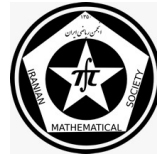


به نام خدا  
مسائل دوماهانه ریاضی انجمن ریاضی ایران  
فروردین ماه ۱۴۰۲



۱. الف) فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $f(x) + f(2x)$  تابعی پیوسته باشد. نشان دهید  $f$  ممکن است ناپیوسته باشد.

ب) فرض کنید برای هر  $a > 1$  تابع  $f(x) + f(ax)$  پیوسته باشد. نشان دهید  $f$  پیوسته می باشد.

۲. فرض کنید  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  یک تابع باشد. نشان دهید دو عدد متمایز  $a$  و  $b$  در  $\mathbb{Q}$  وجود دارد که

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

۳. الف) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $1402 \times 1402$  با درایه هایی صحیح باشد و  $A^4 = I$  که  $I$  نشان دهنده ماتریس همانی است. نشان دهید  $\text{Trac}(A)$  عددی زوج است.

ب) نشان دهید تعداد نامتناهی ماتریس  $1402 \times 1402$  با درایه های صحیح وجود دارد که  $A^4 = I$ .

۴. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک نامتناهی باشد به طوری که هر زیر مجموعه کراندار آن مجموعه ای متناهی باشد. نشان دهید دو عضو متمایز  $a, b$  در  $X$  وجود دارد به طوری که برای هر  $x \in X$  داریم

$$\frac{3}{4}d(a, b) \leq \min\{d(x, a), d(x, b)\}.$$

۵. فرض کنید  $A_1, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{C})$  و

$$\text{rank}(A_1) + \dots + \text{rank}(A_m) < n.$$

نشان دهید ماتریس ناصفر  $B \in M_n(\mathbb{C})$  موجود است که

$$A_1 B = A_2 B = \dots = A_m B.$$

لطفاً پاسخ هر پرسش را تایپ کنید یا به صورت کاملاً خوانا بنویسید و تصویر واضح آن را در قالب فایل pdf به همراه مشخصات خود حداکثر تا پایان اردیبهشت ماه ۱۴۰۲ به نشانی زیر ارسال فرمایید.

mathematicalmonthly@gmail.com