شرف‌الدین طوسی و مفهوم مشتق [*]

رحیم زارع نهندی [*]

چکیده

تحقیقات شرف‌الدین طوسی در مورد حل معادلات درجهٔ سه توسط رشدی راشد، مورخ برجستهٔ تاریخ ریاضیات، به تفصیل تحلیل و مستند شده است. نتیجه‌گیری راشد در مورد معرفی مشتق چندجمله‌ای درجهٔ سه برای یافتن بیشینهٔ آن توسط شرف‌الدین، مورد تردید عده‌ای از محققان تاریخ ریاضیات قرار گرفته است که استدلال می‌کنند طوسی می‌توانست نتیجهٔ خود را، بدون استفاده از مفهوم مشتق، با روش‌های دیگری به‌دست آورد. یان هوخندایک تحلیل دیگری پیشنهاد می‌کند و نتیجه می‌گیرد که طوسی احتمالاً نتایج خود را با ارتقای روش مربع‌ها و مستطیل‌ها بر اساس کتاب دوم اقلیدس به‌دست آورده است. در این نوشته، پس از بیان برخی نکات تاریخی زمان شرف‌الدین طوسی، تحلیل هوخندایک از کار شرف‌الدین برای یافتن بیشینهٔ تابع $x^3 = ax^2+bx$، که در آن a و b اعداد صحیح مثبت هستند را مورد بحث قرار می‌دهیم. نتیجه می‌گیریم که حتی اگر تحلیل هوخندایک را بپذیریم، شیوهٔ شرف‌الدین برای محاسبهٔ بیشینهٔ چندجمله‌ای درجهٔ سه، با توسیع روش مربع‌ها و مستطیل‌های مطرح شده در کتاب اقلیدس، از خلاقیت و نوآوری قابل تحسینی برخوردار است.

گذاری تاریخی

شرف‌الدین مظفر بن محمد طوسی حدود ۵۱۴ هجری شمسی (۱۱۳۵ میلادی) در طوس متولد می‌شود. دانش‌های اولیه را در طوس فرا می‌گیرد و در سی سالگی به دمشق می‌رود و در آنجا ریاضیات تدریس می‌کند، سه سال نیز در شهر حلب زندگی می‌کند. در آن زمان شهر حلب موطن مسلمانان و یهودیان بوده و در مقاومت در مقابل صلیبیون شهرت داشته است. شرف‌الدین سپس به موصل می‌رود. او یکی از شاگردان مهم خود کمال‌الدین بن یونس را در موصل تربیت می‌کند. کمال‌الدین بن یونس استاد دانشمند معروف خواجه نصیرالدین طوسی بوده است.

بخشی از زندگی شرف‌الدین طوسی با ظهور صلاح‌الدین ایوبی، سردار معروف جنگ‌های صلیبی همزمان بوده است و زمانی که صلاح الدین در ۱۱۷۴ میلادی دمشق را تصرف می‌کند، شرف‌الدین طوسی به بغداد برمی‌گردد و بنابر نوشتهٔ بعضی تاریخ‌نویسان، او تا آخر عمر در بغداد می‌ماند و یکی از کتاب‌های معروف خود در جبر یعنی المعادلات را در بغداد می‌نویسد [۲].

در آن سال‌ها هنوز خلفای عباسی در بغداد خلافت می‌کردند ولی تحت فرمان سلجوقیان بودند. خلیفهٔ وقت، المستضی بامراللّه بود (۱۱۷۰ـ۱۱۸۰). هرچند در آن زمان نظامیهٔ بغداد که به‌همراه نظامیه‌های دیگر توسط خواجه نظام‌الملک، وزیر مدبر سلجوقیان تأسیس شده و بسیار فعال بود، ولی شرط فعالیت در نظامیه‌ها اعتقاد به مذهب شافعی بود، ولی شرف‌الدین اسماعیلی‌مذهب بود که با شافعی‌ها دشمنی عمیقی داشتند، حتی بنابر نوشته‌هایی، شرف‌الدین از دعات اسماعیلیه بوده است [۳]. بنابراین بعید است که شرف‌الدین در نظامیهٔ بغداد مشغول تدریس شده باشد. سال وفات شرف‌الدین طوسی را ۵۹۲ هجری شمسی می‌دانند.

هر چند شرف‌الدین مستقیماً شاگرد عمر خیام نبوده، وی تنها چهار سال پس از وفات خیام که در سال ۱۱۳۱ میلادی اتفاق افتاده، متولد شده است و تحت تأثیر آموزه‌های علمی خیام بوده است و در واقع دستاوردهای ریاضی خیام را دنبال کرده است.

شجره‌نامهٔ علمی «تقریباً همهٔ» ریاضی‌دانان معاصر به شرف‌الدین طوسی می‌رسد! در واقع طبق سامانهٔ شجره‌نامه ریاضی[۱] [۴] نسل علمی ۱۹۶۳۸۴ ریاضی‌دان معاصر به شرف‌الدین طوسی می‌رسد (از ۲۸۱۵۴۰ دانش‌آموختهٔ ثبت شده در سامانه، ۲۲ شهریور ۱۴۰۱) اما استاد شرف‌الدین طوسی ناشناخته است. بعد از شرف‌الدین طوسی، کمال‌الدین بن یونس، خواجه نصیرالدین طوسی و شمس‌الدین البخاری به‌ترتیب ۱۹۶۳۸۳، ۱۹۶۳۸۲ و ۱۹۶۳۸۱ خلف علمی دارند. گرگوری کیونیادیس منجم و دانشمند یونانی عهد بیزانس شاگرد البخاری بوده است که تحت نظر ایشان در مکتب‌خانهٔ ایلخانی در تبریز، نجوم و اختر فیزیک را فرا گرفته است. وی پس از مراجعت به وطن، آکادمی نجوم را در شهر تربیزوند[۲] (طرابوزان فعلی) تأسیس می‌کند و به تربیت دانش‌پژوهان می‌پردازد که شاید از اولین حرکت‌ها در راستای انتقال دانش نجوم و اخترفیزیک و ریاضیات ایرانی-اسلامی به غرب به‌شمار بیاید.

رشدی راشد دانشمند فرانسوی-مصری تبار، که پژوهش‌های بسیار ارزشمندی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات مسلمانان انجام داده است،

---

[*] این نوشته با تغییراتی، روز ۲۷ اردیبهشت ۱۴۰۱ در بزرگداشت سالروز تولد عمر خیام، در دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان ارائه شده است.

[1] Mathematical Genealogy [2] Trebizond

ایدهٔ تابع و مشتق چندجمله‌ای درجهٔ سوم را به شرف‌الدین طوسی نسبت می‌دهد که به کمک مشتق چندجمله‌ای درجهٔ سه، بیشینهٔ آن را به‌دست آورده است [۱] (طبق گزارش بخش نسخ خطی کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران، نسخه‌ای از کتاب شرف‌الدین در کتابخانه چستر بیتی شهر دوبلین ایرلند موجود است [۷] !!).

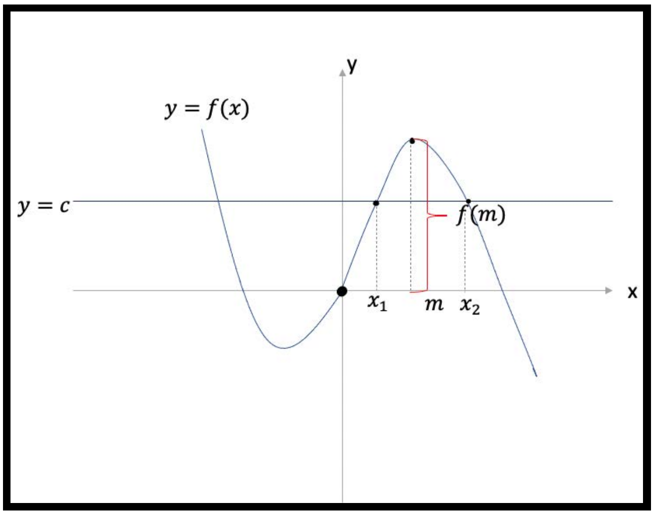
برخی دیگر از متخصصین تاریخ ریاضیات مانند یان هوخندایک[3] از هلند ضمن قدردانی از رشدی راشد به‌جهت معرفی شرف‌الدین طوسی، معتقد است طوسی بیشینهٔ چندجمله‌ای درجهٔ سه را با به‌کارگیری روش مربع‌ها و مستطیل‌ها بر اساس کتاب دوم اقلیدس به‌دست آورده است [۵]. درواقع ریاضی‌دانان مسلمان برای کارهای فلاسفه و ریاضی‌دانان یونان باستان اهمیت زیادی قائل بوده‌اند و لقب «معلم اول» فقط مختص ارسطو بوده است و ابونصر فارابی و برهان‌الدین میرداماد به ترتیب معلم ثانی و ثالث قلمداد شده‌اند. شرف‌الدین طوسی مدتی در دمشق کتاب‌های اقلیدس و افلاطون را تدریس می‌کرده است. بنابراین استفاده از روش‌های اقلیدس توسط شرف‌الدین طوسی در محاسبهٔ بیشینهٔ چندجمله‌ای درجهٔ سه، همان‌طورکه خواهیم دید، بسیار هوشمندانه است و از اهمیت کار شرف‌الدین نمی‌کاهد. درهرصورت عبارت مشتق چندجمله‌ای درجهٔ سه، بدون نام‌گذاری به آن، در کتاب شرف‌الدین آمده است. درحالی‌که مفهوم دقیق مشتق در سدهٔ هفدهم میلادی یعنی، حدود ۵۰۰ سال بعد از شرف‌الدین طوسی توسط نیوتن و لایب‌نیتز معرفی شده است.

مناقشهٔ انتساب مفهوم مشتق به شرف‌الدین طوسی

حل برخی از معادله‌های درجهٔ دوم برای بابلیان شناخته شده بود (۲۰۰۰ سال پیش از میلاد) که تقریباً همان دستور امروزی برای جواب مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم بود (بدون به کار بردن نمادهای ریاضی امروزی). ابوموسی خوارزمی معادله‌های درجهٔ دوم را با دیدگاه جبری رده‌بندی کرد و به‌روش هندسی به حل آن‌ها پرداخت. می‌دانیم که نمادگذاری نوین ریاضی از سده‌های چهارده و پانزده میلادی پا گرفت و پیشینیان برای بیان یک معادله، آن را به‌صورت جمله توصیف می‌کردند. مثلاً، معادلهٔ $x^{۲} + ۷x = ۱۸$ به‌صورت «مالی به اضافه هفت شیئ مساوی هیجده است، آن شیئ کدام است» توصیف می‌شد. در آن زمان اعداد منفی نیز هنوز به صورت مجرد تعریف نشده بودند. بنابراین دو معادلهٔ $x^{۲} + ax = b$ و $x^{۲} + b = ax$ که a و b اعداد مثبتی هستند، جداگانه مورد بررسی قرار می‌گرفتند. با این ملاحظه، خیام معادله‌های درجهٔ سه را به ۲۵ دسته با ضرایب مثبت تقسیم می‌کند و برای معین‌کردن ریشهٔ مثبت ۲۰ دسته از آن‌ها، روشی هندسی با ترسیم دو خم مخروطی ارائه می‌کند. مثلاً در روش خیام برای حل معادلهٔ $x^{۳} + c = bx$ که $b, c > ۰$، از محل تلاقی یک سهمی و یک هذلولی استفاده می‌شود [۶]. پنج معادلهٔ درجه سه باقی می‌ماند که عبارتند از:

$$x^{۳} + c = ax^{۲},$$
$$x^{۳} + c = bx,$$
$$x^{۳} + ax^{۲} + c = bx,$$
$$x^{۳} + bx + c = ax^{۲},$$
$$x^{۳} + c = ax^{۲} + bx,$$

که a و b و c اعدادی مثبت‌اند. شرف‌الدین طوسی در قسمت اول کتاب جبر خود، در ادامهٔ کار خیام، ابتدا ۲۵ معادله را بر حسب تعداد جواب‌های مثبت مرتب می‌کند و به حل ترسیمی ۲۰ معادلهٔ اول، مشابهٔ خیام، ولی به‌صورتی نظام‌مندتر می‌پردازد. شرف‌الدین طوسی هر یک از پنج معادلهٔ فهرست بالا را به‌صورت $f(x) = c$ درنظرمی‌گیرد و با نوشتن عبارت مشتق $f(x)$ در هر پنج مورد، بدون آن که نامی برای عبارت مشتق بگذارد، عدد مثبت m را که به ازای آن $f(x)$ بیشینه می‌شود، به‌دست می‌آورد (و آن را العددالاعظم می‌نامد) و با مقایسهٔ $f(m)$ و c نسبت به وجود و تعداد ریشه‌های مثبت معادلهٔ $f(x) = c$ بحث می‌کند و نتیجه می‌گیرد که اگر $f(m) > c$، آنگاه معادلهٔ $f(x) = c$ دارای دو ریشهٔ مثبت، اگر $f(m) = c$، آنگاه معادلهٔ دارای تنها ریشهٔ مثبت برابر m و اگر $f(m) < c$، آنگاه معادله ریشهٔ مثبت ندارد.



شکل ۱: خم درجهٔ سه

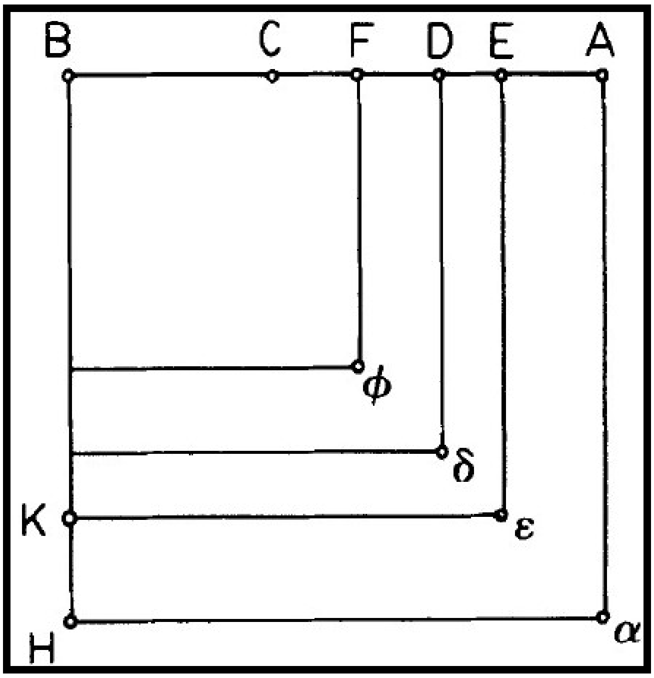
در شکل ۱ خم درجهٔ سه $y = f(x)$ خط $y = c$ را در دو نقطه با

[3]Jan Hogendijk

طول‌های مثبت x_1 و x_2 قطع کرده: x_1 و x_2 ریشه‌های مثبت معادلهٔ درجهٔ سه $f(x) = c$ هستند.

رشدی راشد که کتاب جبر شرف‌الدین طوسی را از زبان عربی به زبان فرانسوی ترجمه کرده و شرف‌الدین طوسی و دستاوردهای ریاضی او را معرفی کرده، تأکید دارد که شرف‌الدین در جای دیگرِ کتاب خود، در مبحث حل عددی معادله‌ها نیز از مشتق استفاده کرده و نتیجه می‌گیرد شرف‌الدین به مفهوم مشتق دست یافته است.

در مقالهٔ [۶]، توضیح داده شده که چگونه می‌توان با استفاده از روش‌های جبری مقدماتی که احتمالاً در زمان شرف‌الدین شناخته شده بود، عدد مثبت m که به‌ازای آن $f(x)$ بیشینه می‌شود، را پیدا کرد. در آن مقاله همچنین ارتباط نتایج شرف‌الدین طوسی با دستور کاردان برای ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سه و روش سادهٔ واحدی درمورد حل ترسیمی خیام برای همهٔ معادلات درجه سه به‌طور مبسوط توضیح داده شده است.



شکل ۲: $BC = a < \sqrt{b} = BA$

حال به تحلیل یان هوخندایک در مورد محاسبهٔ عدد مثبت m که $f(x)$ متناظر در معادلهٔ پنجم از فهرست بالا، یعنی $f(x) = ax^2 + bx - x^3$ را بیشینه می‌کند، می‌پردازیم. به روایت هوخندایک، شرف‌الدین به شیوهٔ زیر m را محاسبه می‌کند: شرف‌الدین طوسی بر حسب ضرایب $f(x)$، سه حالت $a = b$، $a > b$ و $a < b$ را جداگانه بررسی می‌کند و ۵۸ صفحه از کتاب خود را به تحلیل این معادله در این سه حالت اختصاص می‌دهد. حالت $a < b$ را توضیح می‌دهیم. حالت اول ساده‌تر است و حالت دیگر مشابهٔ حالت $a < b$ است. با فرض $a < b$، مطابق شکل ۲، روی یک خط راست سه پاره خط با طول‌های $BC = a$، $BE = x$ و $BA = b$ انتخاب می‌شود.

با این انتخاب تساوی $f(x) = c$ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$c = f(BE) = BC \times BE^2 + BE \times (BA^2 - BE^2).$$

طوسی BA^2 و BE^2 را اندازهٔ مساحت $BE\alpha H$ و $BE\epsilon K$ تلقی می‌کند. $BE^2 - BA^2$ را به‌عنوان نومان[4] (الم به زبان عربی) مساحت قطعهٔ $A\alpha HK\epsilon E$ می‌گیرد که در ادامه آنرا مساحت ماندهٔ مربعی می‌نامیم. چنین اشکالی در کتاب دوم اقلیدس در مباحثی متفاوت به‌کار رفته است. مساحت مربع $BA\alpha H$ و $BE\epsilon K$ را با $[B\alpha]$ و $[B\epsilon]$ و مساحت ماندهٔ مربعات $A\alpha HK\epsilon E$ را با $[\epsilon\alpha]$ نمایش دهید. آنگاه $f(BE)$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$f(BE) = BC \times [B\epsilon] + BE \times [\epsilon\alpha].$$

اگر D نقطه‌ای متغیر بین E و C باشد و طبق شکل ۲ نمادگذاری کنیم، مشابهٔ آخرین تساوی داریم

$$f(BD) = BC \times [B\delta] + BD \times [\alpha\delta].$$

طوسی تفاضل $f(BD) - f(BE)$ را به کمک تجزیهٔ بسیار هوشمندانه و پیچیدهٔ مربع‌ها و چندین ماندهٔ مربعات ظاهر شده در این تفاضل، به تساوی زیر می‌رسد

$$f(BD) - f(BE) = DE \times (CD \times (BE + BD) - [\epsilon\alpha]). \tag{۱.۲}$$

اگر F نقطه‌ای متغیر بین C و D باشد و طبق شکل ۲ نمادگذاری کنیم، با تعویض نقش D با F و نقش E با D در تساوی (۱.۲)، داریم

$$f(BF) - f(BD) = FD \times (CF \times (BF + BD) - [\delta\alpha]). \tag{۲.۲}$$

حال نقطهٔ D را طوری انتخاب کنید که $f(BD)$ بیشینه شود. طبق (۱.۲) و (۲.۲)، نقطهٔ D باید طوری باشد که برای هر نقطهٔ E بین D و A داشته باشیم

$$CD \times (BE + BD) > [\epsilon\alpha],$$

[4] Gnomon

و برای هر نقطهٔ F بین D و C داشته باشیم

$$CF \times (BF + BD) < [\delta\alpha]$$

با دستکاری بیشتر روی دو نامساوی اخیر، طوسی نتیجه می‌گیرد که برای‌آن‌که $f(BD)$ بیشینه شود، کافی است تساوی زیر برقرار شود

$$۲CD.BD = [\delta\alpha]. \tag{۳.۲}$$

با جای‌گذاری

$$\begin{aligned} BD &= m, \\ CD &= BDBC = ma, \\ [\delta\alpha] &= BA^۲ - BD^۲ = b - m^۲, \end{aligned}$$

در تساوی (۳.۲) خواهیم داشت

$$۲am + b - ۳m^۲ = ۰$$

که دقیقاً تساوی $f'(m) = ۰$ است. شرف‌الدین طوسی عدد m را با حل معادلهٔ درجهٔ دو اخیر به‌دست می‌آورد.

با این توضیحات هوخندایک نتیجه می‌گیرد شرف‌الدین طوسی عدد m را که f به ازای آن بیشینه می‌شود، با روش بالا به‌دست آورده است و $f(x)$ را به‌طور مستقیم با صفر قرار دادن مشتق f به‌دست نیاورده است، هر چند مشتق f در نهایت در محاسبه m ظاهر شده باشد. با این حال، محاسبات هندسی بالا توسط شرف‌الدین طوسی، آنچنان مبتکرانه و هوشمندانه است که حاکی از نبوغ ریاضی این دانشمند بزرگ است و کم‌توجهی احتمالی وی به نقش مشتق، طبق تحلیل هوخندایک، از اهمیت کار خلاقانهٔ او نمی‌کاهد. به‌هرحال مشتق چندجمله‌ای درجهٔ سه به‌طور ضمنی در کتاب شرف‌الدین طوسی آمده است و این خود حائز اهمیت است.

[۱] حسین معصومی همدانی با همکاری حسن امینی، تاریخ و فلسفه علم، مقالاتی از رشدی راشد و درباره او، انتشارات هرمس، تهران ۱۳۹۷.

[2] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Sharaf/

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Sharaf_al-Din_al-Tusi

[4] https://mathgenealogy.org/extrema.php

[5] J. P. Hogenduk, Sharaf al-Din al-Tusi, On the number of positive roots of cubic equations, Historia Mathematica 16 (1989), 69—85.

[6] B. Kalantari and R. Zaare-Nahandi, On Tusi's Classifcation of Cubic Equations and its Connections to Cardano's Formula and Khayyam's Geometric Solution, to appear in P.J.M.. Aavailable at https://arxiv.org/abs/2201.13282.

[7] ChesterBeatty-chesterbeatty.ie

*دانشگاه تهران