تقریباً ثابت باقی می‌ماند. بنابراین، همگرایی سریع و جادویی سری به γ_k مربوط می‌شود. در حقیقت، داریم

$$\gamma_k = \frac{۱}{۹۹^{۴k}}\approx(۱۰^{-۸})^{k}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که به ازای هر واحد افزایش در k، تقریباً هشت رقم درست بعد از اعشار عدد π به‌دست می‌آید.

در سال‌های دهه ۱۹۸۰، گریگوری و دیوید چادنوفسکی[4]، روایت زیر از فرمول راموناجان را پیدا کردند

$$\frac{۱}{\pi}=۱۲\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}(۶k)!(۱۳۵۹۱۴۰۹+۵۴۵۱۴۰۱۳۴k)}{(۳k)!(k!)^{۳}(۶۴۰۳۲۰)^{۳k+\frac{۳}{۲}}}.$$

هر جملهٔ این سری، ۱۴ رقم درست بعد از اعشار این سری را به‌دست می‌دهد و از طریق موازی کردن چندین کامپیوتر شخصی توانستند در سال ۱۹۹۴ تا ۴ میلیارد رقم بعد از اعشار عدد π را محاسبه نمایند.

در تمام این سال‌ها، نقش پیشرو در محاسبهٔ عدد پی را دو ریاضی دان کانادایی، برادران بُروایِن، برعهده داشتند و اغلب الگوریتم‌های مورد استفاده برای محاسبهٔ ارقام بعد از اعشار عدد π توسط این دو برادر نوشته شدند. کتاب آن‌ها [۲] مرجعی مهم برای اطلاع از دانسته‌های بشر درباره الگوریتم‌های مورد استفاده برای محاسبهٔ ارقام بعد از اعشار عدد π است. متأسفانه، جوناتان در ۲۰۱۶، در ۶۵ سالگی و پیتر در ۲۰۲۰، در ۶۷ سالگی فوت کردند. یکی از نتایج مهم این دو برادر در ۲۰۰۱، به‌دست آوردن یک سری بود که به کمک آن می‌توان به ازای هر عدد طبیعی n، nامین رقم بسط عدد π در مبنای ۱۶ را، بدون اینکه ارقام پیش از رقم nام محاسبه گردد، در زمانی کمتر از یک دقیقه تعیین کرده است. این سری به‌صورت

$$\pi=\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{۱۶^{i}}\left(\frac{۴}{۸i+۱}-\frac{۲}{۸i+۴}-\frac{۱}{۸i+۵}-\frac{۱}{۸i+۶}\right)$$

است.

مطالعات در حوزهٔ نظری دربارهٔ عدد π نیز پیشرفت‌های خوبی کرده است. در اوایل قرن جاری، یک خانواده وسیع‌تر از سری‌هایی شبیه سری‌های راموناجان پیدا شدند ([۴] و مراجع آن را ببینید)، حتی این نوع سری‌ها کاربردهایی در نظریه ریسمان پیدا کرده‌اند ([۱] را ببینید).

امروزه عدد π را به‌عنوان عددی که هستهٔ همومرفیسم زیر، از گروه جمعی $\mathbb{C}$ در گروه ضربی $\mathbb{C}-\{۰\}$ را تعیین می‌کند، تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}exp: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}-\{۰\},\\ z &\longmapsto e^{z},\\ \ker(exp) &= \{z\in\mathbb{C}\mid e^{z}=۱\}=۲\pi i\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب، علاوه بر رابطهٔ $e^{i\pi}+۱=۰$ که توسط اویلر ارائه شد، رابطهٔ دیگری بین دوعدد متعالی π و e را به‌دست می‌دهند.

در حوزهٔ عمومی نیز به‌کمک عدد π اتفاقات جالبی سازمان‌دهی می‌شود. با الهام از ارقام بعد از اعشار π، در سال ۲۰۰۵، گوگل ۱۴۱۵۹۲۶۵ قطعه تکنولوژی‌های جدید خود را ارائه داد. در ۲۰۱۹، یکی از کارکنان گوگل، به نام اِما هاروکا ایواء، با استفاده از فضای ابری و قدرت محاسباتی موجود در گوگل عدد π را تا ۳۱,۴۱۵,۹۲۶,۵۳۵,۸۹۷ (۳۱ تریلیون) رقم بعد از اعشار محاسبه کرد. این محاسبه در ۲۲ سپتامبر ۲۰۱۸ شروع و بعد از ۱۲۱ روز محاسبه، در ۲۱ ژانویه ۲۰۱۹ خاتمه یافت. در ۲۰۲۲ نیز اِما هاروکا ایواء، به اتفاق همکارانش توانستند تا ۱۰۰ تریلیون رقم بعد از اعشار π را محاسبه نمایند.

[1] G. Almkvist, J. Guillera, *Ramanujan-like Series for $\frac{1}{\pi^2}$ and String Theory*, Experimental Mathematics, (2012), 223-234.

[2] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, *Pi: A Source Book*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1997.

[3] N. Deka Baruah, B. C. Berndt, *Ramanujan's series for $\frac{1}{\pi}$*

[4] Chudnovsky

arising from his cubic and quartic theories of elliptic functions, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008) 357–371'

[4] Jesús Guillera, *A Class of Conjectured Series Representations for $\frac{1}{\pi}$*, Experimental Mathematics, (2006), 409-414.

[5] S. Ramanujan, *Modular Equations and Approximations to π*, Quarterly Journal of Mathematics, 45 (1914) 350–372.

[6] C. L. Wong, On the Elegance of Ramanujan's Series for $\frac{1}{\pi}$, arXiv:2104.12412, 2021.

* دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
**دانشگاه گیلان

شوخی با عدد پی

حسن حقیقی *

می دانید عدد پی به‌طور تقریبی ۳.۱۴ یا ۳.۱۴۱۵۹ است. این تقریب سبب شده تا روز ۱۴ ماه سوم سال میلادی (یعنی ۱۴ مارس) روز عدد پی نامیده شود و سه رقم تقریب بعدی یعنی ساعت ۱۵ و ۹ دقیقه دستمایهٔ تعیین ساعت شروع جشن عدد پی شده است.

عدد پی عمومی‌ترین عدد شناخته‌شده در جامعه است و در این روز برخی ریاضی‌دانان دربارهٔ خواص پرشمار این عدد برای غیر ریاضی‌دانان صحبت می کنند و در کنار آن به سایر مباحث مرتبط با ریاضیات نیز می‌پردازند.

این جشن تنها محدود به مباحث جدی ریاضی نیست بلکه گاه جنبهٔ طنز هم به‌خود می‌گیرد. در واقع هر عدد گویا دارای بسط اعشاری متناوب است و با این دورهٔ تناوب، آن عدد گویا به‌طور یکتایی تعیین می‌شود، و چون عدد پی گویا نیست، بنابراین بسط اعشاری آن بسیار نامنظم است و حدس زده می‌شود غیر قابل پیش‌بینی است (و به همین دلیل نامزدی مناسب برای تولید عدد تصادفی می تواند باشد). این ویژگی موضوع طنزی شده که در فیلم https://www.gocomics.com/theargylesweater/2013/02/08 به آن پرداخته شده است. در این فیلم، همسر عدد پی از این بی‌نظمی ارقام بعد از اعشار همسرش در یک دادگاه طرح شکایت می کند.

حالا معلوم نیست کدام دادگاه به این شکایت رسیدگی می کند، ولی آنچه مسلم است این است که رئیس دادگاه یک ریاضی‌دان است. چون هیچ ریاضی‌دانی هنوز نتوانسته ثابت کند آیا این دنبالهٔ نامتناهی از ارقام اعشاری سرانجام منظم می‌شود یا به همان روال غیر قابل پیش‌بینی خود ادامه می‌دهد و قاضی هم که یک ریاضی‌دان سخت‌گیر است و به راحتی هر ادعایی را نمی‌پذیرد، مگر اینکه یک استدلال قوی در پس آن باشد، نمی‌تواند به‌طور یقینی تصمیم بگیرد که در این دعوی، حکم عادلانه چه خواهد بود. به‌همین دلیل به همسر پی می‌گوید ادعای او در این مرحله درست نیست و به او توصیه می‌کند که صبر کند تا ببیند آیا بالاخره ویژگی «نامنظم بودن پی تا بینهایت»، به اثبات می‌رسد یا نه، و حل اختلاف را به خود آن‌ها واگذار می‌کند.

* دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی