پاسخ مسائل ماهانه

محمّدرضا فعّال شیرکده

دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت مدرس

۱۴ مرداد ۱۴۰۱

سوال ۱) برای این که یک عدد ۱۸ رقمی از اعداد داده شده بسازیم کافی است تمام حالت هایی که می توان یک جایگشت ۱۸ رقمی با ۱۸ رقم از این اعداد داشته باشیم را حساب کنیم و با هم دیگر جمع کنیم تا جواب مساله را به دست بیاوریم ، مثلا با پنج رقم ۱ و شش رقم ۲ و چهار رقم ۳ و سه رقم ۴ چند عدد ۱۸ رقمی می توان $\frac{۱۸!}{۵!۶!۴!۳!}$ عدد داشت و برای حالت های دیگر نیز به همین شکل.اما در نظر گرفتن تمام حالات به این شکل بسیار سخت است ما برای رفع این مشکل از توابع مولد استفاده می کنیم.

توجه می کنیم که اگر بخواهیم یک عدد ۱۸ رقمی از این اعداد بسازیم حداقل از هر کدام از این اعداد باید یکبار استفاده کنیم(چون مثلا اگر نخواهیم در عدد ساخته شده اصلا عدد ۴ را داشته باشیم با ۴+۶+۷=۱۷ رقم دیگر نمی توان یک عدد ۱۸ رقمی داشته باشیم!).

حال برای عدد یک می توانیم عبارت $x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{x^{۷}}{۷!}$ را در نظر بگیریم زیرا در یک عدد ۱۸ رقمی تعداد یک ها می تواند هر کدام از اعداد $۱,۲,\ldots,۷$ باشد.به طور مشابه برای عدد ۲ عبارت $x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{x^{۶}}{۶!}$ ، برای عدد ۳ عبارت $x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{x^{۴}}{۴!}$ و برای عدد ۴ هم عبارت $x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}$ را در نظر می گیریم. در عبارت های بالا ضریب x^n ، $\frac{1}{n!}$ انتخاب شده است تا اگر در ساخت عدد ۱۸ رقمی n رقم از یک عدد انتخاب شدند دیگر جایگشت های تکراری آن محاسبه نشوند. حال از ضرب این عبارت ها و محاسبه ضریب $\frac{x^{۱۸}}{۱۸!}$ می توانیم تعداد جایگشت های ۱۸ رقمی با ۱۸ رقم از اعداد $۱,۲,۳,۴$ با محدودیت های داده شده را به دست بیاوریم.

در تابع مولد نمایی

$$f(x)=(x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!})(x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۴}}{۴!})(x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{x^{۶}}{۶!})(x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{x^{۷}}{۷!})$$

ضریب $\frac{x^{۱۸}}{۱۸!}$ جواب مساله ما خواهد بود. درستی این کار هم به خاطر این است که در واقع ضریب $\frac{x^{۱۸}}{۱۸!}$ در عبارت بالا جمع تمام حالت هایی است که می توان ۱۸ رقم از اعداد $۱,۲,۳,۴$ را

انتخاب کرد (با محدودیت های داده شده) و با آنها جایگشتی ۱۸ حرفی تشکیل داد و ما هم دقیقا دنبال همین موضوع بودیم.

با بسط دادن $f(x)$ به کمک wolfarm می توان دید که

$$f(x) = \frac{1}{522547200}x^{20} + \frac{1}{26127360}x^{19} + \frac{47}{104509440}x^{18} + \cdots + \frac{13}{8}x^{7} + \frac{13}{6}x^{6} + 2x^{5} + x^{4}$$

خواهد بود.در نتیجه ضریب $\frac{x^{18}}{18!}$ برابر با $\frac{47.18!}{104509440} = 2879276400$ خواهد بود و در نتیجه تعداد اعداد ۱۸ رقمی خواسته شده برابر ۲۸۷۹۲۷۶۴۰۰ می باشد.

سوال ۲) از جبرخطی می دانیم که هر ماتریس $A_{m\times n}$ با درایه های حقیقی تجزیه ای به شکل $A = U\Sigma V^T$ (تجزیه SVD) دارد که $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ ماتریس های متعامد هستند (ماتریس $X_{n\times n}$ را متعامد گوییم هر گاه $XX^T = X^TX = I_n$ که I_n ماتریس همانی از مرتبه n می باشد.) و $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس به شکل زیر می باشد

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} diag(\sigma)_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

که $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ مقادیر تکین ماتریس A می باشند که اعداد حقیقی مثبتی هستند و r رتبه ماتریس A می باشد.(نمایش سمت راست نمایش بلوکی ماتریس Σ می باشد که منظور از $diag(\sigma)r\times r$ یک ماتریس قطری با درایه های روی قطر $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ (به ترتیب) و منظور از $0_{(p\times q)}$ یک ماتریس $p\times q$ می باشد که تمام درایه های آن صفر می باشند.)

حال به حل مساله اصلی باز می گردیم. چون A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد بنا بر قضیه گفته شده دارای تجزیه SVD به شکل $A = U\Sigma V^T$ می باشد که U, Σ, V ماتریس های مربعی $n\times n$ می باشند و U, V هم ماتریس هایی متعامد هستند. حال ماتریس $A^\dagger$ را از روی تجزیه SVD ماتریس A به شکل زیر می سازیم $A^\dagger = V^\dagger\Sigma^\dagger U^{\dagger T}$ که $V^\dagger = V$ و $U^\dagger = U$ و $\Sigma^\dagger_{n\times m}$ یک ماتریس به شکل

$$\Sigma^\dagger_{n\times m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} = \begin{bmatrix} diag(\frac{1}{\sigma})_{r\times r} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

نمایش سمت راست نمایش بلوکی ماتریس $\Sigma^\dagger$ می باشد و منظور از $diag(\frac{1}{\sigma})_{r\times r}$ ماتریس قطری $r\times r$ (r رتبه ماتریس A) می باشد که عناصر روی قطر آن به ترتیب عبارتند از $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}$ و $0_{(p\times q)}$ یک ماتریس $p\times q$ می باشد که تمام درایه های آن صفر می باشند.

ادعا می کنبم که ماتریس $A^\dagger$ در شرط سوال صدق می کند یعنی داریم $AA^\dagger A = A$.

برای اثبات این ادعا $AA^\dagger A$ را محاسبه می کنیم.

$$AA^\dagger A = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^\dagger U^T)(U\Sigma V^T) = U\Sigma I_n \Sigma^\dagger I_n \Sigma V^T = U\Sigma\Sigma^\dagger\Sigma V^T \qquad \star$$

حال اگر نشان دهیم $\Sigma\Sigma^\dagger\Sigma = \Sigma$ کار تمام است.

$$\begin{aligned}
\Sigma\Sigma^\dagger\Sigma &= \begin{bmatrix} diag(\sigma)_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} diag(\frac{1}{\sigma})_{r\times r} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} diag(\sigma)_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} diag(\sigma)_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} diag(\sigma)_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \Sigma
\end{aligned}$$

تمامی ضرب های بالا به صورت بلوکی انجام شده اند.

با توجه به این مطلب و $\star$ خواهیم داشت $AA^\dagger A = U\Sigma V^T = A$ و بنابراین ادعای ما ثابت شد.

سوال ۳)

الف) ابتدا لم زیر را بیان می کنیم.

لم . برای هر عدد حقیقی $x \in (۰, \infty)$ داریم

$$\tan^{-۱} x + \tan^{-۱} \frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲}$$

(البته این رابطه برای زمانی که $x \to ۰$ یا $x \to \infty$ هم برقرار می باشد اما در اینجا از آن استفاده ای نمی کنیم.)

برهان : فرض کنید $f(x) = \tan^{-۱} x + \tan^{-۱} \frac{۱}{x}$ این تابع برای $x \in (۰, \infty)$ پیوسته و مشتق پذیر می باشد و برای هر $x \in (۰, \infty)$ داریم

$$f'(x) = \frac{۱}{۱ + x^۲} + \frac{-۱}{x^۲} \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{x^۲}} = \frac{۱}{۱ + x^۲} - \frac{۱}{۱ + x^۲} = ۰$$

چون مشتق تابع در هر نقطه از دامنه ی تابع برابر صفر است و دامنه تابع نیز همبند است لذا تابع $f(x)$ در $(۰, \infty)$ باید ثابت باشد و اگر $x = ۱$ را در تابع قرار دهیم به دست می آوریم

$$f(x) = \tan^{-۱} + \tan^{-۱} = \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

و لذا برای هر $x \in (۰, \infty)$ داریم $f(x) = \tan^{-۱} x + \tan^{-۱} \frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲}$ و برهان تمام است.

حال به حل مساله اصلی باز می گردیم.

فرض کنید $x = \frac{۱}{t}$ در این صورت داریم $\mathrm{d}x = -\frac{۱}{t^۲}\mathrm{d}t$ و لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{\tan^{-۱} x}{x^۲ - x + ۱}\mathrm{d}x &= \int_{۲}^{\frac{۱}{۲}} \frac{\tan^{-۱} \frac{۱}{t}}{\frac{۱}{t^۲} - \frac{۱}{t} + ۱}.(-\frac{۱}{t^۲})\mathrm{d}t \overset{\text{طبق لم}}{=} \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱} t}{t^۲ - t + ۱}\mathrm{d}t \\ &= -\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{\tan^{-۱} t}{t^۲ - t + ۱}\mathrm{d}t + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{\frac{\pi}{۲}}{t^۲ - t + ۱}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{\tan^{-۱} x}{x^۲ - x + ۱}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{۴}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{۱}{x^۲ - x + ۱}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{۴}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \frac{۱}{(x - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\pi}{۴}\int_{۰}^{\frac{۳}{۲}} \frac{۱}{t^۲ + \frac{۳}{۴}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{۴}\frac{۲\tan^{-۱}\left(\frac{۲t}{\sqrt{۳}}\right)}{\sqrt{۳}}\Big|_{۰}^{\frac{۳}{۲}} = \frac{\pi^۲}{۶\sqrt{۳}}$$

ب) چون بازه انتگرال گیری بی کران است لذا انتگرال ما مجازی است و طبق تعریف انتگرال مجازی خواهیم داشت

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\tan^{-۱}(erf(x))}{e^{x^۲}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_{۰}^{a} \frac{\tan^{-۱}(erf(x))}{e^{x^۲}}\mathrm{d}x$$

با فرض $erf(x) = u$ خواهیم داشت $\frac{۲}{\sqrt{\pi}}e^{-x^۲}\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ و با اعمال این تغیر متغیر خواهیم داشت

$$\lim_{a\to\infty}\int_{۰}^{a} \frac{\tan^{-۱}(erf(x))}{e^{x^۲}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\int_{۰}^{erf(a)} \tan^{-۱}(u)\mathrm{d}u$$

$$\overset{\text{انتگرال جز به جز}}{=} \lim_{a\to\infty} \quad ((u\tan^{-۱}u)\Big|_{۰}^{erf(a)} - \int_{۰}^{erf(a)} \frac{u}{۱+u^۲}\mathrm{d}u =$$

$$\lim_{a\to\infty} \quad (erf(a))\tan^{-۱} erf(a) - (\frac{۱}{۲}\ln(۱+u^۲)\Big|_{۰}^{erf(a)}) =$$

$$\lim_{a\to\infty} \quad (erf(a))\tan^{-۱} erf(a) - (\frac{۱}{۲}\ln(۱+erf(a)^۲) =$$

$$\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\ln(۲)$$

در خط آخر از پیوستگی توابع $ln(x)$ و $\tan^{-۱} x$ در $(۰,\infty)$ و از اینکه $\lim_{x\to\infty} erf(x) = ۱$ استفاده کردیم.

سوال ۴) ادعا می کنیم که برای هر عدد طبیعی h به جز ۱, ۲, ۴ می توان اعدادی طبیعی مانند m, n را یافت که $n(n+h)=m^{۲}$.

برای اثبات این ادعا به شکل زیر عمل می کنیم

$$\begin{aligned} & n(n+h)=m^{۲} \iff n^{۲}+nh=m^{۲} \iff ۴n^{۲}+۴nh=۴m^{۲} \\ & \iff ۴n^{۲}+۴nh+h^{۲}=۴m^{۲}+h^{۲} \iff (۲n+h)^{۲}-۴m^{۲}=h^{۲} \\ & \iff (۲n+h-۲m)(۲n+h+۲m)=h^{۲} \qquad (۱) \end{aligned}$$

حال اگر h ای موجود باشد که در رابطه (۱) صدق بکند و بتوانیم حداقل ۲ مقسوم علیه مثبت مانند $h_۱, h_۲$ از $h^{۲}$ بیابیم که $h^{۲} = h_۱h_۲$ و $h_۱ > h > h_۲$ (چون عبارت $۲n+h+۲m$ به دلیل طبیعی بودن m, n از h بزرگتر می باشد لذا باید یکی از عوامل از h بزرگتر باشند و حتی بزرگتر مساوی ۵ باشد!) آنگاه می توانیم با حل دستگاه معادلات زیر مقادیری طبیعی برای m, n بیابیم.(در مورد طبیعی بودن این مقادیر هم توضیح می دهیم.)

$$\begin{cases} ۲n+h-۲m=h_۲ \\ ۲n+h+۲m=h_۱ \end{cases} \Rightarrow n=\frac{h_۱+h_۲-۲h}{۴}, m=\frac{h_۱-h_۲}{۴} \qquad (۲)$$

به راحتی می توان بررسی کرد که برای $h = ۱, ۲, ۴$ نمی توان اعداد طبیعی چون m, n یافت که در (۱) صدق کنند. هر کدام از این حالت ها را بررسی می کنیم.

(آ) اگر $h=۱$ چون m, n باید اعدادی طبیعی باشند آنگاه خواهیم داشت $۵ \geq ۱+۲m+۲n$ که طبق (۱) نمی تواند برقرار باشد،چون یک طرف بزرگتر از ۵ می شود اما طرف دیگر برابر یک است.

(ب) اگر $h=۲$ باشد مشابه حالت $h=۱$ می توان دید که به دلیل طبیعی بودن m, n داریم $۶ \geq ۲+۲n+۲m$ و این هم نمی تواند برقرار باشد چون یک طرف تساوی (۱) بزرگتر از ۶ می شود ولی طرف دیگر برابر ۴ است.

(ج) اگر $h=۴$ آنگاه طبق (۱) باید داشته باشیم

$$(۲n+۴-۲m)(۲n+۴+۲m)=۴^{۲} \iff (n+۲-m)(n+۲+m)=۴$$

و چون $m+n+۲ \geq ۴$ باید داشته باشیم

$$\begin{cases} n+m+۲=۴ \\ n-m+۲=۱ \end{cases} \Rightarrow n=\frac{۱}{۲}, m=\frac{۳}{۲} \qquad (۳)$$

که این هم با طبیعی بودن m, n در تناقض است. پس این حالت هم امکان پذیر نیست.

حال فرض کنید $h \geq ۳$. در این صورت حالت های زیر را خواهیم داشت.

(آ) اگر h فرد باشد آنگاه کافی است $h_۱$ و $h_۲$ را به صورت $h_۱ = h^۲$ و $h_۲ = ۱$ در نظر بگیریم(که در شرایط $h_۱ > h > h_۲$ و $h_۱h_۲ = h^۲$ هم صدق می کنند.) در این صورت m,n اعدادی طبیعی به شکل

$$n = (\frac{h-۱}{۲})^۲, m = \frac{h^۲-۱}{۴}$$

خواهند بود(چون h عددی فرد است لذا $h-۱$ عددی زوج خواهد بود و $h^۲ - ۱ \equiv ۰ \pmod{۴}$ و در نتیجه m,n هر دو اعدادی طبیعی خواهند بود.)

(ب) اگر $h = ۲k$ که k عددی فرد و بزرگتر از ۳ است. در این صورت اگر $h_۱,h_۲$ را به شکل $h_۱ = ۲k^۲$ و $h_۲ = ۲$ در نظر بگیریم(که در شرایط $h_۱ > h > h_۲$ و $h_۱h_۲ = h^۲$ هم صدق می کنند.) در این صورت m,n اعدادی طبیعی خواهند بود چون $h_۱ + h_۲ - ۲h = ۲k^۲ + ۲ - ۴k = ۲(k-۱)^۲$ که چون k فرد است بنابر این $k-۱$ زوج خواهد بود و درنتیجه n عددی طبیعی خواهد بود و $h_۱ - h_۲ = ۲k^۲ - ۲ = ۲(k^۲-۱)$ چون k فرد است بنابراین $k^۲ - ۱$ مضربی از ۴ خواهد بودو در نتیجه m هم عددی طبیعی است.

(ج) اگر $h = ۲^tk$ که $t \geq ۲$ و k عددی فرد است. در این حالت همان طور که بررسی کردیم اگر $k = ۱, t = ۲$ یعنی $h = ۴$ نمی توان m,n طبیعی یافت که در ۱ صدق کنند پس با در نظر گرفتن $k > ۱$ یا $t > ۲$ کارمان را ادامه می دهیم.

در این صورت با انتخاب $h_۱ = ۲^{۲t-۲}k^۲$ و $h_۲ = ۲^۲$ می توان دید که
$h_۱ + h_۲ - ۲h \equiv ۰ \pmod{۴}$ لذاا n عددی طبیعی خواهد بود و
$h_۱ - h_۲ \equiv ۰ \pmod{۴}$ و لذا m هم عددی طبیعی خواهد بود.

و در نتیجه ادعای ما ثابت شد برای تمام اعداد طبیعی h به جز ۱, ۲, ۴ می توان اعداد طبیعی m,n را یافت که $n(n+h) = m^۲$.