

کتابچه برنامه ها و چکیده مبسوط مقالات
سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی
مقالات فارسی


دانشگاه حکیم سبزواری

The 3rd Conference on Dynamical Systems & Geometric Theories

**سومین کنفرانس
سیستم های دینامیکی
و نظریه های هندسی**

۷ و ۸ بهمن ۱۴۰۰

محور های تخصصی کنفرانس:
— سیستم های دینامیکی، نظریه ی ارگودیک و کاربردهای این مطالعات در سایر علوم
— هندسه، توبولوجی و کاربردهای این مطالعات در سایر علوم

دبیر خانه:
سبزواری - توحید شهر - دانشگاه حکیم سبزواری - دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر
تلفن تماس: ۰۵۱۴۴۰۱۳۰۳۷
آدرس سایت کنفرانس: <http://hsu.ac.ir/cdsgt3>
صندوق پست الکترونیک: cdsgt3@hsu.ac.ir


جمهوری اسلامی ایران


CEMCS
The Home of Excellence in
Research and Critical Thought


Sponsored and Indexed by
CIVILICA
We Respect the Sciences


ISC
کد اختصاصی: ۰۰۲۱۰-۹۶۴۲۵


پانتجارت



فهرست مطالب

۴	۱ پیشگفتار
۵	۲ کمیته های علمی و اجرایی
۷	۳ برنامه های سمینار
۸	۴ سخنرانی های عمومی
۱۳	۵ سخنرانی های تخصصی
۱۴	۱۰۵ بررسی پایداری و انشعاب در سیستم تصادفی عصبی
۲۰	۲۰۵ گسترش جبرلی توسط یک اتحاد ژاکوبی ضعیف
۲۴	۳۰۵ بررسی مدل ریاضی شیوع ویروس کرونا در سطح جامعه
۲۸	۴۰۵ آنتروپی گذشته عمر در سیستم های $1 + n - i$ از n مبتنی بر تابع چندک
۳۵	۵۰۵ مدل های تصادفی برای تعداد زیرواحدهای باز کانال های یونی پتاسیم و سدیم در غشای سلول های نورونی
۴۰	۶۰۵ تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکوردها
۴۶	۷۰۵ بعد متوسط سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار
۵۱	۸۰۵ اندازه مطلقاً پیوسته برای نگاشت های نعل اسبی تعمیم یافته
۵۴	۹۰۵ متریک پذیری پل یگروه های توپولوژیکی
۵۸	۱۰۰۵ مثلثی زیبا بین سیستم های دینامیکی، جبر و ترکیبیات
۶۳	۱۱۰۵ کاربرد موجک های لژاندر در حل عددی برخی معادلات انتگرالی از نوع اول
۶۸	۶ نمایه نویسندگان
۷۰	۷ سپاسگزاری

۱ پیشگفتار

خداوند بزرگ را بدان سبب که بر ما منت گذارد تا به بهانه "سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی"، میزبان جمع بزرگی از اندیشمندان و فرهیختگان ایران زمین در دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه حکیم سبزواری باشیم؛ شکرگزاریم.

چنان که می دانید به علت گسترش اپیدمی کرونا و بر اساس برنامه ریزی صورت گرفته، رخداد علمی یاد شده از تاریخ ۷ الی ۸ بهمن ماه ۱۴۰۰ به صورت مجازی برگزار خواهد شد. به همین دلیل بر خود لازم دانستم تا ضمن بازگویی گزارش کوتاهی از فعالیت های انجام شده توسط دبیرخانه کنفرانس و کمیته های مختلف آن، به دلیل محدودیت های بوجود آمده مراتب عذر خواهی برگزارکنندگان را به استحضار کلیه عزیزان، سروران و سرمایه های علمی کشور برسانیم.

دبیرخانه کنفرانس بصورت رسمی از تیرماه ۱۴۰۰ آغاز به کار کرده و تا امروز در کلیه مراحل، توان خویش را معطوف به برگزاری مطلوب و منحصر به فرد این سمینار نموده است. در همین راستا و به یمن همکاری و همدلی صمیمانه اساتید و پژوهشگران شاخص کشورمان، خیلی زود، کمیته ی علمی سمینار، مرکب از ۳۲ عضو هیات علمی ممتاز بهترین دانشگاه ها و پژوهشکده های ایران تشکیل گردید.

در ادامه این روند و در پی اعلام تاریخ های کلیدی، مقالات ارسالی به تارنمای این کنفرانس، توسط داوران مختلف از دانشگاه های سراسر کشور و کمیته ی علمی کنفرانس داوری گردیده و در نهایت ۵۰ مقاله جهت ارائه در کنفرانس سوم، پذیرفته شد. در میان این مستندات علمی، ۴۴ مقاله بصورت ارائه ی شفاهی و ۶ مقاله بصورت ارائه ی پوستری در نظر گرفته شده اند که با پیگیری های صورت گرفته، متن کامل آنها در پایگاه های استنادی جهان اسلام (ISC) و سیولیکا (CIVILICA) نمایه سازی خواهد شد. برای اولین بار و با هدف ثبت در حافظه جمعی هموطنان دانش دوستان، تهیه مستند کوتاهی در خصوص تاریخ شفاهی هندسه با موضوعیت "سیر تکاملی هندسه در دانشگاه های ایران" و کتابچه ای مشتمل بر اطلاعات "زمینه ی پژوهشی اساتید و محققان هندسه کشور"، در دستور کار قرار گرفت که امید می رود؛ انتشار آنها در روز های برگزاری کنفرانس، بتواند بازتاب دهنده ذره ای از تلاشهای بی چشم داشت دانشمندان، اساتید و محققانی باشد که همواره در تلاش بوده اند تا این مرز و بوم، چون نگینی درخشان در میان عالمیان بدرخشد.

از دیگر موارد قابل ذکر در این همایش، برنامه ریزی برای سخنرانی هایی توسط اساتید مبرز داخلی و خارجی بوده که امید است در کنار برگزاری دو کارگاه "مدل سازی و تحلیل رفتار شبکه هاب عصبی" و "جئوجبرا" بتواند بر وجه تمایز این مجموعه ارزشمند بیفزاید.

در پایان ضمن تلاش برای ابراز مراتب سپاس و قدردانی خویش از حمایت های بی شائبه ی همه ی مسوولین و متولیان امر، به ویژه ریاست محترم دانشگاه حکیم سبزواری، ریاست محترم انجمن ریاضی ایران، ریاست محترم و اعضای هیات علمی دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه حکیم سبزواری، اعضای محترم کمیته ی علمی و اجرایی کنفرانس، همکاران محترم سایر بخش های دانشگاه و دانشجویان گرامی و علاقه مند دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر، امیدواریم در هفتم و هشتم بهمن ماه سال جاری به فضل پروردگار بتوانیم محمل شایسته ای برای هم اندیشی آخرین دست آوردهای علمی شما بوده و سهم کوچکی در اعتلای اهداف علمی و پژوهشی ایران عزیزمان داشته باشیم.

با تشکر

علی برزنونی

دبیر کنفرانس سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

۲ کمیته های علمی و اجرایی

کمیته علمی سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی (به ترتیب حروف الفبا)			
دکتر فاطمه آیت الله زاده شیرازی	دانشگاه تهران	دکتر زهرا شعبانی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
دکتر ندا ابراهیمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	دکتر سید محسن صالح	دانشگاه نیشابور
دکتر محمد ابری	دانشگاه دامغان	دکتر حسین عابدی	دانشگاه همدان
دکتر داوود احمدی دستجردی	دانشگاه گیلان	دکتر مهدی فاتحی نیا	دانشگاه یزد
دکتر سید علیرضا احمدی	دانشگاه سیستان و بلوچستان	دکتر عباس فخاری قوچانی	دانشگاه شهید بهشتی
دکتر علی اکبر استاجی	دانشگاه حکیم سبزواری	دکتر محمد رضا فرهنگ دوست	دانشگاه شیراز
دکتر علی برزنونی	دانشگاه حکیم سبزواری	دکتر فاطمه هلن قانع	دانشگاه فردوسی مشهد
دکتر یوسف بهرامپور	دانشگاه شهید باهنر کرمان	دکتر محمد باقر کاشانی	دانشگاه تربیت مدرس تهران
دکتر رحیمه پورخاندانی	دانشگاه حکیم سبزواری	دکتر مهدی کرمی	دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دکتر سمیه جنگوی	دانشگاه الزهرا	دکتر مجید کریمی	دانشگاه هرمزگان
دکتر مریم حسینی	مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات	دکتر ساناز لامعی	دانشگاه گیلان
دکتر زهره دادی	دانشگاه بجنورد	دکتر رویا مکرونی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
دکتر علی دارابی	دانشگاه چمران اهواز	دکتر فرشته ملک	دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
دکتر محمد حسین رحمانی دوست	دانشگاه نیشابور	دکتر محمد رضا مولایی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
دکتر علیرضا زمانی بهابادی	دانشگاه فردوسی مشهد	دکتر مهدی نودهی	دانشگاه بجنورد
دکتر علی اصغر ساریزاده	دانشگاه ایلام	دکتر مهدی وطن دوست	دانشگاه حکیم سبزواری
دکتر یامین سیاری	دانشگاه سیرجان	دکتر بهمن هنری	دانشگاه فردوسی مشهد
دکتر مهدی شریف زاده	دانشگاه یاسوج		

کمیته اجرایی سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی	
خانم دکتر سمیه جنگجو شالدهی (دانشگاه الزهرا)	آقای دکتر مهدی شریف زاده (دانشگاه یاسوج)
آقای دکتر مهدی فاتحی نیا (دانشگاه یزد)	آقای دکتر مجید کریمی (دانشگاه بندرعباس)
خانم دکتر ساناز لامعی (دانشگاه گیلان)	خانم دکتر ندا ابراهیمی (دانشگاه شهید باهنر کرمان)
خانم دکتر زهره نظری (دانشگاه رفسنجان)	آقای دکتر محمد حسین رحمانی دوست (دانشگاه نیشابور)
آقای دکتر مهدی نوذهی (دانشگاه بجنورد)	آقای دکتر علی دارابی (دانشگاه شهید چمران اهواز)
خانم دکتر نسرین محمدی (آموزش عالی زرنند)	آقای دکتر سیدعلیرضا احمدی (دانشگاه سیستان و بلوچستان)
خانم دکتر عاطفه رازقندی (دانشگاه حکیم سبزواری)	خانم فهیمه توکلی (دانشگاه حکیم سبزواری)
خانم نکتہ کرابی (دانشگاه حکیم سبزواری)	مهندس قلعه نویی (دانشگاه حکیم سبزواری)

۳ برنامه های سمینار

برنامه روز اول - سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی - روز پنجشنبه ۱۳۰۰/۰۱/۱۷

۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷	۱۷-۱۸	۱۸-۲۰
لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	کارگاه
انجمنه (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	کارگاه
Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	Dr. Fateme Helen Ghahremani	کارگاه
11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	11:20-11:45	کارگاه
11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	11:45-12:10	کارگاه
12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	12:10-12:35	کارگاه
12:35-13	12:35-13	12:35-13	12:35-13	12:35-13	12:35-13	12:35-13	12:35-13	12:35-13	کارگاه

توجه: جهت مشاهده موضوعات هر جلسه و چکیده هر موضوع، روی آن کلیک نمایید.

برنامه روز دوم - سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی - روز جمعه ۱۳۰۰/۰۱/۱۸

۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷	۱۷-۱۸	۱۸-۲۰
لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	لینک ورود A	کارگاه
انجمنه (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	مهرانی (A)	کارگاه
Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	Dr. Tayeb Vaezi Zadeh Roukard	کارگاه
9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	9:25-9:50	کارگاه
9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	9:50-10:15	کارگاه
10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	10:15-10:40	کارگاه

توجه: جهت مشاهده موضوعات هر جلسه و چکیده هر موضوع، روی آن کلیک نمایید.

۴ سخنرانی های عمومی

سخنرانی های عمومی

On-off intermittency

دکتر فاطمه هلن قانع
دانشگاه فردوسی مشهد



Hyperbolic surfaces and Dubai Expo

دکتر فرشته ملک
دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی



Dynamical models for diseases

دکتر طیبه واعظی زاده
دانشگاه شهید باهنر کرمان



Continuum-wise minimal systems

Dr. Alfonso Artigue
University of the Republic,
Gral. Rivera 1350, Salto,
Uruguay



The 3rd Conference on Dynamical Systems & Geometric Theories
Hsu University
7-8 Behmen 1400

سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی
۷ و ۸ بهمن ۱۴۰۰

مکان: سالن همایش های بین المللی - دانشگاه خوارزمی - تهران
آدرس: تهران، خیابان خوارزمی، پلاک ۱۳۳۳
تلفن: ۰۲۱۲۲۰۱۳۳۳
وبسایت: <http://hsu.ac.ir/cdsgt3>
ایمیل: cdsgt3@hsu.ac.ir

لینک برگزاری سخنرانی ها:

زمان بندی سخنرانی ها:

<https://vmeet.hsu.ac.ir/cdsgt1>

<http://cnf.hsu.ac.ir/cdsgt3/fa>

سخنرانی عمومی

On-off intermittency



دکتر فاطمه هلن قانع

استاد دانشگاه فردوسی مشهد

زمان: پنج شنبه ۷ بهمن ۱۴۰۰ - ساعت ۱۰

لینک برگزاری سخنرانی:

<https://vmeet.hsu.ac.ir/cds1/>



سخنرانی عمومی

Hyperbolic surfaces and Dubai Expo



دکتر فرشته ملک

دانشیار دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

زمان: پنج شنبه ۷ بهمن ۱۴۰۰ - ساعت ۱۷

لینک برگزاری سخنرانی:

<https://vmeet.hsu.ac.ir/cds1/>



سخنرانی عمومی

Dynamical models for diseases



دکتر طویه واعظی زاده

استادیار دانشگاه شهید باهنر کرمان

زمان: جمعه ۸ بهمن ۱۴۰۰ - ساعت ۱۱

لینک برگزاری سخنرانی:

<https://vmeet.hsu.ac.ir/cds1/>

The 3rd Conference on Dynamical Systems & Geometric Theoria

سومین کنفرانس
سیستم های دینامیکی
و نظریه های هندسی

۷ و ۸ بهمن ۱۴۰۰

مکان: دانشگاه شهید باهنر کرمان

سازمان: گروه ریاضیات و فیزیک، دانشکده ریاضیات و فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان

آدرس: کرمان، خیابان شهید باهنر، پلاک ۱۴۴۰۱۳۳

وبسایت: <http://hsu.ac.ir/cds1/>

ایمیل: cds1@hsu.ac.ir

سازمان: گروه ریاضیات و فیزیک، دانشکده ریاضیات و فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان

آدرس: کرمان، خیابان شهید باهنر، پلاک ۱۴۴۰۱۳۳

وبسایت: <http://hsu.ac.ir/cds1/>

ایمیل: cds1@hsu.ac.ir

سخنرانی عمومی

Continuum-wise minimal systems



Dr. Alfonso Artigue

University of the Republic, Gral.

زمان: جمعه ۸ بهمن ۱۴۰۰ - ساعت ۱۷

لینک برگزاری سخنرانی:

<https://vmeet.hsu.ac.ir/cdsgt1/>



۵ سخنرانی های تخصصی

مقالات ارائه شده در این بخش، در سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی به صورت چکیده مبسوط پذیرفته و ارائه شده است.



۱.۵ بررسی پایداری و انشعاب در سیستم تصادفی عصبی

مهدی فاتحی نیا*، محمد پناهی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

در این مقاله ثابت می کنیم که برای سیستم های دینامیکی غیرخودمختار روی یک فضای یکنواخت با ویژگی سایه زنی، خواص آمیختگی توپولوژیک، آمیختگی زنجیری، مشخصه ضعیف و مشخصه شبه مداری و سایه زنی ارگودیک معال میباشند.

واژه های کلیدی: سیستم های دینامیکی تصادفی، مدل هاجکین-هاکسلی.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 60H10.

کد مقاله: cdsgt3-۰۰۹۱۰۰۳۳

مقدمه

در سال های اخیر، معادلات دیفرانسیل تصادفی که بر اساس حسابان و آنالیز تصادفی پایه گذاری شده مورد توجه روزافزونی قرار گرفته است. همچنین عدم قطعیت نقش مهمی را در بسیاری از فرآیندهای بیولوژی ایفا می کند. نادیده گرفتن این مسئله در بررسی پدیده های مدل سازی شده ممکن است بر تجزیه و تحلیل سیستم های مورد مطالعه تأثیر بگذارد [۴]. یکی از مدل های دینامیکی که در علوم اعصاب از محبوبیت و اهمیت بالایی برخوردار است مدل هاجکین-هاکسلی^۱ است. این مدل در واقع چگونگی ایجاد و گذر پتانسیل عمل را در غشاء یک سلول عصبی نشان می دهد. هاجکین و هاکسلی در سال ۱۹۵۲ این مدل دینامیکی را با استفاده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل چهار بعدی نشان دادند. از آنجا که ابزار کارآمدی برای تحلیل دینامیک یک دستگاه معادلات دیفرانسیل چهار بعدی وجود نداشت مدل های کاهش یافته ی دو بعدی از مدل هاجکین-هاکسلی به وجود آمد. از مشهورترین این مدل های دو بعدی می توان به مدل $I_{Na,p} + I_K$ اشاره کرد [۱]. در این مقاله مدل تصادفی این سیستم را معرفی کرده و دینامیک آن را مورد بررسی قرار می دهیم. مدل $I_{Na,p} + I_K$ با استفاده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دو بعدی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{1}{C} \left[I - g_L(V - E_L) - g_{Na}(V - E_{Na}) \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{V_m - V}{k_m}}} \right) - g_K n(V - E_K) \right], \\ \dot{n} = \frac{1}{\tau(V)} \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{V_n - V}{k_n}}} - n \right], \end{cases} \quad (1)$$

که در آن متغیر V پتانسیل غشاء سلول عصبی و متغیر n میزان فعالیت کانال پتاسیم، متغیرهای دینامیکی اصلی این سیستم هستند. پارامترهای سیستم در جدول ۱ در دو نوع، بر اساس دسته بندی هاجکین از نوروها نشان داده شده اند.

^۱Hodgkin-Huxley

جدول ۱: پارامترهای سیستم

پارامتر	نام	نوع یک	نوع دو
C	ظرفیت غشاء سلول عصبی	۱	۱
I	جریان	۰	۰
g_L	میزان هدایت کانال نشستی	۸	۸
E_L	پتانسیل معکوس کانال نشستی	-۸۰	-۷۸
g_{Na}	حداکثر هدایت کانال سدیم	۲۰	۲۰
E_{Na}	پتانسیل معکوس کانال سدیم	۶۰	۶۰
g_K	حداکثر هدایت کانال پتاسیم	۱۰	۱۰
E_K	پتانسیل معکوس کانال پتاسیم	-۹۰	-۹۰
V_m	پتانسیل نیمه ولتاژ فعال سازی کانال سدیم	-۲۰	-۲۰
k_m	شیب فعال سازی کانال سدیم	۱۵	۱۵
V_n	پتانسیل نیمه ولتاژ فعال سازی کانال پتاسیم	-۲۵	-۴۵
k_n	شیب فعال سازی کانال پتاسیم	۵	۵
$\tau(V)$	زمان حساس به ولتاژ	۱	۱

مدل تصادفی $I_{Na,p} + I_K$

همان‌طور که گفته شد از آنجا که مدل $I_{Na,p} + I_K$ دارای پارامترهای زیادی بوده و این امر موجب دشواری و ناکارآمدی تحلیل‌ها در عالم واقعیت می‌شود، لذا برای مطلوب‌تر بودن تحلیل‌ها از سیستم تصادفی متناظر یا سیستم موردنظر استفاده خواهد شد. مدل تصادفی $I_{Na,p} + I_K$ با اضافه کردن ضریبی از فرآیند وینر به سیستم (۱) به دست می‌آید و با استفاده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی دو بعدی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{cases} dV = \frac{1}{C} \left[I - g_L(V - E_L) - g_{Na}(V - E_{Na}) \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{V_m - V}{k_m}}} \right) - g_K n(V - E_K) \right] dt \\ \quad + \sigma V dW_t, \\ dn = \frac{1}{\tau(V)} \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{V_n - V}{k_n}}} - n \right] dt + \sigma n dW_t, \end{cases} \quad (2)$$

که در آن σ یک پارامتر است که به سیستم (۱) اضافه شده که نشان‌دهنده‌ی شدت نویز وارد شده به سیستم است و W_t یک فرآیند وینر است. در ادامه به معرفی یک چهارچوب و قالب کلی برای تحلیل پویایی سیستم‌های دینامیکی تصادفی دو بعدی خواهیم پرداخت [۲].

تحلیل دینامیک سیستم تصادفی

ابتدا با در نظر گرفتن بسط تیلور توابع در نقطه‌ی $O(0, 0)$ سیستم (۲) را بازنویسی می‌کنیم سپس با تبدیل مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ پارامتردهی جدید داریم:

$$\begin{cases} dr = \left[\left(\mu_1 + \frac{1}{1+\epsilon} \mu_2 \right) r + \frac{1}{\lambda} \mu_3 r^2 \right] dt + \left(\frac{1}{\lambda} \mu_4 r^2 \right)^{\frac{1}{2}} dW_t \\ d\theta = \left(\frac{1}{\epsilon} \mu_5 + \frac{1}{\lambda} \mu_6 r^2 \right) dt + \left(\frac{1}{\lambda} \mu_7 \right)^{\frac{1}{2}} dW_t \end{cases} \quad (3)$$

که در آن پارامترهای جدید به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= -\frac{1}{\tau} \frac{\left(e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^{\tau} g_L k_m + g_L k_m + g_{Na} k_m}{C \left(1 + e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^{\tau} k_m} - \frac{1}{\tau \tau(V)} \\
 &\quad - \frac{1}{\tau} \frac{e^{\frac{V_m}{k_m}} g_{Na} k_m + \tau e^{\frac{V_m}{k_m}} g_L k_m - g_{Na} E_{Na} e^{\frac{V_m}{k_m}}}{C \left(1 + e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^{\tau} k_m} \\
 \mu_2 &= \tau \sigma^{\tau} \\
 \mu_3 &= \frac{1}{\tau} \frac{e^{\frac{V_m}{k_m}} g_{Na} \left(\tau k_m + E_{Na} - \tau \left(e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^{\tau} k_m + \left(e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^{\tau} E_{Na} - \tau E_{Na} e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)}{C \left(1 + e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^{\tau} k_m^{\tau}} \quad (4) \\
 \mu_4 &= \tau \sigma^{\tau} \\
 \mu_5 &= -\frac{\tau g_K E_K}{C} + \frac{\tau e^{\frac{V_n}{k_n}}}{\left(1 + e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^{\tau} k_n \tau(V)} \\
 \mu_6 &= \frac{1}{\tau} \frac{\left(e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^{\tau} + e^{\frac{V_n}{k_n}} - \tau \left(e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^{\tau}}{\left(1 + e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^{\tau} k_n^{\tau} \tau(V)}
 \end{aligned}$$

حال با اعمال معادله‌ی فوکر-پلانک دو متغیره بر روی سیستم تصادفی (۲) داریم:

$$p(x, y) = \begin{cases} \delta(x^{\tau} + y^{\tau}), & \mu_4 \geq \tau \mu_1 + \mu_2, \\ \frac{(x^{\tau} + y^{\tau})^{\frac{\tau \mu_1 + \mu_2 - \tau \mu_4}{\mu_4}} \cdot \exp\left(\frac{\mu_3}{\mu_4} (x^{\tau} + y^{\tau})\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{\tau \mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{\tau \mu_4}\right) \left(-\frac{\mu_3}{\mu_4}\right)^{\frac{\tau \mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{\tau \mu_4}}}, & \mu_4 < \tau \mu_1 + \mu_2. \end{cases} \quad (5)$$

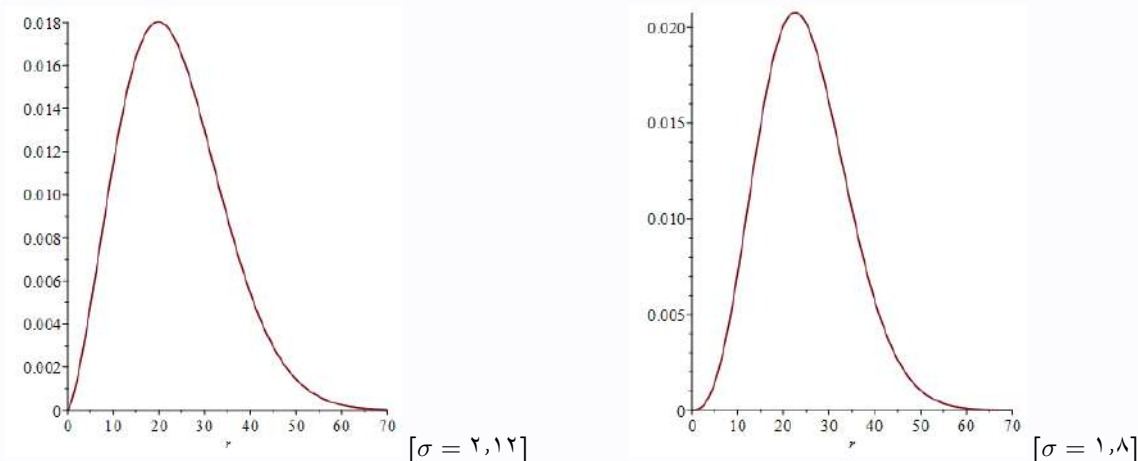
با حل معادله فوکر-پلانک متناظر با معادله‌ی مدول از سیستم (۳) بر اساس روشی که در [۲] بیان شده است به تابع چگالی به فرم زیر دست پیدا می‌کنیم. در نتیجه تحلیل‌های خود را بر روی این تابع چگالی انجام می‌دهیم که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

$$p(r) = \begin{cases} \delta(r), & \mu_4 \geq \tau \mu_1 + \mu_2, \\ \frac{r^{\frac{\tau \mu_1 + \mu_2 - \tau \mu_4}{\mu_4}} \cdot \exp\left(\frac{\mu_3}{\mu_4} r^{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau \mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{\tau \mu_4}\right) \left(-\frac{\mu_3}{\mu_4}\right)^{\frac{\tau \mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{\tau \mu_4}}}, & \mu_4 < \tau \mu_1 + \mu_2. \end{cases} \quad (6)$$

پارامترهای (۴) اساس کار تجزیه و تحلیل پویایی سیستم‌های دینامیکی تصادفی می‌باشند. در ادامه به بیان چند قضیه در مورد تحلیل انشعاب‌های سیستم‌های دینامیکی تصادفی می‌پردازیم که همگی بر پایه‌ی پارامترهای (۴) استوار هستند.

انشعاب‌های سیستم تصادفی

در نظریه‌ی انشعاب در سیستم‌های تصادفی دو نوع انشعاب اصلی وجود دارد: انشعاب D و انشعاب P [۳]. وقتی که سیستم تصادفی در اطراف نقطه تکین از حالت پایدار به ناپایدار تغییر وضعیت دهد گوییم انشعاب دینامیک یا انشعاب D رخ داده است. انشعاب P به معنای تغییرات در شکل تابع چگالی احتمال است [۳]. در اینجا فرض می‌کنیم که $\mu_3 < 0$ و $\mu_4 > 0$.



شکل ۱: چگالی احتمال $p(r)$ برای مقدار نویزهای قبل از اولین نقطه‌ی انشعاب یعنی $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 7964,29$ $\mu_4 = 9600,12$ $\sigma = 8000,1$

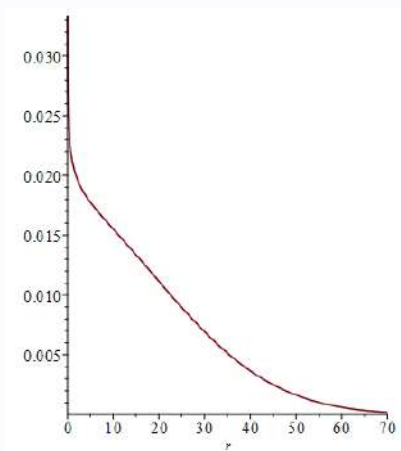
$$\sigma = 1200,2 \quad \mu_4 = 9776,17 \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 7005,20 \quad 8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 0508,31$$

قضیه ۱.۵. برای سیستم تصادفی (۳) در $\mu_4 = 16\mu_1 + \mu_2$ انشعاب D رخ می‌دهد به عبارت دیگر مقدار پارامتر μ_4 از مقدار $16\mu_1 + \mu_2$ بگذرد.

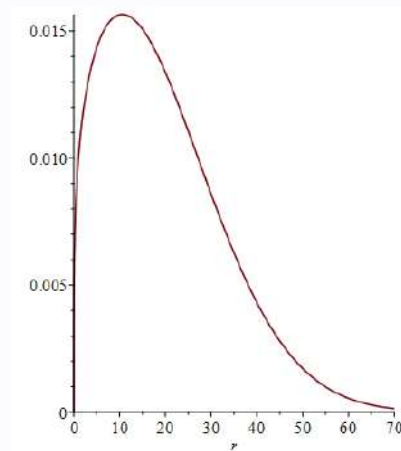
قضیه ۲.۵. برای سیستم تصادفی (۳) انشعاب P رخ می‌دهد هرگاه: مقدار پارامتر μ_4 از مقادیر $8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2$ و $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3}$ بگذرد.

نتایج عددی

در این بخش به بررسی و تحلیل رفتارهای انشعابی سیستم تصادفی (۲) بر اساس دستورکار معرفی شده در [۲] می‌پردازیم. مانند حالت یک بعدی با مقداردهی از جدول ۱ مربوط به نوروهای آستانه بالا به عبارت بدست آمده در تابع چگالی دو بعدی فوق و همچنین برای مقادیر مختلف σ به جدول زیر دست پیدا می‌کنیم. تحلیل را این‌گونه پیش خواهیم برد که مقادیری از σ را پیدا می‌کنیم که مقدار عبارت μ_4 از میان مقادیر عبارات $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3}$ و $8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2$ بگذرد. حاصل این نتایج را در نمودارهای بعدی مشاهده خواهیم کرد.

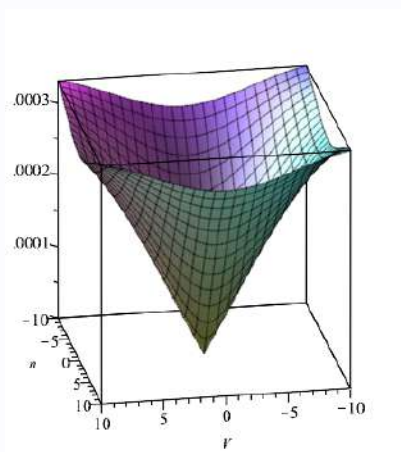


$[\sigma = 2, 76]$

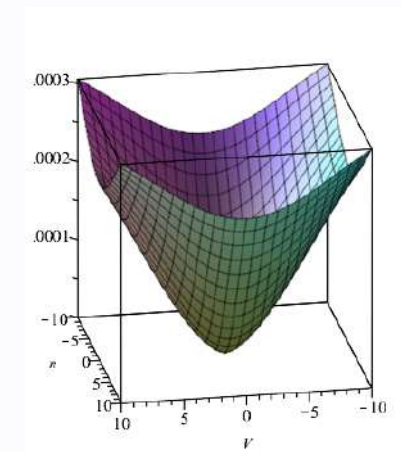


$[\sigma = 2, 44]$

شکل ۲: چگالی احتمال $p(r)$ برای مقدار نویزهای بین دو نقطه‌ی انشعاب یعنی
 $\sigma = 7600, 2 \quad \mu_4 = 4704, 30, \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 7826, 22, \quad 8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 1740, 34,$
 $\sigma = 800, 3 \quad \mu_4 = 9456, 37, \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 285, 24, \quad 8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 428, 36,$

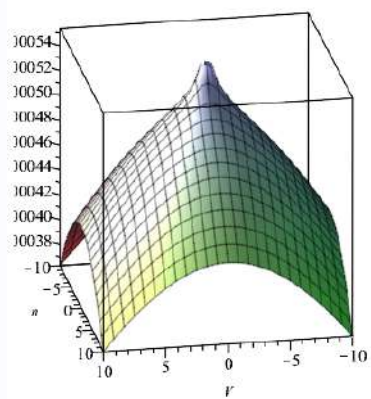


$[\sigma = 1, 93]$

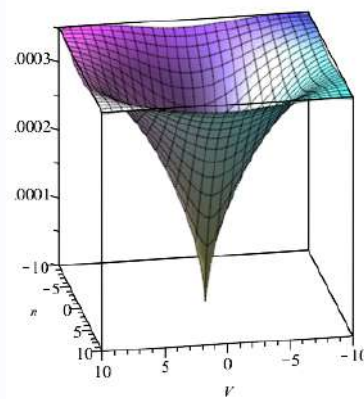


$[\sigma = 1, 8]$

شکل ۳: چگالی احتمال توأم $p(x, y)$ برای مقدار نویزهای قبل از اولین نقطه‌ی انشعاب یعنی
 $\sigma = 8000, 1 \quad \mu_4 = 9600, 12, \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 8982, 14, \quad 8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 8642, 19,$
 $\sigma = 9300, 1 \quad \mu_4 = 8996, 14, \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 1406, 15, \quad 8\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 1875, 20,$



$[\sigma = 2, 19]$



$[\sigma = 2, 06]$

شکل ۴: چگالی احتمال توأم $p(x, y)$ برای مقدار نویزهای بین دو نقطه‌ی انشعاب یعنی $\frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2 = 9016, 20$, $\sigma = 1900, 2$ $\mu_4 = 1844, 19$, $6762, 15$,

$\sigma = 3200, 2$ $\mu_4 = 5296, 21$, $\frac{1}{3}\mu_1 + \mu_2 = 9694, 15$, $\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 2925, 21$,

مراجع

- [1] E. M. Izhikevich, Dynamical systems in neuroscience. MIT press; (2007).
- [2] C. Luo and S. Guo, *Stability and bifurcation of two-dimensional stochastic differential equations with multiplicative excitations*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. 40(2) (2017), 795–817.
- [3] L. Arnold, Stochastic differential equations as dynamical systems. In Realization and Modelling in System Theory (1990).
- [4] P. E. Greenwood and M. L. Ward, Stochastic neuron models. Vol. 1. Springer, (2016).



۲.۵ گسترش جبرلی توسط یک اتحاد ژاکوبی ضعیف

علی دل بازنسب^۱، امیر ویسی^۲ و نسرين محمدی^۳

^۱ دانشگاه فرهنگیان واحد یاسوج، ایران

^۲ دانشکده نفت و گاز، دانشگاه یاسوج، گچساران، ایران

^۳ گروه مهندسی معدن، مجتمع آموزش عالی زرنند، زرنند، ایران

در این مقاله برای نخستین بار رابطه‌ای معرفی شد که یک "اتحاد ژاکوبی ضعیف" نام گرفت. قرار دادن رابطه‌ی جدید، به جای اتحاد ژاکوبی در تعریف جبرلی، این مفهوم را برای اولین بار به این شیوه گسترش داد. با ارائه‌ی گزاره‌ها و مثال‌های مختلف نشان داده شد که این ساختار به راحتی روی بسیاری فضاها برداری قابل تعریف است. هم چنین شرط‌های کافی مختلف برای این که یک جبرلی گسترش یافته به جبرلی کاهش یابد، بررسی شد.

واژه‌های کلیدی: one-sided, sofic equivalence, shift
طبقه‌بندی موضوعی [2020]: 19C99, 19D55
کد مقاله: cdsgt3-00690051

آلی دل بازنسب: آدرس ایمیل: delbaznasab@gmail.com

مقدمه

در اواخر قرن ۱۹ میلادی، سوفوس لی از مفاهیم مربوط به گروه‌های لی، برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. ابزار اصلی او برای برای بررسی گروه‌های لی، مفهوم جبرهای لی بود.

لی درباره‌ی ارتباط گروه لی و جبر لی ۲ قضیه ارائه کرد:

یکی برقراری تناظری موضعی بین گروه‌های لی و جبرهای لی متناظر آن‌ها؛

و دیگری نحوه‌ی ساختن مجدد گروه‌های لی از روی جبرهای‌شان. مفهوم جبرلی ابتدا از فضای برداری تبدیل‌های خطی به همراه عملگری که الزاماً نه جابجایی و نه شرکت‌پذیر است، نشأت گرفته است. در این فضا عملگر موردنظر به صورت $[x, y] = xy - yx$ تعریف می‌شود که عمل سمت راست همان ترکیب معمولی توابع است. همین ساختار به حالت کلی قابل تعمیم است:

تعریف ۳.۵. فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ به همراه عملگر $V \times V \rightarrow V : [.,.]$ (به نام براکت لی) را جبر لی می‌گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. عملگر $[.,.]$ دوخطی باشد.

۲. برای هر $x \in V$ داشته باشیم $[x, x] = 0$.

۳. برای هر $x, y, z \in V$ رابطه‌ی

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (V)$$

معروف به اتحاد ژاکوبی برقرار باشد.

برای معرفی جبرلی تعمیم یافته، شرایط حاکم بر تعریف جبرلی کاهش داده می شود. به این ترتیب تعداد زیادی از فضاهای برداری، به جبرلی تعمیم یافته تبدیل می شوند.

جبرلی تعمیم یافته

تعریف ۴.۵. فضای برداری V روی میدان F و عملگر $V \times V \rightarrow V$ روی آن را در نظر می گیریم. $(V, [.,.])$ را جبرلی تعمیم یافته گفته می شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. عملگر $[.,.]$ دوخطی باشد.

۲. برای هر $x, y, z \in V$ داشته باشیم

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] - [[y, x], z] - [[z, y], x] - [[x, z], y] = 0 \quad (۸)$$

به راحتی دیده می شود که رابطه ی (۸) معادل است با

$$[[x, y] - [y, x], z] + [[y, z] - [z, y], x] + [[z, x] - [x, z], y] = 0 \quad (۹)$$

لم ۵.۵. اگر $(V, [.,.])$ جبرلی تعمیم یافته ای باشد که برای هر $x, y \in V$ شرط

$$[x, y] = -[y, x] \quad (۱۰)$$

برقرار باشد، آن گاه $(V, [.,.])$ یک جبرلی است.

اثبات. چون $(V, [.,.])$ جبر تعمیم یافته است، عملگر $[.,.]$ دوخطی است. از رابطه ی (۱۰) بلافاصله شرط $[x, x] = 0$ ، برای هر $x \in V$ حاصل می شود. با محاسبه ای سراسر، تساوی های (۹) و (۱۰) برقراری اتحاد ژاکوبی را نتیجه می دهند. $\square$

مثال ۶.۵. V را فضای ضرب داخلی و v را عنصر ناصفری از آن در نظر بگیرید. عملگر $V \times V \rightarrow V : [.,.]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[x, y] = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} y. \quad (۱۱)$$

بنا به رابطه ی (۱۱) داریم:

$$[[x, y], z] = \frac{\langle [x, y], v \rangle}{\|v\|^2} z = \frac{\langle x, v \rangle \langle y, v \rangle}{\|v\|^4} z = [x, [y, z]]. \quad (۱۲)$$

این نشان می دهد عمل تعریف شده با رابطه ی (۱۱) شرکت پذیر است.

از طرفی بنا به ساختار خود ضرب داخلی، دوخطی بودن این عملگر واضح است.

هم چنین به راحتی نشان داده می شود $[[x, y] - [y, x], z] = 0$.

به این ترتیب فضای ضرب داخلی مورد نظر همراه با عملگر تعریف شده در رابطه (۱۱) جبرلی تعمیم یافته است.

لم ۷.۵. جبرلی تعمیم یافته $(V, [.,.])$ را در نظر بگیرید. اگر $\lambda \neq 1$ موجود باشد، به طوری که برای هر $x, y \in V$ داشته باشیم

$$[x, y] = \lambda [y, x], \lambda \neq 1 \quad (۱۳)$$

آن گاه $(V, [.,.])$ جبرلی است.

اثبات. با توجه به شرط (۱۳) از رابطه ی $[x, x] = \lambda [x, x]$ نتیجه می شود $[x, x] = 0$ ، برای هر $x \in V$. از طرفی شرط (۱۳) نتیجه می دهد

$$[[x, y] - [y, x], z] = (1 - \lambda) [[x, y], z] \quad (۱۴)$$

$\square$

رابطه های (۸) و (۱۴) اتحاد ژاکوبی را نتیجه می دهند.

تعریف ۸.۵. جبرلی تعمیم‌یافته $(V, [\cdot, \cdot])$ را دوطرفه می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in V$ داشته باشیم

$$[z, [x, y] - [y, x]] + [x, [y, z] - [z, y]] + [y, [z, x] - [x, z]] = 0 \quad (15)$$

قضیه ۹.۵. فرض کنید $(V, [\cdot, \cdot])$ جبرلی تعمیم‌یافته‌ی دوطرفه‌ای باشد. اگر عملگر $\overline{[\cdot, \cdot]} : V \times V \longrightarrow V$ به صورت

$$\overline{[x, y]} = [x, y] - [y, x] \quad x, y \in V \quad (16)$$

روی V تعریف شود، $(V, \overline{[\cdot, \cdot]})$ جبرلی است.

اثبات. برای هر $x, y \in V$ ، بنا به رابطه (۱۶) واضح است که $\overline{[x, y]} = -\overline{[y, x]}$. و در نتیجه $\overline{[x, x]} = 0$ برای هر $x \in V$. از آن‌جا که $(V, [\cdot, \cdot])$ جبرلی تعمیم‌یافته است، و با استفاده از رابطه (۱۶) داریم

$$\begin{aligned} \overline{[x_1 + x_2, y]} &= [x_1 + x_2, y] - [y, x_1 + x_2] \\ &= [x_1, y] + [x_2, y] - [y, x_1] - [y, x_2] \end{aligned} \quad (17)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۷) و به دست آوردن رابطه‌های شبیه آن، دوطرفه بودن عملگر $[\cdot, \cdot]$ اثبات می‌شود. از طرفی

$$\begin{aligned} \overline{[[x, y], z]} &= \overline{[x, y] - [y, x], z} = \overline{[x, y], z} - \overline{[y, x], z} \\ &= [[x, y], z] - [z, [x, y]] - [[y, x], z] + [z, [y, x]] \end{aligned} \quad (18)$$

به همین ترتیب به سادگی رابطه‌های مشابه رابطه‌ی (۱۸) برای $\overline{[[z, x], y]}$ و $\overline{[[y, z], x]}$ به دست می‌آید. با جایگذاری این روابط در (۹) و دوطرفه بودن جبرلی تعمیم‌یافته، اتحاد ژاکوبی ثابت می‌شود.

□

گزاره ۱۰.۵. فرض کنید V جبری شرکت‌پذیر روی $\mathbb{R}$ و $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی خطی باشد. عملگر $\overline{[\cdot, \cdot]} : V \times V \longrightarrow V$ روی V به صورت

$$[x, y] = xy - yx + f(y)x \quad x, y \in V \quad (19)$$

تعریف می‌شود. آن‌گاه $(V, [\cdot, \cdot])$ جبر خطی تعمیم‌یافته است.

□

اثبات. با استفاده از رابطه‌ی (۱۹) و محاسبات ساده و سراسر، نتیجه‌ی دل‌خواه حاصل می‌شود.

گزاره ۱۱.۵. فرض کنید V فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ و $g : V \longrightarrow \mathbb{F}$ تابع‌های خطی باشند. عملگر $\overline{[\cdot, \cdot]} : V \times V \longrightarrow V$ به صورت

$$[x, y] = f(x)y - g(y)x \quad (20)$$

تعریف شده است. آن‌گاه $(V, [\cdot, \cdot])$ جبرلی تعمیم‌یافته است.

اثبات. بررسی برقراری شرایط جبرلی تعمیم‌یافته، با توجه به خطی بودن f و g و استفاده از تعریف عملگر $[\cdot, \cdot]$ در رابطه‌ی (۲۰)، به طور سراسر اثبات می‌شوند.

□

مثال ۱۲.۵. فرض کنیم $V = \mathbb{R}^3$ و $X = (a_1, a_2, a_3)$ ، $Y = (b_1, b_2, b_3)$ ، $Z = (c_1, c_2, c_3)$ سه عضو دل‌خواه $\mathbb{R}^3$ باشند. عملگر $\overline{[\cdot, \cdot]} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت

$$[X, Y] = (a_2 b_3, -a_1 b_3, a_1 b_2) \quad (21)$$

تعریف می‌کنیم.

این عملگر، ساختار جبرلی تعمیم‌یافته روی $\mathbb{R}^3$ می‌دهد. به سادگی و با استفاده‌ی مستقیم از رابطه‌ی (۲۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} [X + Z, Y] &= ((a_2 + c_2)b_3, -(a_1 + c_1)b_3, (a_1 + c_1)b_2) \\ &= (a_2 b_3, -a_1 b_3, a_1 b_2) + (c_2 b_3, -c_1 b_3, c_1 b_2) \\ &= [X, Y] + [Z, Y]. \end{aligned} \quad (22)$$

بانیم نگاهی به رابطه ی (۲۲) ، دوخطی بودن عملگر (۲۱) به وضوح دیده می شود. حال با قرار دادن $[X, Y] = (x_1, x_2, x_3)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= (x_2 c_3, -x_1 c_3, x_1 c_2) \\ &= (-a_1 b_3 c_3, -a_2 b_3 c_3, a_2 b_3 c_2). \end{aligned}$$

پس با توجه به دو خطی بودن عملگر معرفی شده، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} [[X, Y] - [Y, X], Z] &= [[X, Y], Z] - [[Y, X], Z] \\ &= (-a_1 b_3 c_3 + a_2 b_1 c_3, -a_2 b_3 c_3 + a_3 b_2 c_3, a_2 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_2). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$[[X, Y] - [Y, X], Z] + [[Y, Z] - [Z, Y], X][[Z, X] - [X, Z], Y] = 0.$$

به این ترتیب رابطه ی (۲۱) ساختار جبر لی تعمیم یافته ای روی $\mathbb{R}$ القاء می کند.

پیشنهادهای

به طور کلی پیشنهاد طبیعی و قابل انتظار، بررسی این مسأله است که حکم های ثابت شده درباره ی جبرهای لی، تا چه حد به جبرهای لی تعمیم یافته قابل گسترش هستند. یافتن پاسخ سوال هایی از این قبیل که

۱. آیا برای یک جبر لی تعمیم یافته V ، منیفلد P با ساختار مشابه گروه لی وجود دارد که قضیه ای هم چون قضیه ی کارتان [۲] برایش قابل اثبات باشد؟

۲. آیا التصاق ∇ روی P وجود دارد به طوری که عبارتی مشابه

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

برای هر میدان برداری X و Y روی P برقرار باشد؟

۳. آیا یافتن نگاشتی مشابه نگاشت نمایی، برای جبرهای لی تعمیم یافته امکان پذیر است؟

۴. ...

مراجع

- [1] Humphreys J.E., *Introductions to Lie algebra and representation theory*. Springer-Verlag, New York (1972)
- [2] Vilasi Gaetano, *Hamiltonian Dynamics*, Word Scientific Publishing, 2001



۳.۵ بررسی مدل ریاضی شیوع ویروس کرونا در سطح جامعه

حجت الله عبادی زاده^۱، احسان لطفعلی قصاب^۲ و جواد شرفی^۳

^۱ دانشکده علوم پایه، دانشگاه افسری امام علی ع، تهران، ایران

^۲ دانشکده علوم پایه، دانشگاه افسری امام علی ع، تهران، ایران

^۳ دانشکده علوم پایه، دانشگاه افسری امام علی ع، تهران، ایران

در این مقاله به ارائه و بررسی یک مدل ریاضی برای شیوع ویروس کرونا در جامعه می پردازیم. در این مدل افراد جامعه را به چهار دسته: افراد مستعد دریافت عامل بیماری و ناقلین بیماری (در رابطه با ویروس کرونا تمام افراد جامعه مستعد دریافت ویروس هستند و از آنجا که ناقلین شناسایی نمی شوند در گروه مستعدین قرار می گیرند)، افراد آلوده به ویروس کرونا، افراد بیماری که تحت درمان قرار گرفته اند و افرادی که بهبود یافته اند، تقسیم می کنیم. سپس دستگاه معادلات دیفرانسیل مدل را ارائه داده و با استفاده از ماتریس نسل دوم عدد شیوع را محاسبه می نماییم. در پایان، در کنار تحلیل دینامیکی مدل، به بررسی شرایط پایداری حول نقطه تعادل دستگاه معادلات می پردازیم.

واژه های کلیدی: عدد شیوع، ماتریس نسل دوم، مدل ریاضی بیماری، ویروس کرونا.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 92D30.

کد مقاله: cdsgrt3-۰۰۶۷۰۰۵۷

آسخران. آدرس ایمیل: ebadizadeh.h@gmail.com

مقدمه

کرونا ویروس ها عضو خانواده ویروسی کرونا ویریده بوده و دارای یک ژنوم آر آن ای دورشته ای ساده هستند. هنگامی که آر آن ای این ویروس ها در سلول میزبان رها می شود، مستقیم به سمت ریبوزوم های متصل به شبکه آندوپلاسمی می رود و دیگر احتیاجی ندارد جهت رونویسی وارد هسته سلول شود و به طور مستقیم و توسط ریبوزوم های سلول های جاندار میزبان، آنتی ژن های خود را می سازد. منشأ ویروس های کرونا که در گذشته همه گیر شده بود، در حیوانات بود. ویروس سارس اول در خفاش شروع شد و بعد به گربه های ولگرد منتقل شد و بعد هم به انسان رسید. در سال ۲۰۱۴، ویروس مرس در خاورمیانه موجب مرگ ۸۵۸ نفر از ۲۴۹۴ بیمار مبتلا شد. این ویروس، از شتر به انسان رسیده بود. آخرین نوع آن، طبق تحقیقات پژوهشگران، پانگولین است. البته ممکن است جانوران دیگری هم در شیوع نقشی داشته باشند. بسته به نوع کرونا ویروس، روش های انتقال آن متفاوت است. در برخی از موارد روش های انتقال بیماری از انسان به انسان شبیه بیماری آفتلوانزا از طریق سرفه و عطسه است. با این حال احتمال انتقال بیماری در فضای باز بسیار محدود بوده و موارد انتقال انسان به انسان در مواردی رخ داده است که افراد به مدت طولانی در فضای بسته در کنار فرد بیمار بوده اند مانند افرادی که در بیمارستان ها با بیماران در ارتباط هستند. هنوز مشخص نیست که این بیماری نخستین بار به طور مستقیم از طریق جانوران به انسان یا از طریق سطوح آلوده به ویروس منتقل شده است.

در سال ۱۷۴۰، دانیل برنولی اولین مدل ریاضی در زمینه اپیدمیولوژی را ارائه داد که نشان می داد واکسیناسیون در برابر بیماری آبله سودمند است [۷]. مدل برنولی زمینه ساز ورود مدل های ریاضی به مطالعات زیستی و بیولوژیک شد به طوری که در اوایل قرن بیستم مطالعات گسترده و جامعی بر روی شیوع بیماری های عفونی، با استفاده از مدل های ریاضی، صورت پذیرفت [۴، ۳]. به عنوان مثال،

در سال ۱۹۰۶ هامر یک مدل برای بررسی گسترش بیماری سرخک ارائه داد، در سال ۱۹۱۱ یک فیزیکیان به نام راس، با استفاده از معادلات دیفرانسیل، به طراحی یک مدل برای شیوع بیماری مالاریا از طریق پشه پرداخت و در سال ۱۹۲۶ این کرماک و مک کندریک بودند که مدل معروف SIR را برای اپیدمی بیماری طاعون در لندن در سال ۱۶۶۶ ارائه نمودند [۱, ۶, ۷]. در اپیدمیولوژی، مدل های ریاضی فهم باارزشی از روند گسترش یک بیماری در میان انسان ها ارائه دادند و فرضیه هایی برای بهبود استراتژی کنترل بیماری ها مطرح نمودند. امروزه مدل های ریاضی در تحلیل دینامیک بیماری های زیادی مانند ایدز، مالاریا، هپاتیت و غیره مورد استفاده قرار می گیرند. این مدل ها نقش مهمی در درک بهتر از الگوهای اپیدمی جهت کنترل بیماری دارند. در این مقاله یک مدل ریاضی برای شیوع ویروس کرونا در جامعه ارائه می دهیم که در این مدل جمعیت را به چهار دسته تقسیم کرده ایم: افرادی که مستعد دریافت ویروس کرونا هستند و ناقلین، افرادی که به ویروس آلوده شده اند، افراد بیماری که تحت درمان قرار می گیرند و کسانی که بهبود یافته اند. با توجه به اینکه با گذشت زمان تعداد جمعیت مورد نظر تغییر می کند، مدل ما یک مدل وابسته به زمان خواهد بود. مباحث ارائه شده در این مقاله به این صورت است که: در بخش دوم به مباحث مربوط به مدل سازی ریاضی که شامل تعیین متغیرها و پارامترها، فرمول بندی معادلات و تشکیل دستگاه معادلات متناظر با آن که در اینجا یک دستگاه معادلات معمولی غیرخطی است پرداخته می شود. در بخش سوم نیز نقطه تعادل عاری از بیماری و نقطه تعادل شیوع بیماری ارائه شده و با استفاده از ماتریس نسل دوم مدل ریاضی، فرمول عدد شیوع محاسبه می گردد. علاوه بر این، پایداری دستگاه معادلات مدل مورد نظر نیز مورد بحث قرار داده می شود.

مدل سازی ریاضی

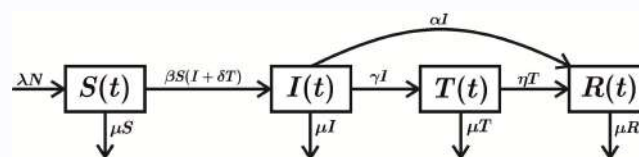
با توجه به مطالب گفته شده در بخش قبل، کل جمعیت جامعه مورد مطالعه را در زمان t با $N(t)$ نمایش می دهیم. حال اگر $S(t)$ مجموعه افرادی از جامعه باشد که مستعد دریافت ویروس کرونا هستند، $I(t)$ مجموعه افرادی که آلوده به ویروس باشند، $T(t)$ مجموعه همه بیمارانی باشد که تحت درمان قرار می گیرند و $R(t)$ مجموعه همه کسانی باشد که بهبود یافته اند، آنگاه داریم:

$$N(t) = S(t) + I(t) + T(t) + R(t).$$

این مدل را به اختصار $SITR$ می نامیم. در این مدل، نرخ انتقال ویروس را β و نرخ مرگ و میر طبیعی و زاد و ولد را به ترتیب μ و λ در نظر می گیریم. همچنین نرخ انتخاب افراد بیمار برای درمان را γ ، نرخ بهبود بیماران تحت درمان را η و نرخ بهبود بیماران بدون استفاده از خدمات درمانی را α در نظر می گیریم. به این ترتیب اگر کسر δ بیانگر تعداد افراد بیمار تحت درمانی باشد که همچنان می توانند بیماری را انتقال دهند، آنگاه تعداد افراد جدیدی که در زمان t آلوده می شوند برابر خواهد بود با $\beta S(t)(I(t) + \delta T(t))$. حال با توجه به متغیرها و پارامترهای تعریف شده در بالا، به فرمول بندی مدل ریاضی $SITR$ می پردازیم که منجر به دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی زیر می شود:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta S(I + \delta T) - \mu S + \lambda N, \\ \dot{I} &= \beta S(I + \delta T) - (\alpha + \gamma + \mu)I, \\ \dot{T} &= \gamma I - (\eta + \mu)T, \\ \dot{R} &= \eta T + \alpha I - \mu R.\end{aligned}\tag{۲۳}$$

توجه کنید که تمام پارامترها در معادلات بالا نامنفی هستند. در شکل ۱ نمودار گردش این مدل ارائه شده است.



شکل ۵: نمودار گردش مدل SITR

اگر N را برابر با یک در نظر بگیریم، در این صورت مجموعه های S ، I ، T و R کسری از N بوده و داریم:

$$S + I + T + R = 1,$$

بنابراین $R = 1 - S - I - T$. به این ترتیب می توان دستگاه معادلات (۱) را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta S(I + \delta T) - \mu S + \lambda, \\ \dot{I} &= \beta S(I + \delta T) - (\alpha + \gamma + \mu)I, \\ \dot{T} &= \gamma I - (\eta + \mu)T.\end{aligned}\quad (24)$$

نقاط تعادل و عدد شیوع

جواب های دستگاه معادلات (۲) بصورت $Q = (S, I, T)$ هستند که قضیه زیر مثبت بودن این جواب ها را نشان می دهد [۵].

قضیه ۱: اگر مقادیر $S(0)$ ، $I(0)$ و $T(0)$ نامنفی باشند، آنگاه برای $t > 0$ مقادیر $S(t)$ ، $I(t)$ و $T(t)$ نامنفی هستند.

اگر فرض کنیم که در جمعیت N هیچ بیماری وجود نداشته باشد، در این صورت نقطه تعادل عاری از بیماری دستگاه (۲) به صورت $Q_0 = (S_0, 0, 0)$ خواهد بود که $S_0 = \frac{\lambda}{\mu}$. سمت راست معادلات دستگاه (۲) را برابر با صفر قرار داده و نقطه تعادل دیگر دستگاه (۲) که به صورت (S^*, I^*, T^*) است را محاسبه می کنیم. پس داریم

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{-(\alpha + \gamma + \mu)I^* - \lambda}{\mu}, \\ T^* &= \frac{\gamma I^*}{\eta + \mu}.\end{aligned}$$

عدد شیوع ویروس تعداد افرادی است که یک فرد بیمار، در طول دوره بیماری خود، آنها را مبتلا می کند. با توجه به [۲]، عدد شیوع R_0 در واقع همان شعاع طیفی ماتریس نسل دوم FV^{-1} است. ماتریس های F و V را از دستگاه (۲) به صورت زیر بدست می آوریم:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta\lambda}{\mu} & \frac{\beta\lambda\delta}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و

$$V = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \eta + \mu \end{bmatrix}.$$

پس داریم:

$$V^{-1} = \frac{1}{(\alpha + \gamma + \mu)(\eta + \mu)} \begin{bmatrix} \eta + \mu & \gamma \\ 0 & \alpha + \gamma + \mu \end{bmatrix},$$

که در نهایت

$$R_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu(\alpha + \gamma + \mu)}.$$

در ادامه، با استفاده از ژاکوبین دستگاه معادلات (۲)، پایداری سیستم را حول نقطه تعادل عاری از بیماری، یعنی $(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0)$ ، بررسی می کنیم.

قضیه ۲: نقطه تعادل عاری از بیماری بطور مجانبی پایدار است اگر $R_0 < 1$ و ناپایدار است اگر $R_0 > 1$.

اثبات. ماتریس ژاکوبی دستگاه (۲) را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\lambda}{\mu} & -\frac{\beta\lambda\delta}{\mu} \\ 0 & \alpha & \frac{\beta\lambda\delta}{\mu} \\ 0 & \gamma & -(\eta + \mu) \end{bmatrix}.$$

پس چندجمله ای مشخصه J ، به صورت $(x + \mu)(x^2 + bx - c)$ خواهد بود که

$$b = \eta + \alpha + \gamma + \nu\mu - \frac{\beta\lambda}{\mu}$$

$$c = \left(\frac{\beta\lambda}{\mu} - (\alpha + \gamma + \mu)\right)(\eta + \mu) - \frac{\beta\lambda\gamma\delta}{\mu}.$$

با توجه به [۲]، در صورتی که جواب های چندجمله ای مشخصه دارای بخش حقیقی منفی باشند، آنگاه دستگاه پایدار مجانبی خواهد بود و این در صورتی اتفاق می افتد که $R_0 < 1$ ، همچنین اگر $R_0 > 1$ آنگاه دستگاه ناپایدار خواهد بود. $\square$

نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی یک مدل ریاضی برای شیوع ویروس کرونا در جامعه پرداختیم. در این مدل افراد جامعه را به چهار دسته: افراد مستعد دریافت ویروس کرونا افراد آلوده به ویروس کرونا، افراد بیماری که تحت درمان قرار گرفته اند و افرادی که بهبود یافته اند، تقسیم کردیم. سپس دستگاه معادلات دیفرانسیل مدل را ارائه دادیم و با استفاده از ماتریس نسل دوم عدد شیوع را محاسبه نمودیم در پایان، در کنار تحلیل دینامیکی مدل، با بدست آوردن نقاط تعادلی به بررسی پایداری حول نقطه تعادل دستگاه معادلات پرداختیم. نتیجه کلی که از این مقاله می توان گرفت این است که ویروس کرونا را نمی توان به طور کامل نابود کرد اما می شود سرایت آن را کاهش داد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله مراتب سپاس گذاری خود را از تمامی عوامل برگزار کننده این کنفرانس می دارد.

مراجع

- [1] F. Brauer, P. Van den, J. Wu, *Mathematical Epidemiology*, Springer-Verlag Berlin, 2008.
- [2] P.V.D. Driessche and J. Watmough, *Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, *Math Biosci.* 180 : 29 – 48, 2002
- [3] M. Farkas, *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, 2001.
- [4] Z. Ma, J. Li, *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009.
- [5] I. Shaban, E. S. Massaw, O. Daniel Makinde, *Modelling the effect of screening on the spread of HIV infection in a population with variable inflow of infective immigrants*, *Scientific Research and Essays*, 6 : 4397 – 4405, 2011.
- [6] E. Vynnycky, R. G. White, *An Introduction to Infectious Disease Modelling*, Oxford: Oxford University Press, 2010.
- [7] X. Q. Zhao, *Dynamical Systems in Population Biology*, Springer-Verlag New York, 2003.



۴.۵ آنتروپی گذشته عمر در سیستم های $n - i + 1$ از n مبتنی بر تابع چندک

زهره زمانی^۱

دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

آنتروپی نقش مهمی در مباحث قابلیت اعتماد و مطالعات طول عمر سیستم ها ایفا می کند. داده های ترتیبی نیز دارای کاربرد فراوان در مدل سازی و استنباط آماری هستند که از مهم ترین این داده ها می توان آماره های ترتیبی را نام برد. آماره های ترتیبی در بسیاری از شاخه های آمار از جمله نظریه قابلیت اعتماد کاربرد دارند. در سیستم های $n - i + 1$ از n ، آماره ترتیبی i ام بیانگر طول عمر سیستم است. در مطالعات اخیر، به استفاده از تابع چندک به عنوان رویکردی جایگزین در تشخیص مدل های آماری و تحلیل داده ها توجه زیادی معطوف شده است. در مقاله حاضر آنتروپی گذشته عمر سیستم های $n - i + 1$ از n مبتنی بر تابع چندک معرفی و به بررسی ویژگی های آن پرداخته می شود. دو کلاس ناپارامتری بر اساس این اندازه تعریف شده و بسته بودن این کلاس ها تحت تبدیلات نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) و تبدیلات وزنی مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه های کلیدی: آنتروپی شانون، آنتروپی باقیمانده عمر، آنتروپی گذشته عمر، تابع چندک.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 37B55.
کد مقاله: cdsgrt3-00900035

آدرس ایمیل: z.zamani@uk.ac.ir

مقدمه

شانون^۲ [۵]، اندازه ای از عدم حتمیت تحت عنوان آنتروپی معرفی کرد که کاربردهای زیادی در رشته های مختلف دارد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی است که طول عمر یک مؤلفه یا سیستم با تابع چگالی $f(x)$ را نشان می دهد، در این صورت آنتروپی شانون متغیر تصادفی X به صورت

$$\eta(X) = -E(\log f(X)) = -\int_0^{\infty} (\log f(x))f(x)dx, \quad (25)$$

تعریف می شود. در زمینه های زیادی از جمله قابلیت اعتماد، تحلیل بقا و اقتصاد که مدت زمان یک دوره مطالعاتی به عنوان متغیر اصلی مورد علاقه در نظر گرفته می شود، اندازه های اطلاع تابعی از زمان بوده و پویا می باشند. بر پایه این ایده، ابراهیمی^۳ [۲] آنتروپی باقیمانده عمر را به صورت

$$\eta(X; t) = -\int_t^{\infty} \left(\log \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} \right) \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} dx = \log \bar{F}(t) - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} (\log f(x))f(x)dx, \quad (26)$$

^۲Shannon

^۳Ebrahimi

تعریف کرد. در صورتی که در زمان t سیستم غیرفعال مشاهده شود، عدم حتمیت سیستم به گذشته عمر مرتبط است. بر این اساس دیکرسنزو و لانگ بردی^۴ [۱]، آنتروپی گذشته عمر را به صورت

$$\bar{\eta}(X; t) = - \int_0^t \left(\log \frac{f(x)}{F(t)} \right) \frac{f(x)}{F(t)} dx = \log F(t) - \frac{1}{F(t)} \int_0^t (\log f(x)) f(x) dx, \quad (27)$$

تعریف کردند که در آن $\bar{\eta}(X; t) = \eta(X^{(t)})$ و $X^{(t)} = (t - X | X \leq t)$ متغیر تصادفی گذشته عمر نامیده می شود. یکی از مباحث جدیدی که اخیراً در مطالعات آماری مورد توجه محققین قرار گرفته است، استفاده از تابع چندک به جای تابع توزیع در تحلیل و مدل بندی داده ها است. در مبحث قابلیت اعتماد نیز بسیاری از مفاهیم بر اساس تابع چندک بازنویسی شده اند. بیان این مفاهیم بر اساس تابع چندک دارای خواص ویژه ای است. از جمله در مواقعی که وجود یک داده دور افتاده و یا یک مشاهده حدی بر روی اندازه های قابلیت اعتماد تأثیر قابل توجهی دارد، کار کردن با اندازه های چندکی مناسب تر می باشد، زیرا کمتر تحت تأثیر مشاهدات حدی و یا دور افتاده قرار می گیرند. به عنوان کاربردی دیگر فرض کنید خواهیم آزمایشات طول عمر یک سیستم را تا زمانی که همه اجزای آن شکست بخورند، ادامه پیدا کند. قصد داریم فقط در صورتی که در صدی از اجزای آن شکست خوردند، آزمایش خاتمه پیدا کند. در این حالت زمان توقف بر حسب چندک بیان می شود. در مبحث اندازه های اطلاع بسیاری از مطالعات انجام گرفته بر اساس تابع توزیع می باشد. اما در مدلهایی که توابع توزیع فرم بسته ای ندارد، محاسبه این اندازه ها امکان پذیر نخواهد بود که در این شرایط نیز استفاده از تابع چندک توصیه شده است. در راستای بیان اندازه های آنتروپی بر اساس تابع چندک، سونوج و سانکاران^۵ [۶] فرم چندکی آنتروپی شانون و آنتروپی باقیمانده عمر را به صورت

$$\eta = \int_0^1 \log q(p) dp,$$

و

$$\eta(u) = \log(1 - u) + (1 - u)^{-1} \int_u^1 \log q(p) dp,$$

تعریف کردند. سونوج و همکاران [۷] نیز آنتروپی گذشته عمر چندکی را به صورت

$$\bar{\eta}(u) = \log u + u^{-1} \int_0^u \log q(p) dp.$$

ارائه کردند و ویژگی هایی از آن را مورد بررسی قرار دادند. سونوج و همکاران [۸] آنتروپی شانون و آنتروپی باقیمانده عمر آماره های مرتب بر اساس تابع چندک را معرفی و به بررسی خواص آن ها پرداختند. در این مقاله آنتروپی گذشته عمر آماره های ترتیبی بر اساس تابع چندک معرفی و خواص آن مورد مطالعه قرار می گیرد. در بخش ۲، آنتروپی گذشته عمر چندکی آماره های مرتب ارائه شده و نشان داده می شود اندازه تعریف شده، توزیع متغیر تصادفی را به طور یکتا مشخص می کند. در بخش ۳، دو کلاس ناپارامتری بر اساس این اندازه تعریف شده و حفظ این کلاس ها تحت تبدیلات نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) و همچنین توزیع های وزنی مورد مطالعه قرار می گیرد.

آنتروپی گذشته عمر آماره های مرتب بر مبنای تابع چندک

فرض کنید X یک متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد، تابع چندک X به صورت

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (28)$$

تعریف می شود. از رابطه بالا، برای $u = F(Q(u))$ نتیجه می شود و رابطه $q(u)f(Q(u)) = 1$ با مشتق گیری نسبت به u حاصل می شود که در آن $f(Q(u))$ تابع چندک چگالی^۶ و $q(u) = Q'(u)$ تابع چگالی چندک^۷ نامیده می شود. برای مطالعه بیشتر در

^۴Dicresenzo and Longberdi

^۵Sunoj and Sankaran

^۶density quantile function

^۷quantile density function

خصوص تابع چندک و مزایای استفاده از آن می‌توان به نیر^۸ و همکاران [۴] مراجعه نمود. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ ، یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی با تابع توزیع مطلقاً پیوسته $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. آماره‌های ترتیبی متناظر با این نمونه توسط $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ نمایش داده می‌شود. تابع چگالی آماره ترتیبی i ام، $X_{i:n}$ به صورت

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} (F(x))^{i-1} (\bar{F}(x))^{n-i} f(x),$$

تعریف می‌شود که در آن $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$; $a, b > 0$. فرم چندکی تابع چگالی آماره ترتیبی i ام با جایگذاری $x = Q(u)$ در رابطه (۷.۵) به صورت

$$f_{i:n}(u) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} u^{i-1} (1-u)^{n-i} \frac{1}{q(u)} = \frac{g_i(u)}{q(u)}, \quad (29)$$

حاصل می‌شود که در آن $g_i(u) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} u^{i-1} (1-u)^{n-i}$ تابع چگالی توزیع بتا با پارامترهای i و $n-i+1$ است.

قضیه ۱۳.۵. آنتروپی گذشته عمر بر مبنای تابع چندک برای آماره ترتیبی i ام به صورت

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) = -\frac{\beta(i, n-i+1)}{\beta_u(i, n-i+1)} \int_0^u (\log g_i(p)) g_i(p) dp + \frac{\beta(i, n-i+1)}{\beta_u(i, n-i+1)} \int_0^u (\log q(p)) g_i(p) dp \quad (30) \\ + \log \frac{\beta_u(i, n-i+1)}{\beta(i, n-i+1)},$$

محاسبه می‌شود که در آن $\frac{\beta_u(i, n-i+1)}{\beta(i, n-i+1)}$ فرم چندکی $F_{i:n}(u)$ و $\beta_u(i, n-i+1) = \int_0^u p^{i-1} (1-p)^{n-i} dp$ تابع بتای ناقص است.

اثبات. آنتروپی گذشته عمر آماره ترتیبی i ام عبارت است از

$$\bar{\eta}(X_{i:n}, t) = - \int_0^t \left(\log \frac{f_{i:n}(x)}{F_{i:n}(t)} \right) \frac{f_{i:n}(x)}{F_{i:n}(t)} dx. \quad (31)$$

می‌توان نشان داد که $F_{i:n}(t) = \frac{\beta_F(t)(i, n-i+1)}{\beta(i, n-i+1)}$. حال با جایگذاری $x = Q(p)$ و $t = Q(u)$ در رابطه (۳۱) و استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

آماره‌های مرتب در مشخصه سازی توزیع‌های احتمال، آزمون‌های نیکویی برازش و همچنین قابلیت اعتماد کاربردهای زیادی دارند. در نظریه قابلیت اعتماد، آماره‌های مرتب برای مدل‌بندی آماری مورد استفاده قرار می‌گیرند. آماره ترتیبی i ام در نمونه‌ای به حجم n ، طول عمر یک سیستم $(n-i+1)$ از n را نشان می‌دهد.

نتیجه ۱۴.۵. آنتروپی گذشته عمر چندکی متناظر با آماره ترتیبی اول و آماره ترتیبی n ام به ترتیب عبارتند از

$$\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) = -\log n + \frac{n-1}{n} + \log(1 - (1-u)^n) + (n-1) \frac{(1-u)^n}{1 - (1-u)^n} \log(1-u) \\ + \frac{n}{1 - (1-u)^n} \int_0^u (\log q(p)) (1-p)^{n-1} dp,$$

و

$$\bar{\eta}_{X_{n:n}}(u) = -\log n + \frac{n-1}{n} + \log u + \frac{n}{u^n} \int_0^u (\log q(p)) p^{n-1} dp,$$

که $\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u)$ و $\bar{\eta}_{X_{n:n}}(u)$ آنتروپی گذشته عمر مبتنی بر تابع چندک برای سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های مستقل و هم‌توزیع را نشان می‌دهد.

^۸Nair

مثال ۱۵.۵. فرض کنید X دارای تابع چگالی چند

$$q(u) = Ku^\alpha(1-u)^{-(A+\alpha)}, \quad (32)$$

باشد که K, α و A مقادیر ثابت حقیقی مقدار هستند. آنتروپی گذشته عمر چندکی آماره ترتیبی اول برابر است با

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) &= -\log n + \log K + (n-1+A+\alpha) \frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n} \log(1-u) + \log(1-(1-u)^n) \\ &+ \frac{A+\alpha+n-1}{n} + \frac{n\alpha}{1-(1-u)^n} \int_0^u (\log p)(1-p)^{n-1} dp. \end{aligned}$$

ملاحظه ۱۶.۵. لازم به ذکر است که خانواده توزیع های (۳۲) چندین توزیع مهم مانند نمایی ($\alpha=0, A=1$), پارتو ($\alpha=0, A<0$), توزیع ری اسکیل بتا ($\alpha=0, A>1$) و لگ لجستیک ($\alpha=\lambda-1, A=2$) را شامل می شود.

توزیع هایی وجود دارد که تابع توزیع (و یا تابع چگالی) آن ها فرم بسته ای ندارد و در نتیجه محاسبه آنتروپی برای آن ها امکان پذیر نیست. اما تابع چندک صورت بسته ای دارد و در نتیجه می توان آنتروپی چندکی را در این توزیع ها محاسبه کرد. مثال بعد مصداق این موضوع می باشد.

مثال ۱۷.۵. فرض کنید X دارای تابع چندک $Q(u) = 2u - u^2$ باشد که تابع توزیع فرم بسته ای ندارد. در این صورت

$$\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) = -\log n + \log 2 + 1 - \frac{2}{n} + \log(1-(1-u)^n) + (n-2) \frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n} \log(1-u).$$

نتیجه ۱۸.۵. فرم چندکی آنتروپی گذشته عمر آماره های مرتب، تابع چگالی چندک را به طور منحصر بفرد توسط رابطه

$$q(u) = \frac{u^{i-1}(1-u)^{n-i}}{\beta_u(i, n-i+1)} \exp \left\{ \bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) - 1 - \frac{\bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u)\beta_u(i, n-i+1)}{u^{i-1}(1-u)^{n-i}} \right\}. \quad (33)$$

تعیین می کند.

مثال ۱۹.۵. فرض کنید X دارای توزیع پارتو II با تابع چندک $Q(u) = \alpha \left[(1-u)^{-\frac{1}{c}} - 1 \right]$, $\alpha, c > 0$ باشد، در این صورت

$$\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) = -\log n + \log\left(\frac{\alpha}{c}\right) + \left(1 + \frac{1}{nc}\right) + \log(1-(1-u)^n) + \left(n + \frac{1}{c}\right) \frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n} \log(1-u). \quad (34)$$

فرض کنید رابطه (۳۴) برقرار است. طبق رابطه (۳۳) نتیجه می شود

$$q(u) = \exp \left\{ \bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) - 1 + \log \frac{(1-u)^{n-1}}{\beta(1, n)} - \frac{\bar{\eta}'_{X_{1:n}}(u)\beta_u(1, n)}{(1-u)^{n-1}} - \log \frac{\beta_u(1, n)}{\beta(1, n)} \right\},$$

حال با جایگذاری و ساده کردن داریم $q(u) = \frac{\alpha}{c}(1-u)^{-\frac{c+1}{c}}$ که تابع چگالی چندک پارتو II می باشد.

قضیه زیر نشان می دهد آنتروپی باقیمانده عمر چندکی آماره های مرتب، توزیع متغیر تصادفی را به طور یکتا مشخص می کند.

قضیه ۲۰.۵. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توابع توزیع مطلقا پیوسته F و G ، توابع چندک Q_X و Q_Y و تکیه گاه مشترک χ باشند. در این صورت $F(x) = G(x)$, $\forall x \in \chi$ اگر و تنها اگر

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) = \bar{\eta}_{Y_{i:n}}(u), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall 0 < u < 1. \quad (35)$$

اثبات. فرض کنید $x \in \chi$ ، $F(x) = G(x)$ ، بنابراین $Q_X(u) = Q_Y(u)$ و $q_X(u) = q_Y(u)$ برای هر $u \in (0, 1)$. در نتیجه $\int_0^u \log q_X(p) g_i(p) dp = \int_0^u \log q_Y(p) g_i(p) dp$ و طبق رابطه (۳۰) نتیجه مطلوب ثابت می شود. برعکس فرض کنید $\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) = \bar{\eta}_{Y_{i:n}}(u)$ به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ و هر $0 < u < 1$. با جایگذاری (۳۱) در رابطه بالا و ساده کردن جملات نتیجه می شود که

$$\int_0^u \log q_X(p) g_i(p) dp = \int_0^u \log q_Y(p) g_i(p) dp.$$

حال با مشتقگیری نسبت به u از رابطه بالا برابری $\log q_X(u) g_i(u) = \log q_Y(u) g_i(u)$ ثابت می شود. بنابراین $q_X(u) = q_Y(u)$ و در نتیجه $F(x) = G(x)$ برای هر $x \in \chi$ و اثبات کامل می شود. $\square$

ملاحظه ۲۱.۵. فرم چندکی آنتروپی گذشته عمر آماره های مرتب می تواند بر اساس آنتروپی شانون چندکی آماره های مرتب به صورت زیر بیان شود

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) = \frac{\beta(i, n-i+1)}{\beta_u(i, n-i+1)} \eta_{X_{i:n}} + \int_u^1 [\log(\frac{g_i(p)}{q(p)})] \frac{p^{i-1}(1-p)^{n-i}}{\beta_u(i, n-i+1)} dp + \log \frac{\beta_u(i, n-i+1)}{\beta(i, n-i+1)},$$

که در آن $\eta_{X_{i:n}} = \eta_{g_i} + E_{g_i}(\log q(U))$ آنتروپی شانون چندکی آماره ترتیبی i ام می باشد و مقدار η_{g_i} در ابراهیمی [۲۳] به صورت

$$\eta_{g_i} = \log B(i, n-i+1) - (i-1)[\Psi(i) - \Psi(n+1)] - (n-i)[\Psi(n-i+1) - \Psi(n+1)], \quad (36)$$

تعریف شده که تابع $\Psi(z) = \frac{d}{dz}(\log \Gamma(z))$ همان تابع دایگاما است.

توزیع های وزنی به طور گسترده ای در بسیاری از رشته ها مانند پزشکی، قابلیت اعتماد و تحلیل داده ها مورد استفاده قرار می گیرد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. اگر $w(x)$ تابعی نامنفی باشد به طوری که $0 < E[w(X)] < \infty$ ، آنگاه X^w متغیر وزنی متناظر با متغیر تصادفی X است که تابع چگالی آن توسط رابطه $f_w(x) = \frac{w(x)f(x)}{E[w(X)]}$ محاسبه می شود. تابع چندک چگالی متناظر با f_w به صورت

$$f_w(Q(u)) = w(Q(u))f(Q(u))/\mu,$$

حاصل می شود که در آن $\mu = \int_0^1 w(Q(p))f(Q(p))d(Q(p)) = \int_0^1 w(p)dp$ و $\frac{1}{q_w(u)} = \frac{w(Q(u))}{\mu q(u)}$ محاسبه می شود.

قضیه ۲۲.۵. آنتروپی گذشته عمر چندکی i امین آماره ترتیبی X^w عبارت است از

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}^w}(u) = \bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) + \log \mu - \frac{\int_0^u (\log w(Q(p))) p^{i-1}(1-p)^{n-i} dp}{\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i} dp}. \quad (37)$$

رده های طول عمر

تعیین کلاس های مختلف از مدل های احتمال بر اساس اندازه های عدم حتمیت در بسیاری مواقع مفید می باشد. رده بندی توزیع های طول عمر امکان شناسایی سیستم و محاسبه کران برای تابع قابلیت اعتماد را فراهم می کند. در ادامه دو کلاس ناپارامتری بر اساس $\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)$ تعریف می شود.

تعریف ۲۳.۵. متغیر تصادفی X دارای آنتروپی گذشته عمر چندکی صعودی (نزولی) $(DPQEO)$ $IPQEO$ است اگر $\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به $u \geq 0$ باشد.

مثال ۲۴.۵. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع تابع توانی با تابع چندک $Q(u) = \alpha u^{\frac{1}{\beta}}$ باشد، در این صورت $\bar{\eta}_{X_{n:n}}(u) = -\log n + \log(\frac{\alpha}{\beta}) + 1 + \frac{1}{\beta} \log u - \frac{1}{n\beta}$ و در نتیجه $\bar{\eta}'_{X_{n:n}}(u) = \frac{1}{\beta u} > 0$ ، بنابراین $IPQEO$ است.

در ادامه یک کران بالا (پایین) برای آنتروپی گذشته عمر آماره های مرتب بر اساس تابع چندک در خانواده های متعلق به رده $IPQEO$ (DPQEO) ارائه می شود.

ملاحظه ۲۵.۵. اگر متغیر تصادفی X متعلق به رده $IPQEO$ ($DPQEO$) باشد، در این صورت

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) \leq (\geq) 1 + \log \frac{q(u)\beta_u(i, n-i+1)}{u^{i-1}(1-u)^{n-i}}.$$

قضیه ۲۶.۵. اگر X متعلق به کلاس $IPQEO$ ($DPQEO$) باشد و $\phi(\cdot)$ یک تابع نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) باشد، آن گاه $Y = \phi(X)$ نیز به کلاس $IPQEO$ ($DPQEO$) متعلق است.

اثبات. فرض کنید $Y = \phi(X)$ یک تابع نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) باشد. اگر تابع چگالی Y را با $g(y)$ نشان دهیم، در این صورت

$$g(y) = \frac{f(\phi^{-1}(y))}{\phi'(\phi^{-1}(y))} = \frac{1}{\phi'(Q_X(u))q_X(u)},$$

و در نتیجه $q_Y(u) = q_X(u)\phi'(Q_X(u))$. حال با جایگذاری تابع چگالی چندک $q_Y(y)$ در رابطه (۳۰) داریم

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{Y_{i:n}}(u) &= -\frac{\beta(i, n-i+1)}{\beta_u(i, n-i+1)} \int_0^u (\log g_i(p))g_i(p)dp + \frac{\beta(i, n-i+1)}{\beta_u(i, n-i+1)} \int_0^u (\log q_X(p))g_i(p)dp \\ &+ \frac{\beta(i, n-i+1)}{\beta_u(i, n-i+1)} \int_0^u (\log \phi'(Q_X(p)))g_i(p)dp + \log \frac{\beta_u(i, n-i+1)}{\beta(i, n-i+1)} \\ &= \bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) + \frac{\int_0^u (\log \phi'(Q_X(p)))p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{\beta_u(i, n-i+1)}. \end{aligned}$$

حال با مشتگیری از رابطه بالا نتیجه می شود که

$$\bar{\eta}'_{Y_{i:n}}(u) = \bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) + \frac{u^{i-1}(1-u)^{n-i} \int_0^u [\log \phi'(Q_X(u)) - \log \phi'(Q_X(p))]p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{(\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp)^2}.$$

می دانیم که $\bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) > (<) 0$ زیرا X متعلق به رده طول عمر $IPQEO$ ($DPQEO$) است. از طرفی با در نظر داشتن تحدب (تقعر) تابع $\phi(\cdot)$ نتیجه می شود که ϕ' تابعی صعودی (نزولی) است و در نتیجه به ازای هر $p \in (0, u)$ داریم

$$[\log \phi'(Q_X(u)) - \log \phi'(Q_X(p))] \geq (\leq) 0.$$

بنابراین $\bar{\eta}'_{Y_{i:n}}(u) > 0$ و لذا Y نیز به رده $IPQEO$ ($DPQEO$) تعلق دارد. $\square$

مثال ۲۷.۵. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با تابع چندک $Q_X(u) = -\frac{1}{\lambda} \log(1-u)$ باشد و به ازای $\alpha > 0$ قرار دهید $Y = X^{\frac{1}{\alpha}}$. در این صورت Y دارای توزیع وایبل با تابع چندک $Q_Y(u) = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}(-\log(1-u))^{\frac{1}{\alpha}}$ است. می توان نشان داد که X متعلق به کلاس $IPQEO$ است. از طرفی $\phi(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ به ازای $x > 0$ و $\alpha > 0$ تابعی نامنفی، صعودی و محدب به ازای $0 < \alpha < 1$ است. بنابراین شرایط قضیه ۲۶.۵ برقرار است و در نتیجه توزیع وایبل نیز به ازای $0 < \alpha < 1$ به کلاس $IPQEO$ متعلق است.

در ادامه به بیان شرایط لازم برای حفظ کلاس $IPQEO$ تحت توزیع های وزنی پرداخته می شود.

قضیه ۲۸.۵. الف. فرض کنید X به کلاس $IPQEO$ تعلق دارد و $w(x)$ تابعی نامنفی و نزولی از x باشد. در این صورت X^w نیز $IPQEO$ است.

ب. فرض کنید X به کلاس $DPQEO$ تعلق دارد و $w(x)$ تابعی نامنفی و صعودی از x باشد. در این صورت X^w نیز $DPQEO$ است.

اثبات. الف. با مشتگیری از رابطه (۳۷) نسبت به u داریم

$$\bar{\eta}'_{X^w_{i:n}}(u) = \bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) + \frac{u^{i-1}(1-u)^{n-i} \int_0^u [\log w(Q(p)) - \log w(Q(u))]p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{[\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp]^2}. \quad (38)$$

با در نظر داشتن غیر نزولی بودن تابع چنک و نزولی بودن تابع $w(x)$ ، می توان نشان داد که

$$\log w(Q(p)) > \log w(Q(u)), \quad \forall 0 < p < u,$$

و در نتیجه جمله دوم در رابطه (۳۸) مثبت است. از طرفی $\bar{\eta}_{X_{i:n}}'(u) > 0$ زیرا $IPQEO$ ، است. بنابراین $\bar{\eta}_{X_{i:n}}^w(u)$ مثبت و X^w به رده $IPQEO$ متعلق می شود.
ب. به طور مشابه ثابت می شود. $\square$

مثال ۲۹.۵. فرض کنید X به رده $IPQEO$ متعلق باشد و $j > 0$ ، $w(x) = (\bar{F}(x))^{j-1}$. متغیر تصادفی وزنی متناظر با X ، مدل نرخ خطر معکوس متناسب است. به ازای $0 < j < 1$ ، تابع $w(x)$ نسبت به x نزولی است. بنابراین طبق قضیه ۲۸.۵ قسمت الف، متغیر X^w نیز به رده $IPQEO$ تعلق دارد.

نتیجه گیری

تابع چنک به عنوان یکی از شاخص های توزیع های آماری مورد استفاده قرار می گیرد. اخیراً نیز به بیان مفاهیم قابلیت اعتماد و اندازه های اطلاع بر پایه تابع چنک توجه زیادی معطوف شده است. در این مقاله به معرفی آنتروپی گذشته عمر آماره های مرتب مبتنی بر تابع چنک پرداخته شد و ویژگی هایی از آن مورد بررسی قرار گرفت. همچنین دو رده طول عمر بر اساس این اندازه معرفی و بسته بودن آنها تحت تبدیلات نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) و تبدیلات وزنی مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

- [1] Di Crescenzo, A. and Longobardi, M. Entropy-based measure of uncertainty in past lifetime distributions. *Journal of Applied Probability*, 39 (2002), 434-440.
- [2] Ebrahimi, N. How to measure uncertainty in the residual life time distribution. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, (1996), 48-56.
- [3] Ebrahimi, N., Soofi, E. S. and Zahedi, H. Information properties of order statistics and spacings. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50 (2004), 177-183.
- [4] Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Balakrishnan, N. *Quantile-based reliability analysis*. Springer, New York, (2013).
- [5] Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27 (1948), 379-423.
- [6] Sunoj, S. M. and Sankaran, P. G. Quantile based entropy function. *Statistics and Probability Letters*, 82 (2012), 1049-1053.
- [7] Sunoj, S. M., Sankaran, P. G. and Nanda, A. K. Quantile based entropy function in past lifetime. *Statistics and Probability Letters*, 83 (2013), 366-372.
- [8] Sunoj, S. M., Krishnan, A. S. and Sankaran, P. G. Quantile-based entropy of order statistics. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*, 18 (2017), 1-17.



۵.۵ مدل های تصادفی برای تعداد زیرواحدهای باز کانال های یونی پتاسیم و سدیم در غشای سلول های نوروئی

فاطمه کلمیشی^۱، علیرضا قدسی^۲، تکتم حجار^۳ و علی برزنونی^۳

^۱ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

^۲ دانشکده علوم پایه، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

کانال های یونی پتاسیم و سدیم در غشای سلول های نوروئی دارای تعدادی زیر واحد می باشند که هر کدام به طور مستقل باز و بسته می شوند. زمانی که تمام این زیر واحدها باز باشند، انتقال یون ها امکان پذیر می باشد. تعداد زیر واحد های باز این کانال ها را می توان به عنوان حالت های یک زنجیر مارکوف زمان پیوسته با حالت های گسسته در نظر گرفت. هدف از این مقاله معرفی مدل های زنجیر مارکوف و مدل های معادلات دیفرانسیل تصادفی برای تعداد زیر واحد های باز کانال های یونی پتاسیم و سدیم می باشد.

واژه های کلیدی: کانال های یونی، غشای سلول های نوروئی، مدل های تصادفی، مدل زنجیر مارکوف، مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی. طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 62P10, 60H10, 60J28. کد مقاله: cdsgr3-01130061

آسخنران. آدرس ایمیل: ar.ghodsi@hsu.ac.ir

مقدمه

کانال های یونی، پروتئین های بین غشایی می باشند که پتانسیل الکتریکی دو سمت غشای سلول را با عبور دادن یون ها به صورت انتخابی، بوجود آورده و کنترل می نمایند [۱] و معمولاً نسبت به بعضی یون ها مثل کلسیم، پتاسیم، سدیم و کلر بسیار گزینشی رفتار می کنند. کانال های یونی بر اساس نوع محرک، به سه دسته، کانال های یونی دریچه دار وابسته به ولتاژ، کانال های یونی دریچه دار وابسته به لیگاند و کانال های یونی حساس به تغییر شکل مکانیکی تقسیم می شوند. آن دسته از کانال های سدیم و پتاسیم که در دسته کانال های ولتاژی هستند، دارای چهار زیرواحد می باشند. پیشرفت در تکنیک های ثبت تک کانال نشان داد که کانال های یونی منفرد می توانند به روشی که ظاهراً تصادفی به نظر می رسد بین حالت های باز و بسته تغییر حالت دهند. این می تواند یک منبع داخلی نویز، معروف به نویز کانال تولید کند که سبب نوسان در هدایت های یونی می شود [۲]. بنابر این می توان فرض کرد که فعالیت کانال های یونی با انتقال تصادفی حالت های کانال ها انجام می شود، که این منجر به مدل های تصادفی دینامیک نوروئی می شود. پرکاربردترین مدل برای نویز کانال، مدل زنجیر مارکوف^۹ (MC) است. مدل های MC فرض می کنند که حالت یک کانال یونی توسط یک زنجیر مارکوف زمان پیوسته-حالت گسسته توصیف می شود که در آن هر حالت زنجیر نشان دهنده حالتی خاص از کانال یونی است. خاصیت مارکوفی مستلزم این است که انتقال کانال از یک حالت به حالت دیگر تنها به وضعیت فعلی آن بستگی داشته باشد، بنابراین نرخ های انتقال تنها با حالت کانال و پتانسیل ولتاژ غشا تعیین می شود. در نتیجه، همه کانال ها به دلیل وابستگی به پتانسیل غشا با هم مرتبط می شوند [۳]. مدل های MC ابزار ارزشمندی برای بررسی تأثیر نویز کانال بر دینامیک نوروئی هستند، اما شبیه سازی این مدل ها از نظر محاسباتی بسیار گران و تجزیه

^۹Markov Chain

و تحلیل ریاضی آن‌ها دشوار است. در نتیجه، علاقه زیادی به تدوین معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE) ^{۱۰} برای نویز کانال وجود دارد. تحقیق در این زمینه توسط فاکس و لو ^{۱۱} آغاز شد [۳]. سینتیک یک زیرواحد منفرد، نقطه شروع همه مدل‌های در نظر گرفته شده است. سینتیک یک زیرواحد منفرد توسط یک فرآیند دو حالت به صورت

$$\text{Closed} \xrightleftharpoons[\beta_n]{\alpha_n} \text{Open} \quad (39)$$

توصیف می‌شود، که در آن نرخ‌های انتقال وابسته به ولتاژ [۵] برابرند با

$$\alpha_n(V) = \frac{0.01(10 - V)}{\exp[(10 - V)/10] - 1}, \beta_n(V) = 0.125 \exp(-V/10) \quad (40)$$

برای سادگی، اغلب وابستگی به V حذف و به صورت α_n و β_n نوشته می‌شوند. طرح سینتیک در (۶۳) می‌تواند برای تعریف زنجیر مارکوف رفتار یک زیرواحد منفرد که به طور تصادفی بین دو حالت باز و بسته تغییر وضعیت می‌دهد، مورد استفاده قرار گیرد. فرض کنید:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 - p_{\text{sub}} \\ p_{\text{sub}} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_n & \beta_n \\ \alpha_n & -\beta_n \end{bmatrix}$$

که p_{sub} احتمال باز بودن زیر واحد در زمان t می‌باشد و $\mathbf{A}$ ماتریس مقادیر بی نهایت کوچک می‌باشد که درایه‌های آن به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_{ij} = P((j - 1) \rightarrow (i - 1)), A_{ii} = -\sum_{j \neq i} A_{ji} \quad (41)$$

و $P(i \rightarrow j)$ به معنی احتمال تغییر حالت کانال در زمانی کوتاه، از حالت i به حالت j می‌باشد که به زمان تغییر حالت بستگی ندارد. برای فرآیند مارکوف زمان - پیوسته رابطه زیر را داریم:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p}, \quad (42)$$

از رابطه بالا دو معادله که قرینه هم می‌باشند به دست می‌آید. بنابر این حل معادله (۴۱) معادل حل معادله زیر است:

$$\frac{dp_{\text{sub}}}{dt} = \alpha_n(1 - p_{\text{sub}}) - \beta_n p_{\text{sub}} \quad (43)$$

هدف این مقاله معرفی مدل‌های تصادفی برای کانال‌های یونی پتاسیم و سدیم می‌باشد که مدل‌های مربوط به پتاسیم در بخش ۲ و مدل‌های مرتبط با سدیم در بخش ۳ ارائه خواهند شد.

مدل‌های تصادفی برای کانال‌های یونی پتاسیم

کانال‌های پتاسیم (K^+) دارای چهار زیر واحد مستقل می‌باشند. این زیر واحدها را می‌توان مشابه (نشان داده شده با نماد n), یا غیر یکسان (نشان داده شده با نماد n_i) در نظر گرفت.

مدل زنجیر مارکوف

در این جا فرض بر این است که کانال K^+ از چهار زیرواحد آماری یکسان و مستقل تشکیل شده است، لذا سینتیک این کانال می‌تواند به عنوان یک زنجیر مارکوف پنج حالت مد شود، که در آن هر حالت تعداد زیرواحدهای باز (۰، ۱، ۲، ۳، ۴) را در یک لحظه معین در زمان مشخص می‌کند:

$$0 \xrightleftharpoons[\beta_n]{\alpha_n} 1 \xrightleftharpoons[\beta_n]{\alpha_n} 2 \xrightleftharpoons[\beta_n]{\alpha_n} 3 \xrightleftharpoons[\beta_n]{\alpha_n} 4. \quad (44)$$

^{۱۰}Stochastic Differential Equation

^{۱۱}Fox and Lu

کانال در حالت باز یا هدایت گفته می شود اگر هر چهار زیر واحد به طور هم زمان باز باشند. فرض کنید P یک بردار ستونی باشد که در آن عنصر i ام احتمال باز بودن i زیر واحد در زمان t باشد، آن گاه توزیع احتمال حالت های زنجیر مارکوف بر حسب زمان در معادله (۴۱) صدق می کند. که در آن درایه های ماتریس $A_{5 \times 5}$ با استفاده از رابطه (۴۱) تعیین می شوند.

مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

فرض کنید x_i نسبت کانال های K^+ باشد که در زمان t دارای i زیر واحد باز هستند. از آن جا که با یک جمعیت محدود سروکار داریم، نسبت کانال ها یعنی x_i ، دیگر احتمال بودن در وضعیت i نیست. فاکس و لو نشان دادند که مدل SDE برای کانال K^+ به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + S\xi, \quad (45)$$

که x برداری از x_i ها است، درایه های ماتریس A با استفاده از رابطه (۴۱) تعیین می شود، ξ برداری از پنج فرآیند تصادفی محض گاوسی مستقل با میانگین صفر و واریانس واحد است و S ماتریسی است که در رابطه $SS' = D$ صدق می کند که در آن درایه های ماتریس انتشار D به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_{ij} = -\frac{1}{N}(A_{ij}x_{j-1} + A_{ji}x_{i-1}), D_{ii} = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} D_{ji} \quad (46)$$

در این رابطه N تعداد کانال های پتاسیم است.

مدل های معادلات دیفرانسیلی مبتنی بر زیر واحد

تفاوت این مدل ها با مدل های قبل در این است که رویکرد زیر واحد برای نسبت زیر واحدهای باز (n) در زمان t در صورتی که زیر واحدها یکسان در نظر گرفته شوند، منجر به مدل SDE به صورت زیر می شود:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n + \sigma_n(V)\xi(t).$$

که در آن عبارت تصادفی $\xi(t)$ یک فرآیند تصادفی محض گاوسی با میانگین صفر و واریانس واحد است و $\sigma_n(V)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma_n^*(V) = \frac{\alpha_n(1 - n) + \beta_n n}{N}$$

در صورتی که زیر واحدها یکسان در نظر گرفته نشوند، و n_i نشان دهنده نسبت زیر واحدهای باز زیر واحدها i ام باشد، مدل به صورت زیر است:

$$\frac{dn_i}{dt} = \alpha_n(1 - n_i) - \beta_n n_i + \sigma_n(V)\xi(t), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

مدل های تصادفی برای کانال های یونی سدیم

مدل زنجیر مارکوف

کانال های Na^+ دارای چهار زیر واحد مستقل شامل سه زیر واحد از نوع m و یک زیر واحد از نوع h می باشند که باید همه در حالت باز باشند تا کانال در حالت هدایت قرار داشته باشد [۲]. زنجیر مارکوف کانال K^+ ، در معادله (۴۵) نشان داده شده است. زنجیر مارکوف کانال Na^+ که شامل سه زیر واحد m و یک زیر واحد h است با یک زنجیر مارکوف هشت حالت به صورت زیر توصیف می شود:

$$\begin{array}{ccccccc} 0,0 & \xrightleftharpoons[\beta_m]{\alpha_m} & 1,0 & \xrightleftharpoons[\beta_m]{\alpha_m} & 2,0 & \xrightleftharpoons[\beta_m]{\alpha_m} & 3,0 \\ \alpha_h \downarrow \uparrow \beta_h & & \alpha_h \downarrow \uparrow \beta_h & & \alpha_h \downarrow \uparrow \beta_h & & \alpha_h \downarrow \uparrow \beta_h \\ 0,1 & \xrightleftharpoons[\beta_m]{\alpha_m} & 1,1 & \xrightleftharpoons[\beta_m]{\alpha_m} & 2,1 & \xrightleftharpoons[\beta_m]{\alpha_m} & 3,1 \end{array}$$

این کانال در حالت هدایت قرار دارد وقتی که هر سه زیر واحد m و زیر واحد h باز باشند. نرخ انتقال وابسته به ولتاژ برای زیر واحدهای m و h به صورت زیر هستند [۹]:

$$\begin{aligned}\alpha_m(V) &= 0.1 \frac{25 - V}{\exp(\frac{25-V}{10}) - 1}, \\ \beta_m(V) &= 4 \exp(-\frac{V}{18}), \\ \alpha_h(V) &= 0.07 \exp(-\frac{V}{40}), \\ \beta_h(V) &= \frac{1}{\exp(\frac{20-V}{10}) + 1}.\end{aligned}$$

با فرض این که زیر واحدهای نوع m کانال Na^+ یکسان و مستقل باشند، مدل زنجیر مارکف حالات این کانال یونی به صورت رابطه (۶۵) است که p برداری ستونی با اعضای به ترتیب $p_{00}, p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{30}, p_{31}, p_{32}, p_{33}$ است که p_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$ و $j = 0, 1$)، احتمال باز بودن i زیر واحد از نوع m و j زیر واحد از نوع h می باشد.

مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

فرض کنید اعضای بردار ستونی x با x_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$ و $j = 0, 1$)، نسبت کانال های Na^+ با i زیر واحد باز m و j زیر واحد باز h نشان داده شود. مدل SDE کانال های Na^+ مشابه معادله های (۶۷) و (۶۸) نوشته می شود.

مدل های معادلات دیفرانسیلی مبتنی بر زیر واحد

مدل SDE مبتنی بر زیر واحدهای یکسان نوع m برای کانال های Na^+ به صورت

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \alpha_m(1 - m) - \beta_m m + \sigma_m(V)\xi_m(t), \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(1 - h) - \beta_h h + \sigma_h(V)\xi_h(t),\end{aligned}$$

و در صورتی که زیر واحد های نوع m یکسان نباشند، معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \alpha_m(1 - m_i) - \beta_m m_i + \sigma_m(V)\xi_m(t), \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(1 - h) - \beta_h h + \sigma_h(V)\xi_h(t),\end{aligned}$$

مراجع

- [۱] سحر امیری، امیر شیخی و حمید راشدی، مقایسه ی ساختمان کانال پتاسیمی کمپلکس *Fab-KcsA* در دو محیط با غلظت پایین یون پتاسیم و یون تیتانیم با استفاده از شبیه سازی دینامیک مولکولی، فصلنامه دانش میکروپ شناسی، شماره ۳، (۱۳۸۸).
- [2] P. Dayan and L.F. Abbott, *Theoretical neuroscience: computational and mathematical modeling of neural systems. Computational Neuroscience Series, vol. 15 (4) (2001) 563-577.*
- [3] R.F. Fox, "Stochastic versions of the Hodgkin-Huxley equations", *Biophysical journal, vol.72(5) (1997) 2068-2074.*
- [4] B. Hillel, E. J. Dickson, M. Kruse, O. Vivas, B.C. Suh, "Phosphoinositides regulate ion channels", *Biochimica Et Biophysica Acta (BBA)-Molecular and Cell Biology of Lipids, vol. 1851(6) (2015) 844-856.*

-
- [5] A. Hodgkin and A.F. Huxley, "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve", *The Journal of physiology*, vol.117(4) (1952) 500–544.
- [6] C. Laing and G. Lord, *Stochastic methods in neuroscience*. Oxford University Press (2010).



۶.۵ تابع مولد اطلاعات باقیمانده عمر رکوردها

زهره زمانی^۱، امید خوارزمی^۲

^۱دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

^۲دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران

در این مقاله، تابع مولد اطلاعات برای باقیمانده عمر یک مولفه یا سیستم بر اساس رکوردها محاسبه شده است. ثابت می شود که تابع نرخ خطر رکورد به طور یکتا مقدار تابع مولد اطلاعات باقیمانده عمر را تعیین می کند. دو کلاس ناپارامتری بر اساس تابع مولد اطلاعات باقیمانده عمر رکوردها تعریف شده و کران هایی برای این تابع مولد ارائه می شود. در انتها به محاسبه تابع مولد اطلاعات باقیمانده عمر برای رکوردهای متناظر با متغیرهای تصادفی تولید شده تحت تبدیلات خطی و تبدیلات اکیدا صعودی پرداخته می شود.

واژه های کلیدی: آنتروپی شانون، آنتروپی باقیمانده عمر، آنتروپی گذشته عمر، تابع چندک.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 37B55.

کد مقاله: cds-00900045

آسخنران: آدرس ایمیل: z.zamani@uk.ac.ir

مقدمه

در نظریه اطلاعات، توابع مولد برای چگالی های احتمال تعریف می شوند تا کمیت هایی مانند اطلاعات شانون و واگرایی کولبک لیبر را توسعه دهند. تابع مولد اطلاعات برای تابع چگالی f ، توسط گلمب^{۱۲} [۳] پیشنهاد شد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی f باشد. تابع مولد اطلاعات (IG) از چگالی f برای هر $\alpha > 0$ به صورت

$$G_{\alpha}(X) = G_{\alpha}(f) = - \int f^{\alpha}(x) dx, \quad (47)$$

تعریف می شود، مشروط بر اینکه انتگرال وجود داشته باشد. گلمب [۳] نشان داد که $G_{\alpha}(X)$ دارای ویژگی های زیر است
الف. $G_1(X) = 1$. ب. $\frac{\partial}{\partial \alpha} G_{\alpha}(X) \Big|_{\alpha=1} = -H(f)$ که در آن $H(f) = - \int f(x) \log f(x) dx$ آنتروپی شانون متغیر تصادفی است. خوارزمی و بالا کریشن^{۱۳} [۶] تابع مولد اطلاعات را برای آماره های مرتب و سیستم های مختلط محاسبه کرده و ویژگی هایی از آن ها را مورد بررسی قرار دادند.

فرض کنید $\{X_i, i \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل و هم توزیع با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. X_i را یک رکورد بالا گویم اگر مقدار آن از همه مشاهدات قبلی بزرگتر باشد. بنابراین X_j یک مقدار رکورد بالا است اگر $X_j > X_i$ برای همه $i < j$. طبق قرارداد X_1 را اولین رکورد بالا تعریف می کنیم. برای رکوردهای پایین نیز تعریف به صورت مشابه ارائه می شود. یک مشاهده در صورتی به عنوان یک رکورد پایین شناخته می شود که مقدار آن از مقادیر قبلی کوچکتر باشد. زمانی که در آن رکورد رخ

^{۱۲}Golomb

^{۱۳}Balakrishnan

می دهد، خود یک متغیر تصادفی است که زمان رکورد نامیده می شود. زمان های رکورد، توسط T_j نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$T_1 = 1, \quad T_n = \min\{n : X_n > X_{T_{n-1}}\}.$$

فرض کنید $U_1, \dots, U_n$ مقادیر n رکورد بالا از یک توزیع با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. در این صورت چگالی توأم n رکورد اول بالا و همچنین چگالی حاشیه ای U_n (رکورد n ام بالا برای $n \geq 1$) به ترتیب توسط روابط

$$q(u) = \prod_{i=1}^n r(u_i) f(u_n), \quad u_1 < \dots < u_n,$$

و

$$f_{U_n}(u_n) = \frac{R^{n-1}(u_n)}{(n-1)!} f(u_n), \quad -\infty < u_n < \infty, \quad (48)$$

محاسبه می شود که در آن $R(t) = -\log(1 - F(t))$ و $r(t) = R'(t) = f(t)/(1 - F(t))$ تابع نرخ خطر است. فرض کنید $L_1, \dots, L_n$ مقادیر n رکورد پایین از تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. چگالی حاشیه ای L_n (رکورد n ام پایین برای $n \geq 1$) عبارت است از

$$f_{L_n}(l_n) = \frac{\tilde{R}^{n-1}(l_n)}{(n-1)!} f(l_n), \quad -\infty < l_n < \infty, \quad (49)$$

که در آن $\tilde{R}(t) = -\log(F(t))$. رکوردها در طیف وسیعی از مسائل از جمله رشته های ورزشی، هواشناسی، بیماری های همه گیر، زلزله شناسی و اقتصاد کاربرد دارند. مطالعه مدت زمان یکی از موضوعات مورد علاقه در بسیاری از شاخه ها مانند قابلیت اعتماد، تحلیل بقا، بیمه و اقتصاد می باشد. بر پایه این ایده ابراهیمی^{۱۴} [۲] آنتروپی شانون باقیمانده عمر را تعریف کرد. به دنبال آن، بسیاری از اندازه های اطلاع برای متغیرهای تصادفی باقیمانده عمر تعریف شده و مورد بررسی قرار گرفتند. اخیراً جوزه و ستار^{۱۵} [۴] اکستروپی باقیمانده عمر را بر اساس k -رکوردها بررسی کردند. ستار و جوزه [۱]، اکستروپی باقیمانده عمر مرتبط با رکوردها را تعریف کرده و به بیان برخی ویژگی های آن پرداختند. در این مقاله در بخش ۲، تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای بالا و پایین تعریف می شود. در بخش ۳، دو کلاس ناپارامتری براساس این تابع تعریف شده و کران هایی برای تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکورد محاسبه می شود. در ادامه به محاسبه مقدار تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر در رکوردهای متناظر با متغیرهای تصادفی تولید شده تحت تبدیلات خطی و تبدیلات اکیدا صعودی پرداخته می شود.

تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر در رکوردهای متناظر با متغیرهای تصادفی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی است که طول عمر یک مؤلفه یا سیستم با تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ را نشان می دهد. زمانی که یک مؤلفه یا سیستم در زمان t فعال باشد، ممکن است به مطالعه اطلاعات چگالی باقیمانده عمر مؤلفه یا سیستم بعد از زمان t علاقه مند باشیم. بر این اساس در این بخش، تابع مولد اطلاع IG برای توزیع باقیمانده طول عمر سیستم یا مؤلفه بر اساس رکوردها تعریف و مورد مطالعه قرار می گیرد. برای متغیر تصادفی X متناظر با طول عمر سیستم، متغیر $X_t = (X - t | X > t)$ متغیر تصادفی باقیمانده عمر سیستم در زمان t نامیده می شود که دارای تابع چگالی $f_t(x) = \frac{f(x)}{F(t)}$ و تابع بقا $\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}$ می باشد.

تعریف ۳۰.۵. (خوارزمی و بالاکریشن [۵]). فرض کنید X_t متغیر تصادفی باقیمانده عمر با تابع چگالی مطلقا پیوسته $f_t(x)$ باشد. تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر RIG به صورت

$$G_\alpha(X; t) = \frac{\int_t^\infty f^\alpha(x) dx}{\bar{F}^\alpha(t)}, \quad (50)$$

تعریف می شود.

^{۱۴}Ebrahimi

^{۱۵}Jose and Sathar

ملاحظه ۳۱.۵. متغیر تصادفی X دارای توزیع گامای بریده شده با پارامترهای n و λ است، اگر تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n; \lambda t)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > t > 0,$$

باشد که با نماد $X \sim \Gamma_t(n, \lambda)$ نشان داده می شود و در آن $n > 0$ تابع گامای ناقص است.

قضیه ۳۲.۵. فرض کنید U_n^X ، رکورد n ام بالا در دنباله ای از مشاهدات با تابع چگالی $f(x)$ باشد. در این صورت تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر U_n^X برابر است با

$$G_\alpha(U_n^X; t) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1) + 1; -\log(1 - F(t)))}{\Gamma^\alpha(n; -\log(1 - F(t)))} E_{g^*}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1 - e^{-V_n}))], \quad (51)$$

که در آن V_n یک متغیر تصادفی با توزیع گامای بریده شده $(1, 1, \Gamma_{-\log(1-F(t))}(\alpha(n-1) + 1))$ است که تابع چگالی آن با g^* نمایش داده می شود.

اثبات. با استفاده از رابطه (۵۰) می توان نوشت

$$G_\alpha(U_n^X; t) = \frac{\int_t^\infty f_{U_n^X}^\alpha(x) dx}{\bar{F}_{U_n^X}^\alpha(t)}. \quad (52)$$

از طرفی

$$\bar{F}_{U_n^X}(t) = \int_t^\infty f_{U_n^X}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{-\log(1-F(t))}^\infty u^{n-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(n; -\log(1-F(t)))}{\Gamma(n)}, \quad (53)$$

که تساوی دوم با جایگذاری رابطه (۴۸) و سپس تغییر متغیر $u = -\log(1-F(x))$ حاصل شده است. با تغییر متغیر مشابه می توان ثابت کرد

$$\int_t^\infty f_{U_n^X}^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha(n-1) + 1; -\log(1-F(t)))}{\Gamma^\alpha(n)} E_{g^*}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1 - e^{-V_n}))]. \quad (54)$$

□

بنابراین با جایگذاری (۵۳) و (۵۴) در رابطه (۵۲) نتیجه ثابت می شود.

مثال ۳۳.۵. فرض کنید X دارای توزیع نمایی با تابع چگالی $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ باشد، آن گاه

$$G_\alpha(U_n^X; t) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1) + 1; \alpha \lambda t)}{\Gamma^\alpha(n; \lambda t)} \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha(n-1)+1}}. \quad (55)$$

قضیه ۳۴.۵. تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکورد n ام پایین، L_n^X به صورت زیر محاسبه می شود

$$G_\alpha(L_n^X; t) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1) + 1; -\log F(t))}{\Gamma^\alpha(n; -\log F(t))} E_{g^{**}}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1 - e^{-V_n}))], \quad (56)$$

که در آن $V_n \sim \Gamma_{-\log(F(t))}(\alpha(n-1) + 1, 1)$ و g^{**} تابع چگالی V_n است.

بررسی برخی ویژگی های تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکورد

در این بخش ابتدا دو کلاس بر اساس تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر تعریف کرده و سپس به مطالعه بیشتر تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر پرداخته می شود.

تعریف ۳۵.۵. متغیر تصادفی X دارای تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر صعودی (نزولی) ($IRIG$) ($DRIG$) است، اگر و تنها اگر $G_\alpha(X; t)$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به t باشد.

قضیه ۳۶.۵. اگر $\{X_i, i \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال f و تابع توزیع F باشد و $\bar{F}_{U_n^X}$ و $f_{U_n^X}$ تابع احتمال و تابع بقای رکورد n ام بالا باشد. همچنین فرض کنید یکی از دو قسمت الف یا ب برقرار باشد.

الف. تابع $G_\alpha(U_n^X; t)$ نسبت به t نزولی است و $\alpha > 0$,

ب. تابع $G_\alpha(U_n^X; t)$ نسبت به t صعودی است و $0 < \alpha < 1$ ، آنگاه $G_\alpha(U_n^X; t)$ به طور یکتا و منحصر بفرد توسط تابع نرخ خطر رکورد n ام بالا تعیین می شود.

اثبات. رابطه (۵۲) معادل است با

$$G_\alpha(U_n^X; t) \bar{F}_{U_n^X}^\alpha(t) = \int_t^\infty f_{U_n^X}^\alpha(x) dx \quad (57)$$

حال با مشتقگیری از رابطه (۵۷) نسبت به t داریم

$$G'_\alpha(U_n^X; t) \bar{F}_{U_n^X}^\alpha(t) - \alpha f_{U_n^X}(t) \bar{F}_{U_n^X}^{\alpha-1}(t) G_\alpha(U_n^X; t) = -f_{U_n^X}^\alpha(t).$$

با توجه به تعریف $h_{U_n^X}(t) = \frac{f_{U_n^X}(t)}{\bar{F}_{U_n^X}(t)}$ نتیجه می شود

$$G'_\alpha(U_n^X; t) - \alpha h_{U_n^X}(t) G_\alpha(U_n^X; t) = -h_{U_n^X}^\alpha(t).$$

بنابراین برای یک مقدار ثابت $t, t > 0$ یک حل مثبت از معادله

$$g(x) = x^\alpha - \alpha G_\alpha(U_n^X; t)x + G'_\alpha(U_n^X; t) = 0, \quad (58)$$

است. طبق فرضیات قسمت الف $G'_\alpha(U_n^X; t) < 0$ و $g(+\infty) = +\infty$ و $g(0) = G'_\alpha(U_n^X; t) < 0$

$$g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha G_\alpha(U_n^X; t), \quad (59)$$

بنابراین به ازای $\alpha > 1$ تابع $g(x)$ ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد و بنابراین دارای یک مقدار مینیمم در نقطه $x = (G_\alpha(U_n^X; t))^{\frac{1}{\alpha-1}}$ است که نشان می دهد معادله (۵۹) دارای یک جواب مثبت یکتای $h_{U_n^X}(t)$ برای همه مقادیر t است. بنابراین $G_\alpha(U_n^X; t)$ به طور یکتا $h_{U_n^X}(t)$ و در نتیجه F را تعیین می کند. $\square$

قضیه ۳۷.۵. اگر U_n^X متعلق به کلاس $IRIG$ ($DRIG$) باشد، آنگاه

$$G_\alpha(U_n^X; t) \geq (\leq) \frac{1}{\alpha} h_{U_n^X}^{\alpha-1}(t) \quad (60)$$

اثبات. با مشتقگیری از رابطه (۵۲) نسبت به t ، تفکیک کسر و استفاده از تابع نرخ خطر رکورد n ام نتیجه می شود که

$$\frac{d}{dt} G_\alpha(U_n^X; t) = -h_{U_n^X}^\alpha(t) + \alpha h_{U_n^X}(t) G_\alpha(U_n^X; t) > (<) 0,$$

که نامساوی آخر به این دلیل برقرار است که X به رده $IRIG$ ($DRIG$) متعلق است. حال با ساده کردن رابطه بالا نتیجه مطلوب ثابت می شود. $\square$

لم بعد، مقدار تابع مولد اطلاعات باقیمانده عمر رکوردهایی را نشان می دهد که با استفاده از تبدیلات مکان-مقیاس متغیرهای تصادفی حاصل شده اند.

قضیه ۳۸.۵. فرض کنید X یک متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و $a > 0$ و $b \geq 0$ مقادیر ثابت حقیقی مقدار باشند. همچنین قرار دهید $Z = aX + b$ ، در این صورت

$$G_\alpha(U_n^Z; t) = \frac{1}{a^{\alpha-1}} G_\alpha(U_n^X; \frac{t-b}{a}). \quad (61)$$

اثبات. از آنجایی که $a > 0$ و $t > b$ ، نامساوی $\frac{t-b}{a} > 0$ نتیجه می شود. از طرفی می دانیم

$$\bar{F}_{U_n^Z}(t) = \int_t^\infty \frac{(-\log(1 - F_Z(z)))^{n-1} f_Z(z)}{\Gamma(n)} dz.$$

با جایگذاری $F_Z(z) = F_X(\frac{z-b}{a})$ و $f_Z(z) = \frac{1}{a} f_X(\frac{z-b}{a})$ در رابطه بالا و تغییر متغیر $x = \frac{z-b}{a}$ نتیجه می شود

$$\bar{F}_{U_n^Z}(t) = \int_{\frac{t-b}{a}}^\infty \frac{(-\log(1 - F_X(x)))^{n-1} f_X(x)}{\Gamma(n)} dx = \frac{\Gamma(n; -\log(1 - F_X(\frac{t-b}{a})))}{\Gamma(n)} = \bar{F}_{U_n^X}(\frac{t-b}{a})$$

تساوی دوم با تغییر متغیر $u = -\log(1 - F_X(x))$ و تساوی آخر طبق رابطه (۵۳) حاصل شده است. به طور مشابه می توان ثابت کرد

$$\int_t^\infty f_{U_n^Z}^\alpha(z) dz = \frac{\Gamma(\alpha(n-1) + 1; -\log(1 - F_X(\frac{t-b}{a})))}{a^{\alpha-1} \Gamma^\alpha(n)} E_{g^{***}}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1 - e^{-V_n}))]$$

که در آن $V_n \sim \Gamma_{-\log(1 - F_X(\frac{t-b}{a}))}(\alpha(n-1) + 1, 1)$ و g^{***} تابع چگالی V_n است. حال با استفاده از تعریف تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای متناظر با متغیر تصادفی Z و روابط بالا اثبات قضیه کامل می شود. $\square$

در قضیه بعد، تاثیر تبدیلات یکنوای صعودی از متغیرهای تصادفی روی تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکوردها مورد بررسی قرار می گیرد.

قضیه ۳۹.۵. فرض کنید $\psi(\cdot)$ یک تابع اکیدا صعودی باشد به طوری که $\psi(\cdot) = 0$ و $\psi(\infty) = \infty$ و تعریف کنید $Y = \psi(X)$. همچنین فرض کنید U_n^X و U_n^Y به ترتیب n امین رکورد بالا متناظر با X و Y باشند. در این صورت

$$G_\alpha(U_n^Y; t) = \frac{G_\alpha(U_n^X; \psi^{-1}(t))}{E_g[f_X^{\alpha-1}(F_X^{-1}(1 - e^{-V_n}))]} E \left[\frac{f_X(F_X^{-1}(1 - e^{-V_n}))}{\psi'(F_X^{-1}(1 - e^{-V_n}))} \right]^{\alpha-1} \quad (62)$$

که در آن $V_n \sim \Gamma_{-\log(1 - F_X(\psi^{-1}(t)))}(\alpha(n-1) + 1, 1)$.

اثبات. با جایگذاری روابط $F_Y(y) = F_X(\psi^{-1}(y))$ و $f_Y(y) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} f_X(\psi^{-1}(y))$ در تعریف تابع بقای U_n^Y و استفاده از تغییر متغیر $Y = \psi(X)$ برای $\bar{F}_{U_n^Y}(t) = \bar{F}_{U_n^X}(\psi^{-1}(t))$ ثابت می شود. از طرفی به طور مشابه می توان ثابت کرد

$$\int_t^\infty f_{U_n^Y}^\alpha(y) dy = \frac{\Gamma(\alpha(n-1) + 1; -\log(1 - F_X(\psi^{-1}(t))))}{\Gamma^\alpha(n)} E \left[\frac{f_X(F_X^{-1}(1 - e^{-V_n}))}{\psi'(F_X^{-1}(1 - e^{-V_n}))} \right]^{\alpha-1}$$

با جایگذاری روابط فوق در تعریف تابع مولد اطلاع باقیمانده رکورد متناظر با Y نتیجه ثابت می شود. $\square$

نتیجه گیری

در این مقاله به محاسبه تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای بالا و پایین پرداخته و براساس آن دو کلاس ناپارامتری تعریف شد و کرانهایی برای تابع مولد اطلاع رکوردها بر اساس این دو کلاس محاسبه گردید. همچنین تاثیر تبدیلات خطی و اکیدا صعودی بر مقدار تابع مولد اطلاع رکوردها مورد مطالعه قرار گرفت.

مراجع

- [1] Abdul Sathar, E. I. and Jose, J. Extropy based on records for random variables representing residual life. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, (2020), 1-15.

- [2] Ebrahimi, N. How to measure uncertainty in the residual life time distribution. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, (1996), 48–56.
- [3] Golomb, S. The information generating function of a probability distribution (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 12(1), (1966), 75–77.
- [4] Jose, J. and Sathar, E. A. Residual extropy of k-record values. *Statistics and Probability Letters*, 146, (2019), 1–6.
- [5] Kharazmi, O. and Balakrishnan, N. Jensen-information generating function and its connections to some well-known information measures. *Statistics and Probability Letters*, 170, (2021), 108995.
- [6] Kharazmi, O. and Balakrishnan, N. Information generating function for order statistics and mixed reliability systems. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, (2021), 1–10.



۷.۵ بعد متوسط سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار

زهره افچنگی^۱ و علی برزنونلی^۲

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

کاتو در [۱۲] نشان می دهد که اگر $f: X \rightarrow X$ همسانریختی انبساطی پیوستار باشد، آنگاه $\dim(X) < \infty$ ؛ یعنی بعد توپولوژیکی X متناهی است. در این ارائه، ما به معرفی سیستم دینامیکی $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ خواهیم پرداخت که $\dim(X) = \infty$. همچنین به معرفی مفهوم بعد متوسط سیستم دینامیکی $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ پرداخته و رابطه بین این مفهوم با مفهوم انبساطی پیوستار را مورد مطالعه قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: بعد توپولوژیکی، بعد متوسط سیستم دینامیکی، انبساطی پیوستار.
طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 18A32, 18F20, 39B42.
کد مقاله: cdsgr-۰۱۱۰۰۰۶۰

آسخران. آدرس ایمیل: barzanouniali@gmail.com

مقدمه

فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. نگاشت $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ عمل گروه $\mathbb{Z}^k$ روی X خوانیم در صورتی که $\varphi(*, x) = x$ برای هر $x \in X$ و $\varphi(n+m, x) = \varphi(n, \varphi(m, x))$ برای هر $n, m \in \mathbb{Z}^k$ و $x \in X$. هرگاه عمل $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد، آنگاه $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم دینامیکی خوانده می شود. به عنوان مثال، اگر $f: X \rightarrow X$ یک همسانریختی باشد و $\varphi: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ به وسیله $\varphi(n, x) = f^n(x)$ تعریف شود، آنگاه $\varphi: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ یک سیستم دینامیکی است که در این مقاله با (X, f) نمایش داده می شود. یکی از مفاهیم مهم سیستم های دینامیکی، مفهوم انبساطی است. این مفهوم اولین بار توسط اوتز [۶] برای مطالعه مدارهای جانی به کار برده شد و تغییر کوچک در مفهوم انبساطی، باعث ایجاد مفاهیم جدید در سیستم های دینامیکی می شود و مفاهیمی مانند انبساطی مثبت، انبساطی نقطه به نقطه، انبساطی آنتروپی و انبساطی پیوستار به ترتیب توسط شوارتزمن (۱۹۵۲)، ردی (۱۹۷۰)، باون (۱۹۷۲) و کاتو از جمله این مفاهیم جدید می باشند. این مفاهیم برای سیستم دینامیکی $f: X \rightarrow X$ معرفی شدند و عده ای از محققین به توسعه این مفاهیم برای سیستم $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ پرداختند.

از طرفی نظریه بعد یکی از شاخه های توپولوژی بوده که به مطالعه بعد یک فضای توپولوژیکی می پردازد. تعاریف متفاوتی از بعد یک فضای توپولوژی در مقالات متفاوت وجود دارد. به عنوان مثال، بعد استقرایی کوچک در سال ۱۹۲۲ توسط اریسون و بعد استقرایی بزرگ و بعد پوششی در سال ۱۹۳۱ توسط چن معرفی شد و دیگر این که این مفاهیم روی فضای متریک جدایی پذیر معادلند. برای مطالعه بیشتر به کتاب [۹] مراجعه کنید.

منیه در [۵] به مطالعه رابطه بین مفهوم انبساطی $f: X \rightarrow X$ و بعد توپولوژیکی X پرداخته و ثابت می کند اگر همسانریختی انبساطی مانند $f: X \rightarrow X$ وجود داشته باشد، آنگاه بعد توپولوژیکی فضای X متناهی است.

با توجه به این که مفهوم انبساطی برای $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ قابل توسیع است، این سوال مطرح می شود که آیا نتایج منیه برای سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ قابل توسیع است؟ اما در [۵]، مولفین به ارائه سیستم دینامیکی انبساطی $\varphi : \mathbb{Z}^2 \times X \rightarrow X$ می پردازند که بعد توپولوژیکی X نامتناهی است. ولی در [۴]، به معرفی مفهوم بعد متوسط یک سیستم دینامیکی پرداخته و رابطه آن را با مفهوم انبساطی سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ مطالعه می کند. نتایج منیه برای $f : X \rightarrow X$ توسط کاتو در [۱۲] برای مفهوم انبساطی پیوستار توسیع داده شد. انبساطی پیوستار مفهومی ضعیف تر از مفهوم انبساطی است و در این مقاله به کمک ایده های مطرح شده در [۴]، ما به مطالعه رابطه انبساطی پیوستار و بعد متوسط سیستم دینامیکی خواهیم پرداخت.

تعاریف مورد نیاز

تعریف ۴۰.۵. فرض کنید $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های X و $x \in X$ باشد. مرتبه α در نقطه x را با نماد $ord_x(\alpha)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ord_x(\alpha) := -1 + \#\{i \in I \mid x \in A_i\}$$

که در آن $\#E$ نمایش دهنده تعداد عناصر E می باشد. همچنین برای $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ مرتبه خانواده α را با نماد $ord(\alpha)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$ord(\alpha) := \sup_{x \in X} ord_x(\alpha).$$

مثال ۴۱.۵. فرض کنیم $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ یک افراز برای مجموعه X باشد؛ یعنی برای هر $i, j \in I$ اما $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $X = \cup_{i \in I} A_i$ باشد. از این رو $ord_x(\alpha) = 0$ و این نتیجه می دهد که $ord(\alpha) = 0$ هرگاه $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ یک افراز از X باشد.

فرض کنیم $I \subseteq N$. برای پوشش $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ از فضای X ، قرار می دهیم $D(\alpha) := \min_{\beta} ord(\beta)$ که β هر پوشش متناهی از X است که نظریفی از α است؛ یعنی $\alpha < \beta$.

تعریف ۴۲.۵. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. بعد توپولوژیکی فضای X را با $dim(X)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$dim(X) := \sup_{\alpha} D(\alpha)$$

که α پوشش باز متناهی دلخواهی از X است. بعد توپولوژیکی X با نام بعد لیگ ^{۱۶} X نیز معروف می باشد.

مثال ۴۳.۵. فرض کنیم که X مجموعه ای با تعداد $n + 2$ عضو باشد. نقطه $x_0 \in X$ را در نظر می گیریم. توپولوژی زیر را روی X معرفی می کنیم. U مجموعه باز در X است، هرگاه $U = \emptyset$ یا این که U زیر مجموعه ای از X باشد که حاوی x_0 است.

اگر $\alpha = \{\{x_0, x\} \mid x \in X - \{x_0\}\}$ ، آنگاه α پوشش باز برای X خواهد بود. واضح است که اگر β پوشش بازی از X باشد که ظریف تر از α است، آنگاه

$$ord(\alpha) \leq ord(\beta).$$

پس

$$D(\alpha) := ord(\alpha) = n.$$

از طرفی α ظریف تر از هر پوشش از X است. بنابراین

$$dim(X) = D(\alpha) = n.$$

اگر α و β دو پوشش باز متناهی برای فضای متریک (X, d) باشند، آنگاه بنا بر قضیه ۱.۱.۴ در [۹]،

$$D(\alpha \vee \beta) \leq D(\alpha) + D(\beta),$$

که

^{۱۶}Lebesgue dimension

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

لم ۴۴.۵. (Fekete's lemma) فرض کنید $\{a_n\}_{n \geq 1}$ دنباله ای زیر جمعی از اعداد حقیقی باشد یعنی

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m, \quad \forall n, m \geq 1$$

به طوری که $a_n \geq 0$ برای همه $n \geq 1$. در این صورت دنباله $\{b_n\}_{n \geq 1}$ تعریف شده به وسیله $b_n := \frac{a_n}{n}$ همگرا بوده و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \geq 1} V_n.$$

□

اثبات. به قضیه ۶.۲.۳ در [۹] مراجعه شود.

فرض کنید α پوشش باز متناهی برای X و $f : X \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته باشد. برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ ، پوشش باز $w(\alpha, f, n)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$w(\alpha, f, n) := \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\alpha).$$

همچنین فرض کنید

$$D(\alpha, f, n) := D(w(\alpha, f, n)).$$

بنا بر قضیه ۶.۳.۱ در [۹]، دنباله $\{D(\alpha, f, n)\}_{n \geq 1}$ در خاصیت زیر جمعی صدق می کند. بنابراین بنا بر لم ۴۴.۵، دنباله

$$\left\{ \frac{D(\alpha, f, n)}{n} \right\}_{n \geq 1}$$

همگرا است. فرض کنید

$$D(\alpha, f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\alpha, f, n)}{n}.$$

تعریف ۴۵.۵. فرض کنید $f : X \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته روی فضای متریک X باشد. بعد توپولوژیکی متوسط سیستم (X, f) را با $mdim(X, f)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$mdim(X, f) := \sup_{\alpha} D(\alpha, f)$$

که α پوشش باز متناهی دلخواه از X است.

قضیه ۴۶.۵. فرض کنید $f : X \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته روی فضای متریک (X, d) باشد و بعد توپولوژیکی X متناهی باشد. یعنی $dim(X) < \infty$ در این صورت

$$mdim(X, f) = 0.$$

□

اثبات. به کتاب [۹] مراجعه شود.

در این قسمت به معرفی بعد متوسط برای سیستم دینامیکی $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ می پردازیم. می دانیم که برای دو پوشش باز $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ از X ، $D(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq D(\mathcal{U}) + D(\mathcal{V})$ ؛ یعنی دارای خاصیت زیر جمعی است. بنابراین اگر $\mathcal{U}$ پوشش باز X باشد، آنگاه حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D\left(\bigvee_{n \in [-N, N]^* \cap \mathbb{Z}^k} \varphi(-n, \mathcal{U})\right)}{(2N+1)^k}.$$

فرض کنیم برای پوشش باز $\mathcal{U}$ از X و سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ ، نماد $A(\mathcal{U}, \varphi)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$A(\mathcal{U}, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D\left(\bigvee_{n \in [-N, N]^* \cap \mathbb{Z}^k} \varphi(-n, \mathcal{U})\right)}{(2N+1)^k}.$$

تعریف ۴۷.۵. فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. بعد متوسط سیستم دینامیکی $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ را با نماد $mdim(X, \varphi)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$mdim(X, \varphi) = \sup\{A(\mathcal{U}, \varphi) \mid \mathcal{U} \text{ پوشش باز از } X \text{ است}\}.$$

نتایج اصلی

در این بخش به معرفی مفاهیم انبساطی و انبساطی پیوستار برای سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ خواهیم پرداخت و رابطه این دو مفهوم را با بعد متوسط سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ بررسی خواهیم کرد. فرض کنیم $C(X)$ گردایه تمام مجموعه های بسته و همبند X باشد. اگر متریک هاسدورف و X فضای متریک فشرده باشد، آنگاه $(C(X), d_H)$ فضای متریک فشرده خواهد بود [۱۲].

تعریف ۴۸.۵. فرض کنیم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ سیستم دینامیکی روی فضای متریک (X, d) باشد.

۱. $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم انبساطی خوانیم در صورتی که $c > 0$ وجود داشته باشد که اگر $x \neq y$ ، آنگاه $n \in \mathbb{Z}^k$ وجود داشته باشد به طوری که $d(\varphi(n, x), \varphi(n, y)) > c$.

۲. $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم انبساطی پیوستار خوانیم در صورتی که $c > 0$ وجود داشته باشد که برای هر مجموعه ناتهی $n \in \mathbb{Z}^k$ ، $A \in C(X)$ وجود داشته باشد به طوری که $diam(\varphi(n, A)) > c$.

به راحتی می توان دید که هر سیستم انبساطی، یک سیستم انبساطی پیوستار است؛ اما عکس آن برقرار نیست [۱۲].

قضیه ۴۹.۵. فرض کنید $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ عمل پیوسته انبساطی باشد که با عمل پیوسته $\psi : \mathbb{Z}^{k-1} \times X \rightarrow X$ خاصیت جابجایی دارد. یعنی این که برای هر $g \in \mathbb{Z}^k$ ، $h \in \mathbb{Z}^{k-1}$ و هر $x \in X$ ، $\varphi(g, \psi(h, x)) = \psi(h, \varphi(g, x))$. در این صورت $mdim(X, \psi) < \infty$.

□

اثبات. به [۴] مراجعه شود.

اگر $k = 1$ ، عمل $\psi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ یک عمل بدیهی است و بعد متوسط سیستم $\psi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ همان بعد توپولوژیکی X خواهد بود. بنا بر قضیه اصلی خواهیم داشت:

به کمک تکنیک های به کار گرفته شده در قضیه (۴۹.۵)، می توان نتایج این قضیه به حالت سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار توسیع دهیم. در واقع قضیه اصلی مقاله ارائه شده به صورت زیر می باشد:

قضیه اصلی. فرض کنید $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ عمل پیوسته انبساطی پیوستار باشد که با عمل پیوسته $\psi : \mathbb{Z}^{k-1} \times X \rightarrow X$ خاصیت جابجایی دارد. یعنی این که برای هر $g \in \mathbb{Z}^k$ ، $h \in \mathbb{Z}^{k-1}$ و هر $x \in X$ ، $\varphi(g, \psi(h, x)) = \psi(h, \varphi(g, x))$. در این صورت $mdim(X, \psi) < \infty$.

نتیجه ۵۰.۵. اگر $f : X \rightarrow X$ یک همسانریختی انبساطی پیوستار باشد، آنگاه $dim(X) < \infty$.

لازم به ذکر است که این نتیجه، قضیه ۵.۲ در [۱۲] می باشد. اگرچه بنا به نتیجه ۵۰.۵، سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار از گروه $\mathbb{Z}$ روی فضای متریک فشرده (X, d) ایجاب می کند که $dim(X) < \infty$ ، در حالی که $k \neq 1$ ممکن است که $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم انبساطی پیوستار باشد اما $dim(X) = \infty$. برای این منظور فرض می کنیم که $K^\tau = S^1 \times S^1$ چنبره دو بعدی باشد و $A : K^\tau \rightarrow K^\tau$ همسانریختی توصیف شده توسط ماتریس $[A] = [a_{ij}]$ باشد که $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ و $\det([A]) = 1$ و دارای مقادیر ویژه از اندازه ۱ نباشد. بنا بر [۵]، $A : K^\tau \rightarrow K^\tau$ یک همسانریختی انبساطی است. فرض کنیم

$$X = (K^\tau)^\mathbb{Z} = \{ \{x_i\} \mid x_i \in K^\tau \}.$$

برای هر دو نقطه در X مانند $x = (x_i)$ و $y = (y_i)$ ، متریک

$$\tilde{d}(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}}$$

روی X در نظر می گیریم و در همسانریختی $f : X \rightarrow X$ و $\sigma : X \rightarrow X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x)_i = A(x_i),$$

$$\sigma(x)_i = x_{i+1}.$$

بنا به قضیه ۴.۲ در [۵]، سیستم دینامیکی $\varphi : \mathbb{Z}^\tau \times X \rightarrow X$ تولید شده بوسیله f و σ انبساطی می باشد. بنابراین $\varphi : \mathbb{Z}^\tau \times X \rightarrow X$ انبساطی پیوستار بوده؛ در حالی که $dim(X) = \infty$.

مراجع

- [1] M. Coornaert, Topological dimension and dynamical systems, *Universitext. Springer. Cham*, 2015.
- [2] H. Kato, Continuum-wise expansive homeomorphisms, *Can. J. Math.* 45(3) (1993), 576–598.
- [3] R. Marie, Expansive homeomorphisms and topological dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), 313–319.
- [4] T. Meyerovitch and M. Tsukamoto, Expansive multiparameter actions and mean dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.* 371(10) (2019), 7275–7299.
- [5] Shi, En Hui; Zhou, Li Zhen, The nonexistence of expansive $\mathbb{Z}^d$ actions on graphs, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 21 (6) (2005), 1509–1514.
- [6] W. R. Utz, Unstable homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (1950), 769–774.



۸.۵ اندازه مطلقاً پیوسته برای نگاشت های نعل اسبی تعمیم یافته

مریم خلیج^۱

^۱دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

در این مقاله، ابتدا وجود اندازه SRB برای نگاشت های نعل اسبی تعمیم یافته بررسی می شود. سپس، ثابت می شود که تحت دو شرط تقاطع و فربهی، این اندازه نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته است.

واژه های کلیدی: نگاشت نعل اسبی تعمیم یافته، تقاطع، فربهی، اندازه مطلقاً پیوسته.
طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 37CX, 37DX.
کد مقاله: cdsgt3-۰۰۷۹۰۰۲۲

آسخنران. آدرس ایمیل: maryamkhalaj1991@gmail.com

مقدمه

در دهه ۹۰، شرط تقاطع برای محاسبه بعد هاوسدورف مجموعه های خودمتشابه و وجود اندازه های مطلقاً پیوسته معرفی شد. به طور تقریبی، دو خانواده $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ از خم های $\mathbb{R}^2$ را متقاطع گوئیم هرگاه تقریباً هر زوج (f, g) ، $f \in \mathcal{F}$ و $g \in \mathcal{G}$ ، با شبیه یکنواخت یکدیگر را قطع کنند. تحت شرط تقاطع، پولیکات و سیمون بعد هاوسدورف مجموعه های

$$\Lambda(\lambda) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} i_k \lambda^{i_k} : i_k = 0, 1, 2 \right\}$$

را برای تقریباً هر $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ محاسبه کردند [۳]. سولومیاک نیز نشان داد که تحت شرط تقاطع، اندازه لبگ مجموعه $\Lambda(\lambda)$ برای تقریباً هر $\lambda > 1/3$ ، مثبت است [۵]. اولین مثال کلاسیک در بعد بالاتر، تابع $T: [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$ با ضابطه

$$B_{\lambda}(x, y) = \begin{cases} (2x - 1, \lambda y + 1 - \lambda) & x \geq 0 \\ (2x + 1, \lambda y - 1 + \lambda) & x < 0 \end{cases}$$

است. تحت شرط تقاطع، نگاشت B_{λ} برای تقریباً هر $\lambda \in (\frac{1}{4}, 1]$ دارای یک اندازه ارگودیک مطلقاً پیوسته است [۵]. با تعمیم این نگاشت، سوچی نشان داد که اندازه SRB برای هر جاذب سیمولهای متقاطع نگاشت $T: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ با ضابطه

$$T(x, y) = (\ell x, \lambda y + f(x))$$

برای $\ell \lambda > 1$ و $0 < \lambda < 1$, $\ell \in \mathbb{N}$, $f \in C^1(S^1, \mathbb{R})$ برای ثابت کرد که اندازه SRB برای نگاشت تعمیم یافته $T: S^1 \times \mathbb{R}^d \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^d$ با ضابطه

$$T(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

مطلقاً پیوسته است، جایی که f یک نگاشت گسترشی k به 1 و g یک انقباض است [۴]. در این مقاله، کلاسی از سیستم های دینامیکی تحت عنوان نگاشت های نعل اسبی تعمیم یافته مورد مطالعه قرار گرفته است. این نگاشت ها اولین بار توسط جیکوبسن و نیوهاوس برای شناسایی اندازه SRB در کلی ترین حالت، معرفی شد [۲]. نگاشت نعل اسبی تعمیم یافته، نگاشتی قطعه ای هذلولی است که روی خانواده های شمارا از نوارهای عمودی تعریف می شود. در ادامه، تعریف دقیق تری از این نگاشت آورده شده است. گردایه $\{S_1, S_2, \dots\}$ از زیرمجموعه های بسته $S = [0, 1]^2$ را در نظر بگیرید به طوری که S را تا حد یک مجموعه از اندازه صفر پوشش دهد و برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $(S_i) \cap (S_j) = \emptyset$. مرزهای بالا و پایین هر S_i ، دو زیربازه از پاره خط های $\{(x, y) : y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$ و $\{(x, y) : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ و مرزهای چپ و راست آن نمودار توابع هموار $x^{(i)}(y)$ است که برای عدد حقیقی $0 < \alpha < 1$ داریم $|dx^{(i)}/dy| \leq \alpha$. فرض کنید F_i یک وابریختی C^1 و U_i تصویر S_i تحت F_i باشد به طوری که مرزهای چپ و راست آن دو زیربازه از پاره خط های $\{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ و $\{(x, y) : x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$ و مرزهای بالا و پایین آن نمودار توابع هموار $Y^{(i)}(X)$ است که $|dY^{(i)}/dX| \leq \alpha$ در تعریف فوق، قرار دهید $\{v_1, v_2\} : |v_1| \leq \alpha |v_2|$ و $C_\alpha^s = \{(v_1, v_2) : |v_2| \leq \alpha |v_1|\}$ که $C_\alpha^u = \{(v_1, v_2) : |v_2| \leq \alpha |v_1|\}$ فرض کنید $K > 1$ وجود دارد به طوری که نگاشت F با ضابطه $F|_{(S_i)} = F_i$ در شرایط هذلولی زیر صدق می کند:

$$DF^{-1}(C_\alpha^s) \subseteq C_\alpha^s \text{ و } DF(C_\alpha^u) \subseteq C_\alpha^u.$$

$$|DF^{-1}(v)| \geq K \cdot |v| \text{ و } |DF(v)| \geq K \cdot |v| \text{ برای } v \in C_\alpha^s \text{ و } v \in C_\alpha^u.$$

به نگاشت F نگاشت نعل اسبی تعمیم یافته گفته می شود. بنا به [۱، گزاره ۱] نگاشت F دارای یک اندازه SRB است که آن را با μ_F نشان می دهیم.

نتایج اصلی

نتیجه اصلی این مقاله در قضیه زیر آورده شده است. برای تعریف دقیق فربهی و شرط تقاطع می توانید به [۱، تعریف ۱] و [۲، تعریف ۱] رجوع کنید. توجه کنید که برخلاف حالت های کلاسیک، پیوستگی در نگاشت نعل اسبی تعمیم یافته حذف شده، خمیدگی مرز نوارها در تعریف این نگاشت ناصفر بوده و تعداد آن ها نامتناهی است.

قضیه ۵.۱.۵. تحت فربهی و شرط تقاطع، اندازه SRB برای هر نگاشت نعل اسبی تعمیم یافته نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته است.

شرح اثبات. فرض کنید p^s نگاشت تصویر در راستای منیفله های پایدار باشد و برای هر $x \in U_i p^s(S_i)$ قرار دهید $g(x) := p^s \circ F(x, 0)$. نگاشت g قطعه ای گسترشی و دارای یک اندازه احتمال مطلقاً پیوسته است که آن را با μ_g نشان می دهیم. اندازه های احتمال μ_x در راستای منیفله های پایدار وجود دارد به طوری که

$$F = \int \mu_x d\mu_g(x).$$

برای عدد مثبت r قرار دهید

$$\|\mu_x\|_r^1 = \int (\mu_x(B_r^s(z)))^1 dz$$

و

$$I(r) = r^{-1} \int \|\mu_x\|_r^1 dx$$

که در آن $B_r^s(z)$ گوی پایدار به شعاع r و مرکز z است. بنا به [۶، نتیجه ۵]، برای اثبات مطلقاً پیوستگی μ_F تنها کافی است نشان دهیم که $\liminf_{r \rightarrow 0} I(r) < \infty$. بدین منظور $I(r)$ را به صورت $\sum_{i=1}^\infty I_i(r)$ می نویسیم و به کمک خواص اعوجاج F ، فربهی و شرط تقاطع منیفله های ناپایدار نشان می دهیم که اعداد حقیقی مثبت M و ϵ وجود دارند به طوری که برای هر i داریم $I_i(r) \leq M^{i\epsilon}$. برای جزئیات بیشتر می توانید به [۱] مراجعه کنید.

مراجع

- [1] A. Fakhari and M. Khalaj, *Absolutely Continuous Invariant Measure for Generalized Horseshoe Maps*, preprint, (arXiv:2102.03737v2 [math.DS]).
- [2] M. Jakobson and S. Newhouse, *A Two Dimensional Version of the Folklore Theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., 171, 89-105, 1996.
- [3] M. Pollicott and K. Simon, *The Hausdorff Dimension of λ -Expansions with Deleted Digits*, Trans. Amer. Math. Soc., 347, 3, 967-983, 1995.
- [4] M. Rams, *Absolute continuity of the SBR measure for non-linear fat baker maps*, Nonlinearity, 16, 1649-1655, 2003.
- [5] B. Solomyak, *On the Random Series $\sum \pm \lambda^n$ (an Erdős Problem)*, Annals of Mathematics, Second Series, 142, 3, 611-625, 1995.
- [6] M. Tsujii, *Fat solenoidal attractors*, Nonlinearity, 14, 1011-1027, 2001.



۹.۵ متریک پذیری پل یگروه های توپولوژیکی

جواد جمالزاده ۱،*، مهرداد کهرازه ۲
۱،۲ گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

یکی از مهم ترین بخش‌ساختارهای توپولوژیکی، متریک پذیری می باشد که شرایطی را به وجود می آورد تا یک متر مانند یافت شود به طوریکه توپولوژی به دست آمده از این متر، با توپولوژی اولیه یکسان باشد. در این دست نوشته در پی آن هستیم d که پل یگروه های توپولوژیکی را متریک پذیر سازیم. این مهم را به کمک تعریف پیش‌نرم روی پل یگروه های توپولوژیکی انجام می دهیم و در نهایت قضیه اساسی متریک پذیری را روی پل یگروه های توپولوژیکی اثبات می کنیم.

واژه‌های کلیدی: متریک پذیری، پل یگروه توپولوژیکی، پیش نرم...
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 20N20, 22A30.
کد مقاله: cdsgt۳-۰۱۰۳۰۰۵۲

مقدمه

یکی از مهمترین موضوعات مطرح شده روی فضاهای توپولوژیک، بحث متریک‌پذیری و نرم روی آنها است و دلیل آن، خواص توپولوژیکی گسترده‌ی فضاهای متریک و نرم‌دار است، به‌خصوص در ساختارهای جبری توپولوژیک که نزدیکی خاصی با $\mathbb{R}$ و فضاهای برآمده از آن دارد. به‌عنوان مثال، در گروه‌های توپولوژیک به‌عنوان یک ساختار جبری توپولوژیک خواص بسیار نزدیک با فضاهای متریک و نرم‌دار مانند کاملاً منظم بودن، هاسدورف بودن و ... وجود دارد. از جهت متریک‌پذیری نیز یک قضیه‌ی شگفت‌انگیز به نام قضیه‌ی بیرخوف-کاکوتانی وجود دارد که بیان می‌کند، یک گروه توپولوژیک متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر شمارای نوع اول باشد [۲]. با توجه به اینکه پل یگروه‌های توپولوژیکی یک فضای توپولوژیکی می‌باشند، لذا در این مقاله برآن شده‌ایم که ساختار مشابه با قضیه‌ی بیرخوف-کاکوتانی را ارائه دهیم تا بتواند به کمک پیش‌نرم موارد مشابهی با گروه‌های توپولوژیک را ارائه نماید و ساختار پل یگروه‌های توپولوژیک را به فضاهای متریک نزدیک سازد. اکنون به تشریح ساختار ابرگروه توپولوژیک می‌پردازیم. فرض کنید H یک مجموعه‌ی ناتهی و $P^*(H)$ گردایه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های ناتهی H باشد. یک نگاشت

$$o : H \times H \rightarrow P^*(H)$$

را که دارای دو خاصیت زیر باشد ابرگروه می‌گویند: ۱) $ao(boc) = (aob)oc$ (۲) $\forall a, b, c \in H : aoH = Hoa$. $\forall a \in H$. که در آن برای هر $A, B \subseteq H$ تعریف می‌کنیم:

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} (a \circ b).$$

این ساختار اولین بار توسط مارتی [۱۴] در سال ۱۹۳۴ ارائه شده است. سپس در سال‌های متوالی توسط کوسکاس [۱۳]، کوسینی [۴، ۳]، دواز [۵، ۶] و جعفرآبادی [۱۱] مورد مطالعه و گسترش قرار گرفته است که کاربردهای زیادی در علوم محض و کاربردی در موضوعات هندسی، ابرگراف‌ها، شبکه‌ها، مجموعه‌های فازی، ترکیبیات، کدگذاری و هوش مصنوعی دارد ([۶] را ببینید). ساختارهای جبری همراه با توپولوژی نقش مهمی در ریاضیات دارند. اخیراً ریاضیدانان روی ابرساختارهای جبری، توپولوژی تعریف کرده‌اند. عامری [۱] و

هوشگوا [۱۰]، ابرگروه‌های $T_u - (T_l)$ توپولوژیکی را تعریف و بررسی کرده‌اند. حیدری [۹، ۸] این توپولوژی را روی ابرگروه‌ها قرارداد. حال در لم زیر یک توپولوژی روی $P^*(H)$ تعریف می‌کنیم.

لم ۵۲.۵. [۱۰] فرض کنید (H, T) فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه خانواده‌ی l شامل همه‌ی مجموعه‌های

$$S_v = \{U \in P^*(H) : U \subseteq V\}$$

و $V \in T$ یک پایه برای توپولوژی T_u روی $P^*(H)$ است.

پلی‌گروه‌ها کلاس خاصی از ابرگروه‌ها هستند که برای اولین بار توسط لولیدیس در سال ۱۹۸۱ معرفی شدند. $P = (P, o, e, {}^{-1})$ یک پلی‌گروه است که در آن $e \in P$ و ${}^{-1}$ عمل معکوس روی پلی‌گروه P و (P, o) یک نیم‌ابرگروه است که:

$$\forall x, y, z \in P : x \in yoz \Rightarrow y \in xoz^{-1}, z \in y^{-1}ox \quad (\forall x \in P : eox = xoe = x) \quad (1)$$

در هر پلی‌گروه احکام زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} e &\in xox^{-1} \cap x^{-1}ox, \\ e^{-1} &= e, \\ (x^{-1})^{-1} &= x, \\ (xoy)^{-1} &= y^{-1}ox^{-1}. \end{aligned}$$

پیش‌نرم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی

در این بخش می‌خواهیم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی پیش‌نرم تعریف کنیم که مقدمه‌ای است برای تعریف متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیکی.

تعریف ۵۳.۵. فرض کنید P یک پلی‌گروه بوده و N یک نگاشت روی P باشد، آنگاه یک نگاشت مانند $\tilde{N} : P^*(P) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\tilde{N}(A) = \sup \{N(a) : a \in A\}$ را یک پیش‌نرم روی P گوئیم هرگاه برای هر $A, B \subseteq H$

$$P\tilde{N}^1) \tilde{N}(e) = \bullet$$

$$P\tilde{N}^2) \tilde{N}(x) = \tilde{N}(x^{-1})$$

$$P\tilde{N}^3) \tilde{N}(AB) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$$

مثال ۵۴.۵. فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط $\mathbb{R}^2$ باشد. برای $p, q \in P$ که $p \neq q$ ، $\overline{pq}$ را مجموعه‌ی همه‌ی نقاط روی خط گذرا از p و q در نظر می‌گیریم، یعنی $\overline{pq} = rp + (1-r)q$ که $0 < r < 1$. شیء $I \notin P$ را انتخاب می‌کنیم. $P = (P \cup \{I\}, \circ, I, {}^{-1})$ را در نظر می‌گیریم که برای هر $x \in P \cup \{I\}$ و $x^{-1} = x$ و $x \circ I = I \circ x = x$ و برای $p, q \in P$

$$p \circ q = \begin{cases} \overline{pq} - \{p, q\} & p \neq q \\ \{P, I\} & p = q \end{cases}$$

لذا $P = (P \cup \{I\}, \circ, I, {}^{-1})$ یک پلی‌گروه است. اکنون

$$\tilde{N}(pq) = \sup \{N(x) : x \in \overline{pq} - \{p, q\}\}$$

را تعریف می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$1) \tilde{N}(I) = \bullet$$

$$2) \tilde{N}(x) = \tilde{N}(x^{-1})$$

$$3) \tilde{N}(pq) = \tilde{N}(rp + (1-r)q) = \tilde{N}(rp) + \tilde{N}((1-r)q) = r\tilde{N}(p) + (1-r)\tilde{N}(q) \leq \tilde{N}(p) + \tilde{N}(q)$$

و در نتیجه $\tilde{N}$ ، یک پیش نرم است.

گزاره ۵۵.۵. اگر $\tilde{N}$ یک پیش نرم روی P باشد، آنگاه برای هر $x \in P$ داریم: $\tilde{N}(x) \geq 0$.

گزاره ۵۶.۵. اگر $\tilde{N}$ یک پیش نرم روی پلی گروه P باشد، آنگاه برای هر $x, y \in P$ نامساوی زیر، برقرار است.

$$|\tilde{N}(x) - \tilde{N}(y)| \leq \tilde{N}(xy^{-1}).$$

گزاره ۵۷.۵. فرض کنید $\tilde{N}$ یک پیش نرم روی پلی گروه P بوده و α یک عدد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه برای هر $x \in P$ تابع $\alpha\tilde{N}$ روی P با ضابطه $(\alpha\tilde{N})(x) = \alpha(\tilde{N}(x))$ یک پیش نرم روی P است.

گزاره ۵۸.۵. برای هر پیش نرم $\tilde{N}$ روی پلی گروه P ، مجموعه ی

$$Z_{\tilde{N}} = \{x \in P : \tilde{N}(x) = 0\}$$

زیر پلی گروه P است.

گزاره ۵۹.۵. مجموع دو پیش نرم روی پلی گروه P ، یک پیش نرم روی P است.

لم ۶۰.۵. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار و کراندار و نامنفی روی پلی گروه P باشد، آنگاه تابع $\tilde{N}_f$ که

$$\tilde{N}_f(x) = \sup \{f(yx) - f(y) | y \in P\}$$

که

$$\tilde{f}(xy) = \sup \{f(t) : t \in xy\}$$

یک پیش نرم روی P است.

گزاره ۶۱.۵. پیش نرم $\tilde{N}$ روی پلی گروه توپولوژیکی P پیوسته است، اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه همسایگی U از e وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x \in U$ ، $\tilde{N}(x) \leq \epsilon$.

متریک پذیری پلی گروه های توپولوژیک

در این بخش می خواهیم در مورد متریک پذیری پلی گروه های توپولوژیک بحث کنیم. بدین منظور لم اساسی زیر را می آوریم.

لم ۶۲.۵. فرض کنید $\{U_n : n \in w\}$ یک دنباله از همسایگی های باز و متقارن e در پلی گروه توپولوژیکی P باشد. بطوریکه برای هر $U_{n+1} \subseteq U_n$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} \left\{A \in P^*(p) : \tilde{N}(A) < \frac{1}{4^n}\right\} &\subseteq U_n \\ &\subseteq \left\{A \in P^*(p) : \tilde{N}(A) < \frac{1}{4^n}\right\} \end{aligned}$$

بنابراین پیش نرم $\tilde{N}$ پیوسته است. علاوه بر این اگر مجموعه های U_n پایا باشد.

تعریف ۶۳.۵. فرض کنید $\tilde{N}$ یک پیش نرم روی پلی گروه P باشد. در این صورت

$$\left\{A \in P^*(P) : \tilde{N}(A) < 1\right\}$$

یک $\tilde{N}$ گوی واحد در P می نامیم و آن را با $B_{\tilde{N}}$ نمایش می دهیم. همچنین مجموعه ی $B_{\tilde{N}}(\epsilon) = \left\{A \in P^*(p) : \tilde{N}(A) < \epsilon\right\}$ که ϵ عددی مثبت است را $\tilde{N}$ -گوی به شعاع ϵ می نامیم.

قضیه ۶۴.۵. برای هر همسایگی باز U از e در پلی گروه توپولوژیکی P یک پیش نرم پیوسته مانند $\tilde{N}$ وجود دارد که گوی $B_{\tilde{N}}$ مشمول U است.

قضیه ۶۵.۵. (متریک پذیری) پلی گروه توپولوژیکی P ، متریک پذیر است، اگر و تنها اگر شمارای نوع اول باشد.

مراجع

- [1] R. Ameri, *Topological(transposition) hypergroups*, *Itah. Pure Apple. Math.* 13 (2003) 171-176.
- [2] A. V. Arhangel skii, M. G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structure*, *Atlantis Studies in Mathematics*, Vol. 1, Atlantis Press/World Scientific, Paris, 2008.
- [3] P. Corsini, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editor, Tricesimo, 1993.
- [4] P. Corsini, V. Leoreanu, *Application of Hyperstructures Theory*, *Advances in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, Dor-drecht, 2003.
- [5] B. Davvaz, *polygroup theory and related Systems*, *World Scientific Publishing Co. pte. Ltd.*, Hackensack, 2013.
- [6] B. Davvaz, V. Leorena-Fortea, *Hypering Theory and applications*, *International Academic Press*, Usb, 2007.
- [7] R. Engelking, *General Topology*, PWN-polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
- [8] D. Heidari, S.M.S Modarres, B. Davvaz, *Topological hypergroups in the sense of marty*, *Commun. Algebra* 42(2014) 4712-4721.
- [9] D. Heidari, B. Davvaz, S.M.S Modarres, *Topological polygroups*, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 35(2012) 335-343.
- [10] S. Hoskova-Mayerova, *Topological hypergroupoids*, *Comput. Math. Soc.* 22 (1981) 95-104.
- [11] H.M. Jafarabadi, N.H. Sarmin, M.R. Molaei, *Completely Simple and regular semi hypergroups*, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 35 (2012) 335-343.
- [12] J. Jamalzadeh, *Paratopological polygroups versus topological polygroups*, *Filomat* 32:8 (2018), 2755-2761.
- [13] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, *J. Math. Pures Appl.* 49:9 (1970) 155-192.
- [14] F. Marty, *Sur une generalizatiom de la notion de groupe*, *8th Congres Math. Scandinaves*, Stockholm, 1934.



۱۰.۵ مثلثی زیبا بین سیستم‌های دینامیکی، جبر و ترکیبیات

حسن ملکی^۱، الهام درویش علیمزادی^۲

^۱ دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

^۲ دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

در دهه‌های اخیر بین سیستم‌های مینیمال کانتور در شاخه سیستم‌های دینامیکی، گروه‌های بُعدی در شاخه جبر و دیاگرام‌های براتلی در شاخه ترکیبیات رابطه‌های دوسویه‌ای پدیدار شده که در نوع خود جذاب، کاربردی و زیباست. در این مقاله در نظر داریم با معرفی هر کدام از این مفاهیم، نمایی از ارتباط بین آنها را به نمایش گذاریم.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور، گروه‌های بُعدی، دیاگرام‌های براتلی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 37B05, 05C63, 06F15.
کد مقاله: cdsgrt3-۰۰۹۶۰۰۳۸

آسخران. آدرس ایمیل: hmaleki@malayeru.ac.ir

مقدمه

در ریاضیات، سیستم‌های دینامیکی به طور وسیعی با نگاشت‌های یک فضا سر و کار دارند. فضاهای مورد بحث معمولاً دارای نوعی ساختار هندسی یا اندازه‌پذیر هستند. در بیشتر موارد، ما خود را به نگاشت‌های یک فضا که پیوسته و معکوس‌پذیر باشند، محدود می‌کنیم. بهترین ویژگی این نگاشت‌ها این است که خودشان و معکوس‌شان، می‌توانند تکرار شوند. چنین سیستم‌هایی طیف وسیعی از پدیده‌های مختلف را به نمایش می‌گذارند. متداول است که توجه و بررسی خود را به یک کلاس با ویژگی‌های خاص معطوف کنیم. ما دو محدودیت خاص خواهیم داشت. اول این که سیستم ما معمولاً مینیمال است؛ یعنی اگر نگاشت $\varphi: X \rightarrow X$ را در نظر بگیریم، آنگاه برای هر $x \in X$ ، مدار x که به صورت $O(x) = \{\varphi^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ تعریف می‌شود، در X چگال است. به صورت شهودی، این نشان می‌دهد که سیستم دارای پیچیدگی خاصی است: هر نقطه تحت تکرار نگاشت φ به هر زیرمجموعه باز فضا منتقل می‌شود. این معادل است با این که هیچ زیرمجموعه نا تهی سره فشرده از X وجود ندارد که تحت φ به خودش نگاشته شود. مطالعه دینامیک این فضاها با تجزیه آنها به قسمت‌های کوچکتر غیرممکن است. به عبارت دیگر، سیستم قابل تقلیل نمی‌باشد. دومین محدودیتی که ما روی سیستم اعمال می‌کنیم این است که فضای حالت X ، کلاً ناهمبند باشد؛ به این معنی که تنها زیر مجموعه‌های نا تهی و همبند این فضا، تک نقطه‌ای‌ها هستند. برخی از مفاهیم سیستم‌های دینامیکی همچون هم‌ارز مداری در حیطه فضاهای توپولوژیک همبند، خیلی جالب و کارآمد نیست. مجموعه‌های کانتور که فشرده، کلاً ناهمبند و بدون نقطه تنها هستند، جایگزین مناسبی برای این فضاها به حساب می‌آیند. این مجموعه‌ها ممکن است کمی غیرطبیعی به نظر بیایند اما دارای یک خاصیت عمومی جالب هستند. هر فضای متریک فشرده، تصویر پیوسته یک فضای کانتور است [۴]. سیستم‌های مینیمال روی فضاهای کانتور، در حالی که به خودی خود، خاص و جذاب هستند، دارای یک خاصیت عمومی و جهانی در بین سیستم‌های دیگر نیز می‌باشند. یک نتیجه مهم درباره این فضاها قضیه جویت-کریگر^{۱۷} است که بیان می‌کند هر سیستم اندازه‌پذیری که تقلیل‌ناپذیر باشد، را می‌توان با یک سیستم مینیمال روی یک مجموعه کانتور مدل‌سازی کرد [۴]. بنابراین مطالعه

^{۱۷}Jewett-Krieger

سیستم‌های مینیمال روی فضاهای کانتور در نظریه سیستم‌های دینامیکی گسسته از جایگاه مهمی برخوردار است. یک خاصیت مهم دیگر این فضاها این است که آن‌ها دارای ساختاری هستند که تا حد زیادی ترکیباتی است. مهم‌تر از همه، این نوع سیستم‌های دینامیکی را به طور طبیعی می‌توان از جانشانی‌ها، زیرانتقال‌ها و دیگر ساختارهای نمادین یا ترکیباتی به دست آورد. مطالعه سیستم‌های مینیمال روی مجموعه‌های کانتور طی سه دهه گذشته پیشرفت چشمگیری داشته است. نقطه شروع، کارهای آناتولی ورشیک^{۱۸} بوده است [۲]. از سوی دیگر، ارتباطی دو سویه بین سیستم‌های مینیمال کانتور و نوع خاصی از گروه‌ها به نام «گروه‌های بُعدی»^{۱۹} وجود دارد. گروه‌های بُعدی بر اساس مفهوم گروه‌های آبلی مرتب تعریف می‌شوند. گروه‌های بُعدی که توسط الیوت^{۲۰} در سال ۱۹۷۶ معرفی شدند برای کلاس بندی AF -جبرها به کار گرفته می‌شوند [۴]. کلمه «بُعد» در مفهوم گروه‌های بُعدی به ارتباط این گروه‌ها با ابعاد برخی از جبرها اشاره دارد. این جبرها خودشان به عنوان کلاسی از C^* -جبرها، حدهای مستقیم جبرهای با بُعد متناهی هستند که برای اولین بار، توسط براتلی^{۲۱} در سال ۱۹۷۲ معرفی شدند [۳]. این جبرها از نوع خاصی از گراف‌ها ساخته می‌شوند که به آنها «دیاگرام براتلی» می‌گویند. ارتباط بین گروه‌های بُعدی و نظریه سیستم‌های دینامیکی توسط ورشیک^{۲۲} در سال ۱۹۸۲ برقرار شد [۲]. او یک ترتیب روی مسیرهای دیاگرام براتلی به کار گرفت تا روی همه مسیرهای متناهی دیاگرام یک سیستم دینامیکی توپولوژیک تعریف کند. سپس نشان داده شد که هر سیستم دینامیکی مینیمال روی یک فضای کانتور با چنین سیستمی یکرخت است و در نتیجه به هر سیستم کانتور مینیمال یک گروه بُعدی نسبت داده شد [۴]. کارهای بعدی نشان داد که این گروه، با ساختار مداری یک سیستم دینامیکی مینیمال کانتور مرتبط است [۲]. از سوی دیگر، بین دیاگرام‌های براتلی که نوعی خاص از گراف‌ها هستند و سیستم‌های مینیمال کانتور نیز ارتباط تنگاتنگ و مهمی وجود دارد که مطالعه هر یک از این مفاهیم را دقیق‌تر و عمیق‌تر می‌کند.

تعاریف

سیستم‌های مینیمال کانتور

تعریف ۶.۵. فرض کنید (X, T) که $T : X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته است، یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد. زیرمجموعه $Y \subseteq X$ را پایدار گویند هرگاه $TY \subseteq Y$ باشد. سیستم دینامیکی توپولوژیک (X, T) را مینیمال گویند هرگاه X تنها زیرمجموعه ناتهی، بسته و پایدار X باشد.

می‌توان نشان داد سیستم دینامیکی توپولوژیک (X, T) مینیمال است اگر و تنها اگر مدار مثبت هر عضو در X چگال باشد [۲]. به علاوه می‌توان دید هر فضای متریک فشرده‌ای تصویر پیوسته یک مجموعه کانتور است [۴]. فرض می‌کنیم (X, T) یک سیستم مینیمال روی فضای متریک فشرده X است. بنا بر قضیه فوق، یک نگاشت پیوسته و پوشا مانند $F : C \rightarrow X$ وجود دارد به طوری که C یک مجموعه کانتور است. حال قرار می‌دهیم:

$$K = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \in C, F(x_{n+1}) = T(F(x_n))\}$$

که $K \subseteq C^{\mathbb{Z}}$. مجموعه K و نگاشت انتقال $\sigma : K \rightarrow K$ را با ضابطه $\sigma(x) = y$ که در آن $y_n = x_{n+1}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت زیرفضای مینیمال (Z, σ) از (K, σ) وجود دارد به قسمی که $\psi \circ \sigma = T \circ \psi$. به عبارت بهتر برای هر سیستم مینیمال روی یک فضای متریک فشرده یک فاکتور مینیمال روی یک فضای کانتور وجود دارد. بنابر این $Z \subseteq K \subseteq C^{\mathbb{Z}}$ بسته و در نتیجه یک فضای کانتور است [۲].

گروه‌های مرتب

ساختارهای جبری مرتب به ویژه میدان‌های مرتب، گروه‌های مرتب و فضاهای برداری مرتب زمینه‌های شناخته شده و کلاسیکی هستند که هم به خاطر جذابیت‌های ذاتی و هم به خاطر کاربرد در شاخه‌های دیگر در ریاضیات بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. شروع داستان، تحت تأثیر مطالعات آنالیز تابعی توسط رایز در سال ۱۹۴۰ به معرفی فضاهای برداری مرتب انجامید. پس از آن به کمک برخی از همان تکنیک‌هایی که در آنجا مورد استفاده قرار گرفته بود، گروه‌های مرتب معرفی شدند [۳].

^{۱۸}Anatoly Vershik

^{۱۹}Dimension Groups

^{۲۰}Elliott

^{۲۱}Bratelli

^{۲۲}Vershik

تعریف ۶۷.۵. گروه آبلی $(G, +)$ همراه با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ را گروه مرتب گویند هرگاه عمل $+$ با رابطه $\leq$ سازگار باشد؛ به این معنی که برای هر $g, h, k \in G$ که $g \leq h$ داشته باشیم: $g + k \leq h + k$. در گروه مرتب G ، مخروط مثبت G مجموعه $G^+ = \{g \in G \mid g \geq 0\}$ تعریف می شود.

در یک گروه مرتب، می توان گفت $x \leq y$ اگر و تنها اگر $y - x \geq 0$. در یک گروه مرتب، نامساوی ها را با حفظ جهت می توان با یکدیگر جمع کرد. به عبارت بهتر اگر $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n \in G$ به گونه ای که به ازای هر i ، $x_i \leq y_i$ آنگاه $\sum x_i \leq \sum y_i$. به علاوه، می توان نتیجه گرفت که اگر $x \leq y$ آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $nx \leq ny$. همچنین اگر $x \leq y$ آنگاه $-x \geq -y$. یک گروه مرتب G را جهت دار گویند هرگاه برای هر $x, y \in G$ ، یک $z \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $x, y \leq z$. به عبارت دیگر، G جهت دار است اگر هر جفت از عناصر آن، یک کران بالای مشترک داشته باشند. می توان نشان داد گروه مرتب G جهت دار است اگر و تنها اگر توسط مخروط مثبتش تولید شده باشد، یعنی $G = G^+ - G^+$ [۳]. یک ایده آل ترتیب از گروه مرتب G زیرگروه جهت دار $J \subseteq G$ است به قسمی که اگر $x_1, x_2 \in J$ و $y \in G$ و $x_1 \leq y \leq x_2$ آنگاه $y \in J$. یک واحد ترتیب از گروه مرتب G ، یک عنصر مثبت u است، به طوری که به ازای هر $g \in G^+$ ، یک عدد صحیح $n > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که $nu \geq g$. گروه مرتب $\mathcal{G} = (G, G^+)$ را ساده گویند اگر دارای هیچ ایده آل ترتیب سره ناتهی نباشد. می توان نشان داد گروه مرتب جهت دار (G, G^+) ساده است اگر و تنها اگر هر عنصر غیرهمانی (نا صفر) از G^+ یک واحد ترتیب باشد [۳]. گروه مرتب (G, G^+) را بدون حفره گویند هرگاه برای هر $g \in G$ و $n > 0$ اگر $ng \in G^+$ آنگاه $g \in G^+$. در غیر این صورت، گروه دارای حفره است. در گروه مرتب بدون حفره (G, G^+) اگر برای $g, h \in G$ و $n > 0$ داشته باشیم $ng \geq nh$ آنگاه $g \geq h$. گروه مرتب G در خاصیت درونیابی راز صدق می کند اگر برای هر $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ به طوری که داشته باشیم $x_1 \leq y_1, y_2 \leq x_2$ و $x_1 \leq y_2$ ، یک $z \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $z \leq y_1, y_2 \leq z$ و $x_1, x_2 \leq z$. فرض کنید برای هر $n \geq 0$ ، گروه G_n یک گروه آبلی و نگاشت $i_{n+1, n} : G_n \rightarrow G_{n+1}$ یک همریختی باشد. مجموعه های

$$\Delta = \{(g_n)_{n \geq 0} \mid g_n \in G_n, g_{n+1} = i_{n+1, n}(g_n), \forall n \geq m, \forall m \geq 0\}$$

و

$$\Delta^+ = \{(g_n)_{n \geq 0} \in \Delta \mid g_n = 0, \forall n \geq m, \exists m \geq 0\}$$

زیرگروه هایی از حاصلضرب مستقیم $\prod_{n \geq 0} G_n$ هستند و $\Delta^+ \subset \Delta$. فرض کنید G گروه خارج قسمتی Δ/Δ^+ و $\pi : \Delta \rightarrow G$ تصویر طبیعی باشد. گروه G که با نماد $G = \lim_{\rightarrow} G_n$ نشان داده می شود را حد مستقیم از دنباله $(G_n)_{n \geq 0}$ با نگاشت های $i_{n+1, n}$ گویند. نگاشت های $i_{n+1, n}$ و در حالت کلی نگاشت های $i_{m+1, m} \circ \dots \circ i_{n+1, n}$ برای $n < m$ ، همریختی های اتصال دهنده نامیده می شوند. فرض کنید $\mathcal{G}_n = (G_n, G_n^+, 1_n)$ برای هر $n \geq 0$ ، یک گروه مرتب یکدار جهت دار و $i_{n+1, n} : G_n \rightarrow G_{n+1}$ یک همریختی از گروه های مرتب یکدار باشد. حال فرض کنید G حد مستقیم دنباله $(G_n)_{n \geq 0}$ و $G^+ = \pi(\Delta^+)$ که

$$\Delta^+ = \{(g_n)_{n \geq 0} \mid g_n \in G_n^+, \forall n \geq m, \exists m \geq 0\}$$

$$1_G = \pi(1_{G_n})_{n \geq 0}.$$

گزاره ۶۸.۵. [۱] سه تایی $\mathcal{G} = (G, G^+, 1)$ یک گروه مرتب یکدار جهت دار، هر $i_n : G_n \rightarrow \mathcal{G}$ یک همریختی از گروه های مرتب یکدار و $G^+ = \bigcup i_n(G_n^+)$ است.

تعریف ۶۹.۵. یک گروه بُعدی، حد مستقیم دنباله

$$\mathbb{Z}^{k_1} \xrightarrow{M_1} \mathbb{Z}^{k_2} \xrightarrow{M_2} \mathbb{Z}^{k_3} \dots$$

از گروه های $\mathbb{Z}^{k_i}$ با $k_i \geq 1$ مرتب شده با ترتیب معمولی و با واحد ترتیب $(1, \dots, 1)$ ، همراه با همریختی های تعریف شده توسط ماتریس های نامنفی M_i است.

گروه کوهمولوژی مرتب یک سیستم دینامیکی

فرض کنید (X, T) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک روی یک فضای متریک فشرده و T یک نگاشت پیوسته باشد. در این صورت $C(X, \mathbb{R})$ را گروهی از همه نگاشت های حقیقی مقدار پیوسته روی X و $C(X, \mathbb{Z})$ را زیرگروهی از همه نگاشت های مقدار صحیح پیوسته روی X تعریف می کنیم. اگر X یک فضای توپولوژیک همبند باشد، برای هر $f \in C(X, \mathbb{Z})$ ، $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$ نیز همبند است و از آنجا که تنها مؤلفه های همبندی $\mathbb{Z}$ تک نقطه ای ها هستند، بنابراین f نیز نگاشت ثابت می شود و در نتیجه $C(X, \mathbb{Z})$ تنها شامل

نگاشت های ثابت است. اما زمانی که X یک فضای فشرده و کلاً ناهمبند است، ساختار $C(X, \mathbb{Z})$ متفاوت و درخور توجه خواهد بود. برای هر $f \in C(X, \mathbb{R})$ ، هم کران f را به عنوان نگاشت $\partial_T : C(X, \mathbb{R}) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ با ضابطه $\partial_T(f) = f \circ T - f$ در نظر می گیریم. در اینصورت، نگاشت $f \in C(X, \mathbb{R})$ را نگاشت هم کران گویند اگر یک نگاشت $g \in C(X, \mathbb{R})$ وجود داشته باشد به قسمی که $f = \partial_T(g)$. فرض کنید (X, T) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد. از آن جا که نگاشت هم کران روی $C(X, \mathbb{Z})$ ، یک هم ریختی گروهی است، تصویر $\partial_T C(X, \mathbb{Z})$ یک زیر گروه است. بنابراین، ما گروه خارج قسمتی $C(X, \mathbb{Z}) / \partial_T C(X, \mathbb{Z})$ را با نماد $H(X, T, \mathbb{Z})$ نمایش می دهیم. سپس، تصویر $C(X, \mathbb{Z}_+)$ را با $H^+(X, T, \mathbb{Z}_+)$ نشان می دهیم. در نهایت، سه تایی

$$K^*(X, T) = (H(X, T, \mathbb{Z}), H^+(X, T, \mathbb{Z}_+), \iota_X),$$

را نمایش می دهیم و به آن گروه کوهمولوژی مرتب سیستم دینامیکی (X, T) گوئیم که در آن ι_X ، تصویر یک نگاشت ثابت با مقدار ۱ روی X در $H(X, T, \mathbb{Z})$ است.

دیاگرام های براتلی

اکنون مفهوم دیاگرام براتلی را معرفی می کنیم. اگرچه این دیاگرام نامتناهی است، اما یک شیء کاملاً ترکیباتی است. این دیاگرام یک نوع گراف نامتناهی است. این گراف که آن را با نماد (V, E) نشان می دهیم، از یک دنباله از مجموعه های رئوس $V_0, V_1, V_2, \dots$ که همگی نا تهی و دو به دو مجزا هستند و هر V_i دارای تعداد متناهی رأس است، تشکیل شده است. ما فرض می کنیم که V تنها یک رأس دارد که آن را با نماد v نشان می دهیم. همچنین این گراف یک دنباله از مجموعه های یال های $E_1, E_2, \dots$ تشکیل شده است که همگی نا تهی و دو به دو مجزا هستند و هر E_i دارای تعداد متناهی یال است. هر یال از مجموعه E_n از یک رأس در V_{n-1} به رأسی در V_n می رود. به این صورت می توان یک جهت روی یال ها در نظر گرفت. در هر دیاگرام براتلی برای هر $n \geq 1$ دو نگاشت $r : E_n \rightarrow V_n$ و $s : E_n \rightarrow V_{n-1}$ وجود دارد که برای هر $v \in \bigcup_{n \geq 1} V_n$ داریم $s^{-1}\{v\} \neq \emptyset$ و برای هر $v \in \bigcup_{n \geq 1} V_n$ داریم $r^{-1}\{v\} \neq \emptyset$. به ترتیب آن ها را نگاشت مبدأ و نگاشت برد یا مقصد می نامیم. حال فرض کنید

$$X_E = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in E_n, r(x_n) = s(x_{n+1}), n \geq 1\}.$$

متر $d : X_E \times X_E \rightarrow [0, \infty)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x, y) = \inf\{2^{-n} \mid n \geq 1, (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)\}.$$

می توان نشان داد که (X_E, d) یک فضای متریک فشرده کانتور است که روی آن یک نگاشت مینیمال وجود دارد [۱].

نتایج اصلی

قضیه مهم زیر، که به قضیه افرس - هندلمن - شن معروف است، گروه های بُعدی را در میان گروه های مرتب شمارا مشخص می کند.

قضیه ۷۰.۵. [۲] یک گروه مرتب شمارا، گروه بُعدی است اگر و تنها اگر یک گروه مرتب یکدار راین جهت دار بدون حفره باشد.

قضیه زیر برای هر سیستم مینیمال کانتور یک گروه مرتب یکدار جهت دار ساده بدون حفره معرفی می کند:

قضیه ۷۱.۵. [۱] برای هر سیستم کانتور مینیمال (X, T) ، یک گروه مرتب یکدار جهت دار ساده بدون حفره است.

قضیه ۷۲.۵. [۲] اگر سیستم های دینامیکی (X, T) و (X', T') به صورت توپولوژیک مزدوج باشند آنگاه گروه های وابسته $H(X, T, \mathbb{Z})$ و $H(X', T', \mathbb{Z})$ یکریخت هستند.

قضیه زیر متناظر با هر سیستم مینیمال کانتور یک دیاگرام براتلی مشخص می کند:

قضیه ۷۳.۵. [۲] فرض کنید (X, φ) یک سیستم مینیمال کانتور است. آنگاه یک دیاگرام براتلی مرتب ساده $(V, E, \geq)$ و یک همسان ریختی $h : X_E \rightarrow X$ وجود دارد به قسمی که $h \circ \varphi_E = \varphi \circ h$ و $h(x_{\max}) = y$.

مراجع

- [1] Durand, F., Perrin, D.: *Dimension groups and dynamical systems*. arXiv:2007.15721 (2020).
- [2] Durand, F., Perrin, D.: *Dimension Groups and Dynamical Systems, Substitutions, Bratteli Diagrams and Cantor Systems*, Cambridge University Press, (2020). (preprint)
- [3] Goodearl, K.R.: *Partially Ordered Abelian Groups with Interpolation*, Math. Surveys and Monographs No. 20, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1986).
- [4] Ian, F., Putnam.: *Cantor Minimal Systems*. Amer. Math. Society, (2018).



۱۱.۵ کاربرد موجک های لژاندر در حل عددی برخی معادلات انتگرالی از نوع اول

محسن ریاحی بنی

مجتمع آموزش عالی سراوان، سراوان، ایران

در این مقاله، یک فرمول بندی ماتریسی برای حل عددی معادلات انتگرالی غیرخطی نوع اول با استفاده از موجک های لژاندر ساخته شده است. با بکارگیری موجک های لژاندر، معادله انتگرال به یک سیستم از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می شود. در نهایت سیستم جبری حاصل را حل کرده و جوابی تحلیلی-تقریبی برای معادله انتگرال بدست خواهیم آورد. برای توضیح اثربخشی و اعتبار روش مورد بحث، مثالی عددی ارائه شده است و نتایج حاصل شده با یک روش معروف دیگر مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می دهد که این روش بسیار مؤثر و دقیق است.

واژه های کلیدی: موجک های لژاندر، معادلات انتگرال نوع اول، روش هم محلی، روش ماتریسی..
طبقه بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 45G10, 65T60, 65N35
کد مقاله: cdsgrt3-00390001

مقدمه

در طول چند دهه گذشته، حل تحلیلی معادلات تابعی با علاقه مندی زیادی توسط دانشمندان حوزه ریاضیات و مهندسی مواجه شده است. از اینرو، آثار زیادی در این ارتباط وجود دارد. همانگونه که می دانیم بسیاری از مدل های واقعی در ریاضیات، زیست شناسی و ... منجر به تشکیل یک معادله انتگرال یا یک سیستم از معادلات انتگرال می شوند. از آنجایی که یافتن راه حل های تحلیلی برای این معادلات دشوار است، بنابراین، برای غلبه بر این مشکل چندین روش عددی توسعه یافته اند. بکارگیری ایده روش های طیفی برای حل معادلات مختلف در طیف وسیعی از مدل های ریاضیات و مهندسی دیده می شود. روش های هم محلی، تاو و گالرکین از انواع خاصی از روش های طیفی هستند که به طور چشم گیری بکار گرفته شده اند [۲، ۴، ۶]. همانطور که گفته شد، در روش های طیفی از پایه های مختلفی در حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال استفاده می شود. پایه های متعامد به دلیل محاسبات کمتر و سهولت در بکارگیری، بیشتر مورد توجه هستند. اخیراً چندین تابع پایه ای از چند جمله ای های مختلف برای حل معادلات توسط نویسندگان معرفی و مورد استفاده قرار گرفته است. به طور مثال الکووت و همکاران [۳] یک روش جدید طیفی لژاندر را برای حل معادلات انتگرال غیرخطی چند بعدی از نوع ولترا-فرد هولم ارائه کردند. امیری و همکاران [۱] یک روش هم محلی طیفی بر اساس توابع پایه مثلثاتی تکه ای برای معادلات انتگرال غیرخطی ولترا-فرد هولم پیشنهاد کردند. از جمله پایه ها و روش های دیگر می توان به چند جمله ای های چیبیشف، چند جمله ای های برنولی، چند جمله ای های لژاندر هیبریدی و توابع بلاک پالس (Block-Pulse) و ترکیب آن ها اشاره نمود. بسیاری از مسایل در علوم و مهندسی منجر به حل یک معادله انتگرال از نوع اول به فرم

$$\int_a^x k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (63)$$

یا

$$\int_a^b k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (64)$$

می شوند که در آن $k(x, \xi)$ و $g(x)$ توابعی معلوم، F پیوسته و معکوس پذیر و $u(x)$ تابعی نامعلوم است که باید تعیین شود. در این مقاله از روش هم محلی به همراه پایه های موجک لژاندر برای یافتن پاسخ استفاده می نماییم. مدل ریاضی بسیاری از پدیده های فیزیکی منجر به تولید یک معادله تابعی مانند معادلات انتگرال ولترا-فرد هولم از نوع اول می شوند. روش های طیفی یکی از رایج ترین و قدرتمندترین روش ها در آنالیز عددی است. ماتریس های عملیاتی در خلال روش های طیفی برای حل چنین معادلاتی کاربردی وسیع دارند. به منظور حل معادلات (۶۳) یا (۶۴) ابتدا معادلات بر اساس پایه های موجک لژاندر تبدیل به یک معادله ماتریسی خواهند شد و سپس معادله جبری حاصل را حل خواهیم نمود.

موجک های لژاندر

تعریف ۷۴.۵. چند جمله ای های لژاندر $L_m(x)$ از درجه m در بازه $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ متعامد هستند و از فرمول بازگشتی زیر قابل محاسبه می باشند:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1}xL_m(x) - \frac{m}{m+1}L_{m-1}(x).$$

تعریف ۷۵.۵. موجک های لژاندر $\psi_{n,m}(x)$ دارای چهار پارامتر هستند که بر بازه $I = [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} L_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (65)$$

جایی که $k \in \mathbb{Z}^+$ و m درجه چند جمله ای لژاندر است. همچنین $n = 0, 1, \dots, M-1$ و $\hat{n} = 2n-1$ ، ضریب $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ به منظور تعامد داده شده، $a = 2^{-k}$ و $b = \hat{n}2^{-k}$

تقریب تابع

تابع $u(x) \in L^2[0, 1]$ توسط رابطه

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \psi_{n,m}(x), \quad \simeq u_{M,k}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} \sum_{m=0}^{M-1} u_{n,m} \psi_{n,m}(x) = \mathbf{U}^T \Psi(x), \quad (66)$$

داده می شود که در آن $u_{n,m} = \langle u(x), \psi_{n,m}(x) \rangle$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی را نمایش می دهد. $\mathbf{U}$ و $\Psi(x)$ ماتریس هایی $2^{k-1}M \times 1$ هستند و با رابطه زیر داده می شوند

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,M-1}, u_{1,0}, \dots, u_{1,M-1}, \dots, u_{2^{k-1}-1,0}, \dots, u_{2^{k-1}-1,M-1}]^T \\ &= [u_0, u_1, \dots, u_{2^{k-1}M}]^T, \end{aligned} \quad (67)$$

و

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= [\psi_{0,0}(x), \dots, \psi_{0,M-1}(x), \dots, \psi_{2^{k-1}-1,0}(x), \dots, \psi_{2^{k-1}-1,M-1}(x)]^T \\ &= [\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{2^{k-1}M}(x)]^T. \end{aligned} \quad (68)$$

تابع $k(x, \xi)$ در $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ تعریف شده و توسط موجک های لژاندر دو بعدی قابل بسط به شکل $k(x, \xi) \simeq \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi)$ است که در آن $\mathbf{K}$ ماتریسی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ با مولفه های $K_{ij} = \langle \psi_i(x), k(x, \xi), \psi_j(\xi) \rangle$ است. فرض کنیم که $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$ باشد، می توان نشان داد که سری $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \psi_{n,m}(x)$ تعریف شده در رابطه (۶۶) به تابع $u(x)$ همگرا است.

نمایش ماتریسی انتگرال به کمک موجک های لژاندر

نمایش ماتریسی انتگرال گیری از توابع لژاندر به شکل $\int_0^x \Psi(\xi) d\xi = \mathbf{V} \Psi(x)$ داده می شود که در آن $\mathbf{V}$ ماتریسی عملیاتی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ بعدی برای انتگرال است. اگر $\mathbf{P}$ ماتریسی $M \times M$ با مولفه های $[p]_{i,j} = 2^{1-k}$ برای $i = j = 1$ و $[p]_{i,j} = 0$ برای سایر نقاط باشد، آنگاه $\mathbf{V}$ و $\mathbf{Q}$ توسط روابط زیر قابل محاسبه می باشند

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{P} & \mathbf{P} & \cdots & \mathbf{P} \\ \cdot & \mathbf{Q} & \mathbf{P} & \cdots & \mathbf{P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} & \cdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} & \frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} \end{bmatrix}.$$

که در آن $\mathbf{Q}$ ماتریسی $M \times M$ است. انتگرال گیری از حاصل ضرب دو تابع برداری موجک لژاندر بوسیله رابطه $\int_0^1 \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) d\xi = \mathbf{I}$ قابل محاسبه است، جایی که $\mathbf{I}$ ماتریس واحد $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است. بعلاوه

$$\Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{U} \simeq \tilde{\mathbf{U}}^T \Psi(\xi), \quad (69)$$

که در آن $\mathbf{U}$ توسط رابطه (۶۷) داده شده و $\tilde{\mathbf{U}}$ ماتریسی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است.

روش حل معادلات انتگرال غیرخطی نوع اول

معادلات انتگرال غیرخطی فردهولم از نوع اول

معادله انتگرال غیرخطی فردهولم زیر را در نظر می گیریم

$$\int_0^1 k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad g(x) \in L^1[0, 1], \quad k \in (L^1[0, 1] \times [0, 1]), \quad (70)$$

جایی که g و F توابعی هموار و همچنین F تابعی غیرخطی معکوس پذیر و u تابع مجهول است. در ابتدا با تغییر متغیر $F(u(\xi)) = y(\xi)$ معادله انتگرال غیرخطی فردهولم (۷۰) را به یک معادله خطی تبدیل می نماییم. بنابراین به معادله انتگرال خطی فردهولم نوع اول به شکل $\int_0^1 k(x, \xi) y(\xi) d\xi = g(x)$ خواهیم رسید. توابع y, k, g را می توان توسط روابط

$$g(x) \simeq \mathbf{G}^T \Psi(x), \quad k(x, \xi) \simeq \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi), \quad y(\xi) \simeq \mathbf{Y}^T \Psi(\xi). \quad (71)$$

تقریب زد و با جایگزینی این تقریب ها در معادله انتگرال خطی تغییر یافته خواهیم داشت:

$$\Psi^T(x) \mathbf{G} = \int_0^1 \Psi^T(x) \mathbf{K} \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{Y} d\xi = \Psi^T(x) \mathbf{K} \int_0^1 \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) \mathbf{Y} d\xi = \Psi^T(x) \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{Y}.$$

آنگاه جواب به صورت $\mathbf{Y} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}$ خواهد بود.

معادلات انتگرال غیرخطی ولترا از نوع اول

معادله انتگرال غیرخطی ولترا از نوع اول زیر را در نظر می گیریم

$$\int_0^x k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1. \quad (72)$$

با روشی مشابه با بخش ۷.۵، و با قرار دادن همان تغییر متغیر $F(u(\xi)) = y(\xi)$ در معادله (۷۲) به معادله انتگرال ولترای خطی به شکل $\int_0^x k(x, \xi)y(\xi)d\xi = g(x)$ دست خواهیم یافت. بکارگیری معادلات (۷۱) و (۶۹) نتیجه می دهند که

$$\begin{aligned}\Psi^T(x)\mathbf{G} &= \int_0^x \Psi^T(x)\mathbf{K}\Psi(\xi)\Psi^T(\xi)\mathbf{Y}d\xi = \Psi^T(x)\mathbf{K}\left(\int_0^x \Psi(\xi)\Psi^T(\xi)\mathbf{Y}d\xi\right) \\ &= \Psi^T(x)\mathbf{K}\left(\int_0^x \tilde{\mathbf{Y}}^T\Psi(\xi)d\xi\right) = \Psi^T(x)\mathbf{K}\tilde{\mathbf{Y}}^T\mathbf{V}\Psi(x),\end{aligned}$$

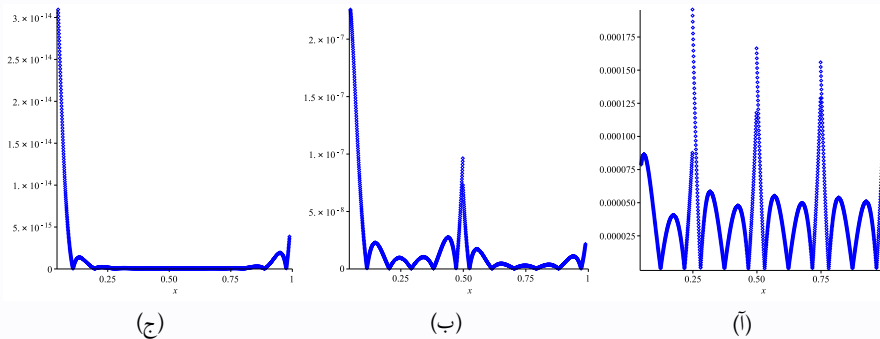
و جواب نهایی به شکل $\mathbf{G} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{Y}}^T\mathbf{V}\Psi(x)$ بدست خواهد آمد.

بررسی عددی

مثال ۷۶.۵. معادله انتگرال غیرخطی ولترا از نوع اول را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\int_0^x \sin((x-\xi)+1)\cos(u(\xi))d\xi = \left(\frac{1}{4}x+1\right)\sin x, \quad (73)$$

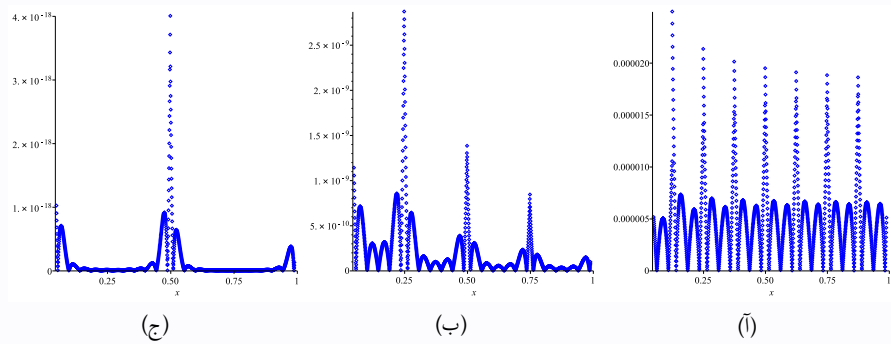
برای حل این معادله انتگرال فرض می کنیم که $\cos(u(\xi)) = y(\xi)$. بنابراین، با این تغییر جواب معادله به شکل $u(x) = \arccos(y(x))$ خواهد بود. شکل های ۶، ۷ و ۸ نتایج عددی حاصل شده توسط این روش را به ترتیب با $M^{2k-1} = 12$ ، $M^{2k-1} = 48$ و $M^{2k-1} = 24$ نمایش می دهند. همچنین این شکل ها نشان می دهند که افزایش مقدار M تاثیر بیشتری در سرعت و دقت روش نسبت به افزایش مقدار k دارد. در جدول ۲ بیشینه قدرمطلق خطاها که از روش موجک هار [۵] بدست آمده، نمایش داده شده است. جدول ۳ بیشینه قدر مطلق خطای $u(x)$ را برای مقادیر مختلف از M و k نشان می دهد. با مقایسه این دو جدول، می توان نتیجه گرفت که تقریب های حاصل شده از روش فعلی در مقایسه با روش موجک هار [۵] بهتر بوده و دارای دقت بیشتر و خطای کمتری است.



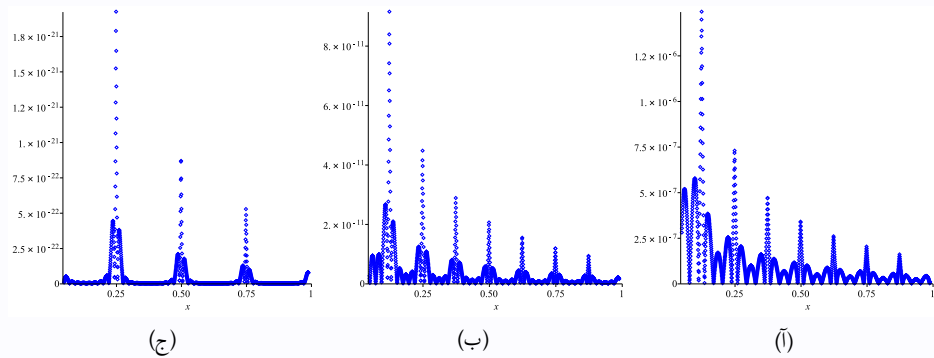
شکل ۶: مقایسه جواب های عددی با جواب دقیق زمانی که $M^{2k-1} = 12$ ، (ا) $M = 3$ ، $k = 3$ ، (ب) $M = 6$ ، $k = 2$ ، (ج) $M = 12$ ، $k = 1$.

جدول ۲: بیشینه قدر مطلق خطای بدست آمده از روش موجک هار [۵].

J	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$2M$	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴
مرجع [۵]	$1.2e-003$	$3.1e-004$	$8.0e-005$	$2.0e-005$	$5.0e-006$	$1.2e-006$	$3.1e-007$	$7.9e-008$



شکل ۷: مقایسه جواب‌های عددی با جواب دقیق زمانی که $M^{2k-1} = 24$, $(\tilde{I}), k = 4, M = 3$ (ب), $k = 3, M = 6$ (ج), $k = 2, M = 12$.



شکل ۸: مقایسه جواب‌های عددی با جواب دقیق زمانی که $M^{2k-1} = 48$, $(\tilde{I}), k = 5, M = 3$ (ب), $k = 4, M = 6$ (ج), $k = 3, M = 12$.

جدول ۳: مقایسه بیشینه قدر مطلق خطای بدست آمده برای $u(x)$.

M	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
k	۱	۳,۱e-۰۰۱	۵,۷e-۰۰۲	۳,۸e-۰۰۳	۴,۶e-۰۰۵	۶,۸e-۰۰۶	۱,۸e-۰۰۷	۱,۹e-۰۰۸	۴,۱e-۰۱۰	۳,۲e-۰۱۱
	۲	۱,۳e-۰۰۱	۱,۵e-۰۰۳	۱,۷e-۰۰۴	۲,۲e-۰۰۶	۲,۳e-۰۰۷	۱,۶e-۰۰۹	۹,۹e-۰۱۱	۶,۸e-۰۱۳	۱,۷e-۰۱۴
	۳	۲,۲e-۰۰۲	۱,۹e-۰۰۴	۱,۸e-۰۰۵	۷,۲e-۰۰۸	۲,۹e-۰۰۹	۱,۳e-۰۱۱	۳,۸e-۰۱۳	۱,۴e-۰۱۵	۳,۲e-۰۱۷
	۴	۱,۱e-۰۰۲	۲,۴e-۰۰۵	۱,۵e-۰۰۶	۲,۳e-۰۰۹	۹,۱e-۰۱۱	۱,۰e-۰۱۳	۳,۶e-۰۱۵	۲,۷e-۰۱۸	۶,۶e-۰۲۰

نتایج

ایده اساسی در این مقاله ساختن روشی برای حل عددی معادلات انتگرال نوع اول بر اساس موجک های لژاندر بود. ماتریس های عملیاتی برای قسمت های مختلف از مساله بیان گردید و ترکیب این ماتریس ها با روش گالرکین، معادله انتگرال را تبدیل به یک سیستم از معادلات جبری نمود. به منظور نشان دادن صحت و درستی روش، مثالی عددی بیان شد و پاسخ های حاصل شده با روش موجک ها را مقایسه شدند. نتایج حاصل شده کارایی و دقت روش ساخته شده را نشان دادند.

مراجع

- [1] S. Amiri, M. Hajipour, and D. Baleanu, A spectral collocation method with piecewise trigonometric basis functions for nonlinear volterra-fredholm integral equations, *Applied Mathematics and Computation* 370 (2020), 124-915.
- [2] S. Bazm, Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 275 (2015), 44-60.
- [3] N.A. Elkot, M.A. Zaky, E.H. Doha and I.G. Ameen, On the rate of convergence of the legendre spectral collocation method for multi-dimensional nonlinear volterra-fredholm integral equations, *Communications in Theoretical Physics*, 73 (2021), 025002.
- [4] E. Hesameddini and M. Riahi, Bernoulli galerkin matrix method and its convergence analysis for solving system of volterra-fredholm integro-differential equations, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43 (2019), 1203-1214.
- [5] I. Singh and S. Kumar, Haar wavelet method for some nonlinear Volterra integral equations of the first kind, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292 (2016), 541-552.
- [6] P. Sahu and S. Saha Ray, A New Bernoulli Wavelet Method for Numerical Solutions of Nonlinear Weakly Singular Volterra Integro-Differential Equations, *International Journal of Computational Methods*, 14 (2017), 1750022.

۶ نمایه نویسندگان

نمایه نویسندگان

ا

افچنگی زهره، ۴۶

ب

برزنونی علی، ۳۵، ۴۶

پ

پناهی محمد، ۱۴

ج

جمالزاده جواد، ۵۴

ح

حجار تکتم، ۳۵

خ

خلج مریم، ۵۱
خوارزمی امید، ۴۰

د

درویش علیمرادی الهام، ۵۸
دل‌بازنسب علی، ۲۰

ر

ریاحی بنی محسن، ۶۳

ز

زمانی زهره، ۲۸، ۴۰

ش

شرفی جواد، ۲۴

ع

عبادی زاده حجت الله، ۲۴

ف

فاتحی نیا مهدی، ۱۴

ق

قدسی علیرضا، ۳۵

ک

کلمیشی فاطمه، ۳۵
کهرازه مهرداد، ۵۴

ل

لطفعلی قصاب احسان، ۲۴

م

محمدی نسرین، ۲۰
ملکی حسن، ۵۸

و

ویسی امیر، ۲۰

۷ سپاسگزاری

عوامل برگزارکننده سمینار نهایت سپاسگذاری خود را به پیشگاه همه بزرگوارانی که در برگزاری این سمینار ما را یاری نمودند، همه شرکت کنندگان محترم، سخنرانان مدعو، سخنرانان تخصصی و کمیته علمی و اجرایی سمینار تقدیم می دارد و برای همه عزیزان از درگاه خداوند متعال آرزوی سلامتی، موفقیت و شادکامی دارد. به امید دیدار شما عزیزان در دیگر همایشهای علمی.

علی برزونی

دبیر سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی



رحیمه پورخاندانی

دبیر کمیته اجرایی سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی



مهدی وطن دوست

دبیر کمیته علمی سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی