انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید باهنر کرمان

۱۳۶۹ ۱۳۷۰ ۱۳۷۱ ۱۳۷۲ ۱۳۷۳ ۱۳۷۴ ۱۳۷۵ ۱۳۷۶ ۱۳۷۷ ۱۳۷۸ ۱۳۷۹ ۱۳۸۰ ۱۳۸۱ ۱۳۸۲ ۱۳۸۳ ۱۳۸۴ ۱۳۸۵ ۱۳۸۶ ۱۳۸۷ ۱۳۸۸ ۱۳۸۹ ۱۳۹۰ ۱۳۹۱ ۱۳۹۲ ۱۳۹۳ ۱۳۹۴ ۱۳۹۵ ۱۳۹۶ ۱۳۹۷ ۱۳۹۸ ۱۳۹۹ ۱۴۰۰ ۱۳۴۹ ۱۳۵۰ ۱۳۵۱ ۱۳۵۲ ۱۳۵۳ ۱۳۵۴ ۱۳۵۵ ۱۳۵۶ ۱۳۵۷ ۱۳۵۸ ۱۳۵۹ ۱۳۶۰ ۱۳۶۱ ۱۳۶۲ ۱۳۶۳ ۱۳۶۴ ۱۳۶۵ ۱۳۶۶ ۱۳۶۷ ۱۳۶۸

خلاصه مبسوط مقالات فارسی

پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران

52nd Annual Iranian Mathematics Conference

Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran

30 August - 02 September 2021

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

https://aimc52.uk.ac.ir aimc52@conf.uk.ac.ir +98 34 33257280

Shahdad Kalouts, Kerman, Iran

کلوت‌های شهداد، کرمان

پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران

خلاصه مبسوط مقالات فارسی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر و مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

۸ لغایت ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

فهرست مطالب

پیشگفتار . . . . . آ

سخنرانی دکتر بهزاد در مراسم افتتاحیه . . . . . ت

برنامه کنفرانس ریاضی

جدول زمان‌بندی . . . . . ج

برنامه روز اول کنفرانس ریاضی، دوشنبه ۸ شهریور . . . . . ح

برنامه روز دوم کنفرانس ریاضی، سه‌شنبه ۹ شهریور . . . . . خ

برنامه روز سوم کنفرانس ریاضی، چهارشنبه ۱۰ شهریور . . . . . د

برنامه روز چهارم کنفرانس ریاضی، پنج‌شنبه ۱۱ شهریور . . . . . ذ

برنامه گردهمایی سالانه کمیته بانوان انجمن ریاضی ایران

روز سوم: چهار شنبه ۱۰ شهریور . . . . . ز

برنامه میزگردها

روز دوم: سه‌شنبه ۹ شهریور . . . . . س

روز چهارم: پنج‌شنبه ۱۱ شهریور . . . . . س

برنامه کارگاه‌ها

یک‌شنبه ۷ شهریور . . . . . ص

جمعه ۱۲ شهریور . . . . . ض

مقالات فارسی

بخش اول: سخنرانی‌ها

فرشته آراد و علیرضا عرب پور ۲

نمونه‌های با اهمیت در تقریب انتگرال به روش مونت کارلو

کامبیز احمدی و هدی کامرانفر ۶

برآوردیابی در سیستم‌های تعمیرپذیر تحت توزیع وایبول

فاطمه بحرانی پور، سپهر ابراهیمی مود و محمد فرشی ۱۱

بهینه سازی هم زمان انرژی و تاخیر در شبکه اینترنت اشیاء در فضای محاسبات ابر و مه با استفاده از الگوریتم فاخته بهبود یافته

محمد بهمنی و علی آقامحمدی ۱۵

برآورد رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو با استفاده از الگوریتم EM

مرتضی بیشه نیاسر و سمیرا بنی مهدی دهکردی ۱۹

یک روش بلوکی هیبریدی برای معادلات دیفرانسیل تأخیری

حدیث پردلی و محمدحسین دریایی ۲۳

قیمت‌گذاری اختیارمعامله با فرض همبستگی در بازه‌ها

رضا پورموسی ۲۷

بررسی مدل های چند سطحی خطی بر پایه توزیع چوله نرمال

سمیه تاری ۳۱

سه مکتب موثر در منطق ریاضی

یگانه سادات حسینی، ابراهیم ریحانی و مهدی ایزدی ۳۳

تحلیل عملکرد مورد انتظار از دانش آموزان در تکالیف کتاب درسی ریاضی پایه هشتم

مهدیه دادگرفرد و آرتا امیرجمشیدی ۳۷

مدل سازی نوسان تارهای صوتی با استفاده از سری ولترا

احسان شاحسینی و علی رجایی ۴۱

کاربردهایی از دنباله دقیق گروه پولیای نسبی

احسان شاحسینی و علی رجایی ۴۵

رهیافتی جدید به نسبی سازی گروه پولیای میدان های عددی

حبیب شریف ۴۹

سری های توانی صوری اَبَرمتعالی

شعبان قلندرزاده و آرزو رنجبرنژاد اصفهانی ۵۳

زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه

افسانه محبت‌پناه و نرگس یافتیان ۵۸
نظریه سولو ابزاری برای تحلیل سطوح پاسخ‌های مختلف یک مسئله
رضا ممیوند و رضا قاسمی ۶۲
کاهش فضای ذخیره سازی مورد نیاز در شبکه های بلاکچین با استفاده از یک طرح تسهیم چند راز
سید محمد مشتاقیون و نرجس سادات بنی طبا ۶۸
پیرامون یک تساوی در مورد قاب های پیوسته در فضای هیلبرت
آرزو ملکی، محسن مددی و ابوالفضل رفیع پور ۷۲
بررسی تفاوت جنسیّتی در نگرش دانشجویان دانشکده ریاضی و کامپیوترنسبت به درس آمار (مورد: دانشگاه شهید باهنر کرمان)
حوریه نصیری، مهدی افتخاری و کاوه بهرامن ۷۵
مقایسه روش‌های یادگیری خود-نظارتی برای قطعه‌بندی معنایی تصاویر با استفاده از شبکه‌های عصبی عمیق کانولوشن
و عطیه نظامی علی محمد نظری ۷۹
ساخت ماتریس متقارن با مقادیر ریتز معلوم از مرتبه کوچکتر یا مساوی سه
آسیه یادگاری، مریم عرب عامری ۸۳
حل عددی معادله موج کسری با مشتق کسری تطبیق‌پذیر
محمد دارا و اکبر دهقان‌نژاد ۸۷
k-نگاشت تکانی و کوهومولوژی هموردا
فرناز هوشمند خلیق ۹۱
بررسی مدل‌های ردیابی شاخص بازار و حل مدل مبتنی بر ارزش با روش تفاضل توابع محدب
زهرا اصغری ورزنه و سوده حسینی ۹۵
یک روش انتخاب ویژگی ترکیبی برای داده‌های با ابعاد بالا بر اساس الگوریتم شاهین هریس
غلامرضا آقابابایی بنی و کاظم حمیدی زاده ۹۹
گرافهای نامتباین گروه‌های پوچتوان
عارفه کثیری و معصومه اکبری لاکه ۱۰۴
کاربرد اکستروپی باقیمانده طول عمر در آزمون نمایی بودن
نیره الیاسی، مهدی حسینی مقدم و میرمحسن پدرام ۱۰۹
پیشنهاد لایه ادغام در شبکه‌های عصبی همبافت سادکی
زهره آذرگون، سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی و الهام عباسی ۱۱۳
یک مدل رگرسیون بیزی کارا برای مدل بندی مشاهدات پاسخ مثبت چوله به راست
فاطمه احمدپور ۱۱۷
مفاهیم ریاضی چگونه در ذهن انسان شکل می‌گیرند؟

زهرا دیهیم و امید سلیمانی فرد ۱۲۱
کنترل بهینه یک مدل دینامیکی بیماری کووید- ۱۹ مبتنی بر تاثیرات عوامل محیطی
ابوالفضل رفیع‌پور و زهره خزاعی ۱۲۴
عملکرد دانش آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی
میرحکیم‌الله سیدی و زهرا گویا ۱۲۸
وضعیت ریاضی در دانشگاه‌های افغانستان
لیلا فضل‌پر و علی آرمندنژاد ۱۳۲
بررسی نگهدارنده های خطی بردارهای فرز $n \times 1$
محمدحسام قاسمی و زهرا گویا ۱۳۵
می‌خواهم متقلب بمانم!
(نقدی بر روش‌های سختگیرانهٔ تشخیص تقلب در ارزشیابی مجازی ریاضی و ضرورت تغییر رویکرد)
و علی صفدری وایقانی مینا گنجعلی. ۱۳۹
مقایسه روش تقلیل پایه و روش تفاضلات متناهی برای قیمت گذاری اختیار
احسان مصداقی، افشین فلاح و رحمان فرنوش ۱۴۳
یک مدل رگرسیون بیزی کارا برای مدل بندی مشاهدات پاسخ مثبت چوله به راست
زکیه میراکبرزاده، مرتضی سنجرانی‌پور و نسرین عبدالعلیان ۱۴۷
بررسی چین‌خوردگی محیطی و محوری استوانه الاستیک در حال رشد به کمک روش عددی کامپوند ماتریس
حسن میرزاوند و مجید جعفری خالدی ۱۵۱
مدل رگرسیونی مبتنی بر توزیع چوله نرمال دو مدی

بخش دوم: پوسترها

فرشته آراد و ایوب شیخی ۱۵۶
معرفی توزیع چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل گوسی
علی ایرانمنش و آزیتا تاج الدینی ۱۶۰
بررسی کیفیت نرخ همگرایی روش باقیمانده مینیمال تعمیم یافته کلی با شروع مجدد
مرتضی بیشه نیاسر و سمیرا بنی مهدی دهکردی ۱۶۴
ساخت روش بلوکی هیبریدی بر اساس چندجمله ای های چبیشف نوع اول
ساجده خیراندیش، سید ابوالفضل شاهزاده‌فاضلی، سید مهدی کرباسی و اعظم صادقیان ۱۶۸
فشرده‌سازی تصویر با استفاده از الگوریتم کدگذاری کوتاه کردن بلوک و نرمال‌سازی داده‌ها توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی
آسیه درازهی، مریم علی پور و سمانه صردی زید ۱۷۲
حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با استفاده ازچندجمله های لاگر

عاطفه دلاوری، مهدی ایزدی و ابراهیم ریحانی ۱۷۶
تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه نهم بر اساس تکالیف ارائه شده در آن

هادی سعیدی و محسن امیری بیدشکی ۱۸۰
فضاهای برداری توپولوژیکی

اسماء سلطانی ۱۸۳
مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در فضاهای غیرقطعی

نصرت اله شجره پورصلواتی ۱۸۷
یک تعمیم ساختاری برای گروهها

مصطفی شعبانی و نرگس یافتیان ۱۹۰
مروری بر باورهای رایج درباره ریاضی

سعید شعبانیان ۱۹۳
بازگشت پوانکاره

طاهره شکوهی، سمانه صردی زید و مهدی الله دادی ۱۹۷
یک روش محاسباتی جدید برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه بازه‌ای

سید محمود ضابطزاده ۲۰۱
ارائه یک روش بدون شبکه جهت بررسی عددی مدل انتشار همرفتی با مشتقات کسری زمانی توزیع شده دو بعدی

حمید غریب ۲۰۶
سیستم های خطی متناوب همراه با تراياها و وجود دورستگی روی کلاس های هموکلینیک

محمد محمودی و مهدی لطفی زاده ۲۱۱
ابرعملگر کوانتومی دیراک روی ابرکره ی q-تغییر شکل یافته ی فازی

مرجان معیری و آسیه ابراهیم زاده ۲۱۶
کارایی الگوی تدریس معادلات دیفرانسیل بر اساس نقشه مفهومی بر رویکردهای یادگیری دانشجو معلمان

احسان موحدنیا و محمد صالحی ویسی ۲۲۰
راهکارهایی برای اشتغال پذیری و مهارت افزایی دانشجویان ریاضی و آمار

سمیه نعمتی و زهرا رضائی کلانسرا ۲۲۴
حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته

زهره نیکوروش ۲۲۸
بررسی انتروپی تعمیم یافته فرآیند قدم زدن تصادفی روی گرافها

رضا اکبری و محمد شهریاری ۲۳۲
مساله معکوس اشتورم–لیوویل معین چپ با یک نقطه برگردان

محدثه شریفی‌زاده و محمد ایزدی ۲۳۶
ارزش‌گذاری اختیار معامله بر اساس یک روش ترکیبی
کاظم عبدالله پور ۲۴۰
استفاده از رویکرد مدل سازی و کاربرد در بهینه سازی حجم جعبه
محمد فرحناکی ۲۴۴
مدل‌سازی مالی توسط فرآیندهای لِوی
رقیه کتانی ۲۴۶
حل عددي معادله انتگرال حاصل از مدل بندي شبکه عصبي با استفاده از درونيابي گرانيگاهي
اسماء سلطانی و محمدحسین دریایی ۲۵۰
مدل انتخاب سبد سرمایه گذاری در محیط فازی
نمایه نویسندگان ۲۵۴

پیشگفتار

خداوند بزرگ را شکرگزاریم که این توفیق و افتخار را نصیب دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان نموده است که برای چهارمین بار میزبان و برگزارکننده کنفرانس ریاضی ایران باشد. با توجه به شیوع بیماری کرونا امسال نیز همانند سال گذشته کنفرانس بصورت مجازی برگزار می شود.

کنفرانس ریاضی ایران یکی از با سابقه‌ترین کنفرانس‌های علمی کشور است که از سال ۱۳۴۹ همه ساله بطور منظم در یکی از دانشگاه‌های کشور برگزار می گردد. در سال ۱۳۵۰ انجمن ریاضی ایران با ریاست استاد گرانقدر جناب آقای دکتر مهدی بهزاد و جمعی از ریاضیدانان نامدار آن زمان تاسیس گردید و با تلاش و همت جامعه ریاضی کشور هم اکنون نیم قرن از عمر با عزّت آن می گذرد. دانشگاه شهید باهنر کرمان و دانشکده ریاضی و کامپیوتر افتخار دارند که قبلاً در سال‌های ۱۳۶۱، ۱۳۷۴، و ۱۳۸۷ به‌ترتیب میزبان و برگزار کننده سیزدهمین، بیست و ششمین و سی و نهمین کنفرانس ریاضی ایران بوده‌اند. لذا در شهریور ۱۴۰۰ برای چهارمین بار این رخداد مهم ریاضی کشور در دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار می‌شود.

دانشکده ریاضی و کامپیوتر همه توان خود را در جهت برگزاری مطلوب کنفرانس ریاضی به کار بسته است و در این خصوص بیش از ۸ ماه برنامه‌ریزی شده و همکاران محترم فعالیت‌های گسترده‌ای در کمیته‌های مختلف برای این موضوع داشته‌اند. کمیته علمی کنفرانس متشکل از ۴۸ عضو هیأت علمی از دانشگاه‌های سراسر کشور می‌باشد که همه آنها از اساتید مطرح ریاضی کشور و با مرتبه‌های علمی دانشیار و استاد هستند. تقریباً از تمام دانشگاه‌های مطرح هر استان یک عضو هیأت علمی در کمیته علمی کنفرانس حضور دارد. با توجه به بهره‌گیری از امکانات فضای مجازی جلسات متعددی با اعضاء محترم کمیته علمی برگزار شده و یک گروه مجازی در خصوص هم‌فکری مسایل کنفرانس با ایشان تشکیل گردید. لذا یکی از بیشترین مشارکت‌های کمیته علمی در امور کنفرانس اتفاق افتاد. انتخاب سخنرانان مدعو خارجی و داخلی، تعیین عناوین میزگردهای کنفرانس و اعضاء آنها، سیاست‌گذاری دریافت مقالات، چگونگی داوری، تعیین مسئولین محورهای تخصصی و غیره از جمله مسایل مهم کنفرانس هستند که همه با مشارکت کمیته علمی و طی جلسات متعدد انجام شده‌اند. ماحصل این تلاش دعوت از ۱۶ سخنران مطرح خارجی و داخلی از کشورهای مطرح در ریاضی از جمله: انگلستان، آمریکا، فرانسه، کانادا، استرالیا، چک و ایران است. این

سخنرانان از دانشگاه‌های مطرحی چون هاردوارد، کالیفرنیا، کلمبیا، استنفورد، آکسفورد، آلبرتا، وین استیت، لیون، چالز، تهران، صنعتی شریف، فردوسی مشهد، صنعتی اصفهان، صنعتی شیراز و شهید باهنر کرمان انتخاب شده‌اند. در این کنفرانس دو میزگرد با عناوین "تأثیر همه‌گیری کووید ۱۹ در آینده رشته ریاضی در دانشگاه" و "چالش‌های پیش رو در توسعه رشته‌های علوم ریاضی در ایران" تدارک دیده شده است که ریاست آنها بر عهده سرکار خانم دکتر زهرا گویا از دانشگاه شهید بهشتی تهران و آقای دکتر امیر دانشگر از دانشگاه صنعتی شریف است و اعضاء میزگرد از اساتید صاحب‌نظر دانشگاه‌های مختلف در نظر گرفته شده‌اند. همچنین برای کمیته بانوان انجمن ریاضی ایران یک برنامه گردهمایی در نظر گرفته شده است.

به تارنمای کنفرانس ۵۴۸ مقاله ارسال گردید که همه آنها توسط داوران مختلف از دانشگاه‌های سراسر کشور و کمیته علمی کنفرانس داوری شدند و در نهایت ۳۴۵ مقاله پذیرفته شد که ۲۵۱ مقاله به‌صورت ارائه شفاهی و ۹۴ مقاله به‌صورت ارائه پوستر در نظر گرفته شده‌اند. همچنین نمایه‌سازی مقالات در پایگاه‌های استنادی جهان اسلام (ISC) و IEEE اقدام شده است که نمایه‌سازی IEEE در کنفرانس‌های ریاضی ایران برای اوّلین بار صورت می‌گیرد. بعلاوه دو کارگاه آموزشی یک روزه با عناوین "علوم داده و کاربردهای آن" و "آموزش ریاضی" به‌ترتیب در روزهای ۷ و ۱۲ شهریور برنامه‌ریزی شده‌اند که اساتید مطرح داخلی و خارجی تدریس در این دو کارگاه را برعهده دارند.

کمیته اجرایی کنفرانس متشکل از ۳۶ نفر از همکاران محترم دانشکده و ۶ نفر از همکاران محترم از دانشگاه‌های دیگر تلاش‌های زیادی در جهت انجام امور اجرایی مختلف کنفرانس در کمیته‌های مختلف داشته‌اند. در این زمینه و برای جلوگیری از قطعی‌های احتمالی برق و اینترنت شرکت کنندگان، تمام فیلم‌های ویدیویی سخنرانی آنها و فایل‌های ارائه ایشان دریافت و در سیستم‌های مجازی و تارنمای کنفرانس بارگذاری شده‌اند که اجرای کنفرانس انشاالله با وقفه‌ای روبرو نشود. همچنین در انجام موارد اجرایی مختلف بیش از ۳۰ نفر از دانشجویان دانشکده خصوصاً دانشجویان رشته‌های علوم کامپیوتر و ریاضی به کمیته اجرایی کمک کرده‌اند. ضمن تقدیر و تشکر فراوان از تلاش‌های فراوان کمیته‌های علمی، اجرایی و دانشجویی امید است که همه این تلاش‌ها به برگزاری بسیار مطلوب کنفرانس در روزهای ۷ الی ۱۲ شهریور ۱۴۰۰ منجر شود.

به دلیل همه‌گیری بیماری کرونا متاسفانه در سال گذشته جامعه ریاضی ایران تعدادی از ریاضیدانان خود را از دست داده و ما را در غم و اندوه آن عزیزان نشاند. متاسفانه در چند روز اخیر در سوگ تعدادی از همکارانمان بودیم، از جمله دکتر علی اصغر رضایی از دست اندرکاران برگزاری پنجاه‌ویکمین کنفرانس ریاضی ایران و دکتر محمدعلی اسدی از دانشگاه ارومیه. با آرزوی شادی روح همه درگذشتگان، امید است با برچیده شدن سایه شوم این همه‌گیری نشاط و شادی فراگیر شده و شاهد برگزاری کلاسها و همایشهای حضوری باشیم.

در پایان، کمیته برگزارکننده کنفرانس از حمایت‌های بی‌شائبه همه مسئولین، به ویژه ریاست محترم دانشگاه، معاونت محترم پژوهشی، مدیر محترم حوزه ریاست و روابط عمومی، مدیر محترم امور فناوری دانشگاه شهید باهنر کرمان، ریاست محترم انجمن ریاضی ایران، ریاست محترم صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور، ریاست محترم مرکز منطقه ای اطلاع‌رسانی علوم و فناوری، ریاست محترم دانشگاه تحصیلات تکمیلی و فناوری پیشرفته کرمان، ریاست محترم مجتمع آموزش عالی بم، ریاست محترم دانشکده ریاضی و کامپیوتر، ریاست محترم مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی دانشگاه شهید باهنر کرمان، اعضاء محترم کمیته های علمی و اجرایی، همکاران محترم و دانشجویان گرامی دانشکده ریاضی و کامپیوتر، شرکت ملی صنایع مس ایران، بانک تجارت، بخش ایران IEEE ، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) و سایر دست اندرکاران که در برگزاری این کنفرانس به هر شکل ممکن یاری رسان کادر اجرایی بوده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نماید.

با سپاس و احترام فراوان

کمیته برگزاری پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران

شهریور ۱۴۰۰

سخنرانی دکتر بهزاد در مراسم افتتاحیه

ضمن عرض سلام و ادب، جناب آقای دکتر سالمی امر فرمودند به مناسبت برگزاری پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه شهید باهنر کرمان در حد چند دقیقه تصدیع دهم و زندگینامه‌های خودم را نیز معرفی کنم. خدای را سپاس که در پنجاه سال گذشته بارها و بارها عمدتاً فرازها و به‌ندرت نشیب‌های فعالیت‌های انجمن ریاضی ایران را نظاره کرده‌ام و به درگذشتگانی که با حرکات و سکنات و توصیه‌های خود بالندگی ریاضیات کشور و انجمن ریاضی ایران را سبب شده‌اند درود فرستاده و طول عمر باعزت عزیزانی چون جمع حاضر را که با صرف وقت فراوان برگزاری صدها کنفرانس، سمینار، مسابقه و چاپ و نشر نشریات متعدد انجمن را میسر ساخته‌اند آرزو کرده‌ام.

بله، دکتر محسن شاهرضایی از بنیاد ملی نخبگان در کنفرانس ریاضی سال ۱۳۹۸ شیراز پیشنهاد تدوین زندگی‌نامه مستند خدمتگزاران علم و فن و ادب و هنر ایران زمین را مطرح نمودند و مرا به عنوان نخستین فرد برگزیدند تا خاطراتم را ثبت و ضبط کنند. برای تدوین کتابی با عنوان «بهزاد» که متنی مستند و راویی است نزدیک به ۵۰ ساعت مصاحبه در طول یک سال انجام دادند و حاصل کار را برای چاپ و نشر به «نشر دیبایه» سپردند. خوشحالم عرض کنم که جوانان مخاطبان اصلی این اثر هستند و می‌توانند بی‌پرده به نقاط ضعف و شکست‌ها و کاستی‌های زندگی من نیز پی ببرند و برای زندگی خود چراغ راهی در اختیار داشته باشند. از قضا به طور تقریباً همزمان پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی با هدایت دکتر علیرضا ملایی توانی تدوین تاریخ شفاهی همین خدمتگزاران را در دستور کار قرار دادند و باز هم مرا به عنوان نخستین خدمتگزار جهت مطالعه شرح حال برگزیدند.

حاصل این تلاش کتاب قطوری است با عنوان «دکتر مهدی بهزاد در صحنه ریاضیات» که ریاضیات ایران ۵۰ سال اخیر را به تصویر می‌کشد و برای چاپ و نشر به «نگارستان اندیشه» سپرده شده است. امید می‌رود این اثر پیش از پایان سال آماده توزیع شود.

سخن کوتاه، موفقیت دست‌اندرکاران در برگزاری هر چه بهتر این کنفرانس و اعضای شورای اجرایی تازه انتخاب شده با ریاست آقای دکتر محمد صال‌مصلحیان و عضویت بزرگانی چون آقای دکتر امیدعلی کرمزاده را آرزو می‌کنم و همه شما را به خدا می‌سپارم.

مهدی بهزاد

شهریور ۱۴۰۰

برنامه کنفرانس ریاضی

جدول زمان‌بندی به وقت تهران

زمان	۸ شهریور
۸:۱۵ الی ۱۰:۳۰	افتتاحیه
۱۰:۳۰ الی ۱۱:۰۰	استراحت و گفتگو
۱۱:۰۰ الی ۱۲:۳۰	سخنرانی عمومی
۱۲:۳۰ الی ۱۴:۰۰	ناهار و نماز
۱۴:۰۰ الی ۱۵:۰۰	سخنرانی مدعو
۱۵:۰۵ الی ۱۶:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۶:۱۵ الی ۱۶:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۶:۳۰ الی ۱۸:۳۰	سخنرانی‌های تخصصی
۱۸:۳۰ الی ۱۹	استراحت و گفتگو
۱۹:۰۰ الی ۲۰:۰۰	سخنرانی مدعو
۲۰:۰۰ الی ۲۰:۱۵	استراحت و گفتگو
۲۰:۱۵ الی ۲۱:۴۵	سخنرانی عمومی

جدول زمان‌بندی به وقت تهران

زمان	۹ شهریور	۱۰ شهریور	۱۱ شهریور
۸:۰۰ الی ۹:۰۰	سخران مدعو	سخران مدعو	سخران مدعو
۹:۰۵ الی ۱۰:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی	سخنرانی‌های تخصصی	سخنرانی‌های تخصصی
۱۰:۱۵ الی ۱۰:۳۰	استراحت و گفتگو		
۱۰:۳۰ الی ۱۲:۳۰	سخنرانی‌های تخصصی	سخنرانی‌های تخصصی	سخنرانی‌های تخصصی
۱۲:۳۰ الی ۱۳:۳۰	ناهار و نماز		
۱۳:۳۰ الی ۱۴:۰۰	ارائه پوسترها	ارائه پوسترها	ارائه پوسترها
۱۴:۰۰ الی ۱۵:۰۰	سخرانی مدعو	سخنرانی مدعو	سخرانی مدعو
۱۵:۰۵ الی ۱۶:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی	سخنرانی‌های تخصصی	سخنرانی‌های تخصصی
۱۶:۱۵ الی ۱۶:۳۰	استراحت و گفتگو		
۱۶:۳۰ الی ۱۸:۳۰	میزگرد	گردهمایی سالانه زنان	میزگرد
۱۸:۳۰ الی ۱۹:۰۰	استراحت و گفتگو		
۱۹:۰۰ الی ۲۰:۰۰	سخنرانی مدعو	سخنرانی مدعو	سخنرانی مدعو
۲۰:۰۰ الی ۲۰:۱۵	استراحت و گفتگو		
۲۰:۱۵ الی ۲۱:۴۵	سخنرانی عمومی	سخنرانی عمومی	اختتامیه

برنامه روز اول کنفرانس ریاضی، دوشنبه ۸ شهریور

زمان	عنوان
۸:۱۵ الی ۱۰:۳۰	افتتاحیه
۱۰:۳۰ الی ۱۱:۰۰	استراحت و گفتگو
۱۱:۰۰ الی ۱۲:۳۰	سخنرانی عمومی Esfandyar Eslami
۱۲:۳۰ الی ۱۴:۰۰	ناهار و نماز
۱۴:۰۰ الی ۱۵:۰۰	سخنرانی مدعو Laure Saint-Raymond
۱۵:۰۵ الی ۱۶:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۶:۱۵ الی ۱۶:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۶:۳۰ الی ۱۸:۳۰	سخنرانی‌های تخصصی
۱۸:۳۰ الی ۱۹:۰۰	استراحت و گفتگو
۱۹:۰۰ الی ۲۰:۰۰	سخنرانی مدعو Rama Cont
۲۰:۰۰ الی ۲۰:۱۵	استراحت و گفتگو
۲۰:۱۵ الی ۲۱:۴۵	سخنرانی عمومی Curtis T. McMullen

برنامه روز دوم کنفرانس ریاضی، سه‌شنبه ۹ شهریور

زمان	عنوان
۸:۰۰ الی ۹:۰۰	سخنرانی مدعو Hamid Reza Ebrahimi Vishki
۹:۰۵ الی ۱۰:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۰:۱۵ الی ۱۰:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۰:۳۰ الی ۱۲:۳۰	سخنرانی‌های تخصصی
۱۲:۳۰ الی ۱۳:۳۰	ناهار و نماز
۱۳:۳۰ الی ۱۴:۰۰	ارائه پوسترها
۱۴:۰۰ الی ۱۵:۰۰	سخنرانی مدعو Milan Hladik
۱۵:۰۵ الی ۱۶:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۶:۱۵ الی ۱۶:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۶:۳۰ الی ۱۸:۳۰	میزگرد
۱۸:۳۰ الی ۱۹:۰۰	استراحت و گفتگو
۱۹:۰۰ الی ۲۰:۰۰	سخنرانی مدعو Witold Pedrycz
۲۰:۰۰ الی ۲۰:۱۵	استراحت و گفتگو
۲۰:۱۵ الی ۲۱:۴۵	سخنرانی عمومی David Eisenbud

برنامه روز سوم کنفرانس ریاضی، چهارشنبه ۱۰ شهریور

زمان	عنوان
۸:۰۰ الی ۹:۰۰	سخنرانی مدعو Behnam Hashemi
۹:۰۵ الی ۱۰:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۰:۱۵ الی ۱۰:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۰:۳۰ الی ۱۲:۳۰	سخنرانی‌های تخصصی
۱۲:۳۰ الی ۱۳:۳۰	ناهار و نماز
۱۳:۳۰ الی ۱۴:۰۰	ارائه پوسترها
۱۴:۰۰ الی ۱۵:۰۰	سخنرانی مدعو Cheryl E. Praeger
۱۵:۰۵ الی ۱۶:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۶:۱۵ الی ۱۶:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۶:۳۰ الی ۱۸:۳۰	گردهمایی سالانه کمیته بانوان انجمن ریاضی ایران
۱۸:۳۰ الی ۱۹:۰۰	استراحت و گفتگو
۱۹:۰۰ الی ۲۰:۰۰	سخنرانی مدعو Siamak Yassemi
۲۰:۰۰ الی ۲۰:۱۵	استراحت و گفتگو
۲۰:۱۵ الی ۲۱:۴۵	سخنرانی عمومی Dusa McDuff

برنامه روز چهارم کنفرانس ریاضی، پنج‌شنبه ۱۱ شهریور

زمان	عنوان
۸:۰۰ الی ۹:۰۰	سخنرانی مدعو Ramin Javadi
۹:۰۵ الی ۱۰:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۰:۱۵ الی ۱۰:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۰:۳۰ الی ۱۲:۳۰	سخنرانی‌های تخصصی
۱۲:۳۰ الی ۱۳:۳۰	ناهار و نماز
۱۳:۳۰ الی ۱۴:۰۰	ارائه پوسترها
۱۴:۰۰ الی ۱۵:۰۰	سخنرانی مدعو Mohammad Safdari
۱۵:۰۵ الی ۱۶:۱۵	سخنرانی‌های تخصصی
۱۶:۱۵ الی ۱۶:۳۰	استراحت و گفتگو
۱۶:۳۰ الی ۱۸:۳۰	میزگرد
۱۸:۳۰ الی ۱۹:۰۰	استراحت و گفتگو
۱۹:۰۰ الی ۲۰:۰۰	سخنرانی مدعو Boris S. Mordukhovich
۲۰:۰۰ الی ۲۰:۱۵	استراحت و گفتگو
۲۰:۱۵ الی ۲۱:۴۵	اختتامیه

برنامه گردهمایی سالانه کمیته بانوان انجمن ریاضی ایران

ساعت 16:30 الی 18:45

ردیف	عنوان برنامه	زمان
۱	خیرمقدم و اعلام برنامه	5 دقیقه
۲	سخنرانی پروفسور منصور واعظ پور- رئیس انجمن ریاضی ایران	10 دقیقه
۳	سخنرانی خانم دکتر اشرف دانشخواه- دبیر کمیته بانوان انجمن ریاضی ایران (ارائه گزارش سالیانه)	10 دقیقه
۴	پخش کلیپ (معرفی کمیته بانوان)	2 دقیقه
۵	سخنرانی پروفسور امیدعلی کرم زاده "چرا بعضی از نتایجم را در ریاضی دوست دارم؟"	60 دقیقه
۶	پخش کلیپ (زنانی نامدار در عرصه ریاضیات- بخش دوم)	3 دقیقه
۷	سخنرانی پروفسور ویکتوریا گولد (Victoria Gould) "Regularity properties of graph products"	45 دقیقه

Link M: https://online۱.uk.ac.ir/c_main

Chair : Mojgan Mahmoudi **Email:** mojganmahmoudi@yahoo.com

Coordinator : Fatemeh Afsharmanesh-Fatemeh Rajabpour

برنامه میزگردها

روز دوم: سه‌شنبه ۹ شهریور

Link	Title	Time
M	تأثیر همه گیری کووید 19 بر آینده رشته ریاضی در دانشگاه	PM ۶:۳۰ - PM ۴:۳۰

Link M: https://online۱.uk.ac.ir/c_main

Chair : Zahra Gooya **Email:** zahra_gooya@yahoo.com

Coordinator : Parisa Torabi-Farideh Sabbah

روز چهارم: پنج‌شنبه ۱۱ شهریور

Link	Title	Time
M	چالشهای پیش رو در توسعه رشته‌های علوم ریاضی در ایران	PM ۶:۳۰ - PM ۴:۳۰

Link M: https://online۱.uk.ac.ir/c_main

Chair : Amir Daneshgar **Email:** daneshgar@sharif.ir

Coordinator : Farideh Sabbah-Parisa Torabi

برنامه کارگاه‌ها

کارگاه علوم داده و کاربردهای آن

یک‌شنبه 7 شهریور 1400

زمان	سخنران	موضوع
9:00 الی 10:30	Dr. Amin Anjomshoaa	• Data Science Foundation and Soft skills • Data handling and manipulation • Big data analytics • Data visualization and descriptive analytics
11:00 الی 12:30	Dr. Hirbod Assa	• Statistical analysis and modeling methods • Supervised and unsupervised machine learning methods
15:00 الی 16:30	Dr. Hossein Hajiabolhassan	• Machine learning in practice • Deep learning and CNN • Graph Neural Networks
17:00 الی 18:30	Discussion Panel attended by the instructors and invited AI experts	Panel

Link: https://online۱.uk.ac.ir/c_workshop

Link: https://us۰۶web.zoom.us/j/۸۸۲۵۷۹۱۹۶۷۹ **Meeting ID:** ۸۸۲ ۵۷۹۱ ۹۶۷۹

کارگاه یک‌روزه آموزش ریاضی

جمعه 12 شهریور 1400

ردیف	موضوع	سخنران	زمان
۱	میزگرد «نقد و بررسی کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای»	• آقای دکتر اسماعیل بابلیان (رییس جلسه) • خانم دکتر زهرا گویا • آقای دکتر محمدرضا فدایی • آقای محمد کارآمد (رییس انجمن ادراک) • نماینده سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی	8:00 الی 10:00
۲	مجموعه سخنرانی‌های "آموزش ریاضی ابتدایی"	• خانم دکتر سهیلا غلام آزاد (رییس جلسه) • خانم دکتر مهدخت نقیبی • آقای دکتر حمیدرضا کاشفی • آقای مرتضی ایوبیان	10:30 الی 12:30
۳	میزگرد "نقد و بررسی سوالات کنکور 1400"	• آقای دکتر ابوالفضل رفیع پور(رییس جلسه) • آقای خلیل شکوریان (نماینده اتحادیه علمی آموزشی معلمان ریاضی) • نماینده سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی • نماینده سازمان سنجش آموزش کشور	14:00 الی 16:00
۴	سخنرانی "انقلاب داده ها: ایده هایی برای استفاده از داده ها در تدریس"	پروفسور جو بولر	16:30 الی 17:00

Link: https://online۱.uk.ac.ir/c_workshop

مقالات فارسی

بخش اول: سخنرانی‌ها

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

نمونه‌های با اهمیت در تقریب انتگرال به روش مونت کارلو

فرشته آراد[۱،*] ، علیرضا عرب پور[۲]

[۱،۲]بخش آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. روش‌های متعددی برای تقریب یا محاسبه انتگرال زمانی که به شیوه تحلیلی امکان پذیر نباشد، موجود است. روش انتگرال‌گیری مونت کارلو ساده یکی از این روش‌ها محسوب می‌شود که به محاسبه انتگرال با استفاده از نمونه‌گیری تصادفی و تبدیل انتگرال به امیدریاضی از یک توزیع یکنواخت و قانون قوی اعداد بزرگ برای تقریب این امیدریاضی می‌پردازد. کارایی این روش زمانی افزایش می‌یابد که نمونه تصادفی تولید شده دارای واریانس کوچک باشد. در این پژوهش درصدد آن هستیم که در روش مونت کارلو به جای نمونه‌گیری از تابع چگالی اصلی از دیگر تابع چگالی‌ها نمونه تولید کنیم به طوری که واریانس نمونه تولید شده با این چگالی‌ها نسبت به نمونه اصلی کمتر باشد و بتوان نتایج را به طور دقیق‌تر گزارش نمود.

واژه‌های کلیدی: انتگرال گیری مونت کارلو، نمونه‌گیری با اهمیت.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65C05.

۱. مقدمه

نام شبیه‌سازی مونت کارلو از شهری در موناکو گرفته شده است که در آن بازی‌های شانسی با رخدادهای تکرارشونده و احتمال‌های مشخص، رواج دارد. به صورت کلی، روش مونت کارلو (یا شبیه سازی مونت کارلو) به هر تکنیکی اتلاق می‌شود که از طریق نمونه‌سازی آماری، پاسخ‌های تقریبی برای مسائل کمّی فراهم می‌کند. روش‌های مونت کارلو برای شبیه‌سازی پدیده‌هایی که عدم قطعیت زیادی در ورودی‌های آن‌ها وجود دارد مفید هستند، مثلاً محاسبه ریسک در تجارت همچنین این روش‌ها به‌طور گسترده‌ای در استنباط آماری و ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند. شبیه‌سازی مونت کارلو متکی به فرآیند نمایش صریح عدم قطعیت با تعیین ورودی‌ها به عنوان توزیع‌های احتمال است. اگر ورودی‌های توصیف‌کننده یک سیستم، غیرقطعی باشند، آنگاه پیش‌بینی عملکرد پیش رو به طور قطع غیرقطعی است. این بدان معنی است که نتیجه هر گونه تحلیل مبتنی بر ورودی‌های نمایش داده شده با توزیع‌های احتمال، خود یک توزیع احتمال است برای بحث در مورد تاریخچه علمی روش مونت کارلو می‌توانید [۳] را ببینید. یک نمونه استفاده سنتی کاربرد روش انتگرال گیری مونت کارلو در برآورد انتگرال‌های معین است، در ادامه تقریب انتگرال را با استفاده از روش مونت کارلو بیان می‌کنیم.

۱.۱. انتگرال گیری مونت کارلو ساده.

فرض کنید می‌خواهیم انتگرال زیر را تقریب بزنیم [۲،۴].

$$\theta = \int_a^b g(x)dx$$

مراحل کار به صورت زیر است:
۱- یک نمونه تصادفی m تایی X_1، X_2،...، X_m از $U(a,b)$ تولید کنید.
۲- با جایگذاری این مقادیر در تابع g، مقدار $\overline{g_m(X)} = \frac{1}{m}\Sigma_{j=1}^{m} g(X_j)$ را محاسبه می‌کنیم.
بنابه قانون قوی اعداد بزرگ، وقتی $m \to \infty$ مقدار فوق یک برآورد ناریب و سازگار برای θ یا امید ریاضی است، به عبارتی

*سخنران. آدرس ایمیل: fereshteh_arad@yahoo.com

$$\hat{\theta} = (b-a)\overline{g(X)}$$

مثال ۱.۱. انتگرال $\theta = \int_{۲}^{۴} e^{-x}dx$را به روش مونت کارلو برآورد کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

۱- یک نمونه mتایی $X_۱$، $X_۲$،...، X_m از توزیع $U(۲, ۴)$ تولید می‌کنیم.
۲- با جایگذاری این مقادیر در تابع e^{-x}، مقدار$\overline{g_m(X)}$ را محاسبه می‌کنیم.
۳-$\hat{\theta} = ۲\overline{g(X)}$
مقدار دقیق انتگرال برابر است با $e^{-۲} - e^{-۴}$، همانطور که در جدول ۱ مشخص است مقادیر برآورد شده و مقدار دقیق بسیار نزدیک به هم می‌باشند.

جدول ۱. تقریب انتگرال و مقدار دقیق آن .

$\hat{\theta}$	۰٫۱۱۷۲۱
مقدار واقعی	۰٫۱۱۷۰۱

یک محدودیت روش فوق این است که در فواصل نامحدود صدق نمی‌کند اشکال دیگر این است که اگر رفتار تابع $g(x)$ یکنواخت نباشد، یکنواخت در نظر گرفته می‌شود که می تواند در ترسیم نمونه ناکارآمد باشد همچنین $g(x)$هایی وجود داشته باشند که دارای واریانس کوچک‌تر باشند. به همین دلیل منطقی است دیگر وزن‌ها را به غیر از یکنواخت در نظر بگیریم که اینکار را تحت عنوان نمونه‌گیری با اهمیت انجام می‌دهیم برای اطلاعات بیشتر می‌توانید [۲، ۴] را ببینید.

۲.۱. **نمونه گیری با اهمیت.** فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ باشد که $f(x) > ۰$ روی مجموعه $\{x : g(x) > ۰\}$. اگر $Y = \frac{g(X)}{f(X)}$ یک متغیر تصادفی باشد، در این صورت

$$\int g(x)dx = \int \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = E[Y]$$

برآورد $E[Y]$ انتگرال گیری مونت کارلو ساده است که همان میانگین Y است.

$$\frac{۱}{m}\Sigma_{i=۱}^{m} Y_i = \frac{۱}{m}\Sigma_{i=۱}^{m} \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

به طوریکه متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$،...، X_m از تابع چگالی $f(x)$ تولید می‌شوند و $f(x)$ را تابع با اهمیت می‌نامند [۱، ۴]. به عبارتی دیگر منظور از نمونه‌گیری با اهمیت نمونه‌های هستند که باعث می‌شود تقریب انتگرال زودتر به مقدار واقعی نزدیک شود که نمونه‌گیری نقاط مهم نیز نامیده می‌شود.

۲. نتایج اصلی

در ادامه با ذکر یک مثال روش انتخاب تابع و نمونه با اهمیت را بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۲. در این مثال چندین انتخاب ممکن از توابع مهم برای تخمین

$$\theta = \int_{۰}^{۱} \frac{e^{-x}}{۱+x^{۲}}dx$$

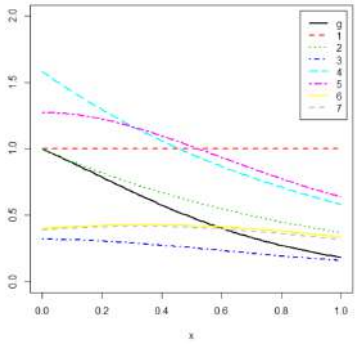
با استفاده از روش نمونه‌گیری با اهمیت مقایسه شده است. نامزدهای توابع مهم عبارتند از [۵]:

$f_۱(x) = ۱, \quad ۰ < x < ۱,$
$f_۲(x) = e^{-x}, \quad ۰ < x < \infty$
$f_۳(x) = \frac{(۱+x^{۲})^{-۱}}{\pi}, \quad -\infty < x < \infty,$
$f_۴(x) = \frac{e^{-x}}{۱-e^{-۱}}, \quad ۰ < x < ۱,$
$f_۵(x) = \frac{۴(۱+x^{۲})^{-۱}}{\pi} \quad ۰ < x < ۱$
$f_۶(x) = SN(۰, ۱, ۰٫۵) \quad -\infty < x < \infty,$
$f_۷(x) = ST(۰, ۱, ۰٫۵, ۱۰) \quad -\infty < x < \infty$

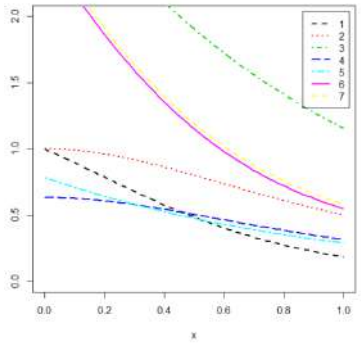
به طوریکه:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{۱+x^۲} & if ۰ < x < ۱ \\ ۰ & ow. \end{cases} \quad (۱)$$

در شکل ۱ تابع g و توابع $f_۱$ تا $f_۷$ رسم شده است. حال می‌خواهیم نمونه‌های تصادفی را از این توابع تولید کنیم و تقریب انتگرال را به روش مونت کارلو محاسبه کنیم. در شکل ۲ نسبت $\frac{g(x)}{f_i(x)}, i = ۱, ..., ۷$ رسم شده است. هر نسبتی که به یک نزدیکتر باشد (روی بازه صفر و یک) نمونه‌های تولید شده از آن f_i تقریب بهتری برای انتگرال خواهد بود. مقدار دقیق انتگرال برابر است با ۰٫۵۲۴۷ و با توجه به نتایج گزارش شده در جدول ۲ و شکل ۲، تابع چگالی $f_۴$ بدلیل انحراف استاندارد و یا خطای کمتر و نسبت نزدیک به یک، نسبت به دیگر تابع چگالی‌ها برای تقریب انتگرال $g(x)$ بر اساس روش مونت کارلو پیشنهاد می‌شود. تابع $f_۱(x)$ تقریب انتگرال به روش مونت کارلوی ساده است.



شکل ۱. تابع‌های با اهمیت و تابع g(x) مثال ۱.۲.



شکل ۲. نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ مثال ۱.۲.

جدول ۲. مقدار انتگرال تقریب زده شده به روش مونت کارلو و انحراف استاندارد.

توابع	$f_۱(x)$	$f_۲(x)$	$f_۳(x)$	$f_۴(x)$	$f_۵(x)$	$f_۶(x)$	$f_۷(x)$
$\hat{\theta}$	۰٫۵۲۲۴	۰٫۵۱۷۸	۰٫۵۱۶۶	۰٫۵۲۴۵	۰٫۵۲۳۵	۰٫۴۵۹۳	۰٫۴۵۹۷
se	۰٫۲۴۵۵	۰٫۴۱۷۹	۰٫۹۴۳۳	۰٫۰۹۶۷	۰٫۱۴۱۵	۰٫۷۲۳۵	۰٫۷۳۴۶
$\theta - \hat{\theta}$	۰٫۰۰۲۳	۰٫۰۰۸۱	۰٫۰۰۶۹	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۶۵۴	۰٫۰۶۵

۳. نتیجه‌گیری

همانطور که بیان شد در روش انتگرال گیری مونت کارلو ساده برای تقریب انتگرال محدودیت‌هایی وجود دارد از جمله تولید متغیرهای تصادفی به طوری که دارای توزیع یکنواخت نباشد و یا دارای واریانس زیاد باشند. با توجه به این محدودیت‌ها روش نمونه‌گیری با اهمیت را بیان کردیم که نمونه‌های تصادفی می‌توانند از دیگر توزیع‌ها نیز انتخاب شوند و در نهایت نمونه‌ای که دارای دقت بیشتر است برای تقریب انتگرال بر اساس روش مونت کارلو لحاظ گردد تا بتوان تقریب دقیق‌تری را در محاسبه انتگرال به دست آورد.

مراجع

۱. غ. غلامی، آ. میرترابی، روش‌های کاهش واریانس در روش مونت کارلو، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان، سمنان، ۱۳۹۱.

2. CH. P.Robet, G. Casella, *Monte carlo statistical methods*, Springer, 2004.
3. N. Metropolis, *The beginning of the Monte Carlo method*, Los Alamos Science, (15, Special Issue), 125-130, 1987.
4. M.L. Rizzo, *Statistical computing with R*, Chapman & Hall/CRC, 2008.
5. R. Arellano-Valle, *The centred parameterization and related quantities of the skew-t distribution*, Journal of Multivariate Analysis, 113 (2013), 73-90.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

برآوردیابی در سیستم‌های تعمیرپذیر تحت توزیع وایبول

کامبیز احمدی[۱،*] و هدی کامرانفر[۲]

[۱] بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

[۲] دانش‌آموخته دکتری آمار، پژوهشگر مستقل، اهواز، ایران

چکیده. در این مقاله سیستم تعمیرپذیری با توزیع طول عمر اولیه وایبول در نظر گرفته می‌شود، که برای آن احتمال رخداد دو نوع خرابی در اثر وجود شوک‌هایی وجود دارد. خرابی نوع یک با احتمال p و $1-p$ رخ داده و در این حالت سیستم نیاز به تعمیرمینیمال دارد در حالی که احتمال رخداد خرابی نوع دو برابر با p است و در این حالت سیستم تعویض می‌گردد. سیاست در نظر گرفته شده برای تعویض سیستم بدین صورت است که در زمان از پیش تعیین‌شده T، یا در زمان nامین خرابی نوع یک و یا در زمان اولین خرابی نوع دو، هر کدام که زودتر رخ دهد، سیستم تعویض می‌شود. لذا بر مبنای مشاهدات حاصل از k سیستم مستقل و یکسان، تابع درستنمایی تشکیل و برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای نامعلوم و مدت زمان مورد انتظار برای تعویض یک سیستم ارائه می‌شود. در پایان مطالب تئوری بیان شده در قالب یک مثال برای داده‌های واقعی بکاربرده می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد بیزی، تعمیر مینیمال، سیستم تعمیرپذیر، توزیع وایبول.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62F10, 62N05.

۱. مقدمه

هر ساله بیلیون‌ها دلار صرف تعمیر و نگهداری تجهیزات مهندسی در سراسر دنیا می‌شود که به معنای وجود نیاز مبرم برای مدیریت مؤثر عملیات نگهداری است. این عملیات باید به گونه‌ای باشد که بتواند اثر مثبتی بر عوامل موفقیت شامل کیفیت، ایمنی، هزینه، سرعت، نوآوری، تحویل قابل اعتماد و سودآوری داشته باشد. در سال‌های اخیر برای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها، الگوهای مختلفی ارائه شده است که کاربردهای فراوانی در صنعت جهت بهبود کارایی سیستم‌ها و تجهیزات دارند. در مدل‌های اولیه مطرح شده، فرایندهای ساده‌ای جهت توصیف رفتار سیستم‌های تعمیرپذیر در نظر گرفته شده است. در این مدل‌ها فرض می‌شود که بعد از هر تعمیر سیستم یا به وضعیت ''به خوبی یک سیستم نو'' بازگشته و یا حالت ''به بدی کهنه'' برای آن رخ دهد. به عبارتی دیگر برای حالت اول تعمیر کامل و برای حالت دوم تعمیر مینیمال صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است که در بسیاری از منابع سیستم‌های تعمیرپذیر، تعویض سیستم نیز به عنوان تعمیر کامل در نظر گرفته شده است.
یکی از مدل‌های مهم و پیچیده‌تر که به مدل تعمیر ناقص معروف و مبنای کار بسیاری از محققین قرار گرفته است، توسط براون و پروشان [۱] معرفی شد. در این مدل خرابی سیستم با احتمال p توسط تعمیر کامل و با احتمال $1-p$ با تعمیر مینیمال برطرف می‌شود. شیو [۶] در بسط و توسعه مدل براون و پروشان [۱]، سیاست تعویض سیستم در nامین خرابی نوع یک یا در اولین خرابی نوع دو و یا در زمان از پیش تعیین‌شده T، هر کدام که زودتر رخ دهد، را ارائه داد. در یافته‌های اخیر کامرانفر و همکاران [۳] سیستمی تعمیرپذیر با احتمال رخداد دو نوع خرابی (نوع یک و نوع دو) را در نظر گرفته و به بحث استنباط آماری در خصوص تعمیمی از مدل براون و پروشان [۱] پرداخته‌اند.

*سخنران. آدرس ایمیل: K.Ahmadi@sku.ac.ir

در این مقاله در توسعه مدل‌های مطرح شده، توزیع وایبول به عنوان توزیع طول عمر اولیه‌ی سیستم در نظر گرفته شده و برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای نامعلوم و مدت زمان انتظار برای تعویض سیستم ارائه شده است. فرض کنید طول عمر سیستم قبل از اولین خرابی دارای توزیع وایبول با تابع توزیع تجمعی $F(t) = ۱ - \exp\{-\lambda t^{\alpha}\}$ باشد که در آن پارامتر شکل $\alpha > ۰$ و پارامتر مقیاس $\lambda > ۰$ نامعلوم هستند. برمبنای زمان از پیش تعیین‌شده T و با ثابت و معلوم در نظر گرفتن n، تابع درستنمایی برای مشاهدات $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_۱}, \ldots, \boldsymbol{x_k})$ حاصل از k سیستم مستقل و یکسان به صورت

$$L(p, \alpha, \lambda|\mathrm{x}, \mathrm{m}) = p^{N_۲}(۱-p)^{N_۱-k+L-N_۲}\alpha^{N_۱}\lambda^{N_۱}\Big(\prod_{i=۱}^{k}\prod_{j=۱}^{m_i} x_{i,j}\Big)^{\alpha-۱}$$

$$\times \exp\Big\{-\lambda\Big[(L-N_۲)T^{\alpha} + \sum_{i=۱}^{k}\left(۱ - I(m_i < n)I(z_i = ۰)\right)x_{i,m_i}^{\alpha}\Big]\Big\}, \qquad (۱)$$

است، که در آن $\boldsymbol{x_i} = (x_{i,۱}, ..., x_{i,m_i})$ معرف بردار زمان‌های خرابی iامین سیستم نو تا زمان اولین تعویض آن است. برای سیستم iام، اگر خرابی نوع دو قبل از زمان T رخ داده باشد $z_i = ۰$ و در غیر این صورت $z_i = ۱$ در نظرگرفته می‌شود. $I(.)$ معرف تابع نشانگر، $N_۱ = \sum_{i=۱}^{k} m_i$، $L = \sum_{i=۱}^{k} I(m_i < n)$ و $N_۲ = \sum_{i=۱}^{k} I(m_i < n)I(z_i = ۱)$. قابل ذکر است که برای $m_i = ۰$ (هیچ خرابی تا زمان تعویض سیستم رخ نداده باشد) داریم: $\prod_{j=۱}^{۰} x_{i,j} = ۱$.

۲. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای نامعلوم

با مشتق‌گیری از لگاریتم رابطه (۱)، $\ell(p, \alpha, \lambda) = \ln L(p, \alpha, \lambda|\mathrm{x}, \mathrm{m})$، نسبت به پارامترهای نامعلوم p، α و λ برآورد ماکسیمم درستنمایی p به صورت $\hat{p} = \dfrac{N_۲}{N_۱ - k + L}$ بدست می‌آید. برآورد ماکسیمم درستنمایی α، مانند $\hat{\alpha}$ نیز از حل معادله $\alpha = H(\alpha)$ حاصل می‌شود که در آن

$$H(\alpha) = N_۱\left[\lambda(\alpha)\left((L-N_۲)(\ln T)T^{\alpha} + \sum_{i=۱}^{k}\left(۱ - I(m_i < n)I(z_i = ۰)\right)(\ln x_{i,m_i})x_{i,m_i}^{\alpha}\right) - \sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{m_i}\ln x_{i,j}\right]^{-۱},$$

و

$$\lambda(\alpha) = N_۱\left[(L-N_۲)T^{\alpha} + \sum_{i=۱}^{k}\left(۱ - I(m_i < n)I(z_i = ۰)\right)x_{i,m_i}^{\alpha}\right]^{-۱}. \qquad (۲)$$

با استفاده از رابطه (۲) و خاصیت ناوردایی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی λ، مانند $\hat{\lambda}$ به صورت $\lambda(\hat{\alpha})$ محاسبه می‌شود.

۳. زمان مورد انتظار برای اولین تعویض سیستم

اگر Y^* بیانگر زمان رسیدن تا اولین تعویض سیستم باشد، با توجه به در نظر گرفتن سه حالت مختلف برای تعویض، داریم:

$$Y^* = \begin{cases} T & X_M > T \\ X_M & X_M < T, \end{cases}$$

که در آن متغیر تصادفی M معرف تعداد خرابی‌ها قبل از زمان از پیش تعیین‌شده T است. لذا مدت زمان مورد انتظار برای اولین تعویض سیستم، که با گرفتن امید ریاضی از متغیر تصادفی Y^* حاصل می‌شود، عبارت است از

$$E(Y^*) = TP(X_M > T) + E(X_M|X_M < T)(1 - P(X_M > T)). \quad (3)$$

با استفاده از رابطه بین توزیع گاما و پواسن و با در نظر گرفتن

$$P(M = m) = \begin{cases} (1-p)^{m-1}p & 1 \le m \le n-1, \\ (1-p)^{n-1} & m = n, \end{cases}$$

می توان نشان داد که $P(X_M > T) = \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\lambda^m}{m!}(1-p)^m T^{m\alpha}\right] e^{-\lambda T^\alpha}$ و

$$E(X_M|X_M < T) = \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} \left[\sum_{m=1}^{n-1} (1-p)^{m-1} p \frac{\gamma(m + \frac{1}{\alpha}, \lambda T^\alpha)}{\gamma(m, \lambda T^\alpha)} + (1-p)^{n-1} \frac{\gamma(n + \frac{1}{\alpha}, \lambda T^\alpha)}{\gamma(n, \lambda T^\alpha)} \right],$$

که در آن $\gamma(a, x)$ معرف تابع گامای ناقص پایینی است که به صورت $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\, dt$ تعریف می‌شود. با توجه به خاصیت ناوردایی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی $E(Y^*)$، مانند $\widehat{\mathcal{E}}$، با جایگزینی پارامترهای نامعلوم p، α و λ با برآوردهای ماکسیمم درستنمایی آنها در رابطه (۳) حاصل می‌شود.

۴. برآوردهای بیزی پارامترهای نامعلوم

در این بخش برآوردهای بیزی پارامترهای نامعلوم p، α و λ تحت تابع زیان توان دوم خطا ارائه می‌شوند. فرض کنید p دارای توزیع پیشین بتا، $Beta(a_1, b_1)$، با ابرپارامترهای معلوم $a_1, b_1 > 0$ باشد. لذا $\pi(p) \propto p^{a_1-1}(1-p)^{b_1-1}$. هم‌چنین با توجه به ویژگی‌های پارامتر λ، فرض کنید توزیع گاما، $Gamma(a_2, b_2)$، با ابرپارامترهای معلوم $a_2, b_2 > 0$ به عنوان توزیع پیشین پارامتر λ در نظر گرفته شود. به عبارتی دیگر $\pi(\lambda) \propto \lambda^{a_2-1}e^{-b_2\lambda}$. اطلاعات پیشین درباره پارامتر α به صورت مستقل از p و λ، در قالب توزیعی با تابع چگالی احتمال $\pi(\alpha)$ با ابرپارامترهای معلوم که بر روی بازه $(0, \infty)$ لگ-مقعر است، بیان می‌شود. لازم به ذکر است که توزیع پیشین در نظر گرفته شده برای α منوط به توزیع خاصی نیست و هر توزیعی که دارای شرایط مذکور باشد، قابل استفاده است.

با استفاده از رابطه (۱) و با در نظر گرفتن پیشین‌های معرفی شده، توزیع پسین توأم (p, α, λ) به شرط مشاهدات عبارت است از

$$\pi(p, \alpha, \lambda|\mathrm{x}, \mathrm{m}) \propto \pi(p|\mathrm{x}, \mathrm{m})\pi(\alpha|\mathrm{x}, \mathrm{m})\pi(\lambda|\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{m}),$$

که در آن

$$\pi(p|\mathrm{x}, \mathrm{m}) \equiv Beta(N_2 + a_1, N_1 - k + L - N_2 + b_1),$$

$$\pi(\alpha|\mathrm{x}, \mathrm{m}) = \pi(\alpha)\alpha^{N_1} \Big(\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m_i} x_{i,j} \Big)^{\alpha-1} [b_2 + (L - N_2)T^\alpha + \nu(\alpha)]^{-(N_1+a_2)},$$

$$\pi(\lambda|\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{m}) \equiv Gamma\Big(N_1 + a_2, b_2 + (L - N_2)T^\alpha + \nu(\alpha)\Big),$$

و $\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{k}(1 - I(m_i < n)I(z_i = 0))x_{i,m_i}^\alpha$. از این‌رو برآورد بیزی پارامتر p تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت $\hat{p}_B = \frac{N_2+a_1}{N_1-k+L+a_1+b_1}$ حاصل می‌شود. واضح است که تحت تابع زیان توان دوم خطا، نمی‌توان برآوردهای بیزی پارامترهای نامعلوم α و λ را به صورت تحلیلی ارائه کرد و برای محاسبه آنها نیاز به تولید نمونه از $\pi(\alpha|\mathrm{x}, \mathrm{m})\pi(\lambda|\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{m})$ است.

گزاره ۱.۴. توزیع $\pi(\alpha|\mathrm{x}, \mathrm{m})$ روی بازه $(0, \infty)$ لگ-مقعر است.

در ادامه با استفاده از گزاره (۱.۴) و با بکارگیری روش نمونه‌گیری گیبز، الگوریتمی برای تولید نمونه از $\pi(\alpha|\mathrm{x}, \mathrm{m})\pi(\lambda|\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{m})$ ارائه می‌شود.

الگوریتم ۲.۴.

گام اول. با استفاده از روش نسبت یکنواخت‌ها α را از توزیع $\pi(\alpha|\mathrm{x},\mathrm{m})$ تولید کنید.
گام دوم. با استفاده از α تولید شده در گام اول ، λ را از توزیع $\pi(\lambda|\alpha,\mathrm{x},\mathrm{m})$ تولید کنید.
گام سوم. گام‌های اول و دوم را N مرتبه تکرار کنید و نمونه‌های $(\alpha_\ell,\lambda_\ell)$، $\ell = ۱,۲,\ldots,N$ را بدست آورید.

برای روش نسبت یکنواخت‌های استفاده شده در گام اول الگوریتم ۲.۴، می‌توان الگوریتمی را به صورت زیر ارائه کرد (برای جزئیات بیشتر به داگپونار [۲] مراجعه شود).

الگوریتم ۳.۴. الگوریتم نسبت یکنواخت‌ها.

گام اول. قرار دهید $u_\circ = \max_{\alpha>\circ}\sqrt{\pi(\alpha|\mathrm{x},\mathrm{m})}$ و $v_\circ = \max_{\alpha>\circ}\alpha\sqrt{\pi(\alpha|\mathrm{x},\mathrm{m})}$. (با توجه به گزاره ۱.۴ از وجود $u_\circ$ و $v_\circ$ اطمینان حاصل می‌شود).
گام دوم. U را از توزیع یکنواخت روی بازه $(\circ,u_\circ)$ تولید کنید.
گام سوم. V را از توزیع یکنواخت روی بازه $(\circ,v_\circ)$ تولید کنید.
گام چهارم. قرار دهید $\alpha = V/U$.
گام پنجم. اگر $U \le \sqrt{\pi(\alpha|\mathrm{x},\mathrm{m})}$، α را به عنوان یک نمونه از $\pi(.|\mathrm{x},\mathrm{m})$ بپذیرید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

برمبنای نمونه‌های $(\alpha_۱,\lambda_۱),(\alpha_۲,\lambda_۲),\ldots,(\alpha_N,\lambda_N)$، برآوردهای بیزی α و λ تحت تابع زیان توان دوم خطا به ترتیب به صورت $\hat\lambda_B = \frac{۱}{N}\sum_{\ell=۱}^{N}\lambda_\ell, \hat\alpha_B = \frac{۱}{N}\sum_{\ell=۱}^{N}\alpha_\ell$ حاصل می‌شود.
اکنون فرض کنید $p_۱,p_۲,\ldots,p_N$ نمونه‌های تصادفی از توزیع $Beta(N_۲+a_۱, N_۱-k+L-N_۲+b_۱)$ و هم‌چنین به ازای $۱ \le \ell \le N$، $(\alpha_\ell,\lambda_\ell)$ نمونه‌های بدست آمده از الگوریتم ۱ باشند. لذا برآورد بیزی $E(Y^*)$ تحت تابع زیان توان دوم خطا را می‌توان به صورت $\widehat{\mathcal{E}}_B = \frac{۱}{N}\sum_{\ell=۱}^{N}\vartheta(p_\ell,\alpha_\ell,\lambda_\ell)$ ارائه کرد که در آن $\vartheta(p_\ell,\alpha_\ell,\lambda_\ell)$ به شکل رابطه (۳) است که از جایگزینی p_ℓ، α_ℓ و λ_ℓ با p، α و λ حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که به صورت مشابه می‌توان برآوردهای بیزی پارامترهای نامعلوم را تحت توابع زیان نامتقارن لینکس و آنتروپی نیز بدست آورد.

جدول ۱. فواصل زمانی بین خرابی‌های متوالی سیستم تهویه هوای هواپیمای بوئینگ.

شماره هواپیما																
۷۹۰۷	۱۹۴	۱۵	۴۱	۲۹	۳۳	۱۸۱										
۷۹۱۰	۷۴	۵۷	۴۸	۲۹	۵۰۲	۱۲	۷۰	۲۱	۲۹	۳۸۶	۵۹	۲۷	**	۱۵۳	۲۶	۳۲۶
۷۹۱۱	۵۵	۳۲۰	۵۶	۱۰۴	۲۲۰	۲۳۹	۴۷	۲۴۶	۱۷۶	۱۸۲	۳۳	**	۱۵	۱۰۴	۳۵	
۷۹۱۵	۳۵۹	۹	۱۲	۲۷۰	۶۰۳	۳	۱۰۴	۲	۴۳۸							
۷۹۱۶	۵۰	۲۵۴	۵	۲۸۳	۳۵	۱۲										
۷۹۱۷	۱۳۰	۴۹۳														
۸۰۴۴	۴۸۷	۱۸	۱۰۰	۷	۹۸	۵	۸۵	۹۱	۴۳	۲۳۰	۳	۱۳۰				

مثال ۴.۴. (تحلیل داده‌های واقعی): در این مثال، نتایج بدست آمده در بخش‌های قبل برای مجموعه داده‌های واقعی سیستم تهویه هوای هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ که توسط پروشان [۵] معرفی شد، بکاربرده می‌شود. داده‌های اصلی مربوط به فواصل زمانی بین خرابی‌های متوالی سیستم تهویه هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ در ۱۳ هواپیما است که در جدول ۱ اطلاعات مربوط به ۷ هواپیما آمده است. برای هواپیماهای ۷۹۱۰ و ۷۹۱۱ به دلیل عدم ثبت اولین فاصله زمان خرابی پس از تعمیر اساسی از نماد ** استفاده شد. لذا در ادامه برای این دو هواپیما تنها مشاهدات قبل از ** در نظر گرفته می‌شوند. پرسنل و همکاران [۴] فرض کردند که تمامی تعمیرها از نوع ناقص بوده و زمان انجام تعمیر اساسی و هم‌چنین آخرین زمان مشاهده شده برای هر کدام از هواپیماها را به عنوان زمان رخداد اولین تعمیر کامل تعبیر کردند. کامرانفر و همکاران [۳] مدل وایبول را به داده‌ها برازش دادند و بدون در نظر گرفتن زمان از پیش تعیین‌شده T برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای نامعلوم را بدست آوردند. با فرض در نظر گرفتن $n = ۱۲$، $k = ۷$ و $T = ۱۰۰۰, ۱۲۰۰, ۱۵۰۰, ۲۰۰۰$ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای نامعلوم p، α، λ و $E(Y^*)$ در جدول ۲ آمده است. برای بدست آوردن برآوردهای بیزی

جدول ۲. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای نامعلوم.

T	$\hat{p}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mathcal{E}}$	$\hat{p}_B$	$\hat{\alpha}_B$	$\hat{\lambda}_B$	$\hat{\mathcal{E}}_B$
۱۰۰۰	۰٫۰۷۱۴	۱٫۲۸۲۹	۰٫۰۰۱۱	۸۷۳٫۵۶	۰٫۰۷۲۷	۱٫۳۰۳۵	۰٫۰۰۱۹	۸۶۵٫۴۷
۱۲۰۰	۰٫۰۶۶۷	۱٫۱۵۹۹	۰٫۰۰۲۳	۱۰۱۹٫۷۰	۰٫۰۶۸۱	۱٫۱۷۸۰	۰٫۰۰۳۵	۱۰۱۵٫۴۲
۱۵۰۰	۰٫۰۵۶۶	۱٫۲۲۷۴	۰٫۰۰۱۴	۱۱۳۴٫۲۱	۰٫۰۵۸۱	۱٫۲۴۰۸	۰٫۰۲۲۸	۱۱۳۰٫۴۵
۲۰۰۰	۰٫۰۸۹۳	۱٫۱۹۳۵	۰٫۰۰۱۸	۱۰۳۲٫۶۶	۰٫۰۸۹۷	۱٫۲۰۱۲	۰٫۰۰۲۸	۱۰۶۴٫۴۸

$(a_1, b_1) = (۰٫۲, ۱٫۸)$ و $(a_2, b_2) = (۰٫۰۰۰۰۱, ۰٫۰۰۰۰۱)$ و هم‌چنین توزیع $Gamma(۲, ۱)$ به عنوان توزیع پیشین برای α در نظر گرفته شد. لازم به ذکر است که تابع چگالی احتمال توزیع گاما به ازای پارامتر شکل بزرگتر از ۱ لگ-مقعر است.

مراجع

1. M. Brown and F. Proschan, *Imperfect repair*, J. Appl. Probab, 20 (1983), no. 4, 851–859.
2. J. S., Dagpunar, *Simulation and Monte Carlo: With applications in finance and MCMC*, John Wiley & Sons, 2007.
3. H. Kamranfar, J. Etminan and M. Chahkandi, *Statistical inference for a repairable system subject to shocks: classical vs. Bayesian*, J. Stat. Comput. Simul., 90 (2020), no. 1, 112–137.
4. B. Presnell, M. Hollander, J. Sethuraman, *Testing the minimal repair assumption in an imperfect repair model*. J. Amer. Statist. Assoc. 89 (1994), no. 425, 289–297
5. F. Proschan, *Theoretical explanation of observed decreasing failure rate*, Technometrics, 5(1963), no. 3, 375–383.
6. S. H. Sheu, *Extended optimal replacement model for deteriorating systems*, European J. Oper. Res., 112 (1999), 503–516.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بهینه‌سازی هم‌زمان انرژی و تاخیر در شبکه اینترنت‌اشیاء در فضای محاسبات ابر و مه با استفاده از الگوریتم فاخته بهبودیافته

فاطمه بحرانی‌پور[۱,*] ، سپهر ابراهیمی‌مود[۲] و محمد فرشی[۳]
[۱,۲,۳]بخش علوم‌کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. میزان مصرف انرژی و تاخیر در پردازش درخواست‌ها از جمله موارد مهم در بحث اینترنت‌اشیاء است، بنابراین بهینه‌سازی میزان مصرف انرژی و تاخیر به‌وجود آمده در پردازش‌ها، می‌تواند نقش موثری در کیفیت ارائه سرویس باشد. در این مقاله، ابتدا یك تابع هدف جدید براي بهینه‌سازی هم‌زمان انرژی و تاخیر در شبکه اینترنت اشیا تعریف شده است. سپس، از الگوریتم بهبودیافته و چندهدفه فاخته برای یافتن پاسخ مناسب این تابع هدف استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده‌ی کارایی الگوریتم پیشنهادی است.

واژه‌های کلیدی: اینترنت‌اشیاء، بهینه‌سازی چندهدفه، الگوریتم فاخته، محاسبات نرم.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: (۱ تا ۳ مورد) 68W99,68T20.

۱. مقدمه

اینترنت‌اشیاء مفهومی جدید در دنیای فناوری و ارتباطات به‌شمار می‌آید. با بهره مندی از رایانش ابری و مه میتوان حجم زیاد محاسبات موجود در شبکه اینترنت اشیا را در زمان معقول انجام داد. برای استفاده مناسب از منابع ابری و مه، نیاز به الگوریتم‌های کارآمد زمان‌بندی کار [1] برای مدیریت منابع است. از اهداف مهم زمان‌بندی کار می‌توان به بهبود عملکرد دستگاه‌ها، بهبود کیفیت خدمات و همچنین کاهش هزینه‌ها اشاره کرد. بهینه‌سازی تاخیر و انرژی در شبکه‌های اینترنت‌اشیاء اهمیت زیادی دارد [۱،۳]. در این مقاله، یك تابع هدف جدید بصورت چندهدفه براي کاهش انرژی و تاخیر در محاسبات ابر و مه تعریف شده است و از الگوریتم فاخته بهبودیافته (MCS) براي حل این مسئله استفاده شده است. نتایج نشان دهنده کارایي تابع هدف و الگوریتم فاخته بهبودیافته در کمینه کردن انرژي مصرفي و تاخیر محاسبه شده بصورت همزمان است. عملکرد این الگوریتم با سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه مانند SPEA2، NSGA3، MOPSO مقایسه شده‌است.

۱.۱. تحقیقات پیشین. ابوروکبا و همکاران [۱] زمان‌بندی درخواست‌های اینترنت‌اشیاء را برای بهینه‌سازی تاخیر در فضای ابر و مه مدل کرده اند. در این پژوهش مساله زمان‌بندی درخواست‌ها جهت بهینه‌سازی تاخیر با استفاده از یک رویکرد از الگوریتم ژنتیک در زمان اجرای قابل قبول حل شده است. اما میزان انرژی مصرفی در مدل پیشنهادی، مناسب نیست. کومار میشرا و همکاران [۳] مساله تخصیص درخواست‌ها به منابع موجود در فضای مه جهت بهینه‌سازی انرژی را در یک سیستم مدل با ماشین‌های مجازی (VMs) و درخواست‌های مشخص مورد بررسی قرارداده است و از الگوریتم‌های ابتکاری مانند BAT-Algorithm ، PSO و BPSO استفاده شده است. تاخیر بدست آمده در این مدل بالا است. همچنین از ویژگیهای محاسبات مه در این مدل استفاده نشده است. گانگ سان و همکاران [۶] یک جریان کار پویا برای پردازش و یک الگوریتم برای تخصیص درخواست ها در لایه لبه جهت به حداقل رساندن زمان پاسخ ارائه دادند. نتایج نشان دهنده‌ی کارایی خوب روش پیشنهادی است اما مشکل ترافیک در فضای ابر و محاسبات لبه‌ای چالش مهمی به‌حساب می‌آید. روئولونگ

*سخنران. آدرس ایمیل: fatemebahrani72@yahoo.com

[1]Job Scheduling

دنگ و همکاران [۲] تخصیص درخواست‌ها به منابع مه و ابر را جهت نزدیک شدن به مصرف انرژی بهینه با تاخیر ثابت پیشنهاد داده‌اند. طبق نتایج به‌دست آمده استفاده از منابع مه نقش مهمی در کاهش مصرف انرژی دارد.

۲. روش پیشنهادی

۱.۲. تعریف تابع هدف. ادغام مه و ابر در اینترنت‌اشیاء یک معماری سه لایه ایجاد می‌کند: لایه لبه، لایه ابر و لایه مه. در فرآیند پردازش درخواست‌ها تاخیرهای مختلفی ممکن است اتفاق بیفتد: تاخیر در انتقال، تاخیر در صف انتظار و تاخیر در انتشار (تاخیر در انتشار نادیده گرفته می‌شود). تابع هدف تاخیر [۱] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F۱ = argmin_{X_{ij}} \left(\sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} LT_{ij} W_j X_{ij} \right) \quad (۱)$$

که در این رابطه LT_{ij} نشان دهنده تاخیر به‌وجود آمده در پردازش درخواست j ام توسط منبع i ام است، W_j نشان دهنده فاکتور وزن برای یک درخواست است که میزان اولویت درخواست را نشان می‌دهد و X_{ij} یک متغیر تصمیم است که یک تخصیص از درخواست j به منبع i را نشان می‌دهد. در صورت تخصیص دارای مقدار ۱ در غیر اینصورت ۰ است [۱]. میزان مصرف انرژی در سرورها بستگی به تکنیک های تخصیص درخواست‌ها به منابع دارد. هر سرور قادر است انواع درخواست‌ها را پردازش کند. اگر ETC_{ij} یک ماتریس $n \times m$ باشد، درایه های آن حاصل $\frac{L_i}{P_j}$ خواهد بود که L_i اندازه درخواست i و P_j سرعت سرور j است. درنتیجه میزان مصرف انرژی کلی یک سرور برای تمام درخواست‌های تخصیص داده شده [۳] برابر است با :

$$ET_j = \sum_{i=۱}^{n} X_{ij} \times ETC_{ij} \quad (۲)$$

زمانی که یک سرور یک درخواست را پردازش می‌کند، ممکن است در حالت فعال یا حالت بیکاری باشد. میزان مصرف انرژی در هر یک ازین حالات متفاوت است. تابع هدف انرژی [۳] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F۲ = \min \left(\sum_{j=۱}^{m} E(V_j) \right) \quad (۳)$$

در رابطه (۳) مقدار $E(V_j)$ مجموع مصرف انرژی در حالت فعال و بیکار یک سرور است. تابع هدف مساله بهینه‌سازی چندهدفه، به‌صورت برداری از اهداف تعریف می‌شود. اگر $F۱$ تاخیر محاسبه شده از رابطه (۱) و $F۲$ انرژی مصرفی محاسبه شده رابطه (۳) باشد، در مساله بهینه‌سازی چندهدفه داریم:

$$Objective\ Function = ([F۱\ F۲])\ \ s.t \sum_{i=۱}^{m} X_{ij} = ۱ \quad (۴)$$

که در این رابطه $\sum_{i=۱}^{m} X_{ij} = ۱$ به این معنی است که هر درخواست فقط باید توسط یک منبع پردازش شود.

۲.۲. الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه‌ی فاخته بهبود یافته. الگوریتم جستجوی فاخته [۲] یک الگوریتم بهینه‌سازی ابتکاری است که جستجو را با شبیه‌سازی رفتار پرنده‌ای به‌نام فاخته در زمان تخمریزی انجام می‌دهد. این الگوریتم بر پایه دو عملیات اصلی مهاجرت و تخمگذاری استوار است و همانند سایر الگوریتم‌های ابتکاری با یک جمعیت اولیه از فاخته‌ها شروع می‌شود. این جمعیت از فاخته‌ها تعدادی تخم دارند که آن‌ها را در لانه تعدادی پرنده میزبان قرار می‌دهند. اما برای تخمگذاری به منطقه‌ای که شرایط بهتری برای تخمگذاری دارد مهاجرت می‌کنند. الگوریتم‌های مورد نیاز برای حل مسائل چندهدفه تفاوت چشمگیری با روش‌های بهینه‌سازی تک هدفه دارد. در سال‌های اخیر از الگوریتم فاخته‌ی چندهدفه برای حل مسائل بسیاری استفاده شده است. در الگوریتم فاخته فرموله شده برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه [۵] با K هدف متفاوت قوانین الگوریتم به‌صورت زیر تغییر می‌یابد. هر فاخته در هر زمان K تخم می‌گذارد و آن ها را در لانه‌های تصادفی

[2] Cuckoo Search(CS)

قرار می‌دهد همچنین هر لانه با احتمال PA رها می‌شود و یک لانه جدید با K تخم باتوجه به شباهت‌ها و تفاوت‌های تخم‌ها، ساخته می‌شود. از برخی ترکیب‌های تصادفی نیز برای ایجاد تنوع استفاده می‌شود. قابلیت‌های کاوش و بهره‌وری از مهمترین ویژگی‌های الگوریتم‌های تکاملی است. کنترل و تنظیم این قابلیت‌ها در الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه باعث بهبود کارایی این الگوریتم در حفظ جایگاه‌های متفاوت و تولید گونه‌های جدید خواهد شد. در این مقاله از تابع بولتزمن [۳] [۴] به منظور مقیاس گذاری مقدار شایستگی عوامل جستجو استفاده شده است. در ابتداي فرآیند محاسباتي الگوریتم پیشنهادی، انحراف معیار شایستگی عوامل جستجو پایین خواهد بود. هر چه الگوریتم به انتهای فرآیند محاسباتی خود نزدیک شود، انحراف معیار شایستگی عوامل موجود افزایش می‌یابد. برای رسیدن به این هدف، از تابع بولتزمن [۴] برای مقیاس کردن شایستگی عوامل به شکل زیر استفاده شده است.

$$fit_i(t) = \frac{\left(\exp \frac{Nfit_i(t)}{T}\right)}{< \left(\exp \frac{Nfit_i(t)}{T}\right) >_t} \quad (۵)$$

که در رابطه (۵) $fit_i(t)$ شایستگی مقیاس شده مربوط به عامل i در زمان t است، $< . >_t$ عملگر میانگین بین همه عوامل در زمان t را نشان می‌دهد و T یک تابع نزولی با مفهوم دما در الگوریتم ذوب [۴] شبیه‌سازی شده‌است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{۰/۲}{ln(t)} \quad (۶)$$

۳. نتایج شبیه‌سازی و آنالیز داده‌ها

در این بخش کارایی روش پیشنهادی از دو جهت بررسی می‌شود: کارایی الگوریتم پیشنهادی و کارایی تابع هدف تعریف شده. الگوریتم پیشنهادی بهبودیافته برای بهینه‌سازی تاخیر و انرژی روی سیستم‌مدلی با مشخصات جدول (۲) پیاده‌سازی شده است. میانگین حجم درخواست‌ها از ۱۰۰۰ واحد به ۶۰۰۰ واحد با گام ۱۰۰۰ افزایش یافته است. برای پردازش درخواست‌ها از ۱۶ سرور استفاده شده است که ۶ سرور در لایه ابر با قدرت پردازش بالاتر و ۱۰ سرور در لایه مه با قدرت پردازش پایین‌تر در نظر گرفته شده است. درخواست‌ها پس از تولید در لایه لبه باید در فضای ابر و مه پردازش شوند. از آنجا که سرورهای ابر و مه از نظر سرعت و قابلیت پردازش باهم تفاوت دارند، لذا تاخیر به‌وجود آمده و میزان مصرف انرژی متفاوت است. نتایج حاصل از ۳۰ بار اجرای الگوریتم روی سیستم مدل تعریف شده در جدول (۱) آمده است. همچنین نتایج مقایسه الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های چندهدفه SPEA2، NSGA3، MOPSO در شکل (۱) گزارش شده است. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد الگوریتم بهبودیافته فاخته عملکرد بهتری در بهینه‌سازی تاخیر و انرژی دارد.

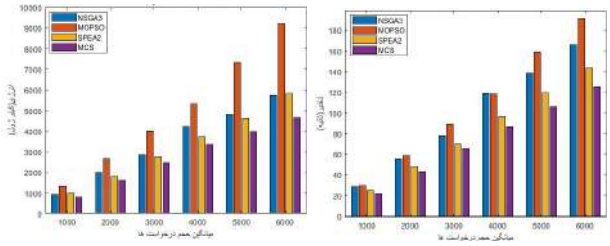
جدول ۱. مقایسه کارایی الگوریتم پیشنهادی

	Proposed Method		EEOA[۳]		DOA[۱]	
حجم داده‌ها	تاخیر	انرژی	تاخیر	انرژی	تاخیر	انرژی
۱۰۰۰	۲۱٫۹۵	۸۰۶٫۰۳۸	۳۲٫۳۹	۸۲۷٫۰۴	۱۹٫۱۳	۱۱۰۹٫۷۳
۲۰۰۰	۴۳٫۰۵	۱۶۰۴٫۴۷	۶۴٫۵۳	۱۵۴۵٫۱۴	۳۸٫۱۵	۲۳۵۳٫۰۱
۳۰۰۰	۶۵٫۰۱۱	۲۴۶۴٫۸۳	۹۴٫۳۹	۲۳۴۱٫۹۵	۵۶٫۲۶	۳۶۳۴٫۱۴
۴۰۰۰	۸۶٫۸۲	۳۳۲۴٫۳۸	۱۳۰٫۳۲	۳۰۵۸٫۳۸	۷۲٫۱۴	۴۶۳۰٫۷
۵۰۰۰	۱۰۵٫۹۶	۳۹۶۹٫۸۳	۱۶۳٫۹۱	۴۰۰۶٫۶۶	۹۳٫۳۹	۶۲۰۵٫۶۹
۶۰۰۰	۱۲۵٫۱۶	۴۶۴۹٫۶۱	۱۹۶٫۱۱	۴۷۹۸٫۴	۱۰۸٫۸۳۷	۶۸۷۹٫۰۰۹

جدول ۲. مشخصات سیستم‌مدل

پارامتر	تعداد سرورها	تعداد درخواست‌ها	میانگین سرعت سرورها	جمعیت اولیه	تعداد تکرار الگوریتم	تعداد اجرای الگوریتم
مقدار	۱۶	۱۰۰	۵۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۳۰

[3] Boltzmann



شکل ۱. مقایسه عملکرد الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم‌ها

برای آنالیز نتایج روش پیشنهادی از آزمون رتبه بندی فردمن (Friedman) استفاده می‌شود که یک روش غیرپارامتریک است و برای مقایسه میانگین الگوریتم‌ها در بین k متغیر (گروه) بکار می‌رود. در این آزمون الگوریتم‌ها باتوجه به کارایی رتبه‌بندی می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی با این آزمون مورد آزمایش قرار گرفته و در جدول (۳) گزارش شده است.

جدول ۳. نتایج آزمون فردمن

الگوریتم‌ها	رتبه
Proposed Method	۲۵٫۸۳۳۳
DOA	۴۰٫۵۰۰۰
EEOA	۳۴٫۸۳۳۳
NSGA3	۳۷٫۸۳۳۳
SPEA2	۳۵٫۳۳۳۳
MOPSO	۴۴٫۶۶۶۷
$Pvalue(\alpha = ۰٫۱)$	$۰٫۰۵ = Reject$

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تابع بولتزمن جهت مقیاس گذاری مقدار شایستگی عوامل جستجو، الگوریتم چندهدفه فاخته بهبود یافته ارائه شده است. استفاده از این تابع قابلیت‌های کاوش و بهره‌وری که از مهمترین ویژگی‌های الگوریتم‌های تکاملی است را بهبود می‌بخشد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد تابع هدف تعریف شده کارایی بهتری در بهینه سازی تاخیر و انرژی دارد. الگوریتم پیشنهادی بر روی سیستم‌مدل تعریف شده پیاده‌سازی شده‌است. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها عملکرد بهتری برای حل این مساله دارد.

مراجع

1. R.O. Aburukba, M. AliKarrar, T. Landolsi et al. Scheduling Internet of Things requests to minimize latency in hybrid Fog–Cloud computing, FGCS, (2019).
2. R. Deng, R. Lu, C. Lai, T. H. Luan, and H. Liang, “Optimal workload allocation in fog-cloud computing toward balanced delay and power con- sumption,” IEEE Internet Things J., vol. 3, no. 6, pp. 1171–1181, Dec.2016.
3. S. K. Mishra, D. Puthal, J. J. P. C. Rodrigues, B. Sahoo and E. Dutkiewicz, ”Sustainable Service Allocation Using a Metaheuristic Technique in a Fog Server for Industrial Applications,” in IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 14, no. 10, pp. 4497-4506, Oct. 2018.
4. Ch.M Rong, Y.Y Huang, G.Q Zeng, K.Di Lu, and L.Q Yang. ”An improved bat algorithm hybridized with extremal optimization and Boltzmann selection.” Expert Systems with Applications 175 (2021).
5. X.She Yang Deb S. Multiobjective cuckoo search for design optimization. Computers and Operations Research (2011).
6. Gang Sun, Yayu Li, Yao Li, Dan Liao, Victor Chang, Low-latency orchestration for workflow-oriented service function chain in edge computing,Future Generation Computer Systems,Volume 85,Pages 116-128,2018.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

برآورد رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو با استفاده از الگوریتم EM

محمد بهمنی [1,*] ، علی آقامحمدی [1]
[1] گروه آمار، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده. هدف این مقاله ارائه یک مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q است. با استفاده از الگوریتم EM (Expectation-maximization) ضرایب رگرسیونی و پارامترهای اتورگرسیو برآورد می‌شوند. در پایان با روش‌های شبیه‌سازی کارایی مدل ارائه شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.
واژه‌های کلیدی: مدل رگرسیون با خطاهای اتورگرسیو، مدل رگرسیون چندکی ترکیبی، توزیع لاپلاس نامتقارن، الگوریتم EM .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62J99 , 62F99.

۱. مقدمه

مدل‌های رگرسیون خطی از مهم‌ترین مدل‌های آماری برای بیان ارتباط بین متغیرهای پاسخ و متغیرهای مستقل است، که در زمینه‌های گوناگون تحقیقاتی مانند، اقتصاد، زیست شناسی و بسیاری از علوم طبیعی و اجتماعی کاربرد دارند. همواره در مسائل کاربردی و نظری مدل‌های رگرسیون خطی با خطاهای مستقل و هم‌توزیع مد نظر بوده و این مدل‌ها با این فرضیات بصورت جامع مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. با این وجود خطاهای مدل‌های رگرسیونی همیشه مستقل نبوده و ممکن است در بعضی مسائل ساختار هم‌بسته‌ای داشته باشد. مطالعات گوناگونی برمبنای مدل‌های رگرسیونی خطی با خطاهای هم‌بسته صورت گرفته است، برای مثال [۴] برآورد مدل رگرسیون چندکی با خطاهای اتورگرسیو را با استفاده از الگوریتم EM محاسبه کردند. معمولا در مدل‌های رگرسیونی پارامترها به روش حداقل مربعات، برآورد می شوند. اما به وضوح می‌دانیم که روش حداقل مربعات نسبت به داده‌های دورافتاده و همچنین زمانی که توزیع داده‌ها غیرنرمال است از کارایی کمتری برخوردارند. به‌عنوان یک جایگزین رگرسیون چندکی که توسط [۲] بیان شد، تبدیل به یک ابزار آماری جذاب در رگرسیون مدرن شده است. در این مقاله مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q را درنظر گرفته و با استفاده از الگوریتم EM که اولین بار توسط [۱] بیان شد، پارامترهای مدل برآورد می‌شوند.

۲. مدل

مدل رگرسیون خطی با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q به صورت

$$y_t = \boldsymbol{x}_t^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{q} \phi_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t, \quad t = q+1, ..., n \tag{۱}$$

*سخنران. آدرس ایمیل: bahmanimo74@znu.ac.ir

است، که در آن y_t، متغیر پاسخ برای مشاهده tام، $\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, ..., x_{tp})^T$ بردار p-بعدی متغیرهای توصیفی و به ترتیب $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_1, ..., \phi_q)^T$، $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_p)^T$ پارامترهای مدل اتورگرسیو و ضرایب مدل رگرسیونی‌اند و η_t مولفه‌های تصادفی مدل را نشان می‌دهد که مستقل و هم‌توزیع‌اند. با توجه به مدل رگرسیون چندکی بیان شده توسط [۲]، برآورد پارامترها در این مدل با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q در چندک τام بصورت

$$\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Phi}}\right) = \text{argmin}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\Phi}} \sum_{t=q+1}^{n} \rho_\tau \left[y_t - \boldsymbol{x}_t^T \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^{q} \phi_j \left(y_{t-j} - \boldsymbol{x}_{t-j}^T \boldsymbol{\beta} \right) \right] \quad (۲)$$

است، که در آن $\rho_\tau(u)$ تابع زیان و بصورت $\rho_\tau(u) = \frac{|u|+(2\tau-1)u}{2}$ تعریف می‌شود. واضح است که اگر τ را برابر $\frac{1}{2}$ در نظر بگیریم، آنگاه مدل رگرسیون میانه به‌دست می‌آید. تابع زیان در رابطه (۲) برآوردگرها را بر اساس یک سطح چندک از توزیع مشاهدات به‌دست می‌دهد که اغلب برآوردگرهای کارایی نسبت به برآوردگرهای حداقل مربعات نیستند. به همین دلیل [۶] مدل رگرسیون چندکی ترکیبی را که در آن برآورد پارامترها براساس ترکیبی از سطوح متفاوت چندک محاسبه می‌شود را بیان کرد. در واقع در این روش به جای یک سطح چندک، سطوح چندکی مختلف در نظر گرفته شده و براساس این سطوح چندک‌ها، برآوردها به‌دست می‌آیند. لذا انتظار داریم که اطلاعات حاصل از چندک‌های مختلف برآوردهای کارایی را ایجاد کند. برآورد پارامترهای مدل (۱) در این روش با فرض Kسطح چندک، $0 < \tau_1 < ... < \tau_K < 1$ بصورت

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Phi}}) = \text{argmin}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\Phi}} \sum_{t=q+1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \rho_{\tau_k} \left[y_t - \boldsymbol{x}_t^T \boldsymbol{\beta} - \alpha_{\tau_k} - \sum_{j=1}^{q} \phi_j \left(y_{t-j} - \boldsymbol{x}_{t-j}^T \boldsymbol{\beta} \right) \right] \quad (۳)$$

به دست می‌آیند. که در آن $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{\tau_1}, ..., \alpha_{\tau_k})$ و α_{τ_k} چندک τ_kام، مولفه خطا یعنی η_t است. [۵] از طریق تعریف توزیع لاپلاس نامتقارن بصورت

$$f\left(y|\mu, \sigma, \tau\right) = \frac{\tau\left(1-\tau\right)}{\sigma} \exp\left\{ -\rho_\tau \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right\}$$

که در آن μ پارامتر مکان، σ پارامتر مقیاس و τ پارامتر شکل است، برآورد پارامترها را درمدل رگرسیون چندکی از طریق روش ماکزیمم درستنمایی (Maximum Likelihood) به دست آوردند. می‌دانیم برآوردگرهای ML از طریق یک توزیع احتمال قابل محاسبه‌اند. در واقع [۵] از طریق این توزیع برآوردهای ML را در مدل رگرسیون چندکی محاسبه کردند. تابع درستنمایی مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q براساس این توزیع بصورت

$$\text{L}(\Theta|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \prod_{t=q+1}^{n} \left[\prod_{k=1}^{K} \frac{\tau_k(1-\tau_k)}{\sigma_k} \exp\left\{ -\rho_{\tau_k} \left(\frac{\eta_{tk}}{\sigma_k} \right) \right\} \right] \quad (۴)$$

به دست می‌آید، که در آن $\Theta = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma})$ ، $\eta_{tk} = y_t - \boldsymbol{x}_t^T \boldsymbol{\beta} - \alpha_{\tau_k} - \sum_{j=1}^{q} \phi_j \left(y_{t-j} - \boldsymbol{x}_{t-j}^T \boldsymbol{\beta} \right)$ و $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_K)$ همان وزن‌ها را مشخص می‌کنند. توجه کنیم که هر استنباط آماری برای مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q را می‌توان براساس این تابع درستنمایی انجام داد. اما به دلیل وجود تابع قدرمطلق نمی‌توان بصورت تحلیلی تابع درستنمایی را نسبت به پارامترها ماکزیمم کرد و فرم بسته‌ای از برآورد پارامترها را به دست آورد. برای حل این مشکل ابتدا با استفاده از شکل آمیخته مقیاس توزیع لاپلاس نامتقارن، مدل را بصورت آمیخته‌ای از توزیع نرمال بازنویسی می‌کنیم [۳]. بنابراین تابع درستنمایی شرطی توام برای داده‌های کامل $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\}$ بصورت زیر به دست می‌آید.

$$\text{L}_\text{C}\left(\Theta|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\right) = \prod_{t=q+1}^{n} \left[\prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta_{2k}\sigma_k v_{tk}}} \exp\left\{ -\frac{\left(\eta_{tk} - \theta_{1k} v_{tk}\right)^2}{2\theta_{2k}\sigma_k v_{tk}} \right\} . \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\sigma_k} \exp\left\{ -\frac{1}{\sigma_k} v_{tk} \right\} \right] \quad (۵)$$

که در آن $v_{tk} \sim \text{Exp}(\frac{1}{\sigma_k})$، همان متغیر آمیخته کننده را نشان می‌دهد. در عبارت فوق $\theta_{1k} = \frac{1-2\tau_k}{\tau_k(1-\tau_k)}$ همچنین $\theta_{2k} = \frac{2}{\tau_k(1-\tau_k)}$ و $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{v}_{q+1}, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ بردار متغیرهای پنهان می‌باشد، که در آن $\boldsymbol{v}_t = (v_{t1}, ..., v_{tK})$ است. توجه کنیم تابع درستنمایی رابطه (۵) براساس توزیع نرمال است.

۳. روش برآورد

الگوریتم EM که اولین بار توسط [۱] ارائه شد ابزاری قدرتمند برای محاسبه برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای یک مدل آماری با حضور داده‌های ناقص، متغیرهای پنهان ، توزیع‌های بریده شده، مشاهدات گروه‌بندی شده و یا سانسور شده است. با توجه به وجود متغیرهای پنهان v_{tk} در تابع درستنمایی رابطه [۵]، الگوریتم EM برای برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها روش کارایی است. در این قسمت با استفاده از این روش برآورد پارامترهای مدل عنوان شده را به دست می‌آوریم. الگوریتم EM یک روش تکراری برای محاسبه ماکزیمم مقدار تابع درستنمایی است. هر تکرار از این الگوریتم شامل دو مرحله است: مرحله E و مرحله M ، که با یک مقدار اولیه مانند $\Theta^{(0)}$ آغاز می‌شود. در مرحله E متوسط مقدار لگاریتم (طبیعی) تابع درستنمایی نسبت به توزیع شرطی متغیرهای پنهان به شرط مشاهدات (متغیر پاسخ) محاسبه شده و در مرحله M ، عبارت حاصل را نسبت به پارامترهای مجهول یعنی Θ ماکزیمم می‌کنیم تا Θ جدید را به دست آوریم. به همین ترتیب مراحل E و M تا رسیدن به همگرایی قابل قبول ادامه پیدا می‌کند. حال برای مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با خطاهای اتورگرسیو مرتبه q، لگاریتم تابع درستنمایی برای داده‌های کامل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\log\left[L_C\left(\Theta|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\right)\right] \propto -\frac{(n-q)}{2}\sum_{k=1}^{K}\log(\theta_{2k}) - \frac{3\,(n-q)}{2}\sum_{k=1}^{K}\log\sigma_k - \frac{1}{2}\sum_{t=q+1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\log v_{tk}$$

$$- \sum_{t=q+1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sigma_k}\left[\frac{\eta_{tk}^2}{2\theta_{2k}}v_{tk}^{-1} + \frac{\theta_{1k}^2+2\theta_{2k}}{2\theta_{2k}}v_{tk} - \frac{\theta_{1k}\eta_{tk}}{\theta_{2k}}\right] \quad (۶)$$

مرحله E : در این مرحله امید ریاضی لگاریتم تابع درستنمایی فوق نسبت به توزیع شرطی متغیر پنهان به شرط مشاهدات محاسبه می‌شود، یعنی

$$\text{Q}\left(\Theta|\Theta^{(\text{h}-1)}\right) = \text{E}\left[\text{logL}_\text{C}\left(\Theta|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\right)|\Theta^{(\text{h}-1)},\boldsymbol{y}\right] =$$

$$\frac{(n-q)}{2}\sum_{k=1}^{K}\log\left(\theta_{2k}\right) - \frac{3(n-q)}{2}\sum_{k=1}^{K}\log\sigma_k - \frac{1}{2}\sum_{t=q+1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\text{E}\left(\log v_{tk}|\Theta^{(\text{h}-1)},y_t\right)$$

$$- \sum_{t=q+1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sigma_k}\left[\frac{\eta_{tk}^2}{2\theta_{2k}}\text{E}\left(v_{tk}^{-1}|\Theta^{(\text{h}-1)},y_t\right) + \frac{\theta_{1k}^2+2\theta_{2k}}{2\theta_{2k}}\text{E}\left(v_{tk}|\Theta^{(\text{h}-1)},y_t\right) - \frac{\theta_{1k}\eta_{tk}}{\theta_{2k}}\right] \quad (۷)$$

مرحله M : در این مرحله رابطه (۷) نسبت به Θ ماکزیمم می‌شود، به عبارت دیگر مقدار $\Theta^{(\text{h})}$ جدید به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$\Theta^{(\text{h})} = \text{argmax}_{\Theta^{(\text{h})}}\,\text{Q}\left(\Theta^{(\text{h})}|\Theta^{(\text{h}-1)}\right)$$

۴. شبیه‌سازی

در این بخش برای مقایسه کارایی روش رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی با دو روش معمول یعنی مدل رگرسیون چندکی بر اساس یک سطح چندک مشخص که برآورد پارامترها با استفاده از الگوریتم EM به‌دست می‌آیند و روش حداقل مربعات به مطالعه شبیه‌سازی می‌پردازیم. یک مجموعه داده به حجم $n = 40$ از مدل

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \phi_1\varepsilon_{t-1} + \eta_t, \quad t = 2, ..., 40$$

با فرض اینکه $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \phi_1) = (1, 2, 2, 0.4)$ و x_tها از توزیع نرمال استاندارد هستند، تولید می‌کنیم. مولفه خطا، η_t نیز از سه توزیع $N(0,1)$، $\chi^2_{(1)}$ و آمیخته تولید می‌شوند. در مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی نیز $K = 20$ قرار

می‌دهیم. به منظور لحاظ کردن تغییرپذیری نتایج حاصل از شبیه‌سازی، ۲۰۰ مرتبه روند شبیه‌سازی را تکرار می‌کنیم. برای مقایسه‌ی کارایی روش‌ها، نسبت مجذور میانگین مربعات خطا را با RMSE نشان داده و این نسبت برابر است با تقسیم مجذور میانگین مربعات خطای رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی به مجذور میانگین مربعات خطای سایر روش‌ها، بدیهی است که اگر این نسبت بزرگتر از یک باشد، روش رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی از کارایی بالایی برخوردار است.

جدول ۱. مقادیر اریبی و RMSE تحت مدل‌های مختلف

ϕ_1	β_3	β_2	β_1	پارامترها	τ	توزیع خطاها	روش
۰٫۰۲۵	۰٫۰۱۸	−۰٫۰۳۴	−۰٫۰۲۴	Bias	۰٫۲۵	$N(0,1)$	رگرسیون چندکی
۱٫۳۸۰	۱٫۲۸۴	۱٫۰۰۰	۱٫۵۰۰	RMSE			
۰٫۰۱۷	−۰٫۰۰۲	−۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۵	Bias	۰٫۵		
۰٫۹۷۱	۱٫۲۷۱	۱٫۰۷۵	۱٫۵۰۰	RMSE			
۰٫۰۲۴	−۰٫۰۶۵	−۰٫۰۲۷	۰٫۰۱۵	Bias	۰٫۷۵		
۱٫۳۲۴	۱٫۱۷۹	۱٫۰۰۶	۱٫۱۶۹	RMSE			
۰٫۰۲۵	−۰٫۰۱۳	−۰٫۰۱۴	۰٫۰۱۶	Bias			حداقل مربعات
۲٫۳۰۹	۱٫۲۴۵	۰٫۸۴۲	۰٫۸۳۸	RMSE			
۰٫۰۶۰	−۰٫۰۱۰	۰٫۰۱۳	−۰٫۰۱۳	Bias			رگرسیون چندکی ترکیبی
۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	RMSE			
−۰٫۰۲۳	۰٫۰۳۰	۰٫۰۱۶	−۰٫۰۴۹	Bias	۰٫۲۵	$\chi^2_{(1)}$	رگرسیون چندکی
۰٫۵۸۰	۰٫۷۶۸	۰٫۵۹۲	۰٫۶۶۳	RMSE			
−۰٫۰۷۸	−۰٫۰۵۹	۰٫۰۲۶	۰٫۰۰۲	Bias	۰٫۵		
۱٫۵۴۸	۰٫۸۳۳	۰٫۸۷۲	۰٫۶۸۶	RMSE			
−۰٫۱۹۲	۰٫۰۰۵	۰٫۰۴۲	۰٫۰۸۶	Bias	۰٫۷۵		
۱٫۵۶۴	۱٫۲۱۰	۱٫۴۹۶	۰٫۸۷۲	RMSE			
−۰٫۴۶۱	۰٫۰۲۰	−۰٫۰۰۹	۰٫۰۲۲	Bias			حداقل مربعات
۷٫۴۶۷	۲٫۷۳۱	۳٫۲۹۶	۱٫۷۲۶	RMSE			
−۰٫۰۴۸	۰٫۰۶۹	۰٫۰۰۸	−۰٫۰۹۰	Bias			رگرسیون چندکی ترکیبی
۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	RMSE			
۰٫۰۳۴	۰٫۱۲۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۵	Bias	۰٫۲۵	آمیخته	رگرسیون چندکی
۱٫۲۴۳	۲٫۱۵۱	۱٫۱۳۸	۱٫۲۹۸	RMSE			
۰٫۰۲۰	−۰٫۰۲۳	−۰٫۰۰۵	۰٫۰۰۹	Bias	۰٫۵		
۰٫۸۹۲	۱٫۵۲۲	۱٫۱۰۸	۰٫۹۳۷	RMSE			
−۰٫۰۰۶	۰٫۰۲۱	۰٫۰۰۱	۰٫۰۴۸	Bias	۰٫۷۵		
۱٫۲۱۶	۱٫۵۵۳	۱٫۰۰۹	۱٫۰۸۰	RMSE			
۰٫۰۲۸	۰٫۰۰۴	۰٫۰۲۲	−۰٫۰۱۵	Bias			حداقل مربعات
۲٫۱۳۵	۱٫۶۵۱	۰٫۹۶۵	۱٫۳۵۶	RMSE			
۰٫۰۶۰	۰٫۰۰۱	−۰٫۰۱۵	−۰٫۰۰۰	Bias			رگرسیون چندکی ترکیبی
۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	RMSE			

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به مطالعه شبیه‌سازی انجام شده در این مقاله، مشاهده می‌شود که مدل رگرسیون چندکی ترکیبی وزنی اغلب اوقات عملکرد بهتری در برآورد ضرایب رگرسیونی و پارامترهای اتورگرسیو نسبت به مدل‌های رگرسیون چندکی و حداقل مربعات داشته است.

مراجع

1. A.P. Dempster, N.M. Lird, D.B. Rubin, *Maximum likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*, JR.Roy.Statist.Soc.Ser.B 39 (1977), no. 1, 1–38.
2. R. Koenker, J. Bassett, *Regression Quantiles*, Econometrica, 46 (1978), no. 1, 33–50.
3. H. Kozumi, G. Kobayashi, *Gibbs sampling methods of Bayesian quantile regression*, J.Stat.Comput.Simul. 81 (2011), no. 11, 1565–1578.
4. Y. Tian, M. Tang, Y. Zang, M. Tian, *Quantile regression for linear models with autoregressive errors using EM algorithm*, Comput.Statist. 33 (2018), no. 4, 1605–1625.
5. K. Yu, R.A. Moyeed, *Bayesian quantile regression*, Statist.Probab.Lett., 54 (2001), no. 4, 437–447.
6. H. Zau, M. Yuan, *Composite quantile regression and the oracle model selection theory*, Ann.Statist., 36 (2008), no. 3, 1108–1126.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

یک روش بلوکی هیبریدی برای معادلات دیفرانسیل تاخیری

مرتضی بیشه نیاسر[۱,*] ، سمیرا بنی‌مهدی دهکردی[۱]
دانشکده علوم ریاضی،دانشگاه کاشان،کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله سعی می‌کنیم یک نمونه از روش‌های بلوکی هیبریدی، که برای معادلات دیفرانسیل معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرد را به کمک درونیابی برای معادله دیفرانسیل تأخیری مورد استفاده قرار دهیم. مفاهیم سازگاری، صفر پایداری روش بررسی می‌شود. دقت و کارایی روش به وسیله چندین روش مورد آزمایش قرار می‌گیرد.
واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل تأخیری، روش‌های بلوک هیبریدی، سازگاری، صفر پایداری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65L05.

۱. مقدمه

معادلات دیفراسیل معمولی برای توصیف سیستم‌هایی است که قوانین لحظه‌ای علیت را توصیف می‌کنند، به این معنی که آهنگ تغییرات سیستم تنها به زمان حال بستگی دارد، نه به زمان گذشته [۱]. در مواردی که آهنگ تغییرات علاوه بر زمان حال، به زمان گذشته نیز وابسته است، به منظور تشریح مناسب‌تر و شبیه‌سازی واقع‌گرایانه‌تر، معادلات دیفرانسیل تأخیری[۱] (DDEs) مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌طور مثال در بسیاری از حوزه‌های مهندسی، پزشکی، دارویی، بیولوژیکی و شیمی به منظور مدل‌سازی بهتر فرآیند، از معادلات دیفرانسیل تأخیری استفاده می‌شود. یک معادله دیفرانسیل تأخیری مرتبه اول را می‌توان به فرم

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x), y(x-\tau)), & x > x_0 \\ y(x) = \varphi(x). & x < x_0 \end{cases} \tag{۱}$$

بیان کرد که $\varphi(x)$ تابع اولیه و $\tau = \tau(x, y(x))$ را جمله تأخیر می‌نامیم. در مواردی که یافتن جواب تحلیلی معادله دشوار باشد، استفاده از روش‌های عددی برای تقریب جواب توصیه می‌شود. روش‌های گوناگونی برای تقریب جواب (۱)مورد استفاده قرار گرفته است. برای نمونه در [۲]، محققین با استفاده از رانگ–کوتا و درونیابی به تقریب معادله (۱) پرداختند. روش‌های تکراری وردشی [۳]، روش‌های بلوکی در فرم آدامز–مولتون [۵] و روش تجزیه آدمیان [۴] از جمله روش‌هایی است که برای حل معادلات تأخیری توسط پژوهشگران مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله سعی داریم از یک روش بلوکی هیبریدی با یک نقطه بین‌گامی و درونیابی برای تقریب معادله (۱) استفاده کنیم. از روش‌های بلوکی هیبریدی به‌طور گسترده در حل معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود. مزیت اصلی این روش‌های ضمنی، این است که خودآغازگر هستند. این دسته از روش‌ها به راحتی قابل بسط و گسترش می‌باشند.

*سخنران. آدرس ایمیل: mbisheh@kashanu.ac.ir

[1]Delay Differential Equations

۲. روش بلوکی هیبریدی با یک نقطه بین‌گامی

در این قسمت قصد داریم برای حل معادله (۱) به همراه شرط متناظرش یک روش بلوکی هیبریدی براساس درونیابی و هم مکانی به‌دست آوریم. در ابتدا بازه $[۰, X]$ را با طول گام ثابت h به زیر بازه‌های متساوی‌الفاصله تقسیم‌بندی می‌کنیم به طوری‌که $\{x_۰, x_۱, \cdots, x_N\}$ را به عنوان نقاط گره‌ای اصلی تعریف می‌کنیم و $x_i = ih$، $i = ۰, ۱, \cdots, N$. اگر جواب تقریبی معادله را به‌صورت $y(x) = \sum_{i=۰}^{۳} a_i x^i$ در نظر بگیریم آنگاه $y'(x) = \sum_{i=۱}^{۳} i a_i x^{i-۱}$. با فرض درونیابی y در نقطه x_n و هم مکانی y' در x_n, x_{n+r} و $x_{n+۱}$ دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & x_n & x_n^۲ & x_n^۳ \\ ۰ & ۱ & ۲x_n & ۳x_n^۲ \\ ۰ & ۱ & ۲x_{n+r} & ۳x_{n+r}^۲ \\ ۰ & ۱ & ۲x_{n+۱} & ۳x_{n+۱}^۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ f_n \\ f_{n+r} \\ f_{n+۱} \end{bmatrix}$$

که $x_n < x_{n+r} < x_{n+۱}$. با حل دستگاه فوق و جایگذاری $x = x_n + th$، $x_{n+r} = x_n + rh$ و $x_{n+۱} = x_n + h$، می‌توان $y(t)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$y(t) = b_۰ y_n + b_۱ f_n + b_۲ f_{n+r} + b_۳ f_{n+۱},$$

که در آن $b_۰ = ۱,\ b_۱ = -\frac{۱}{۶}\frac{(۳rt - ۲t^۲ - ۶r + ۳t)th}{r},\ b_۲ = \frac{۱}{۶}\frac{ht^۲(-۳+۲t)}{r(r-۱)},\ b_۳ = \frac{۱}{۶}\frac{ht^۲(۳r-۲t)}{r-۱}$. ابتدا در فوق با فرض $t = ۱$ عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$y_{n+۱} = c_۰ y_n + c_۱ f_n + c_۲ f_{n+r} + c_۳ f_{n+۱},$$

که در آن $c_۰ = ۱,\ c_۱ = \frac{h(۱-۳r)}{۶(r^۲-r)},\ c_۲ = \frac{h}{۶(r^۲-r)},\ c_۳ = \frac{h(-۲+۳r)}{۶(r-۱)}$. برای انتخاب r بهینه، خطای برشی موضعی را روی $y(x_{n+۱})$ اعمال می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\{y(x_{n+۱}), h\} = \frac{h^۴}{۷۲}(۲r - ۱)y^{(۴)}(x_n) + \cdots$$

بنابراین برای افزایش مرتبه، کافی است $r = \frac{۱}{۲}$ انتخاب شود. لذا به ازای $t = ۱, \frac{۱}{۲}$، روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y_{n+۱} = y_n + \frac{h}{۶}(f_n + ۴f_{n+\frac{۱}{۲}} + f_{n+۱}) \\ y_{n+\frac{۱}{۲}} = y_n + \frac{h}{۲۴}(۵f_n + ۸f_{n+\frac{۱}{۲}} - f_{n+۱}) \end{cases} \quad (۲)$$

برای معادلات دیفرانسیل معمولی با داشتن y_n، و حل همزمان دو معادله فوق روی $[x_n, x_{n+۱}]$، می‌توان $y_{n+\frac{۱}{۲}}$ و $y_{n+۱}$ را به‌دست آورد. همین فرآیند را پس از ذخیره $y_{n+۱}$ می‌توان روی بازه $[x_{n+۱}, x_{n+۲}]$ بکار گرفت.

۳. مشخصه‌های روش

برای پی بردن به مرتبه روش کافی است خطای برشی موضعی را روی هر دو معادله (۲) اعمال کنیم:

$$\mathcal{L}\{y(x_{n+۱}), h\} = -\frac{h^۵}{۲۸۸۰}y^{(۵)}(x_n) + \cdots$$

$$\mathcal{L}\left\{y(x_{n+\frac{۱}{۲}}), h\right\} = \frac{h^۴}{۳۸۴}h^۴ y^{(۴)}(x_n) + \cdots$$

لذا روش دارای مرتبه $P = ۳$ و ثابت خطای $(۰, \frac{۱}{۳۸۴})^T$ می‌باشد. برای بررسی صفر پایداری، کافی است معادلات(۲)را در شکل ماتریسی بیان کنیم:

$$A_۱ Y_{n+۱} = A_۰ Y_n + h(B_۰ F_n + B_۱ F_{n+۱}) \quad (۳)$$

که در آن:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, F_{n+1}=\begin{bmatrix}f_{n+1}\\ f_{n+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}, F_n=\begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}, B_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ \frac{5}{24} & 0\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{4}{6}\\ -\frac{1}{24} & \frac{8}{24}\end{bmatrix},$$

$$Y_{n+1}=\begin{bmatrix}y_{n+1}\\ y_{n+\frac{1}{2}}\end{bmatrix}, Y_n=\begin{bmatrix}y_n\\ y_{n-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}.$$

به این ترتیب چندجمله‌ای مشخصه نوع اول $\rho(z)$ متناظر با معادله (۳) عبارت‌است از

$$\rho(z)=\det(zA_1-A_0)=z(z-1).$$

ریشه‌های آن عبارت‌است از $z_0=0$ و $z_1=1$، لذا در شرط ریشه صدق می‌کند و بنابراین روش مورد نظر صفر پایدار است. حال بنا به سازگاری و صفر پایداری می‌توان همگرایی روش را نتیجه گرفت. در مورد اعمال این روش برای معادلات دیفرانسیل تأخیری، برای محاسبه $y(x_n-\tau)$ چند حالت پیش می‌آید. اگر $x_n-\tau\leqslant 0$، آنگاه بنا به تابع اولیه می‌توان $y(x_n-\tau)$ را محاسبه کرد. اگر $x_n-\tau>0$ و جز نقاط گره‌ای باشد می‌توان بنا به محاسبات قبلی $y(x_n-\tau)$ را به‌دست آورد. اگر $x_n-\tau>0$ و جز نقاط گره‌ای نباشد، کافی است مشخص کنیم $x_n-\tau$ در کدام زیر بازه قبلی قرار دارد، تا با اعمال درونیابی بر اساس نقاط طرفین زیر بازه و نقطه میانی آن زیر بازه $y(x_n-\tau)$ را تقریب زد. همین فرآیند را می‌توان برای $y(x_{n+\frac{1}{2}}-\tau)$ و $y(x_{n+1}-\tau)$ اعمال کرد. با حل همزمان معادله (۲) می‌توان جواب را به‌دست آورد.

۴. نتایج عددی

در این بخش در ابتدا سعی می‌کنیم روش مورد نظر را روی یک معادله دیفرانسیل معمولی اعمال کنیم و سپس کارایی روش را روی چند معادله دیفرانسیل تأخیری، مورد بررسی قرار دهیم. تمام نتایج با استفاده از نرم افزار Maple بدست آمده است.

مثال ۱.۴. معادله ریکاتی زیر را به همراه شرط اولیه آن در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'=1+2y-y^2, & x\in[0,10]\\ y(0)=1+\sqrt{2}\tanh[\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}] \end{cases}$$

جواب واقعی معادله فوق عبارت‌است از $y=1+\sqrt{2}\tanh[\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}]$. ماکزیمم خطای مطلق به ازای h های متفاوت را می‌توانید در جدول ۱ مشاهده کنید:

جدول ۱. ماکزیمم خطای مطلق به ازای h های مختلف، برای مثال ۱.۴.

	$h=0/25$	$h=0/2$	$h=0/1$	$h=0/05$
$\max\lvert y_n-y(x_n)\rvert$	$9/36e-5$	$3/77e-5$	$2/43e-6$	$1/52e-7$

مثال ۲.۴. شاید بتوان ساده‌ترین معادله تأخیری را معادله

$$\begin{cases} y'=-y(x-\frac{\pi}{2}), & 0<x<X,\\ y(x)=\sin x. & x\leqslant 0 \end{cases}$$

بیان کرد. این معادله دارای جمله تأخیری ثابت $\tau=\frac{\pi}{2}$ است و جواب تحلیلی معادله عبارت‌است از $y(x)=\sin x$. در جدول ۲ می‌توانید ماکزیمم خطای رخ داده به ازای h های گوناگون و $X=5$ را ملاحظه نمایید.

مثال ۳.۴. معادله دیفرانسیل تأخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'(x)=y(x-\tau)-y(x)+2x-\tau^2+2x\tau-\tau-1, & x\in[0,1]\\ y(x)=x^2-x, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

جدول ۲. ماکزیمم خطا برای h های مختلف به ازای $X = ۵$، برای مثال ۲.۴

	$h = ۰/۵$	$h = ۰/۲۵$	$h = ۰/۱$	$h = ۰/۰۵$
$\max \lvert y(x_i) - y_i \rvert$	$۴/۵۰e-۴$	$۸/۸۰e-۵$	$۴/۱۵e-۶$	$۴/۹۴e-۷$
cpu time	۰/۲۶۵	۰/۳۵۶	۰/۶۲۵	۱/۰۳۵

جواب واقعی معادله فوق عبارت‌است از $y(x) = x^۲ - x$. به ازای h, τ های مختلف می‌توانید ماکزیمم خطای مطلق حاصل شده را در جدول ۳ مشاهده کنید:

جدول ۳. ماکزیمم خطای مطلق به ازای h, τ های مختلف، برای مثال ۳.۴

	$\tau = h$	$\tau = ۲h$	$\tau = ۰/۱۰۵$	$\tau = ۰/۱۵۷$
$h = ۰/۱$	$۶/۰۰e-۲۰$	$۶/۰۰e-۲۰$	$۷/۶۴e-۲۰$	$۶/۰۰e-۲۰$
$h = ۰/۰۵$	$۲/۷۱۸e-۱۹$	$۲/۷۰۱e-۱۹$	$۲/۶۹e-۱۹$	$۲/۶۹e-۱۹$
$h = ۰/۰۲$	$۷/۵۷۵e-۲۰$	$۷/۵۸۰e-۲۰$	$۷/۵۰e-۲۰$	$۷/۵۷e-۲۰$

مثال ۴.۴. معادله تأخیری زیر را به همراه تابع اولیه آن را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y' = y(x) - y(x-\pi) + ۳\cos x + ۵\sin x, & ۰ \leqslant x \leqslant X \\ y(x) = ۳\sin x - ۵\cos x, & x \leq ۰. \end{cases}$$

جواب تحلیلی معادله عبارت‌است از $y(x) = ۳\sin x - ۵\cos x$. نتایج را در جدول ۴ مشاهده نمایید.

جدول ۴. رفتار خطا به ازای طول گام‌های مختلف برای $X = ۴$، برای مثال ۴.۴

	$h = ۰/۲۵$	$h = ۰/۱$	$h = ۰/۰۵$
$\max \lvert y(x_i) - y_i \rvert$	$۵/۴۷e-۴$	$۳/۴۳e-۵$	$۵/۰۰e-۷$
cpu time	۰/۲۸۵	۰/۴۲۷	۰/۸۱۲

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش بلوکی هیبریدی با یک نقطه بهینه بین‌گامی برای حل عددی معادله دیفرانسیل ساخته شد و سازگاری و صفر پایداری آن بررسی شد. از روش مذکور با کمک درونیابی توانستیم در تقریب جواب عددی معادله دیفرانسیل تأخیری استفاده کنیم. نتایج عددی بیانگر دقت و کارایی روش می‌باشد.

مراجع

۱. م. ر. رزوان، ن. فرجزاده طهرانی، آشنایی با معادلات دیفرانسیل تأخیری، فرهنگ و اندیشه ریاضی ۳۸ (۱۳۹۸)، شماره ۶۵، ۱۶۰-۱۴۳.

2. F. Ismail, R. A. Al-Khasawneh, A. S. Lwin, M. Suleiman, Numerical Treatment of Delay Differential Equations by Runge-Kutta Method Using Hermite Interpolation, Matematika, Jilid 18, Bil. 2, hlm. (2002), 79–90.

3. M. M. Khader, Numerical and Theoretical Treatment for Solving Linear and Nonlinear Delay Differential Equations using Variational Iteration Method, Arab Journal of Mathematical Sciences, 19 (2013), no. 2, 243–256.

4. F. O. Ogunfiditimi, Numerical Solution of Delay Differential Equations Using the Adomian Decomposition Method (ADM), The International Journal of Engineering and Science, 4 (2015),no. 5, 18–23.

5. H. Y. Seong, Z. A. Majid, Solving Second Order Delay Differential Equations Using Direct Two-Point Block Method, Ain Shams Engineering Journal, 8 (2017), no. 1, 59–66.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

قیمت‌گذاری اختیارمعامله با فرض همبستگی در بازه‌ها

حدیث پردلی[۱،*] و محمدحسین دریایی[۲]

[۱]بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲]بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. در اکثر پژوهش‌های ریاضی مالی مربوط به اختیارمعامله با چندداراییی، ضریب همبستگی قیمت‌های همه دارایی‌ها ثابت فرض شده است. در حالیکه محققان بر اساس داده‌های بازار نشان داده‌اند که همبستگی، فرآیندی تصادفی است. در این مقاله، مدل قیمت‌گذاری اختیارمعامله با دارایی‌های همبسته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این مدل را برای همبستگی دارایی‌های پایه در حالت ثابت و تصادفی بررسی و در انتها جواب مدل‌های ریاضی حاصل را با روش تفاضلات متناهی محاسبه می‌کنیم. ما بیشتر در مورد نحوه حل معادله‌ي بلک-بارنبلات از طریق روشهای تفاضلات متناهی بحث می‌کنیم. و روشی را برای نحوه شناسایی فرصت آربیتراژ در بازه‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله چندداراییی ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه‌تصادفی، قیمت‌گذاری اختیارمعامله، معادله‌ي بلک-بارنبلات.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 91G10, 91G20.

۱. مقدمه

قراردادهای اختیارمعامله در چند دهه اخیر مورد مطالعه گسترده قرار گرفته‌اند. اولین معاملات اختیار خرید و اختیار فروش در اروپا و آمریکا به اوایل قرن هجدهم برمی‌گردد. در اوایل دهه‌ی ۱۸۹۰ میلادی، گروهی از شرکت‌ها به ایجاد یک بازار اختیارمعامله اقدام کردند. اختیارها سهم مهمی در بازارهای مالی از لحاظ مدیریت ریسک و ایجاد اهرم مالی در اختیار دارند. به لحاظ اهمیت اختیارها، محققین ریاضی مالی به مطالعه و بررسی مدل‌هایی برای قیمت‌گذاری اختیارها پرداخته‌اند. یکی از مدل‌های مشهور در بازارهای مالی برای قیمت‌گذاری اختیارها، مدل بلک-شولز است. فیشر بلک و مایرون شولز سبدی شامل دارایی پایه و اختیار تحت شرایط بدون آربیتراژ با اعمال فرض‌هایی برای بازار، جهت تعیین قیمت اختیار به کار گرفتند [۱].

قیمت‌گذاری اختیار معاملات با چندداراییی پایه یکی از انواع معادلاتی می‌باشد که به دلیل بعد بالای مساله، حل آن‌ها با چالش هزینه محاسباتی روبه‌رو است.در این پژوهش ما راه‌حل‌هایی را ارائه داده‌ایم. ازطرفی اختیارها سهم مهمی در بازارهای مالی از لحاظ مدیریت ریسک و ایجاد اهرم مالی دارند، به این معنی که سرمایه‌گذار به جای خرید دارایی پایه در بازار نقدی، می‌تواند با واردشدن به بازار اختیارات و اتخاذ موقعیت خرید، با سرمایه‌گذاری کمتری این دارایی‌های پایه را تهیه کند. با سرمایه‌گذاری در قراردادهای اختیارمعامله سرمایه‌گذار نسبت به حالت سرمایه‌گذاری مستقیم در یک دارایی پایه به پول کمتری نیاز خواهد داشت و می‌تواند از این طریق سود زیادی کسب کند. اهرمی‌بودن یک ابزار مالی، تکنیکی برای چند برابرکردن سود و زیان است و اهرمی‌بودن اختیارات، جذابیت آن ها را بیشتر کرده و همچنین باعث متنوع‌سازی مناسب در سبد سرمایه‌گذار شده و در نتیجه باعث جذب بیشتر سرمایه‌گذاران و افزایش نقدینگی بازار می‌شود. ازطرفی سرمایه‌گذار می‌تواند با استفاده از اختیارمعامله و بدون در اختیار داشتن دارایی پایه از نوسان قیمت آن سود ببرد. همچنین اختیارات باعث افزایش کارایی بازار اوراق بهادار می‌شوند، به این معنی که باعث از بین رفتن فرصت‌های آربیتراژ و همگرایی قیمت اوراق بهادار به ارزش ذاتی(واقعی)خواهند شد [۲].

*سخنران. آدرس ایمیل: h.pordeli1993@gmail.com

وو یان، جیانمین (۲۰۰۲) مسالهٔ قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله چندارایی را بررسی کرد، میلیگان (۲۰۰۶) در مورد روش عددی برای حل مدل قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله چندارایی بحث کرد. اما هر دو آنها فرض می‌کنند که رابطه همبستگی بین اوراق‌های اختیارمعامله موجود ثابت است.
ما برای قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله چندارایی بر این فرض متمرکز می‌شویم که همبستگی بین دارایی مورد نظر در یک محدوده تغییر می‌کند و در صورتی‌که تغییر همبستگی را کنترل کنیم، میتوانیم محدوده قیمت اوراق اختیارمعامله چندارایی را شناسایی کنیم.

۲. مدل قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله چندارایی بر اساس کنترل بهینه تصادفی

قیمت اوراق اختیارمعامله چندارایی ریسک‌دار در زمان t، $S_i(t), (i = ۱, ۲, ..., n)$ است که با رابطه‌ی $h(S_۱(T), S_۲(T), , S_n(T))$ در زمان سررسید T است (تابع h تابع اندازه‌پذیر بورل است). با فرض اینکه قیمت دارایی‌های ریسک‌دار برگرفته از حرکت برونی هندسی هستند، فرمول زیر را داریم:

$$dS_i(t) = r(t)S_i(t)dt + S_i(t)\sigma_i(t)dW_i(t), \quad (i = ۱, ۲, ..., n).$$

همچنین اگر $\rho_{ij}(t)$ همبستگی بین iامین و jامین دارایی ریسک‌دار باشد، آنگاه

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}(t)dt, \quad (۱ \le i, j \le n, \ ۰ \le \rho_{ij} \le ۱).$$

توجه کنید که $\sigma_i(t)$ نوسان قیمت دارایی iام، $r(t)$ بازده بدون ریسک (که در فرمول بلک-شولز ثابت فرض می‌شود) است و $W_i(t)$ حرکت برونی استاندارد است. بنابراین تابع قیمت اوراق اختیارمعامله چندارایی بصورت زیر است [۲،۳]:

$$V(t) = E[e^{-\int_t^T r(s)ds} h(S_۱(T), S_۲(T), ..., S_n(T))|F(t)].$$

رابطه همبستگی بین دو موجودی به شدت تحت تأثیر ویژگی‌های آنها است، داده‌های تاریخی نشان می‌دهد که این همبستگی ثابت نیست. ما فرض می‌کنیم که رابطه همبستگی بین دو سهم متغیر است و همچنین همبستگی بین دارایی iام و jام در یک بازه تغییر می‌کند:

$$\rho_{ij}^- \le \rho_{ij} \le \rho_{ij}^+, \quad (۱ \le i, j \le n).$$

۳. تبدیل مسالهٔ قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله چندارایی به مسالهٔ کنترل بهینه تصادفی

از آنجایی‌که ρ_{ij} غیرقطعی و متغیر است، روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله نامحدود، و یافتن یک مقدار مشخص به عنوان قیمت اوراق اختیارمعامله چندارایی سخت و دشوار است. اما ما مقادیر ماکزیمم و مینیمم مربوط به ρ_{ij} را داریم. پس می‌توانیم روش قیمت‌گذاری اوراق اختیارمعامله را از طریق یافتن مقادیر قیمت بالایی اختیار معامله ($V^+(S,t)$) و قیمت پایینی اختیار معامله ($V^-(S,t)$) ارائه کنیم. می‌توان این مساله را از طریق تئوری کنترل بهینه تصادفی حل کرد. در واقع با در نظرگرفتن قیمت دارایی ریسک‌دار به عنوان متغیرهای وضعیت و قیمت اوراق اختیارمعامله دارایی به عنوان تابع هدف، سیستم کنترل بهینه را ایجاد می‌کنیم. فرض کنید تابع کنترل $u_{ij}(.)$ کنترل‌کنندهٔ نوسان همبستگی باشد. پس $u_{ij}(.) = \rho_{ij}, \ (۱ \le i, j \le n)$. معادله حالت به این‌صورت نوشته می شود [۲]:

$$\begin{cases} dS_i(t) = r(t)S_i(t)dt + S_i(t)\sigma_i(t)dW_i(t), & (۱ \le i \le n) \\ dW_i(t)dW_j(t) = u_{ij}dt, & (۱ \le i \ne j \le n) \\ S_i(t) = S_i, & (۱ \le i \le n). \end{cases}$$

از آنجایی‌که $\rho_{ij}^- \le \rho_{ij} \le \rho_{ij}^+$، مجموعهٔ کنترل بصورت زیر است:

$$u_{ij}(.) \in \Omega[t,T] = \{u_{ij}(.) : [t,T] \longrightarrow [\rho_{ij}^-, \rho_{ij}^+]\}, \quad (۱ \le i \ne j \le n)$$

و تابع کنترل بصورت $J(u(.)) = E[h(S_۱(T), S_۲(T), ..., S_n(T))]$ است. کران پایین بازهٔ قیمت اختیار معامله با حل مسالهٔ S^- (یافتن تابع کنترل بهینه $\underline{u}(.)$ بطوریکه $J(\underline{u}(.)) = \inf_{u(.)\in\Omega[t,T]} J(u(.))$) و کران بالای بازهٔ قیمت اختیار معامله با حل مسالهٔ S^+ (یافتن تابع کنترل بهینه $\overline{u}(.)$ بطوریکه $J(\overline{u}(.)) = \sup_{u(.)\in\Omega[t,T]} J(u(.))$) بدست می‌آیند.

۴. حل مساله از طریق اصل برنامه‌ریزی پویا بلمن

بر طبق اصل برنامه‌ریزی پویای بلمن، تابع مقدار S_{tS}^{-} به این‌صورت است:

$$\begin{cases} U(t,S) = \inf_{u(.)\in\Omega} J(t,S;u(.)) \\ U(t,S) = e^{-r(t-T)}h(S) \end{cases}$$

که باید در معادلهٔ همیلتون-ژاکوبی-بلمن صدق کند:

$$\begin{cases} -U_t^{-} + \sup_{u\in\Omega} G(t,S,u,-U_{S_i}^{-},-U_{S_iS_i}^{-},-U_{S_iS_j}^{-}) = ۰ \\ U^{-}|_{t=T} = e^{-r(t-T)}h(S) \end{cases}$$

که تابع تعمیم‌یافته همیلتون G بصورت زیر می‌باشد:

$$G(t,S,u,p_i,P_{ii},P_{ij}) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^{۲}S_i^{۲}P_{ii} + \sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j S_iS_j u_{ij}P_{ij} + r\sum_{i=۱}^{n}S_ip_i.$$

ماکزیمم تابع G را از دو جنبه در نظر می‌گیریم:

- اگر $P_{ij} > ۰$، آنگاه $-U_{S_iS_j}^{-} > ۰$. بنابراین $\underline{u}_{ij} = \rho_{ij}^{+}$ و

$$\sup_{u\in\Omega} G = -\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^{۲}S_i^{۲}\frac{\partial^{۲}U^{-}}{\partial S_{ij}^{۲}} - \sum_{i\neq j}\rho_{ij}^{+}\sigma_i\sigma_j S_iS_j\frac{\partial^{۲}U^{-}}{\partial S_i\partial S_j} - r\sum_{i=۱}^{n}S_i\frac{\partial U^{-}}{\partial S_i}$$

- اگر $P_{ij} < ۰$، آنگاه $-U_{S_iS_j}^{-} < ۰$. بنابراین $\underline{u}_{ij} = \rho_{ij}^{-}$ و

$$\sup_{u\in\Omega} G = -\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^{۲}S_i^{۲}\frac{\partial^{۲}U^{-}}{\partial S_{ij}^{۲}} - \sum_{i\neq j}\rho_{ij}^{-}\sigma_i\sigma_j S_iS_j\frac{\partial^{۲}U^{-}}{\partial S_i\partial S_j} - r\sum_{i=۱}^{n}S_i\frac{\partial U^{-}}{\partial S_i}$$

بنابراین معادلهٔ همیلتون- ژاکوبی- بلمن بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial U^{-}}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^{۲}S_i^{۲}\frac{\partial^{۲}U^{-}}{\partial S_{ij}^{۲}} + r\sum_{i=۱}^{n}S_i\frac{\partial U^{-}}{\partial S_i} + \sum_{i\neq j}\underline{\rho}_{ij}(U_{S_iS_j}^{-})\sigma_i\sigma_j S_iS_j\frac{\partial^{۲}U^{-}}{\partial S_i\partial S_j} = ۰ \\ U^{-}(S)|_{t=T} = e^{-r(t-T)}h(S(T)) \end{cases}$$

که $\underline{\rho}_{ij}(x) = \rho_{ij}^{+}I_{\{x<۰\}} + \rho_{ij}^{-}I_{\{x>۰\}}$ (I تابع مشخصه می‌باشد.)

بنابراین کران پایین بازهٔ قیمت اوراق اختیارمعامله چندارایی ($V^{-}(S,t)$) در مسالهٔ زیر صدق می‌کند:

$$(۱)\quad \begin{cases} \frac{\partial V^{-}}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^{۲}S_i^{۲}\frac{\partial^{۲}V^{-}}{\partial S_i^{۲}} + r\sum_{i=۱}^{n}S_i\frac{\partial V^{-}}{\partial S_i} + \sum_{i\neq j}\underline{\rho}_{ij}(V_{S_iS_j}^{-})\sigma_i\sigma_j S_iS_j\frac{\partial^{۲}V^{-}}{\partial S_i\partial S_j} - rV^{-} = ۰ \\ V^{-}(S)|_{t=T} = h(S(T)) \end{cases}$$

و کران بالای بازهٔ قیمت اوراق اختیارمعامله چندارایی ($V^{+}(S,t)$) در مسالهٔ زیر صدق می‌کند:

$$(۲)\quad \begin{cases} \frac{\partial V^{+}}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sigma_i^{۲}S_i^{۲}\frac{\partial^{۲}V^{+}}{\partial S_i^{۲}} + r\sum_{i=۱}^{n}S_i\frac{\partial V^{+}}{\partial S_i} + \sum_{i\neq j}\overline{\rho}_{ij}(V_{S_iS_j}^{+})\sigma_i\sigma_j S_iS_j\frac{\partial^{۲}V^{+}}{\partial S_i\partial S_j} - rV^{+} = ۰ \\ V^{+}(S)|_{t=T} = h(S(T)) \end{cases}$$

۵. راه‌حل‌های عددی برای مدل‌ها

اگر $S_۱$ و $S_۲$ قیمت دارایی‌های ریسک‌دار (که مقادیر ماکریمم‌شان به ترتیب $S_{۱\max}$ و $S_{۲\max}$ است) باشند، آنگاه گام‌های آنها $\delta S_۱ = \frac{S_{۱\max}}{M}$ و $\delta S_۲ = \frac{S_{۲\max}}{N}$ و گام زمان $\delta t = \frac{T}{K}$ است (M,N,K اعداد صحیح مثبت هستند).

اگر $V_{i,j}^K = V(i\delta S_۱, j\delta S_۲, T-k\delta t)$، با توجه به تقریب‌های زیر برای مشتقات

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k+۱}}{\delta t}, \quad \frac{\partial V}{\partial S_۱} \approx \frac{V_{i+۱,j}^k - V_{i-۱,j}^k}{۲\delta S_۱}, \quad \frac{\partial V}{\partial S_۲} \approx \frac{V_{i,j+۱}^k - V_{i,j-۱}^k}{۲\delta S_۲},$$
$$\frac{\partial^۲ V}{\partial S_۱^۲} \approx \frac{V_{i+۱,j}^k - ۲V_{i,j}^k + V_{i-۱,j}^k}{\delta S_۱^۲}, \quad \frac{\partial^۲ V}{\partial S_۲^۲} \approx \frac{V_{i,j+۱}^k - ۲V_{i,j}^k + V_{i,j-۱}^k}{\delta S_۲^۲},$$
$$\frac{\partial^۲ V}{\partial S_۱ \partial S_۲} \approx \frac{V_{i+۱,j+۱}^k - V_{i+۱,j-۱}^k - V_{i-۱,j+۱}^k + V_{i-۱,j-۱}^k}{۴\delta S_۱ \delta S_۲},$$

روش تفاضلات صریح برای مسالهٔ (۱) بصورت زیر است:

$$V_{i,j}^{k+۱} = a_{i,j}V_{i+۱,j+۱}^k + b_{i,j}V_{i+۱,j}^k + c_{i,j}V_{i+۱,j-۱}^k + d_{i,j}V_{i,j+۱}^k + e_{i,j}V_{i,j}^k + f_{i,j}V_{i,j}^k + g_{i,j}V_{i-۱,j+۱}^k + h_{i,j}V_{i-۱,j}^k + k_{i,j}V_{i-۱,j}^k$$

که $a_{i,j} = -c_{i,j} = -g_{i,j} = k_{i,j} = \frac{۱}{۴}ij\sigma_۱\sigma_۲\rho_{۱۲}\delta t$، $b_{i,j} = \frac{۱}{۲}(i^۲\sigma_۱^۲ + ri)\delta t$، $d_{i,j} = \frac{۱}{۲}(j^۲\sigma_۲^۲ + rj)\delta t$، $e_{i,j} = (i^۲\sigma_۱^۲ + j^۲\sigma_۲^۲ - r)\delta t + ۱$، $f_{i,j} = \frac{۱}{۲}(j^۲\sigma_۲^۲ - rj)\delta t$ و $h_{i,j} = \frac{۱}{۲}(i^۲\sigma_۱^۲ - ri)\delta t$.

$$\rho_{۱۲}(.) = \begin{cases} \rho_{۱۲}^+(.), & V_{S_۱S_۲}^+ < ۰ \\ \rho_{۱۲}^-(.), & V_{S_۱S_۲}^+ > ۰ \end{cases} \quad ،\rho_{۱۲}(.) = \begin{cases} \rho_{۱۲}^+(.), & V_{S_۱S_۲}^- < ۰ \\ \rho_{۱۲}^-(.), & V_{S_۱S_۲}^- > ۰ \end{cases}$$

شرایط مرزی بصورت زیر است:

$$V_{۰,j}^k = \max(j\delta S_۲, X) - X,\ V_{M,j}^k = S_{۱\max} - X,\ V_{i,۰}^k = \max(i\delta S_۱, X) - X,$$
$$V_{i,N}^k = S_{۲\max} - X,\ V_{i,j}^k = \max(i\delta S_۱, j\delta S_۲, X) - X$$

که X قیمت اختیارمعامله توافقی است.

بطور مشابه می‌توان روش تفاضلات صریح برای مسالهٔ (۲) را بدست آورد.

بنابراین بازهٔ قیمت اوراق اختیارمعامله دو دارایی طی مراحل زیر بدست می‌آید: ابتدا مقادیر اولیه $S_۱$، $S_۲$، $S_{۱\max}$، $S_{۲\max}$، M، N، K، $\rho_{۱۲}^+$ و $\rho_{۱۲}^-$ را تعیین می‌کنیم. سپس $V_{i,j}^K$ را بدست می‌آوریم و در نهایت کرانهای قیمت را بدست می‌آوریم (یعنی $V_{i,j}^k$ به ازای $i = \frac{S_۱}{\delta S_۱}, j = \frac{S_۲}{\delta S_۲}$).

۶. نتیجه گیری

با توجه به متغیربودن همبستگی بین دارایی‌های ریسک‌دار، در این پژوهش ما بازهٔ قیمت اوراق اختیار معامله را تعیین کردیم.

مراجع

1. Y. Du, *Multi-Asset Option Pricing Based on Stochastic Optimal Control Assuming Correlations Lie in Given Intervals*, 29th Chinese Control And Decision Conference, 2017.
2. G.H. Meyer *The Black Scholes Barenblatt Equation for Options with Uncertain Volatility and its Application to Static Hedging*, School of Mathematics Georgia Institute of Technology Atlanta, GA30332-0160, USA, October 2004.
3. S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance(I,II)*, NewYork, Springer, 2003.

پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بررسی مدل‌های چند سطحی خطی بر پایه توزیع چوله نرمال

رضا پورموسی[۱,*] ، پردیس ثمره پورقمه[۱]
[۱] دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش آمار

چکیده. در بسیاری از موارد، برای بررسی اثر یك عامل بر روی عامل دیگر، متوجه می‌شویم که عامل دیگری در سطوح بالاتر بر روی عوامل زیرین تأثیرگذار است. در چنین مواقع ما با داده‌های چند سطحی رو به رو هستیم، که در چنین مواردی مدل‌های سلسله مراتبی یا مدل‌های چند سطحی را به آنها برازش می‌دهیم. هم‌چنین در مدل‌های رگرسیونی یك فرضیه معمول وجود دارد که آن نرمال بودن خطا و اثرات تصادفی است. اما ممکن است این فرض، غیر واقع بینانه باشد و ویژگی‌های مهم تغییرات بین گروه و درون گروه را مبهم سازد. برای این مشکل فرض می‌کنیم که خطا و اثر تصادفی دارای توزیع آمیخته چوله نرمال هستند. در این مقاله مدل‌های چند سطحی بر اساس فرضیاتی که دارای توزیع چوله نرمال هستند، معرفی شده است. هم‌چنین در این مقاله ابتدا مدل اثرات آمیخته خطی چوله نرمال معرفی و سپس برآورد پارامترهای مدل را با استفاده از الگوریتم EM بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های چند سطحی، مدل سلسله مراتبی، توزیع چوله نرمال، آمیخته مقیاسی، الگوریتم EM .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60E05, 62J05.

۱. مقدمه

در چند دهه‌ی اخیر محققان تلاش بسیار زیادی را برای ساخت و تعمیم توزیع‌های مناسب برای مدل‌سازی داده‌های چند سطحی به کار برده‌اند. اندرسون و هایند (۱۹۸۸)، وربک و لیسافر (۱۹۹۶)، ژانگ و داویدین (۲۰۰۱) و گلمن و هیل (۲۰۰۶) به معرفی مدل‌های خطی آمیخته با اثرات تصادفی برای مدل‌سازی داده‌های چند سطحی پرداخته‌اند. نرمال بودن اثرات تصادفی و خطاهای درون گروهی، یک فرضیه‌ی معمول برای مدل‌های چندسطحی است، اما این کار غیر منطقی است و ویژگی‌های مهم تغییرات بین و درون گروه را مبهم می‌سازد. در این مقاله فرض می‌شود که اثرات تصادفی و خطاهای مدل از توزیع چوله نرمال پیروی می‌کنند.

۲. مدل‌های چند سطحی خطی بر پایه توزیع چوله نرمال

مدل آمیخته خطی چوله نرمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{Y}_j = X_j\boldsymbol{\beta} + Z_j\boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j \qquad (۱)$$

که در آن

$$\boldsymbol{b}_j \overset{iid}{\sim} SN_q(۰, \psi, \boldsymbol{\lambda}_b), \quad \boldsymbol{\epsilon}_j \overset{ind}{\sim} SN_{n_j}(۰, (\sigma^۲\boldsymbol{I})_j, \boldsymbol{\lambda}_{ej}), \quad j = ۱, \ldots, m$$

و $\boldsymbol{b}_j$ و $\boldsymbol{\epsilon}_j$ از یکدیگر مستقل هستند، که منجر به مدل سلسله مراتبی زیر می‌شود:

$$\boldsymbol{Y}_j|\boldsymbol{b}_j \overset{ind}{\sim} SN_{n_j}(X_j\boldsymbol{\beta} + Z_j\boldsymbol{b_j}, (\sigma^۲\boldsymbol{I})_j, \boldsymbol{\lambda}_{ej}) \quad , \boldsymbol{b}_j \overset{ind}{\sim} SN_q(۰, \psi, \boldsymbol{\lambda}_b), \quad j = ۱, \ldots, m\ . \qquad (۲)$$

*سخنران. آدرس ایمیل: Pourm@uk.ac.ir

با توجه به ویژگی‌های توزیع چوله نرمال داریم:

$$E[\boldsymbol{Y}_j] = X_j\boldsymbol{\beta} + E[Z_j\boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j] = X_j\boldsymbol{\beta} + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\big(\boldsymbol{Z}_j\psi^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{\delta}_b + (\sigma^۲\boldsymbol{I})_j^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{\delta}_{ej}\big)$$

که $\boldsymbol{\delta}_b = \boldsymbol{\lambda}_b(۱ + \boldsymbol{\lambda}_b'\boldsymbol{\lambda}_b)^{-\frac{۱}{۲}}$ و $\boldsymbol{\delta}_{ej} = \boldsymbol{\lambda}_b(۱ + \boldsymbol{\lambda}_{ej}'\boldsymbol{\lambda}_{ej})^{-\frac{۱}{۲}}$ به ازای $j = ۱, \dots m$ هستند. از آنجا که استنباط در این مدل‌ها باید بر اساس توزیع حاشیه‌ای برای متغیر پاسخ $\boldsymbol{Y}_j$ باشد، چگالی حاشیه‌ای $\boldsymbol{Y}_j$ را در قضیه‌ی زیر بدست می‌آوریم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\boldsymbol{Y}_j = X_j\boldsymbol{\beta} + Z_j\boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j$ باشد، به طوری‌که $\boldsymbol{\epsilon}_j \overset{ind}{\sim}$ و $\boldsymbol{b}_j \overset{iid}{\sim} SN_q(۰, \psi, \boldsymbol{\lambda}_b)$ $SN_{n_j}(۰, (\sigma^۲I)_j, \boldsymbol{\lambda}_{ej})$ به ازای $j = ۱, \dots, m$ و $\boldsymbol{b}_j$ و $\boldsymbol{\epsilon}_j$ از هم مستقل هستند. در این صورت توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{Y}_j$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{Y}_j}(\boldsymbol{y}_j|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= ۲^۲\phi_{n_j}(\boldsymbol{y}_j|X_j\boldsymbol{\beta}, \Sigma_j) \\ &\times \Phi_۲\Big((\boldsymbol{\mu}_{۲_j} - \boldsymbol{\Gamma}_j\mu_{۱_j})(\boldsymbol{y}_j - X_j\boldsymbol{\beta})|۰, \boldsymbol{I}_۲ + \boldsymbol{\Gamma}_j\Lambda_j\boldsymbol{\Gamma}_j'\Big) \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $\phi_{n_j}(.)$ و $\Phi_۲(.)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال هستند. هم‌چنین

$$\mu_{۱_j} = \Lambda_j Z_j'(\sigma^۲\boldsymbol{I})_j^{-۱}, \quad \Sigma_j = (\sigma^۲\boldsymbol{I})_j + Z_j\psi Z_j', \quad \Lambda_j = (\psi^{-۱} + Z_j'(\sigma^۲\boldsymbol{I})_j^{-۱}Z_j)^{-۱}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{۲_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{ej}'(\sigma^۲\boldsymbol{I})_j^{-\frac{۱}{۲}} \\ ۰ \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Gamma}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{ej}'(\sigma^۲\boldsymbol{I})^{-\frac{۱}{۲}}Z_j \\ -\boldsymbol{\lambda}_b'\psi^{-\frac{۱}{۲}} \end{pmatrix}$$

اثبات. با توجه به نمایش سلسه مراتبی در رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}_e) f(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}_b) d\boldsymbol{b} \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} ۲^۲\phi_n(\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{\beta} + Z\boldsymbol{b}, \sigma^۲\boldsymbol{I})\Phi_۱(\boldsymbol{\lambda}_e'(\sigma^۲\boldsymbol{I})^{-\frac{۱}{۲}}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta} - Z\boldsymbol{b}))\phi_q(\boldsymbol{b}|۰, \psi)\Phi_۱(\boldsymbol{\lambda}_b'\psi^{-\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{b})d\boldsymbol{b} \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} ۲^۲\phi_n(\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{\beta}, \Sigma)\phi_q(\boldsymbol{b}|\mu_۱(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}), \Lambda)\Phi_۲(-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{b}| - \boldsymbol{\mu}_۲(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{I}_۲)d\boldsymbol{b} \\ &= ۲^۲\phi_n(\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{\beta}, \Sigma)E[\Phi_۲(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}|\boldsymbol{\mu}_۲(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{I}_۲)] \end{aligned}$$

در آن $\boldsymbol{W} \sim N_q(\mu_۱(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}), \Lambda)$ است و

$$\mu_۱ = \Lambda Z'(\sigma^۲\boldsymbol{I})^{-۱}, \quad \Sigma = (\sigma^۲\boldsymbol{I}) + Z\psi Z', \quad \Lambda = (\psi^{-۱} + Z'(\sigma^۲\boldsymbol{I})^{-۱}Z)^{-۱}$$

$$\boldsymbol{\mu}_۲ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_e'(\sigma^۲\boldsymbol{I})^{-\frac{۱}{۲}} \\ ۰ \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_e'(\sigma^۲\boldsymbol{I})^{-\frac{۱}{۲}}Z \\ -\boldsymbol{\lambda}_b'\psi^{-\frac{۱}{۲}} \end{pmatrix}$$

سپس با انجام بعضی محاسبات ریاضی ساده اثبات انجام می‌شود. □

با توجه به قضیه ۱.۲ تابع لگاریتم درستنمایی $\ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \propto &-\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m} log|\Sigma_j| - \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m}\{(\boldsymbol{y}_j - X_j\boldsymbol{\beta})'\Sigma_j^{-۱}(\boldsymbol{y}_j - X_j\boldsymbol{\beta})\} \\ &+ \sum_{j=۱}^{m} log\Phi_۲\Big((\boldsymbol{\mu}_{۲_j} - \boldsymbol{\Gamma}_j\mu_{۱_j})(\boldsymbol{y}_j - X_j\boldsymbol{\beta})|۰, \boldsymbol{I}_۲ + \boldsymbol{\Gamma}_j\Lambda_j\boldsymbol{\Gamma}_j'\Big), \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن μ_{1_j}، $\boldsymbol{\mu}_{2_j}$، Σ_j، $\boldsymbol{\Gamma}_j$ و Λ_j در قضیه قبل تعریف شده‌اند. برای برآورد پارامترها و اجرای الگوریتم EM، نیاز به گزاره زیر داریم.

گزاره ۲.۲. فرض کنید $\boldsymbol{Y}|T=t \sim N_n(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}t, \Psi)$ و $T \sim HN_1(0,1)$ (توزیع نیمه نرمال) باشد. آنگاه توزیع توأم از $(\boldsymbol{Y}', T)'$ می‌توان به این صورت نوشت:

$$f_{\boldsymbol{Y},T}(\boldsymbol{y}, t|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = 2\phi_n(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)\phi_1(t|\eta, \tau^2)\mathbb{I}\{t>0\},$$

که در آن

$$\eta = \frac{\boldsymbol{d}'\Psi^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})}{1+\boldsymbol{d}'\Psi^{-1}\boldsymbol{d}}, \quad \tau^2 = \frac{1}{1+\boldsymbol{d}'\Psi^{-1}\boldsymbol{d}}, \quad \Sigma = \Psi + \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}'.$$

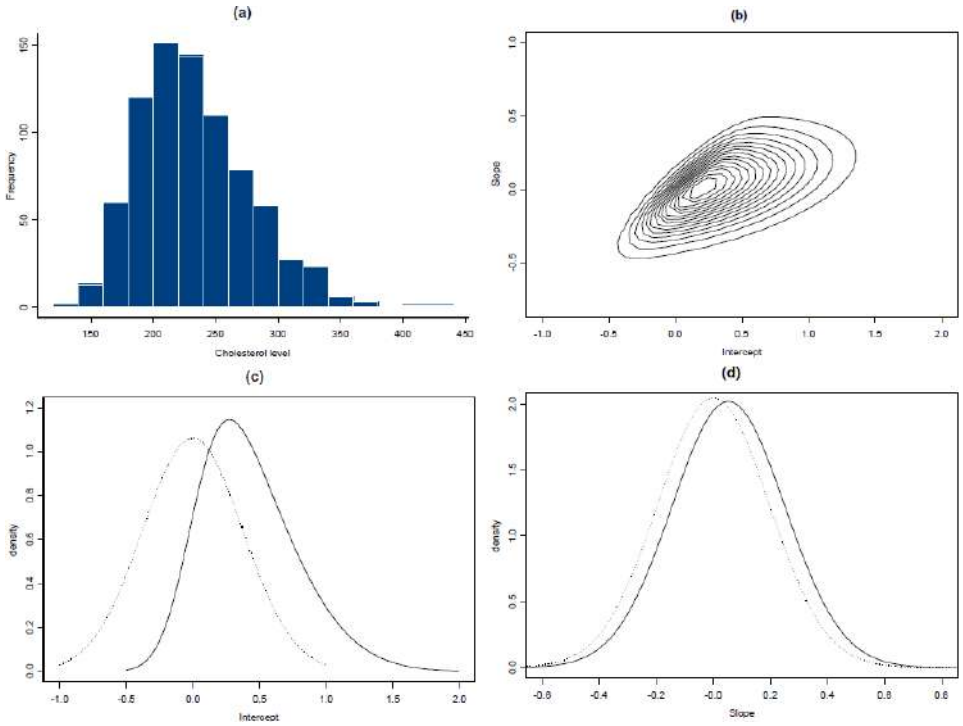
توجه داشته باشید که در الگوریتم EM، گام M به ماکزیمم عددی نیاز دارد که به راحتی با استفاده از نرم افزارهای آماری مانند R قابل انجام است.

۳. نتایج عددی

داده‌های این مثال شامل سطح کلسترول در طول زمان، سن در ابتدای مطالعه و جنسیت افراد، برای $m = 200$ نفر است. در این بخش، از مدل آمیخته خطی زیر استفاده شده است:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 sex_j + \beta_2 age_j + \beta_3 t_{ij} + b_{0j} + b_{1j} t_{ij} + \epsilon_{ij}$$

در اینجا y_{ij} سطح کلسترول تقسیم بر ۱۰۰ در iامین زمان برای گروه j است و $t_{ij} = (\text{زمان} - 5)/10$ است، که زمان تعداد سال ها از ابتدای مطالعه است. age_j سن از ابتدای مطالعه را نشان می‌دهد و sex_j شاخص جنسیت است (زن=۰ و مرد=۱). از این رو، $\boldsymbol{b}_j = (b_{0j}, b_{1j})'$، $\boldsymbol{x}_{ij} = (1, age_j, sex_j, t_{ij})'$ و $Z_j = (1, t_{ij})'$ هستند. نمودار ۱ شکل (a) ، هیستوگرام سطح کلسترول را نشان می‌دهد.



شکل ۱. شکل a هیستوگرام سطح کلسترول.

بر اساس این اطلاعات، سه مدل آماری متفاوت در توزیع خطا و اثرات تصادفی به وجود می‌آید. این مدل‌ها عبارتند از:
الف) مدل اول: یک مدل با توزیع نرمال چند متغیره مستقل برای خطاها و توزیع چوله نرمال چند متغیره برای اثرات تصادفی با $\lambda_b = (\lambda_{b1}, \lambda_{b2})'$.
ب) مدل دوم: یک مدل با توزیع چوله نرمال چند متغیره مستقل برای خطاهای تصادفی با پارامتر مقیاس مشترک بین گروه ها و توزیع نرمال چند متغیره متقارن برای اثرات تصادفی.
ج) مدل سوم: یک مدل کاملاً نرمال.
جدول زیر نتایج بدست آمده از سه مدل صفحه قبل با استفاده از الگوریتم EM را ارائه می‌دهد. معیار AIC ، BIC و HQ نشان می‌دهند که مدل ۱ بهترین برازش را ارائه می‌دهد.

	Model 1		Model 2		Model 3	
Parameter	Estimate	SE	Estimate	SE	Estimate	SE
β_o	1.3755	0.1418	1.5955	0.1568	1.5968	0.1543
β_1	−0.0591	0.0534	−0.0630	0.0554	−0.0630	0.0568
β_2	0.0136	0.0034	0.0184	0.0035	0.0184	0.0037
β_3	0.2281	0.0511	0.2817	0.0240	0.2817	0.0242
σ_e^2	0.0434	0.0025	0.0434	0.0024	0.0434	0.0024
d_{11}	0.5600	0.0418	0.3716	0.0199	0.3715	0.0201
d_{12}	0.0700	0.0317	0.0563	0.0173	0.0563	0.0179
d_{22}	0.1924	0.0311	0.1868	0.0308	0.1868	0.0329
λ_{b1}	2.9947	0.7789	-	-	-	-
λ_{b2}	0.0000	0.4814	-	-	-	-
λ_e	-	-	0.0140	0.9890	-	-
−log-likelihood	−666.1717		−659.7560		−659.7560	
AIC	−0.6285		−0.6233		−0.6243	
BIC	−0.6057		−0.6020		−0.6053	
HQ	−0.6195		−0.6152		−0.6171	

شکل ۲. نتایج برازش مدل‌های ۱، ۲ و ۳ داده‌های کلسترول.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل های چند سطحی خطی بر پایه توزیع چوله نرمال معرفی و روش‌های برآورد پارامترهای این مدل توسط الگوریتم EM مورد بررسی قرار گرفت. نتایج عددی نشان می‌دهد که مدل با توزیع نرمال چند متغیره مستقل برای خطاها و فرض چوله نرمال بودن اثرات تصادفی، زمانی که فرض نرمال بودن در داده‌ها وجود ندارد، می‌تواند موجب افزایش کارایی و دقت در برآورد پارامترهای مدل شود.

مراجع

1. B.A. Anderson, and J.P. Hind, *Random Effects in Generalized Linear Models and the EM Algorithm*, Communications in Statistics - Theory and Methods 17, 3847-3856, 1988.
2. A. Gelman , J. Hill, *Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models*, United States of America , Cambridge University Press , 2006.
3. G. Verbeke, and E. Lesaffre, *A linear mixed-effects model with heterogeneity in the random-effects population*, Journal of the American Statistical Association 91, 217-221, 1996.
4. D. Zhang, M. Davidian, *Liner mixed models with flexible distributions of random effects for longitudinal data*, Biometrics 57, 795-802, 2001.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

سه مکتب موثر در منطق ریاضی

سمیه تاری*
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده. منطق ریاضی یکی از بنیادهای ریاضیات قرن بیستم است. در واقع منطق ریاضی علم تفکر و استدلال است و در هر نظریه ریاضی یک مجموعه از اصول موضوع و یک منطق حضور فعال دارند. در این مقاله به سه مکتب موثر در شکوفایی منطق ریاضی پرداخته می‌شود.
واژه‌های کلیدی: دستگاه اصل موضوعی، استدلال منطقی، تاریخ منطق ریاضی .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 01A60, 01A61.

۱. مقدمه

امروزه سهم علم در زندگی انسان‌ها بسیار بالا است؛ لذا دانستن نحوه پیدایش و پیشرفت آن برای ما ضروری است. در قرن بیستم شاهد رشد در پژوهش‌های ریاضی و ظهور شاخه‌های جدید هستیم. منطق ریاضی یکی از بنیادهای ریاضیات قرن بیستم است که امروزه رد پای آن در تمام زمینه‌های ریاضی و حتی سایر علوم به چشم می‌خورد. منطق ریاضی یک مدل‌سازی برای تفکر و استدلال‌های ریاضی است؛ بنابراین براساس توجه افراد به جنبه‌های خاص تفکر و استدلال شاهد وجود مدل‌ها و منطق‌های مختلفی مانند منطق گزاره‌ها، منطق مرتبه اول، منطق مرتبه دوم، منطق فازی، منطق موجهات و غیره هستیم [۲،۳].

افراد مختلف در جاهای مختلف در توسعه منطق ریاضی تاثیر به سزایی داشته‌اند. در این مقاله عملکرد افراد پیشگام، در ایجاد تحولات اساسی در این علم به‌طور مختصر بیان می‌شود. در ابتدا عملکرد یونانیان و بخصوص فیلسوف بزرگ ارسطو در ابداع سیستم منطقی بررسی و مطالعه می‌شود. سپس به توصیف سه مکتب ریاضی موثر در توسعه منطق ریاضی پرداخته می‌شود.

۲. نتایج اصلی

۱.۲. منطق در یونان باستان. در این بخش به تحولات منطق ریاضی در یونان باستان پرداخته می‌شود [۱،۲،۴].

یونانیان نخستین مردمانی بودند که از سنت‌گرایی جامعه‌های باستانی گسستند و ترجیح دادند که از دیدگاه منطقی به نتیجه‌گیری و استدلال بپردازند. دانشمندان اولیه یونانی چون تالس و بقراط با حرکت به سوی منطق، اولین نیروی محرکه این علم را به وجود آوردند.

ارسطو اولین مبتکر ابداع سیستم منطقی است. توسعه استدلال‌های صحیح دوره یونان باستان با استفاده از فرم طبقه‌بندی شده گزاره‌ها و دسته‌بندی استدلال‌ها از کارهای اساسی او است که سیستم قیاس منطقی او از خلل ناپذیرترین و معتبرترین نظریه‌های استنتاج بشری در طول مدت ۲۰۰۰ سال است. از دیدگاه ارسطو، یک گزاره جمله‌ای خبری است که یا درست است یا نادرست. هم‌چنین هر گزاره از سه بخش محمول، رابط و موضوع تشکیل شده است که از لحاظ کمی به سه دسته کلی، جزئی و خاص (شخصی) و از لحاظ کیفی به دو دسته مثبت و منفی تقسیم می‌شود. او با ترکیب قانونمند دو گزاره مفروض

*سخنران. آدرس ایمیل: s_tari@azaruniv.ac.ir

به گزاره جدید رسید. از دیدگاه ارسطو یک استدلال عبارت است از نحوه ترکیب صحیح دو گزاره به نام فرض با موضوع و محمول مشترک برای به دست آوردن گزاره سوم به نام نتیجه که از ترکیب بخشهای غیر مشترک فرض‌ها حاصل شده است. به عنوان مثال هر انسانی میرا است و سقراط یک انسان است؛ پس سقراط میرا است، یک استدلال است. او برحسب بخش مشترک فرض‌ها، استدلال‌های خود را به سه دسته کلی زیر تقسیم کرد:

۱- بخش مشترک، موضوع یک از گزاره‌های فرض و محمول دیگری است.

۲- بخش مشترک، موضوع هر دو گزاره فرض است.

۳- بخش مشترک، محمول هر دو گزاره فرض است.

از بین استدلال‌ها، استدلالی را معتبر نامید که از درستی فرض‌ها، درستی نتیجه آن استدلال تضمین شود. استنتاج‌های ارسطو تا اواخر قرون وسطی در منطق صوری حکمفرما بوده است. شاگردان و پیروان ارسطو در توسعه منطق ارسطویی گامهایی را برداشتند که در اینجا بحث نمی‌شود.

۲.۲. **منطق در عصر مدرنیته.** در این بخش به تحولات منطق ریاضی در قرن نوزدهم و بیستم پرداخته می‌شود [۱، ۲، ۴]. از آغاز عصر مدرنیته، سهم زیادی از منطق متعلق به ریاضیدانان است. لایب نیتز، در رویای تعیین یک زبان جهانی با دقت ریاضی بود. در واقع هدف او، تحویل تفکر و تعمق علمی و فلسفی به محاسبات دقیق بود. او در پروژه پیشنهادی خود، دنبال دو ویژگی و مشخصه مهم زیر بود:

۱- بیان دقیق مفاهیم به صورت نمادین (صوری) که باعث تفهیم مطلب به خوانندگان بدون توجه به زبان مادری (فرازبان) می‌شود.

۲- ایجاد زبان جهانی که منجر به تولید ماشین‌های مکانیکی برای تولید استنتاج‌های معتبر شود.

اگرچه پروژه لایب نیتز گسترش نیافت و از نفوذ فراگیر برخوردار نشد؛ اما مشخصه کلی آن یعنی بیان مفاهیم به صورت صوری، پیشرو کارهای بعدی در زمینه منطق ریاضی شد. هم‌چنین مشخصه دوم پروژه او در گسترش کامپیوترهای مدرن، بعد از جنگ جهانی دوم موثر است.

در اواخرا قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم سه مکتب وابسته به هم در زمینه منطق ریاضی در نقاط مختلف جهان شکل گرفت که در ادامه توضیحاتی در مورد آن‌ها آورده می‌شود.

اولین مکتب مورد بحث، به مدرسه جبری معروف است که توسط افرادی چون بول، پرس و ون ایجاد شد. گرایش این مکتب روی جبر مجرد بود. ابتدا یک ساختار جبری انتخاب می‌شد و سپس یک سری اصول موضوع برای آن تدوین می‌شد و در ادامه خواص ریاضی ساختار مورد نظر با استفاده از این اصول ثابت می‌شد.

دومین مکتب مورد بحث به مدرسه منطقی معروف است که درصدد تدوین یک منطق فراگیر برای تبدیل تمام مباحث علمی به یک سیستم واحد بوده است. بزگترین منطق‌دانان این مکتب فرگه و راسل بوده‌اند.

سومین مکتب که به مدرسه ریاضی معروف است و افرادی چون ددیکند، پئانو، هیلبرت و زرملو از فعالان این مکتب بوده‌اند. هدف این مکتب اصل‌بندي شاخه‌هاي مختلف رياضي مانند هندسه، آنالیز و نظریه مجموعه‌ها بوده است. در سال ۱۹۰۸ زرملو يك سري اصول موضوعه از نظریه مجموعه‌ها براساس دیدگاه‌های کانتور و دیگران ارائه داده است. امروزه نظریه مجموعه زرملو- فرانکل به عنوان تعمیمی از آن مطرح است.

مراجع

۱. ه. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، مترجم، م. ق. وحیدی اصل، چاپ دوم، نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۲.

۲. ح. سیفلو، تاریخچه ریاضیات، چاپ اول، یاس نبی، تبریز، ۱۳۸۸.

3. H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press., 2001., https://doi.org/10.1016/C2009-0-22107-6

4. P. King and S. Shapiro, *The HISTORY OF LOGIC*, The oxford Companion to philosophy, (OUP 1995), 496–500.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021

تحلیل عملکرد مورد انتظار از دانش آموزان در تکالیف کتاب درسی ریاضی پایه هشتم

یگانه سادات حسینی [۱,*] ، ابراهیم ریحانی[۱] و مهدی ایزدی[۱]

[۱]بخش آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، تهران، ایران

چکیده. هدف پژوهش حاضر بررسی کتاب ریاضی هشتم بر اساس عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان در تکالیف است. در این تحقیق جامعه آماری، کل کتاب ریاضی هشتم و نمونه در دسترس، فصل ۱ و ۲ کتاب ریاضی هشتم بوده است. از روش توصیفی تحلیل محتوا برای بررسی کتاب استفاده شده‌است. واحد تحلیل این پژوهش، تکلیف و واحد زمینه، درس و روش طبقه‌بندی تحلیل، جعبه‌ای بوده است. نتایج بدست آمده بیانگر این است که بخش عمده‌ای از تکالیف کتاب ریاضی هشتم، انجام یک محاسبه یا الگوریتم روتین را از دانش‌آموزان انتظار دارد و به عملکرد طبقه بندی برخی اشیا ریاضی پرداخته نشده‌است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل محتوا، کتاب درسی، ریاضی پایه هشتم، عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان، تکلیف ریاضی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97U20, 97B70. .

۱. مقدمه

یافته‌های پژوهشی بسیاری در حوزه‌ی آموزش ریاضی حاکی از این است که درس‌های ریاضی، می‌توانند زمینه‌های رشد قابلیت‌های لازم مانند کاوشگری، پرسشگری، پیش‌بینی، تصمیم‌گیری و ارزیابی را از طریق «تکلیف‌های غنی یادگیری» فراهم آورند. بر این اساس، ممکن است سؤال‌هایی از جمله «چیستی ماهیت تکلیف ریاضی» و «ویژگی‌های تکلیف‌های غنی یادگیری ریاضی»، برای دست‌اندرکاران آموزش ریاضی مطرح شود که داشتن پاسخی روشن برای آن‌ها، لازمه فراهم نمودن آموزشی اثربخش در حوزه یادگیری ریاضی است [۱].

اگر نظامي بخواهد دگرگوني اساسي در روش هاي آموزش خود در زمينه ي خاصي به وجود آورد، بايد به دگرگوني و تجديد بناي تمامي عواملي كه به نحوي در آموزش آن مؤثر است، بپردازد و از ميان اين عوامل، كتاب درسي نقش مهمي در تأمين اهداف آموزشي هر كشور ايفا مي كند. در همه ي نظام هاي آموزشي اعم از متمركز و نيمه متمركز، از جمله ابزار هايي كه در اختيار همه ي معلمان و دانش آموزان قرار مي گيرد، كتاب درسي است [۲].

مطالعه و بررسی کتاب درسی می‌تواند نقاط قوت و ضعف احتمالی این ابزار موثر را در اختیار مدیران و برنامه‌ریزان و مولفان کتاب‌های درسی قرار دهد تا متناسب با اهداف و اصول برنامه درسی تغییرات و اصلاحات لازم را اعمال کنند. یکی از کارآمدترین روش‌ها برای ارزشیابی کتاب درسی، روش تحلیل محتوا می‌باشد که در آن بر اساس چارچوب‌ها و اصول علمی، اجزای کتاب درسی مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتیجه این بررسی و تحلیل دید روشنی از کتاب درسی به پژوهشگر می‌دهد. بنابراین، ضرورت انجام مطالعه حاضر نیز، نقش مهم تحلیل محتوا در فرآیند اصلاح کتاب ها و تاثیر مهمی است که این تحلیل می تواند داشته باشد. با توجه به اهمیت ذکر شده و هم‌چنین نقش تکالیف ریاضی در یادگیری دانش‌آموزان، این

*سخنران. آدرس ایمیل: Yegane.hoseini27@gmail.com

پژوهش به تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه هشتم می‌پردازد تا به این پرسش پاسخ داده شود که تکالیف ارائه شده در کتاب درسی ریاضی پای هشتم از نظر عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان به چه شکل می‌باشد؟

نوع عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان: پوینتون و همکاران[1] [۳] تکالیف را بر اساس نوع عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان به هشت دسته تقسیم‌بندی کردند که شامل فراخوانی حقایق- انجام دادن یك محاسبه یا الگوریتم روتین- طبقه‌بندی برخی اشیاء ریاضی- تفسیر موقعیت یا پاسخ- اثبات، نشان دادن، توجیه کردن (استدلال کلی)- تعمیم یك مفهوم- ساخت یك مثال/نمونه- نقد یك استدلال نادرست می‌باشد. توضیحات هر دسته در جدول ۱ شرح داده شده است.

جدول ۱. طبقه‌بندی تکالیف ریاضی بر اساس نوع عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان پوینتون [۳])

نوع تکلیف	توصیف
فراخوانی حقایق	در این تکالیف، یادگیرندگان بایستی برخی حقایق، تعاریف یا دانش را عینا فراخوانی کنند.
انجام یک محاسبه یا الگوریتم روتین	این نوع تکالیف، نیازمند استفاده معمولی از عملیات، قواعد و رویه‌ها است.
طبقه بندی برخی اشیا ریاضی	این نوع تکالیف ضرورتا شامل دو قسمت ۱)فراخوانی تعاریفی که خودشان ممکن است به عنوان یك تکلیف مجزا طرح شوند و ۲)انجام هر تکلیف جبری یا ارائه توجیهی برای نشان دادن اینکه یك شیء ریاضی مشخص در آن تعریف قرار می‌گیرد (به عنوان مثال، نشان دهید که ... یك ... است یا بررسی کنید که فرضهای قضیه ... در مورد ... صدق می‌کند).
تفسیر موقعیت یا پاسخ	در این نوع تکالیف، با اشاره به یك موقعیت فیزیکی، یك مسئله‌ای طرح می‌شود و حل آن مسئله قبل از استفاده از رویه‌های روتین، نیازمند مدلسازی است. همچنین برای حل این نوع تکالیف، نیاز است تا مدل ریاضی بر حسب اصطلاحات ارائه شده در مسئله مورد تفسیر و تعبیر قرار گیرد.
اثبات، نشان دادن، توجیه کردن (استدلال کلی)	این نوع تکالیف به جای مثال‌های خاص، نیازمند استدلال کلی دربردارندهٔ انتزاع یا اشیاء ریاضی کلی هستند. معمولا در این تکالیف، از عباراتی همانند "ثابت کنید"، "نشان دهید" یا "با دلیل" استفاده می‌شود. حل این نوع تکالیف، نیازمند منطق بولی، ساختارهای فرا-منطقی (مانند یك تناقض، استقراء و موارد جامع) و استفاده صحیح از تعاریف رسمی، اغلب به عنوان یك نقطه شروع، است.
تعمیم یک مفهوم	یادگیرندگان در این نوع تکالیف، نیازمند ارزیابی دانش آموخته‌شده قبلی‌شان در یك موقعیت جدید هستند. این نوع تکالیف، تا حد زیادی، زمینه وابسته، موقت و در نتیجه غنی هستند.
ساخت یک مثال یا نمونه	در این نوع تکالیف، افراد نیاز به ارائه یك شیء هستند که ویژگی‌های ریاضی مشخص در آن شیء صدق می‌کنند. معمولا پاسخ‌های درست زیادی برای این نوع تکالیف وجود دارد، اما یك روش کلی برای ایجاد این پاسخ‌ها وجود ندارد.
نقد یک استدلال نادرست	یافتن خطاها در اثبات‌های فرضی یا استدلال نادرست، کاری است که دانش‌آموزان بایستی در این نوع تکالیف انجام دهند و این نوع تکالیف، نیازمند مهارتهای سطح عالی و یك درک خوب از دانش محتوایی موضوعی هستند.

در مورد فراخوانی حقایق این حقیقت وجود دارد که همه سوالات تا حدودی به یادآوری می‌پردازند اما در مواردی ممکن است به یادآوری کلمه به کلمه نیاز باشد.

بسیاری از سوالات نیاز به استفاده معمول از جبر، حساب یا عملیات ماتریس دارند بنابراین در بخش زیادی از تکالیف عملکرد انجام محاسبه یا الگوریتم روتین مورد انتظار است. این بدان معنا نیست که "روتین" برابر با "آسان" است. چنین سوالاتی ممکن است پیچیده و چالش برانگیز باشد.

تمایز اساسی بین فراخوانی حقایق، استفاده از الگوریتم روتین و طبقه بندی اشیا وجود یک شی خاص است. این تمایز توسط دو سوال روبرو مشخص شده است. "برای معادله دیفرانسیل ... یک راه حل پیدا کنید " و "نشان دهید که ... یک راه حل برای معادله دیفرانسیل است."

[1]Pointon, Sangwin

واحدهای تحلیل این پژوهش، شامل فعالیت‌ها، کاردرکلاس‌ها و تمرین‌ها فصل ۱ و ۲ کتاب ریاضی هشتم بر اساس این چارچوب بررسی شد که نتایج حاصل در جدول۲ آورده شده است. فصل ۱ شامل ۳۱ فعالیت، ۱۸ کاردرکلاس و ۱۴ تمرین (در مجموع ۶۳) و فصل ۲ شامل ۲۵ فعالیت، ۷ کاردرکلاس و ۱۲ تمرین (در مجموع ۴۴) می‌باشد. برای تعیین اعتبار چارچوب ذکر شده، از یافته و نظرات اساتید و محققان رشته آموزش ریاضی و معلمان ریاضی استفاده شد. هم چنین جهت پایایی، فصل ۲ کتاب توسط دو کدگذار آشنا به چارچوب کدگذاری و تحلیل شد که درصد توافق به‌دست آمده درصد مناسبی می‌باشد.

جدول ۲. فراوانی تکالیف فصل۱ و ۲ براساس نوع عملکرد موردانتظار از دانش‌آموزان

نوع عملکرد و مثال از کتاب درسی	فصل ۱		فصل ۱	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
فراخوانی حقایق تمرین صفحه ۵ سوال۴ ۴- هر یک از عبارت‌های زیر چه عددی را نشان می‌دهد؟ بزرگترین عدد صحیح منفی:.... کوچکترین عدد طبیعی:..... کوچکترین عدد صحیح مثبت:..... کوچکترین عدد زوج طبیعی:..... کوچکترین عدد فرد طبیعی دو رقمی:..... بزرگترین عدد زوج طبیعی سه رقمی:.....	۵	۷/۹	۴	۹
انجام یک محاسبه یا الگوریتم روتین فعالیت صفحه۲ سوال ۳ ۳- حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. $-۴-۸=$ $-۳+۹=$ $۸-۱۲=$ $-۶+۱۲=$ $-۴\times(-۳)=$ $-۱۲+۲=$ $-۸\div(-۴)=$ $-۳\times۷=$	۵۶	۸۸	۲۸	۶۳/۶
طبقه‌بندی برخی اشیا ریاضی	۰	۰	۰	۰
تفسیر موقعیت یا پاسخ کار در کلاس صفحه ۳ سوال۲ ۲-حاصل عبارت $۲-۷-۳+۱۰$ را به دو روش حساب کرده‌ایم. کدام درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید. $۸=۵-۱۳=۲-۷-۳+۱۰$ $۴=۹-۱۳=۲-۷-۳+۱۰$	۸	۱۲/۶	۱	۲/۲
اثبات، نشان دادن، توجیه کردن (استدلال کلی) تمرین صفحه ۲۷ سوال ۴ ۴-عددی از ۱۲۰ کوچک‌تر و از ۱۰۰ بزرگ‌تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه، حداکثر چند تقسیم انجام می‌دهیم؟ چرا؟	۴	۶/۳	۴	۹
تعمیم یک مفهوم فعالیت صفحه ۲۱ سوال ۴ ۴-با توجه به سوال بالا، آیا می‌توانیم بگوییم که همه مضرب‌های یک عدد طبیعی مرکب‌اند؟ چرا؟	۳	۴/۷	۲	۴/۵
ساخت یک مثال یا نمونه فعالیت صفحه ۲۲ سوال ۳ ۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.	۰	۰	۶	۱۳/۶
نقد یک استدلال نادرست تمرین صفحه ۲۳ سوال ۴ ۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟ ”هر عدد طبیعی دست کم دو شمارنده دارد.”	۱	۱/۵	۱	۲/۲

۲. نتیجه‌گیری

در این پژوهش تکالیف کتاب درسی ریاضی پایه هشتم از لحاظ نوع عملکرد موردانتظار از دانش‌آموزان براساس چارچوب پوینتون [۳] مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحلیل نشان می‌دهد که بخش عمده‌ای از تکالیف کتاب، از دانش‌آموزان انتظار انجام یک محاسبه یا الگوریتم روتین را دارد و به باقی عملکردها کمتر توجه شده است. البته این نتیجه به این معنا نیست که این تکالیف سطح آسانی دارند بلکه ممکن است در عین حال که روتین محسوب می‌شوند، چالش برانگیز باشند.

مراجع

۱. س. غلام آزاد، طراحی و ارزیابی تکلیف‌های غنی برای یادگیری، رشد آموزش ریاضی (۱۳۹۷)، شماره ۱۳۱، ۸-۴.

۲. ف. ملکی، ن. یافتیان، تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه‌ی هشتم، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید رجایی، تهران، ۱۳۹۵.

3. Pointon, A., and C. J. Sangwin. "An analysis of undergraduate core material in the light of hand-held computer algebra systems." International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 34, no. 5 (2003): 671-686.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مدل‌سازی نوسان تارهای صوتی با استفاده از سری ولترا

مهدیه دادگرفرد[۱]، آرتا امیر جمشیدی[۱,*]

[۱]آزمایشگاه تحقیقاتی پیشرفته سیستم‌های زیستی و سرطان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، پردیس علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

چکیده. مدل‌سازی ریاضی تارهای صوتی، نقش مهمی در پیدا کردن ساختار حنجره دارد. با استفاده از توابع پاسخ فرکانس سری ولترا، مدلی غیرخطی برای نوسان تارهای صوتی ارائه می‌شود. سری ولترا برای مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی حافظه دار استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن پارامترهای صدای نرمال، ویژگی و مشخصه‌ی طیف فرکانسی هسته‌ی دوم ولترای تارهای صوتی در حالت صدای نرمال بدست می‌آید. با تغییر این پارامترها، نمایش‌های متفاوتی از طیف فرکانسی تارهای صوتی بوجود می‌آید. زوج فرکانسی هسته‌ی دوم ولترا که کمترین دامنه‌ی نوسانات را در تارهای صوتی صدای نرمال دارد، در نمایش‌های دیگر کمترین دامنه‌ی نوسانات را ندارد. این مدل‌سازی، معیاری جهت تشخیص سالم یا ناسالم بودن حنجره را ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی غیرخطی، حنجره، سری ولترا.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 37N25, 45.

۱. مقدمه

عبور جریان هوا از تارهای صوتی باعث ایجاد امواج صوتی در حلق می‌شود. به هنگام نفس کشیدن، تارهای صوتی از هم باز می‌شود و هوا به ریه جریان پیدا می‌کند و به هنگام بیرون دادن هوا از ریه، تارهای صوتی کمی به هم نزدیک و باعث افزایش فشار می‌شود [۶]. مدل‌های دینامیکی مختلفی توسط محققان برای درک بهتر ساختار حنجره معرفی شده است. فلانگان[۱] با استفاده قیاس الکتروآکوستیک، از سیستمی یک جرم با یک درجه آزادی برای توصیف دینامیک تارهای صوتی استفاده کرد، در این مدل فرض می‌شود که ارتعاش جرم تنها در جهت عمودی است. فولچر و همکارانش[۲] با در نظر گرفتن میراگر کولن منفی در مدل فلانگان، مکانیزم تحریک تارهای صوتی را تفسیر کردند. آداچی و یو[۳] مدل فلانگان را به مدل یک جرم با دو درجه آزادی تعمیم دادند که در واقع، حرکت ارتعاش تارهای صوتی بصورت موازی و متعامد بر جریان هوا است. همچنین لوسرو و کوئنیگ[۴] با تعمیم مدل پایه‌ای دو جرم، خواص غیرخطی تارهای صوتی را به کمک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارائه دادند [۳].

در این مقاله قصد داریم با استفاده از مدل یک جرم با یک درجه آزادی ارائه شده توسط فلانگان، نوسان تارهای صوتی را به کمک توابع پاسخ فرکانس ولترا مدل کنیم. رویکرد ما در این روش به اینصورت است که سیگنال ورودی را سرعت جریان هوا و سیستم را غیرخطی، زمان-نامتغیر، حافظه‌دار و سیگنال خروجی را نوسان تارهای صوتی در نظر می‌گیریم. با توجه به ویژگی‌های بیان شده‌ی سیستم، از سری ولترا برای مدل‌سازی نوسان تارهای صوتی استفاده می‌کنیم. در این مدل‌سازی تنها با بدست آوردن هسته‌ی ولترای مرتبه دو در حوزه‌ی فرکانس به مشخصه‌ای از حنجره‌ی سالم یا ناسالم می‌رسیم. به عبارت

*سخنران. آدرس ایمیل: arta.jamshidi@ut.ac.ir

[1]Flangan
[2]Fulcher et al.
[3]Adachi and Yu
[4]Lucero and Koenig

دیگر، با تغییر پارامترهای موجود در مدل فلانگان، نمایش‌های مختلفی از دامنه‌ی نوسانات بدست می‌آید که یکی از آن‌ها را معیار سالم بودن حنجره درنظر می‌گیریم. در ادامه به شرح مختصری از سری ولترا می‌پردازیم. اولین رویکرد برای توصیف سیستم‌های غیرخطی حافظه دار به ویتو ولترا[5]، ریاضیدان ایتالیایی، برمی‌گردد [۲]. ولترا توصیف کانولوشن سیستم خطی را بوسیله‌ی سری عملگرهای انتگرال چندجمله‌ای با افزایش درجه‌ی غیرخطی تعمیم داده است. به عبارت دیگر، علاوه‌بر کانولوشن سیگنال ورودی با پاسخ ضربه‌ی سیستم، نمایش سیستم شامل یک سری عبارت‌های غیرخطی که از حاصل‌ضرب مرتبه‌ی افزایشی سیگنال ورودی با خود سیستم بدست می‌آید، تشکیل می‌شود. این سری ابزار قدرتمندی جهت نمایش، تجزیه و تحلیل سیستم غیرخطی است. سری ولترا از سیستم‌های غیرخطی همگن تشکیل شده است. از آنجا که به کمک هسته‌ها ویژگی‌های سیستم غیرخطی بدست می‌آید، مهم‌ترین جز این سیستم‌ها هسته است. همانطور که تابع پاسخ فرکانس سیستم خطی، نمایشی در حوزه‌ی فرکانس دارد، تابع پاسخ فرکانس ولترا با استفاده از تبدیل فوریه چند بعدی برای هسته‌های سری ولترا نیز بدست می‌آید [۱] بطوریکه در این مقاله برای بدست آوردن ویژگی سیستم نوسان تارهای صوتی، از تابع پاسخ فرکانس ولترای مرتبه‌ی دو استفاده می‌کنیم.

۲. مدل‌سازی نوسان تارهای صوتی

سیستم یک جرم با یک درجه آزادی، یکی از ساده‌ترین مدل‌های دینامیکی تارهای صوتی است که توسط فلانگان معرفی شده است. در این مدل، تارهای صوتی به صورت یک سیستم نوسانی تک جرم همراه میراگر که ارتعاشات خود برانگیخته‌ی آن ناشی از جریان هوا با فشار متغیر است، مدل می‌شود [۵]. معادله‌ی حرکت تارهای صوتی بصورت تجربی برابر است با:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{۱}{۲}ld(P_s - ۰٫۹۳۵\frac{\rho v^۲}{L^۲}), \tag{۱}$$

که x (خروجی) مکان تارهای صوتی، v (ورودی) سرعت جریان هوا، m جرم تارهای صوتی، c ضریب میرایی، k ضریب سختی تارهای صوتی، l طول تارهای صوتی، d ضخامت تارهای صوتی، P_s فشار دستگاه صوتی، L طول دهانه‌ی حنجره، ρ جرم مخصوص هوا بر واحد طول است. با قرار دادن $v = ۰$ و حذف تمامی مشتقات x، پاسخ مرتبه‌ی صفر معادله‌ی (۱) برابر می‌شود با:

$$x_۰ = \frac{۱}{۲}ld\frac{P_s}{k}.$$

عملگر $\mathcal{D} = mD^۲ + cD + k$، عملگر دیفرانسیل معادله‌ی (۱) است، همچنین عملگر $\mathcal{F}[v] = \frac{-۰٫۹۳۵}{۲}ld\frac{\rho}{L^۲}v^۲$، بصورتی تعریف شده است که تنها یک چند جمله‌ای از v در سمت راست این معادله باشد. نوسان تارهای صوتی $x' = x - x_۰$ بوسیله ترکیب دو سیستم $\mathcal{D}$ و $\mathcal{F}$ بدست می‌آید:

$$x' = \mathcal{H}[v] = \mathcal{D}^{-۱}(\mathcal{F}[v]). \tag{۲}$$

توابع پاسخ فرکانس ولترای عملگرهای $\mathcal{F}$ و $\mathcal{D}$ برابر است با:

$$F_۱ = ۰,\ F_۲ = \frac{-۰٫۹۳۵}{۲}ld\frac{\rho}{L^۲},$$

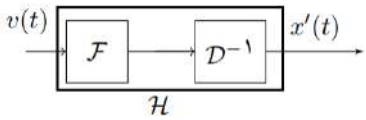
$$D_۱(\omega_۱) = -\omega_۱^۲ m + i\omega_۱ c + k.$$

بنابراین، توابع پاسخ فرکانس ولترای ترکیب سیستم $\mathcal{H} = \mathcal{D}^{-۱} \circ \mathcal{F}$ برابر می‌شود با:

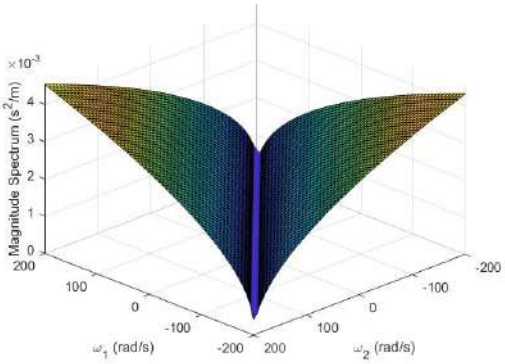
$$H_۱(\omega_۱) = ۰,\ H_۲(\omega_۱, \omega_۲) = \frac{-۰٫۹۳۵}{۲}ld\frac{\rho}{L^۲}D_۱^{-۱}(\omega_۱ + \omega_۲). \tag{۳}$$

در ادامه از پارامترهای $m = ۰.۱۵$ g، $c = ۰.۰۲۴$ kg s$^{-۱}$، $k = ۰.۰۰۸$ kg s$^{-۲}$، $l = ۰.۰۲$ cm، $d = ۰.۲۵$ cm، $P_s = ۰.۰۰۸$ N m$^{-۲}$، $\rho = ۰.۰۰۱۱۳$ kg m$^{-۱}$، $L = ۱$ cm برای مدل‌سازی صدای نرمال استفاده می‌کنیم [۴]. تا به اینجا نشان داده ایم که نوسان تارهای صوتی، یک سیستم غیرخطی از مرتبه‌ی دو است و تابع پاسخ فرکانس ولترای مرتبه‌ی دوم آن در معادله‌ی (۳) ذکر شده است. بنابراین برای تجزیه و تحلیل چنین سیستمی به بررسی $H_۲(\omega_۱, \omega_۲)$ می‌پردازیم. به

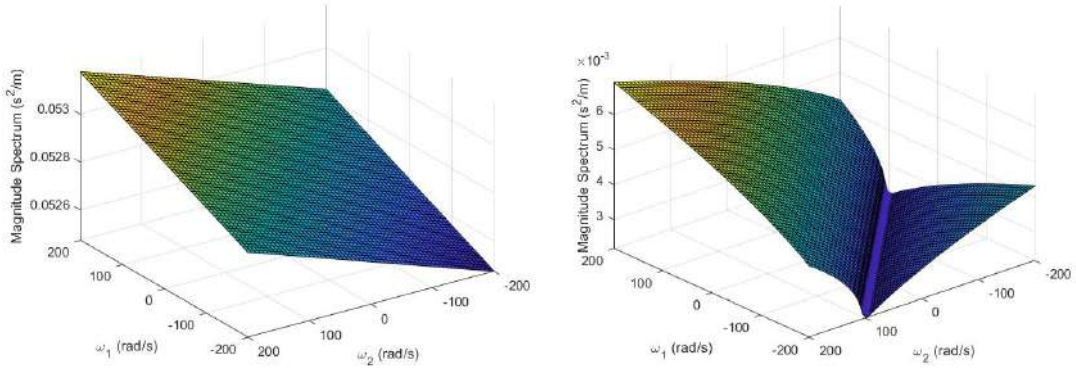
[5] Vito Volterra



شکل ۱. نمودار بلوکی سیستم غیرخطی (۲).



شکل ۲. طیف فرکانسی نوسان تارهای صوتی در حالت صدای نرمال.



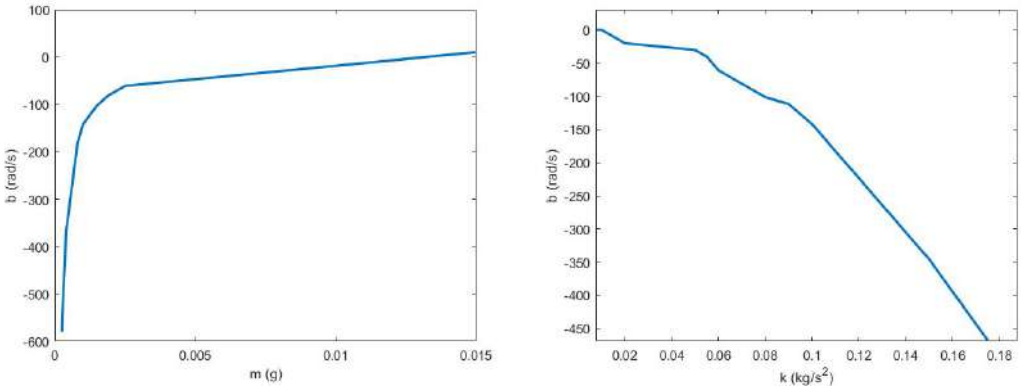
(آ) $c = ۰.۲۴$ و $k = ۰.۰۸$.

(ب) $c = ۳$ و $k = ۱$.

شکل ۳. با تغییر پارامترهای c و k دو نمودار مختلف از طیف فرکانسی نوسان تارهای صوتی رسم شده است.

عبارت دیگر، هسته‌ی مرتبه‌ی دوم سری ولترا، معیاری جهت تشخیص رفتار نوسان تارهای صوتی است. در شکل ۲ محورهای $\omega_۱$ و $\omega_۲$ نشانگر فرکانس و محور Magnitude Spectrum نمایانگر دامنه‌ی نوسانات معادله‌ی (۳) در حالت صدای نرمال است. در این شکل زوج فرکانس‌های $(\omega_۱, \omega_۲)$ که بر خط $\omega_۲ + \omega_۱ = ۰$ واقع است، کمترین دامنه‌ی نوسانات را نسبت به مابقی زوج فرکانس‌ها دارد. هر چه از خط $\omega_۲ + \omega_۱ = ۰$ فاصله بگیریم، دامنه‌ی نوسانات تارهای صوتی افزایش چشمگیری خواهد داشت. در ادامه با افزایش پارامترهای c و k به بررسی تغییر دامنه‌ی نوسانات در دو نمودار مجزا می‌پردازیم. در شکل ۳ دو نمودار دامنه‌ی نوسانات ناشی از افزایش پارامترهای c و k رسم شده است. در شکل ۳-آ، زوج فرکانس‌های $(\omega_۱, \omega_۲)$ که بر خط $\omega_۲ + \omega_۱ + ۱۰۱.۶۹ = ۰$ واقع است، کمترین دامنه‌ی نوسانات را نسبت به مابقی زوج فرکانس‌ها دارد. هر چه از خط $\omega_۲ + \omega_۱ + ۱۰۱.۶۹ = ۰$ فاصله بگیریم، دامنه‌ی نوسانات تارهای صوتی افزایش چشمگیری خواهد داشت. به عبارت دیگر، افزایش پارامترهای c و k، باعث تغییر مکان هندسی زوج فرکانس‌هایی که کمترین دامنه‌ی

نوسانات را دارد، می‌شود. همچنین با افزایش بیشتر پارامترهای ذکر شده (شکل ۳-ب)، به حالتی دست می‌یابیم که کمترین دامنه‌ی نوسانی وجود نخواهد داشت.



(آ) تغییرات عرض از مبدأ بر حسب تغییرات k.

(ب) تغییرات عرض از مبدأ بر حسب تغییرات m.

شکل ۴. تغییرات عرض از مبدأ.

در ادامه به بررسی تغییر عرض از مبدأ خط $\omega_2 = a\omega_1 + b$ (a شیب و b عرض از مبدأ)، در حالت کلی و با فرض $c = 3k$ و با تغییر پارامتر k می‌پردازیم [۴]. لازم به ذکر است خط مذکور دارای کمترین دامنه‌ی نوسانات است. در شکل ۴-آ مشاهده می‌کنیم، با افزایش k، عرض از مبدأ کاهش اما قدر مطلق آن افزایش پیدا می‌کند. همچنین با تغییر m، عرض از مبدأ افزایش پیدا می‌کند (شکل ۴-ب). تغییر پارامترهای m، c و k در حالت صدای نرمال، منجربه تغییر عرض از مبدأ می‌شود. بنابراین، مشخصه و ویژگی صدای نرمال را عرض از مبدأ خط مذکور در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، این مشخصه، معیاری جهت تشخیص حنجره‌ی سالم یا ناسالم است.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به کمک توابع پاسخ فرکانس ولترا، به مدل‌سازی نوسان تارهای صوتی پرداختیم. به کمک این مدل، طیف فرکانسی نوسان تارهای صوتی را در حالت صدای نرمال استخراج کردیم. همچنین نشان دادیم که تغییر پارامترهای m، c و k در حالت صدای نرمال، باعث تغییر ویژگی و مشخصه‌ی سیستم می‌گردد. در انتها، مشخصه‌ی نوسان تارهای صوتی در حالت صدای نرمال که معیاری جهت تشخیص حنجره‌ی سالم یا ناسالم است را تعیین کردیم.

مراجع

1. L. Carassale and A. Kareem, *Modeling nonlinear systems by Volterra series*, Journal of Engineering Mechanics, 136, no. 6 (2010), 801-818.
2. C.M. Cheng, Z.K. Peng, W.M. Zhang and G. Meng, *Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review*, Mechanical Systems and Signal Processing, 87 (2017), 340-364.
3. L. Cveticanin, *Review on mathematical and mechanical models of the vocal cord*, Journal of Applied Mathematics, 2012.
4. J.L. Flanagan, K. Ishizaka and K.L. Shipley, *Synthesis of speech from a dynamic model of the vocal cords and vocal tract*, Bell System Technical Journal, 54, no. 3 (1975), 485-506.
5. H. Herzel, D. Berry, I. Titze and I. Steinecke, *Nonlinear dynamics of the voice: signal analysis and biomechanical modeling*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 5, no. 1 (1995), 30-34.
6. I.R. Titze, *The human vocal cords: a mathematical model*, Phonetica, 28, no. 3-4 (1973), 129-170.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

کاربردهایی از دنباله دقیق گروه پولیای نسبی

احسان شاحسینی[۱]، علی رجایی[۱,*]
[۱]دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله، ابتدا مفاهیم گروه پولیا و گروه پولیای نسبی میدان‌های عددی و دنباله‌های دقیق وابسته به آنها را مرور می‌کنیم. سپس، با استفاده از دنباله دقیق گروه پولیای نسبی، برای برخی احکام کلاسیک در رابطه با گروه رده‌ای میدان‌های عددی، از جمله قضیه ۹۴ هیلبرت، اثبات‌های جدیدی ارائه می‌دهیم.
واژه‌های کلیدی: گروه پولیای نسبی، گروه رده‌ای، عدد رده ای، کوهومولوژی گالوا، قضیه ۹۴ هیلبرت.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11R29, 11R34, 11R37.

۱. مقدمه

نمادها. در این مقاله، برای میدان عددی K، از نمادهای $I(K)$، $P(K)$، $Cl(K)$، $\mathcal{O}_K$، U_K، $h(K)$ و H_K به ترتیب برای معرفی گروه ایده‌آل‌های کسری، گروه ایده‌آل‌های کسری اصلی، گروه رده‌ای، حلقه‌ی اعداد صحیح جبری، یکه‌های حلقه‌ی اعداد صحیح جبری، عدد رده‌ای و میدان رده‌ای هیلبرت از K استفاده شده است. برای توسیع متناهی L/K از میدان‌های عددی، نماد $\epsilon_{L/K}$ معرف همریختی $\epsilon_{L/K} : Cl(K) \to Cl(L)$، نماد $\mathcal{N}_{L/K}$ معرف همریختی نُرم $\mathcal{N}_{L/K} : I(L) \to I(K)$، و نماد $e_{\mathfrak{p}}(L/K)$ معرف اندیس انشعاب ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از K است. همچنین برای توسیع گالوایی L/K، از نماد $Gal(L/K)$ برای گروه گالوای L روی K استفاده می‌کنیم.

فرض کنید K یک میدان عددی باشد. برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح $f \geq 1$، ایده‌آل استروفسکی $\Pi_{p^f}(K)$ از K به شکل زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$\Pi_{p^f}(K) =: \prod_{\substack{\mathfrak{m}\in Max(\mathcal{O}_K)\\ \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})=p^f}} \mathfrak{m}. \qquad (۱)$$

میدان عددی K یک میدان پولیا نامیده می‌شود، هرگاه همه ایده‌آل‌های استروفسکی $\Pi_{p^f}(K)$ از K اصلی باشند [۶]. گروه پولیای میدان عددی K میزان دور بودن K از پولیا بودن را می‌سنجد [۶]:

تعریف ۱.۱. گروه پولیای میدان عددی K به عنوان زیرگروهی از $Cl(K)$ که توسط ایده‌آل‌های استروفسکی $\Pi_{p^f}(K)$ از K تولید می‌شود، تعریف می‌شود و با نماد $Po(K)$ نشان داده می‌شود.

لذا میدان عددی K پولیاست اگر و فقط اگر گروه پولیای آن بدیهی باشد. واضح است که هر میدان عددی با عدد رده‌ای ۱ یک میدان پولیا است. توجه شود که عکس این مطلب الزاما صحیح نیست: میدان‌های دایره‌بری الزاما دارای خاصیت تجزیه یکتا نیستند اما همگی میدان پولیا هستند [۶].

*سخنران. آدرس ایمیل: ali93d@yahoo.ca

قضیه ۲.۱. [۶] فرض کنید $K/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوایی متناهی با گروه گالوای G باشد. در این صورت، دنباله زیر یک دنباله دقیق کوتاه از گروه‌های آبلی متناهی است:

$$\{\circ\} \longrightarrow H^{1}(G, U_K) \longrightarrow \bigoplus_{\text{prime } \mathfrak{p}} \mathbb{Z}/e_p\mathbb{Z} \longrightarrow Po(K) \longrightarrow \{\circ\}. \tag{۲}$$

همواره بسیار مفید است که سعی کنیم مفاهیم را نسبی سازی کنیم. اخیرا مفهوم گروه پولیا به شکل زیر نسبی سازی شده است [۴]:

تعریف ۳.۱. فرض کنید L/K یک توسیع متناهی از میدان‌های عددی باشد. گروه پولیای نسبی L روی K برابر است با زیرگروهی از $Cl(L)$ که توسط ایده‌آل‌های استروفسکی نسبی $\Pi_{\mathfrak{p}^f}(L/K)$ تولید می‌شود که در آن:

$$\Pi_{\mathfrak{p}^f}(L/K) = \prod_{\substack{\mathfrak{M}\in Max(\mathcal{O}_L)\\ N_{L/K}(\mathfrak{M})=\mathfrak{p}^f}} \mathfrak{M}. \tag{۳}$$

گروه پولیای نسبی L روی K را با نماد $Po(L/K)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که $Po(L/\mathbb{Q}) = Po(L)$ و $Po(L/L) = Cl(L)$.

قضیه ۴.۱. [۴] فرض کنید L/K یک توسیع گالوایی متناهی از میدان‌های عددی با گروه گالوای G باشد. در این صورت دنباله زیر دقیق است:

$$\{\circ\} \to Ker(\epsilon_{L/K}) \to H^{1}(G, U_L) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \to \frac{Po(L/K)}{\epsilon_{L/K}(Cl(K))} \to \{\circ\}. \tag{۴}$$

۲. نتایج اصلی

در این بخش از مقاله، با استفاده از دنباله دقیق ۴ به اثبات قضایایی می‌پردازیم که قبلا به روش‌های متفاوت و معمولا مشکل‌تری اثبات شده‌اند. به این ترتیب، علاوه بر اینکه اثبات‌های ساده‌تری مطرح می‌کنیم، درواقع اثبات‌هایی ارائه می‌دهیم که همگی پایه و اساس یکسانی دارند و بدین‌ترتیب نوعی وحدت میان این قضایا که در جاهای مختلف مطرح شده‌اند ایجاد می‌کنیم. همچنین در برخی مواقع شرایط موجود در قضیه را تضعیف می‌کنیم یا نتیجه کلی‌تری بدست می‌اوریم.
گزاره زیر به طور مجزا و با روش‌های مختلف در [۲] و [۳] اثبات شده است. توجه کنید که در هر دو مرجع فوق، قضیه برای حالتی که L/K در همه جا نامنشعب است بیان و ثابت شده، اما ما شرط نامنشعب بودن را فقط به ایده‌آل‌های اول متناهی تقلیل داده‌ایم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید L/K یک توسیع گالوایی از میدان‌های عددی با گروه گالوای G باشد که در ایده‌آل‌های اول متناهی نامشعب است. در این صورت:

$$Ker(\epsilon_{L/K}) \simeq H^{1}(G, U_L). \tag{۵}$$

اثبات. چون L/K یک توسیع گالوایی است پس می‌توانیم از دنباله دقیق ۴ استفاده کنیم. چون L/K در ایده‌آل‌های اول متناهی نامشعب است، لذا برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ در $\mathcal{O}_K$ داریم که $e_{\mathfrak{p}}(L/K) = 1$ و بنابراین $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} = 1$. حال با استفاده از دنباله دقیق ۴ مطلوب ما حاصل می‌شود. □

گزاره بعدی در [۲] ثابت شده است.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید L/K یک توسیع گالوایی از میدان‌های عددی با گروه گالوای G باشد که در ایده‌آل‌های اول متناهی نامشعب است و $L \supseteq H_K$. در این صورت:

$$Cl(K) \simeq H^{1}(G, U_L). \tag{۶}$$

اثبات. چون L/K در مفروضات قضیه ۱.۲ صدق می‌کند لذا داریم که $Ker(\epsilon_{L/K}) \simeq H^{1}(G, U_L)$. پس کافی است نشان دهیم $Ker(\epsilon_{L/K}) = Cl(K)$. داریم که

$$\epsilon_{L/K} = (\epsilon_{L/H_K}) o (\epsilon_{H_K/K}). \tag{۷}$$

همچنین از قضیه ایده‌آل اصلی در نظریه میدان‌های رده‌ای می‌دانیم که

$$\epsilon_{H_K/K}(Cl(K)) = 0 \tag{۸}$$

و لذا نتیجه می‌شود که $\epsilon_{L/K}(Cl(K)) = 0$. بنابراین $Ker(\epsilon_{L/K}) = Cl(K)$. □

نتیجه ۳.۲. برای میدان عددی K داریم:

$$Gal(H_K/K) \simeq H^{1}(Gal(H_K/K), U_{H_K}). \tag{۹}$$

اثبات. از نتیجه ۲.۲ می‌دانیم که $Cl(K) \simeq H^{1}(Gal(H_K/K), U_{H_K})$. از طرفی تناظر آرتین در نظریه میدان‌های رده‌ای نشان می‌دهد که:

$$Gal(H_K/K) \simeq Cl(K). \tag{۱۰}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $Gal(H_K/K) \simeq H^{1}(Gal(H_K/K), U_{H_K})$. □

خاطرنشان می‌شویم که نتیجه ۳.۲ درواقع [۵، قضیه ۸] است که در آنجا شاهد اثبات بسیار پیچیده‌تری نسبت به آنچه دیدیم، هستیم.

اکنون به سراغ قضیه ۹۴ هیلبرت می‌رویم. در حقیقت آنچه امروزه به عنوان قضیه ۹۴ هیلبرت شناخته می‌شود، با نسخه اصلی این قضیه [۱، قضیه ۹۴] متفاوت است و حکمی بسیار قوی‌تر از آن است. آنچه ما اثبات می‌کنیم، نسخه امروزی این قضیه است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید L/K یک توسیع دوری نامنشعب از میدان‌های عددی با گروه گالوای دوری G باشد. در این صورت داریم که:

$$[L : K] \mid |Ker(\epsilon_{L/K})| \tag{۱۱}$$

اثبات. ما چیزی بیش از این را نشان خواهیم داد. درواقع نشان می‌دهیم:

$$|Ker(\epsilon_{L/K})| = [L : K][U_K : Nr_{L/K}(U_L)] \tag{۱۲}$$

چون L/K دوری است لذا می‌توانیم از خارج قسمت هِربراند استفاده کنیم:

$$Q(G, U_L) = \frac{|\hat{H}^{0}(G, U_L)|}{|H^{1}(G, U_L)|} \tag{۱۳}$$

که در آن

$$\hat{H}^{0}(G, U_L) = \frac{U_L^G}{Nr_{L/K}(U_L)} = \frac{U_K}{Nr_{L/K}(U_L)} \tag{۱۴}$$

از طرف دیگر داریم:

$$Q(G, U_L) = \frac{2^s}{[L : K]} \tag{۱۵}$$

که در آن s تعداد نشاندن‌های حقیقی K است که در L به دو نشاندن مختلط تبدیل می‌شوند (در واقع s تعداد اول های نامتناهی منشعب شده در توسیع L/K است). چون L/K نامنشعب است لذا $s = 0$ و از (۱۵) نتیجه می‌شود که $Q(G, U_L) = \frac{1}{[L : K]}$. حال از (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود:

$$[L : K][U_K : Nr_{L/K}(U_L)] = |H^{1}(G, U_L)| = |Ker(\epsilon_{L/K})| \tag{۱۶}$$

توجه شود که تساوی آخر از قضیه ۱.۲ بدست می‌آید.

□

ملاحظه ۵.۲. نکته‌ای که قابل تأمل است این است که ما با استفاده از دنباله دقیق ۴ نه تنها برای نتایج مختلف اثبات‌های یکپارچه ارائه کردیم، بلکه توانستیم با توجه به جمله $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}}$، در ۱.۲ و ۲.۲ شرط "همه جا نامنشعب بودن" توسیع را به "نامنشعب بودن در ایده‌آل‌های اول متناهی" تقلیل دهیم.

مراجع

1. D. Hilbert, *The theory of algebraic number fields. (English summary) Translated from the German and with a preface by Iain T. Adamson. With an introduction by Franz Lemmermeyer and Norbert Schappacher.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.
2. K. Iwasawa, *A note on the group of units of an algebraic number field.* J. Math. Pures Appl. **35** (1956), 189–192.
3. C. Khare, D. Prasad, *On the Steinitz module and capitulation of ideals.* Nagoya Math. J. **60** (2000), 1–15.
4. A. Maarefparvar, A. Rajaei, *Relative Pólya group and Pólya dihedral extensions of* $\mathbb{Q}$. J. Number Theory **207** (2020), 367–384.
5. T. Tannaka, *A generalized principal ideal theorem and a proof of a conjecture of Deuring.* Annals of Mathematics (1958). 547–589.
6. H. Zantema, *Integer valued polynomials over a number field.* Manuscripta Math. **40** (1982), 155–203.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

رهیافتی جدید به نسبی سازی گروه پولیای میدان‌های عددی

احسان شاحسینی[1,*] ، علی رجایی[2]

[1]دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

[2]دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله، ابتدا مفاهیم گروه پولیا و گروه پولیای نسبی میدان‌های عددی و دنباله‌های دقیق وابسته به آنها را مرور می‌کنیم. سپس، با توجه به فلسفه گروه پولیا و ارتباط آن با انشعاب، تعریف گروه پولیای نسبی را تعدیل کرده و گروه استروفسکی را، به عنوان نسبی سازیِ صحیح‌تر گروه پولیا، برای میدان‌های عددی تعریف می‌کنیم که با فلسفه گروه پولیا نیز سازگار است و ارتباط آن با انشعاب درست به مانند گروه پولیا است.

واژه‌های کلیدی: گروه پولیا، گروه پولیای نسبی، گروه استروفسکی، گروه رده‌ای، کوهومولوژی گالوا.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11R29, 11R34, 11R37.

۱. مقدمه

نمادها. در این مقاله، برای میدان عددی K، از نمادهای $I(K)$، $P(K)$، $Cl(K)$، $\mathcal{O}_K$، U_K، $h(K)$، H_K و $Max(\mathcal{O}_K)$ به ترتیب برای معرفی گروه ایده‌آل‌های کسری، گروه ایده‌آل‌های کسری اصلی، گروه رده‌ای، حلقه‌ی اعداد صحیح جبری، یکه‌های حلقه‌ی اعداد صحیح جبری، عدد رده‌ای، میدان رده‌ای هیلبرت از K و مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathcal{O}_K$ استفاده شده است. برای توسیع متناهی L/K از میدان‌های عددی، نماد $\epsilon_{L/K}$ معرف همریختی $\epsilon_{L/K} : Cl(K) \to Cl(L)$ و نماد $\mathcal{N}_{L/K}$ معرف همریختی نُرم $\mathcal{N}_{L/K} : I(L) \to I(K)$ است. برای توسیع گالوایی L/K، نماد $e_{\mathfrak{p}}(L/K)$ معرف اندیس انشعاب ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از K، و نماد $f_{\mathfrak{p}}(L/K)$ معرف درجه رده‌ای مانده‌ای ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از K است. اگر $K = \mathbb{Q}$، برای سادگی از نمادهای e_p و f_p به جای $e_p(L/\mathbb{Q})$ و $f_p(L/\mathbb{Q})$ استفاده می‌کنیم. همچنین در این حالت، از نماد $Gal(L/K)$ برای گروه گالوای L روی K استفاده می‌کنیم.

فرض کنید K یک میدان عددی باشد. برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح $f \geq 1$، ایده‌آل استروفسکی $\Pi_{p^f}(K)$ از K به شکل زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$\Pi_{p^f}(K) =: \prod_{\substack{\mathfrak{m}\in Max(\mathcal{O}_K)\\ \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})=p^f}} \mathfrak{m}. \qquad (۱)$$

میدان عددی K یک میدان پولیا نامیده می‌شود، هرگاه همه ایده‌آل‌های استروفسکی $\Pi_{p^f}(K)$ از K اصلی باشند [۶]. گروه پولیای میدان عددی K میزان دور بودن K از پولیا بودن را می‌سنجد [۶]:

تعریف ۱.۱. گروه پولیای میدان عددی K به عنوان زیرگروهی از $Cl(K)$ که توسط ایده‌آل‌های استروفسکی $\Pi_{p^f}(K)$ از K تولید می‌شود، تعریف می‌شود و با نماد $Po(K)$ نشان داده می‌شود.

*سخنران. آدرس ایمیل: ehsanshahoseini69@gmail.com

لذا میدان عددی K پولیاست اگر و فقط اگر گروه پولیای آن بدیهی باشد. واضح است که هر میدان عددی با عدد رده‌ای 1 یک میدان پولیا است. توجه شود که عکس این مطلب الزاما صحیح نیست: میدان‌های دایره‌بری الزاما دارای خاصیت تجزیه یکتا نیستند اما همگی میدان پولیا هستند [۶].

قضیه ۲.۱. [۶] فرض کنید $K/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوایی متناهی با گروه گالوای G باشد. در این صورت، دنباله زیر یک دنباله دقیق کوتاه از گروه‌های آبلی متناهی است:

$$\{0\} \longrightarrow H^1(G, U_K) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}/e_p\mathbb{Z} \longrightarrow Po(K) \longrightarrow \{0\}. \tag{۲}$$

ملاحظه ۳.۱. توجه شود که چون در توسیع‌های گالوایی همه اندیس‌های انشعاب و همه درجه‌های مانده‌ای برای توسیع ایده‌آل‌ها با هم برابرند، لذا برای توسیع گالوایی $K/\mathbb{Q}$، داریم که $p\mathcal{O}_K = (\Pi_{p^{f_p}}(K))^{e_p(K/\mathbb{Q})}$، و لذا تنها آن دسته از ایده‌آل‌های استروفسکی $\Pi_{p^{f_p}}(K)$ در تولید $Po(K)$ نقش دارند که p در K منشعب شده باشد. درواقع فلسفه اساسی گروه پولیا همین است؛ برای توسیع گالوایی $K/\mathbb{Q}$، گروه پولیای K، $Po(K)$، آن زیرگروهی از گروه رده‌ای K، $Cl(K)$، است که توسط ایده‌آل‌های اول منشعب شده کنترل می‌شود. به عبارت دیگر، $Po(K)$ قسمت "کنترل شونده توسط انشعاب" از $Cl(K)$ است. همچنین توجه کنید که با توجه به دنباله دقیق (۲) ، یک نگاشت پوشا از جمع مستقیم اندیس‌های انشعاب توسیع $K/\mathbb{Q}$ به $Po(K)$ وجود دارد که خود نشان دهنده این است که $Po(K)$ توسط ایده‌آل‌های اول منشعب شده کنترل می‌شود.

همواره بسیار مفید است که سعی کنیم مفاهیم را نسبی سازی کنیم. اخیرا مفهوم گروه پولیا به شکل زیر نسبی سازی شده است [۴]:

تعریف ۴.۱. فرض کنید L/K یک توسیع متناهی از میدان‌های عددی باشد و $\mathfrak{p} \in Max(\mathcal{O}_K)$ و $f \in \mathbb{N}$. گروه پولیای نسبی L روی K برابر است با زیرگروهی از $Cl(L)$ که توسط ایده‌آل‌های استروفسکی نسبی $\Pi_{\mathfrak{p}^f}(L/K)$ تولید می‌شود که در آن:

$$\Pi_{\mathfrak{p}^f}(L/K) = \prod_{\substack{\mathfrak{M} \in Max(\mathcal{O}_L) \\ N_{L/K}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{p}^f}} \mathfrak{M}. \tag{۳}$$

گروه پولیای نسبی L روی K را با نماد $Po(L/K)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که $Po(L/\mathbb{Q}) = Po(L)$ و $Po(L/L) = Cl(L)$.

قضیه ۵.۱. [۴] فرض کنید L/K یک توسیع گالوایی متناهی از میدان‌های عددی با گروه گالوای G باشد. در این صورت دنباله زیر دقیق است:

$$\{0\} \to Ker(\epsilon_{L/K}) \to H^1(G, U_L) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \to \frac{Po(L/K)}{\epsilon_{L/K}(Cl(K))} \to \{0\}. \tag{۴}$$

۲. نتایج اصلی

در این بخش از مقاله، هدف ما این است که تعریف گروه پولیای نسبی را طوری پیرایش کنیم که با فلسفه اساسی گروه پولیا در حالت مطلق سازگار باشد. با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که چگونه ایده‌آل‌های اول نامنشعب می‌توانند در تولید $Po(L/K)$ نقش داشته باشند. درواقع مثالی ارائه می‌کنیم که هیچ عنصر نابدیهی $Po(L/K)$ از ایده‌آل‌های اول منشعب توسیع L/K نمی‌آید؛ یعنی تصویر همریختی $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \longrightarrow Po(L/K)$ بدیهی است.

مثال ۱.۲. فرض کنید $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ و $L = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ که p یک عدد اول منظم است؛ یعنی $p \nmid h(\mathbb{Q}(\zeta_p))$. در این صورت، چون $[L : K] = p^{n-1}$، لذا $(h(K), [L : K]) = 1$ و بنابراین طبق گزاره‌ای از [۴] نتیجه می‌گیریم که $Cl(K) \hookrightarrow Po(L/K)$. لذا $Po(L/K)$ شامل زیرگروهی است که مرتبه آن نسبت به p اول است. از آنجایی که $Po(L/K) \subseteq Cl(L)$، لذا همریختی $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \longrightarrow Po(L/K)$ نمی‌تواند پوشا باشد. درواقع، با استفاده از

گزاره‌ای از [۲] داریم که $p \mid h(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ اگر و فقط اگر $p \mid h(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$؛ و چون $|\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}}| = p^{n-1}$ ، بنابراین همریختی $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \longrightarrow Po(L/K)$ ، همریختی بدیهی است. اکنون اجازه دهید نگاهی دقیق‌تر به رفتار ایده‌آل‌ها در توسیع L/K داشته باشیم. تنها ایده‌آل اول منشعب شده در این توسیع، ایده‌آل $< 1-\zeta_p >$ است که کاملا منشعب شده است و داریم که $\Pi_{<1-\zeta_p>}(L/K)^{(p^{n-1})} =< 1-\zeta_{p^n} > \subset 1-\zeta_p > \mathcal{O}_L =< 1-\zeta_p >$. بنابراین ایده‌آل استروفسکی نسبی $1-\zeta_{p^n}$ توسط عنصر $Po(L/K)$ تولید می‌شود و لذا اصلی است. لذا هیچ ایده‌آل منشعب شده‌ای نمی‌تواند در تولید $Po(L/K)$ نقش داشته باشد. از طرفی از [۵] می‌دانیم که برای هر عدد اول $p > 19$، $h(\mathbb{Q}(\zeta_p)) \neq 1$. چون $Cl(K) \hookrightarrow Po(L/K)$، بنابراین برای هر عدد اول $p > 19$، $Po(L/K)$ نابدیهی است و هیچکدام از عناصر آن توسط ایده‌آل‌های اول منشعب شده تولید نمی‌شوند. لذا می‌بینیم که درواقع در دورترین حالت از فلسفه گروه پولیا قرار داریم: هیچ عنصری از $Po(L/K)$ توسط ایده‌آل‌های اول منشعب شده تولید نمی‌شود، و همریختی $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \longrightarrow Po(L/K)$ همریختی بدیهی است. در ادامه تلاش می‌کنیم که با تعریف گروه استروفسکی، این مشکلات فلسفی را حل کنیم.

تعریف ۲.۲. برای توسیع متناهی L/K از میدان‌های عددی، گروه استروفسکی (یا گروه استروفسکی نسبی) L/K، $Ost(L/K)$، را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ost(L/K) := \frac{Po(L/K)}{Po(L/K) \cap \epsilon_{L/K}(Cl(K))}. \tag{۵}$$

به طور خاص، $Ost(L/\mathbb{Q}) = Po(L/\mathbb{Q}) = Po(L)$ و $Ost(L/L) = \{0\}$. L/K را استروفسکی گوییم هرگاه $Ost(L/K)$ بدیهی باشد. توجه کنید که اگر L/K گالوایی باشد، در این صورت $\epsilon_{L/K}(Cl(K)) \subseteq Po(L/K)$ و لذا:

$$Ost(L/K) := \frac{Po(L/K)}{\epsilon_{L/K}(Cl(K))}. \tag{۶}$$

ملاحظه ۳.۲. فرض کنید L/K یک توسیع گالوایی متناهی از میدان‌های عددی با گروه گالوای G باشد. در این صورت دنباله دقیق (۴) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\{0\} \to Ker(\epsilon_{L/K}) \to H^1(G, U_L) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \to Ost(L/K) \to \{0\}. \tag{۷}$$

این دنباله دقیق نشان می‌دهد که همریختی $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \frac{\mathbb{Z}}{e_{\mathfrak{p}(L/K)}\mathbb{Z}} \to Ost(L/K)$ پوشا است. همچنین در ادامه نشان می‌دهیم که ایده‌آل‌های اول نامنشعب در L/K نقشی در تولید $Ost(L/K)$ ندارند؛ و بدین ترتیب مشکلات فلسفی مطرح شده درباره $Po(L/K)$ را رفع می‌کنیم.

تعریف ۴.۲. فرض کنید L/K یک توسیع متناهی از میدان‌های عددی باشد. گروه پیش-استروفسکی L/K، $Ost(L/K)_{nr}$، که زیرگروهی از $Ost(L/K)$ است را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ost(L/K)_{nr} = \frac{Po(L/K)_{nr}}{Po(L/K)_{nr} \cap \epsilon_{L/K}(Cl(K))}, \tag{۸}$$

که در آن:

$$Po(L/K)_{nr} = \left\langle \left[\Pi_{\mathfrak{p}^f}(L/K)\right] \ : \ \mathfrak{p} \text{ یک ایده آل اول نامنشعب در توسیع } L/K \text{ است} \ , \ f \in \mathbb{N} \right\rangle. \tag{۹}$$

در حالت خاص، $Ost(L/\mathbb{Q})_{nr}$ همان $Po(L)_{nr}$ است که در [۱] تعریف شده است.

در قضیه بعدی نشان می‌دهیم اگر L/K گالوایی باشد، آنگاه $Ost(L/K)_{nr}$ بدیهی است، و لذا در این حالت فقط ایده‌آل‌های اول منشعب شده در تولید $Ost(L/K)$ تاثیرگذار هستند:

قضیه ۵.۲. اگر L/K یک توسیع گالوایی متناهی از میدان‌های عددی باشد، آنگاه $Ost(L/K)_{nr}$ بدیهی است. علاوه بر این، $Ost(L/K) \subseteq \frac{Po(L/K)}{Po(L/K)_{nr}}$.

اثبات. چون L/K گالوایی است، داریم که:

$$Po(L/K)_{nr} \subseteq \epsilon_{L/K}(Cl(K)) \subseteq Po(L/K) \tag{۱۰}$$

حال، هر دو ادعای ما به ترتیب از تعاریف $Ost(L/K)$ (تعریف ۲.۲) و $Ost(L/K)_{nr}$ (تعریف ۴.۲) نتیجه می‌شوند. □

از [۳] می‌دانیم که برای میدان عددی K، میدان رده‌ای هیلبرت K، H_K، یک میدان پولیا است؛ یعنی $Po(H_K)$ بدیهی است. در [۴] نشان داده شد که $Po(H_K/K)$ هم بدیهی است. در ادامه هم اثبات ساده‌تری برای این قضیه ارائه می‌کنیم، و هم نشان می‌دهیم که برای توسیع متناهی L/K از میدان‌های عددی، $Ost(H_L/K)$ نیز بدیهی است. ابتدا، یک ملاحظه ساده اما کاربردی را مطرح می‌کنیم:

ملاحظه ۶.۲. اگر توسیع گالوایی متناهی L/K از میدان‌های عددی در همه ایده‌آل‌های اول متناهی نامنشعب باشد، در این صورت با توجه به دنباله دقیق (۷) واضح است که $Ost(L/K)$ بدیهی است. بویژه، $Ost(H_K/K)$ بدیهی است.

قضیه ۷.۲. [۴] برای میدان عددی K، $Po(H_K/K)$ بدیهی است.

اثبات. با توجه به ۶.۲ داریم که $Po(H_K/K) = \epsilon_{H_K/K}(Cl(K))$. از طرفی، از قضیه ایده‌آل اصلی در نظریه میدان‌های رده‌ای، می‌دانیم که $\epsilon_{L/K}(Cl(K)) = \{0\}$. بنابراین $Po(H_K/K) = \{0\}$. □

در اثبات قضیه بعدی، به گزاره زیر از [۴] نیاز داریم.

قضیه ۸.۲. [۴] اگر $F \subseteq K \subseteq L$ برجی از توسیع‌های متناهی میدان‌های عددی باشد و L/K گالوایی باشد، آنگاه $Po(L/F) \subseteq Po(L/K)$.

قضیه ۹.۲. برای توسیع متناهی L/K از میدان‌های عددی، $Ost(H_L/K)$ بدیهی است.

اثبات. از قضیه ایده‌آل اصلی در نظریه میدان‌های رده‌ای نتیجه می‌شود که:

$$\epsilon_{H(L)/K}(Cl(K)) = \epsilon_{H(L)/L}\left(\epsilon_{L/K}(Cl(K))\right) \subseteq \epsilon_{H(L)/L}\left(Cl(L)\right) = \{0\}. \tag{۱۱}$$

بنابراین:

$$Ost(H(L)/K) = Po(H(L)/K) \subseteq Po(H(L)/L) = \{0\}. \tag{۱۲}$$

درواقع، در (۱۲) ، تساوی سمت چپ از تعریف ۲.۲، شمول از ۸.۲، و تساوی سمت راست از ۶.۲ نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۱۰.۲. همانطور که گفته شد، در [۳] نشان داده شده که برای میدان عددی K، $Po(H_K)$ بدیهی است. این اثبات مبتنی بر مطالعه ایده‌آل‌های استروفسکی $\Pi_{pf}(H_K)$ است. با استفاده از همین روش، و با مطالعه ایده‌آل‌های استروفسکی نسبی $\Pi_{pf}(H_L/K)$، می‌توان نشان داد که $Po(H_L/K)$ بدیهی است؛ و با استفاده از قضیه ایده‌آل اصلی نتیجه گرفت که $Ost(H_L/K)$ بدیهی است، و لذا اثبات دیگری برای قضیه ۹.۲ ارائه داد.

مراجع

1. J. L. Chabert, *From Pólya fields to Pólya groups (I) Galois extensions.* J. Number Theory **203** (2019), 360–375.
2. K. Iwasawa, *A note on class numbers of algebraic number fields.* Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **20** (1956), 257–258
3. A. Leriche, *About the embedding of a number field in a Pólya field.* J. Number Theory **45** (2014), 210–229.
4. A. Maarefparvar, A. Rajaei, *Relative Pólya group and Pólya dihedral extensions of* $\mathbb{Q}$. J. Number Theory **207** (2020), 367–384.
5. J. M. Masley, H. L. Montgomery, *Cyclotomic fields with unique factorization.* J. für die reine und angewandte Math. **286-287** (1976), 248–256.
6. H. Zantema, *Integer valued polynomials over a number field.* Manuscripta Math. **40** (1982), 155–203.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

سری های توانی صوری اَبَرمتعالی

حبیب شریف*

بخش ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده. یکی از مفاهیم مهم در نظریه گالوا، مفهوم عنصر جبری روی یک میدان است. با فرض اینکه K یک میدان بوده و $f \in K[[x]]$، در این صورت f را روی K یک تابع جبری گویند هرگاه، f در یک چندجمله ای با ضرایب در $K(x)$ صدق کند. حال اگر f و مشتقات آن، یعنی f'، f'' و ... در یک چندجمله ای ناصفر صدق کنند، f را یک تابع مشتق پذیر-جبری گویند. در غیر این صورت f را متعالیاً متعالی می نامند. عملگر مشتق زمانی کارایی دارد که مشخصه K صفر باشد و این عملگر برای زمانی که مشخصه K مثبت باشد، قابل کاربرد نیست و باید عملگری تعریف کرد که نقشی شبیه مشتق را ایفا نماید. در این مقاله، به معرفی و بررسی دو عملگر پرداخته که یکی به روی میدان های تام (perfect) از مشخصه عدد اول p و دیگری به روی میدان های دلخواه از مشخصه p پرداخته و بعضی از ویژگی های این دو عملگر را نیز مورد مطالعه قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: سری های توانی صوری، سری های توانی مشتق پذیر-جبری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11D88, 11J99.

۱. مقدمه

حلقه چندجمله ای ها و حلقه های سری های توانی صوری از ابزار مهمی هستند که در اختیار متخصصین جبر جابجایی است. اهمیت این حلقه ها بر کسی پوشیده نیست. زمانی که این حلقه ها بر روی میدان ها تعریف می شوند، متخصصین نظریه میدان به ویژگی های دیگری از این حلقه ها توجه می کنند. مفاهیم توابع گویا، توابع جبری، توابع متعالی-جبری، توابع مشتق پذیر-جبری، توابع E-جبری، توابع δ-جبری و بالاخره توابع متعالیاً متعالی (TT) بعضی از این توابع هستند که ظرف چند دهه گذشته توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود جلب کرده است. برای مثال رجوع شود به [۱–۸].

هنگامی که میدان های فوق الذکر از مشخصه صفر باشند، ویژگی های تحلیلی بیشتر مدنظر قرار گرفته و زمانی که این میدان ها از مشخصه عدد اول باشند، نتایج کاملا صوری مورد بحث قرار می گیرند. برای آگاهی از یک بررسی اجمالی در این خصوص می توان به مرجع [۵] مراجعه نمود.

قرارداد. از این به بعد L یک میدان از مشخصه صفر، K یک میدان تام (perfect) از مشخصه p و E یک میدان دلخواه از مشخصه p است. برای میدان F حلقه سری های توانی صوری را با $F[[x]]$، میدان کسر های آن را با $F((x))$، حلقه چندجمله ای ها با ضرایب در F را با $F[x]$ و میدان کسرهای آن را با $F(x)$ نشان داده که این میدان به میدان توابع گویا نیز مشهور است.

۲. توابع مشتق پذیر-جبری

توابع مشتق پذیر-جبری توسط ریاضیدانان زیادی مورد بررسی قرارگرفته است. این توابع بر روی میدان های از مشخصه صفر تعریف می شوند و کاربرد های متنوعی دارند. (برای مثال به مرجع [۳] رجوع شود.)

*سخنران. آدرس ایمیل: sharif@susc.ac.ir

یادآوری می کنیم که تابع $f \in L[[x]]$ را مشتق پذیر-جبری(برای اختصار، D-جبری) گوییم هرگاه چندجمله ای ناصفر P موجود باشد که $P(x, f, f', f'', \ldots) = 0$، که در آن $f^{(n)}$ مشتق n-ام تابع f است.
می توان نشان داد که این تعریف معادل است با

$$\text{tr. deg}_{L(x)} L(x, f, f', f'', \ldots) < \infty$$

که در آن $\text{tr. deg}_B A$ یعنی درجه متعالی A روی B. تابعی که D-جبری نباشد را متعالیاً متعالی(به طور خلاصه، TT) گوییم.

مثال ۱.۲. الف) سری توانی صوری $f = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ یک تابع D-جبری است، زیرا $x^2 f' + (x-1)f + 1 = 0$.
ب) سری توانی صوری $g = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$ یک سری متعالیاً متعالی است. (رجوع شود به [۹] صفحه ۲۲۰.)

۳. توابع E-جبری

مفهوم توابع D-جبری روی میدان های با مشخصه p تعریف نمی شود، زیرا مشتق pام هر سری توانی صوری روی این میدان ها صفر است. برای رفع این نقیصه، در این بخش عملگر E_i را زمانی که K یک میدان تام و از مشخصه p است را به صورت زیر تعریف می کنیم. (رجوع شود به [۴]، [۵] یا [۷].)
هر سری توانی لورانت $f \in K((x))$ را به صورت $f = \sum_{i=0}^{p-1} x^i f_i^p$ تجزیه کرده که در آن $f_i \in K((x))$. در واقع

$$f_i = \sum_{n=-N}^{\infty} a_{pn+i}^{\frac{1}{p}} x^n$$

برای هر $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. حال عملگر E_i را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$E_i : K((x)) \longrightarrow K((x))$$
$$E_i(f) = f_i$$

فرض کنید Ω نیم گروه تولید شده توسط عملگر همانی و E_i ها، که $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ همراه با عمل ترکیب توابع باشد. برای هر $f \in K((x))$، مدار $\Omega(f)$ را در نظر می گیریم.

$$\Omega(f) = \{E(f) : E \in \Omega\}$$

تابع $f \in K((x))$ را روی K یک تابع E-جبری گوییم هرگاه

$$\text{tr. deg}_{K(x)} K(x, \Omega(f)) < \infty.$$

اگر f یک تابع E-جبری نباشد به آن اَبَرمتعالی گوییم. به عبارت دیگر، f را یک تابع اَبَرمتعالی گوییم هرگاه، برای هر $E_i \in \Omega$،

$$f, E_i(f), E_i \circ E_j(f), \ldots$$

روی $K(x)$ مستقل جبری باشند.

مثال ۱.۳. فرض کنید $K = \mathbb{F}_2$ و $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ یک عدد صحیح ۲-ادیک باشد. فرض کنید $f_\alpha = (1+x)^\alpha \in \mathbb{F}_2[[x]]$.
اگر α گویا باشد، f_α جبری است و لذا

$$\text{tr. deg}_{\mathbb{F}_2(x)} \mathbb{F}_2(x, \Omega(f_\alpha)) = 0.$$

اما اگر α اصم باشد، f_α روی $\mathbb{F}_2$ جبری نیست. لذا در هر صورت f_α یک تابع E-جبری است. این مثال نشان می دهد که مجموعه تمام توابع E-جبری کلاس بزرگتری از مجموعه توابع جبری است ([۵]).
یادآوری می کنیم که اگر $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$، آن گاه پیچش یا ضرب هدمارد f و g که با $f * g$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

در [۴] نیز نتایج جالبی را از توابع E-جبری ارایه دادیم و با ساختن دو سری توانی صوری ویژه، نشان دادیم که پیچش دو سری توانی صوری E-جبری، لزوما E-جبری نیست.

۴. توابع δ-جبری

شیکی شوما-سوجی و همکارش در مرجع [۸] با ارایه یک عملگر جدید به نام δ روی میدان دلخواه E و از مشخصه $p > 0$، به نتایج جالبی دست یافتند. نویسندگان برای هر $n \in \mathbb{N}$، عملگر مشتق nام را با ضابطه زیر تعریف نمودند

$$\delta_n : E[[x]] \longrightarrow E[[x]]$$

$$\delta_n(f) = \delta_n(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} a_i x^{i-n}$$

تعریف ۱.۴. تابع $f \in E[[x]]$ را روی E یک تابع δ-جبری گوییم هرگاه

$$\text{tr. deg}_{E(x)} E(x, f, \delta_1 f, \delta_2 f, \ldots) < \infty.$$

اگر f یک تابع δ-جبری نباشد، آن را اَبَر-متعالی می نامند. به عبارت دیگر، تابع f را اَبَر-متعالی نامند هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، توابع f، $\delta_1 f$، $\delta_2 f$، ...، $\delta_n f$ روی $E(x)$ مستقل جبری باشند.

حال مجموعه تمام توابع δ-جبری روی E را با Δ_E نمایش می دهیم. در [۶] نشان دادیم که $\overline{E(x)} \subsetneq \Delta_E$، که در آن مقصود از $\overline{A}$ یعنی بستار جبری A. همچنین نشان دادیم که Δ_E همراه با جمع و ضرب معمولی سری های توانی یک میدان نامتناهی از مشخصه p تشکیل می دهد.

۵. ویژگی هایی از سری های توانی E-جبری و δ-جبری

با توجه به تعریف توابع E-جبری روی K، به دلیل تام بودن میدان K عملا محدودیتی را در خصوص بررسی دسته ای از سری های توانی ایجاد کرده ایم. با استفاده از قضیه زیر ویژگی هایی در خصوص توابع E-جبری را می توان به توابع δ-جبری تعمیم داد.

قضیه ۱.۵. فرض کنید F یک میدان دلخواه از مشخصه p و $h \in F((x))$ یک تابع جبری روی F' باشد که F' یک توسیع دلخواه میدان F است. در این صورت h روی F جبری است.

اثبات. با توجه به جبری بودن h روی F'، عناصر $a_i \in F'[x]$ که $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ وجود دارند (بعد از حذف مخرج مشترک کسرها) که همگی صفر نیستند و

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) h^i(x) = 0 \qquad (1)$$

که در آن n درجه h روی $F'[x]$ است. برای هر j که $0 \leq j \leq n$، a_j یک چندجمله ای است. فرض کنید $a_j = \sum b_{ji} x^i$. لذا حداقل عنصر ناصفر $b_{ji} \in F'$ وجود دارد. فرض کنید b_{jt} اولین عنصر ناصفر پایه B از F' روی F باشد. در این صورت F-همریختی $\phi : F' \longrightarrow F$ را با ضابطه زیر تعریف کنید

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x = b_{jt} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $\phi(x)$ را با $\bar{x}$ نشان دهیم، از رابطه (۱) داریم

$$\sum \overline{a_i(x)} h^i(x) = 0$$

که در آن $\overline{a_k(x)} = \sum_i \overline{b_{ki}} x^i$ یک عنصر ناصفر $F[x]$ است برای بعضی k. لذا h یک تابع جبری روی F است. □

با استفاده از قضیه ۱.۵ چنانچه ضرایب سری های توانی در یک میدان از مشخصه مثبت باشد، می توان با توسعه آن میدان به یک میدان تام(به عنوان مثال بستار جبری آن) نتایج موردنظر را کسب کرد.

نتیجه ۲.۵. فرض کنید F یک میدان از مشخصه p بوده و $f \in F((x))$ یک تابع δ-جبری روی L که L یک توسیع دلخواه میدان F است. در این صورت h روی F نیز E-جبری است.

اثبات. با توجه به δ-جبری بودن f روی L داریم

$$\mathrm{tr.deg}_{L(x)} L(x, f, \delta_1 f, \ldots, \delta_n f, \ldots) < \infty.$$

لذا عناصر x، f، $\delta_1 f$، ... روی $L(x)$ وابسته خطی هستند و در نتیجه در یک چندجمله ای ناصفر $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ با ضرایب در $L(x)$ صدق می کنند. چنانچه F-همریختی قضیه ۱.۵ را روی معادله حاصل از جایگزینی x، f، $\delta_1 f$، ... در چندجمله ای $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ اثر دهیم، داریم $\bar{P} = 0$ که در آن ضرایب در $F(x)$ بوده و لذا h روی F نیز E-جبری می شود.

□

قضیه ۳.۵. فرض کنید K یک میدان تام و از مشخصه p بوده و $f \in K((x))$. در این صورت f یک تابع E-جبری است اگر و تنها اگر f یک تابع δ-جبری باشد.

اثبات. رجوع شود به [۶].

□

در خاتمه نشان می دهیم که پیچش دو سری توانی δ-جبری لزوما δ-جبری نیست. لذا مجموعه تمام توابع δ-جبری که همراه با جمع و ضرب سری های توانی یک میدان نامتناهی و از مشخصه p تشکیل می دهد نسبت به ضرب پیچش بسته نیست.

قضیه ۴.۵. فرض کنید

$$\mathcal{A} = \{f \in L((x)) | \text{ } f \text{ یک تابع } \delta\text{-جبری است}\} \qquad (۲)$$

در این صورت $\mathcal{A}$ نسبت به عمل $*$ بسته نیست.

اثبات. فرض کنید $f, g \in \mathbb{F}_2[x]$ سری های توانی باشند که در مرجع [۴] قضیه ۲-۱۲ تعریف شده اند. در این صورت $f * g$ یک تابع E-جبری نیست. با توجه به اینکه میدان های متناهی تام هستند، لذا بنابه قضیه ۳.۵ هر دوی f و g توابعی δ-جبری اند. حال فرض کنید $f * g$ یک تابع δ-جبری روی $\mathbb{F}_2$ باشد. با توجه به اینکه $f * g \in \mathbb{F}_2[[x]]$، بنابه قضیه ۲.۵ ، $f * g$ نیز یک تابع E-جبری است که این نتیجه یک تناقض است. پس $\mathcal{A}$ نسبت به عمل $*$ بسته نیست.

□

تشکر و قدردانی

مولف با کمال احترام از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه شیراز که امکانات لازم جهت انجام این تحقیق را فراهم نموده اند کمال تشکر را دارد.

مراجع

1. Denef, J. and Lipshitz, L. *Algebraic power series and diagonals*, J. Number Theory, 26 (1987) 46-67.
2. Furstenberg, H. *Algebraic functions over finite fields*, J. Algebra, 7 (1967) 271-277.
3. Lipshitz, L. and Rubel, L. *A gap theorem for power series solutions of algebraic diffrential equations*, Amer. J. Math., 108 (1986) 1193-1214.
4. Sharif, H. *E-algebraic functions over fields of positive characteristic -an analogue of differentially algebraic functions*, J. Algebra 207 (1998) 355-366.
5. — *The algebra of formal power series*, Proceeding of the Monthly Colloquium of the Iranian Mathematical Society, 2 (2004) 179-200.
6. — *Hypertranscendental formal power series over fields of positive characteristic*, Algebraic Structures and Their Applications, 1 (2014) 23-33.
7. — and Woodcock, C.F. *Algebraic functions over a field of positive characteristic and Hadamard products,* J. London Math. Soc., 37 (1988) 395–403.
8. Shikishima-Tsuji, K. and Katsura, M. *Hypertranscendental elements of a formal power-series ring of positive characteristic,* Nagoya Math. J., 125 (1992) 93–103.
9. Zarisky, O. and Samuel, P. Commutative algebra Vol. 2 (Vom Nostrand, Newoyork, 1960).

پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه

شعبان قلندرزاده[۱]، آرزو رنجبرنژاد اصفهانی[۲,*]
[۱]دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
[۲]دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده. فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابجایی و M یک R-مدول یکانی باشد. در این مقاله، زیرمدول (γ, δ)-اولیه R-مدول M را به عنوان توسیعی از زیرمدول‌های δ-اولیه تعریف کرده و خواص آن را بررسی خواهیم‌کرد و نشان خواهیم‌داد که تحت شرایطی تصویر مستقیم و تصویر معکوس یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه، یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه خواهدبود.
واژه‌های کلیدی: زیرمدول‌های اولیه، زیرمدول‌های δ-اولیه، زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13A10, 13A15.

۱. مقدمه

در سرتاسر این مقاله، R یک حلقه جابجایی یکدار و M یک R-مدول یکانی است. زیرمدول N از R-مدول M را اولیه نامند اگر $N \neq M$ و برای هر $r \in R$ و هر $m \in M$، $rm \in N$ بیانگر این باشد که $m \in N$ یا $r \in \sqrt{(N : M)}$، که در آن

$$(N : M) = \{r \ : \ r \in R, \ rM \subseteq M\}.$$

فرض کنید $\delta : Id(R) \to Id(R) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع باشد که در آن $Id(R)$ مجموعه همه ایده‌آل‌های حلقه R است. ایده‌آل $I \neq R$ از حلقه R را δ-اول نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in I \backslash \delta(I)$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$ ([۱]). در سال ۲۰۱۲ دارانی با توسیع این مفهوم، ایده‌آل δ-اولیه را تعریف کرد. ایده‌آل سره I از حلقه R را δ-اولیه نامند هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in I \backslash \delta(I)$، آنگاه $a \in I$ یا $b \in \sqrt{I}$. بدیهی است که هر ایده‌آل اول و δ-اول یک ایده‌آل δ-اولیه است. در مقاله [۷]، ژاو تعریف دیگری برای ایده‌آل δ-اولیه را ارایه می‌کند. او ابتدا یک توسیع ایده‌آل به شکل زیر تعریف می‌کند. تابع $\delta : Id(R) \to Id(R) \cup \{\emptyset\}$ را یک توسیع نامند هرگاه اولاً برای هر ایده‌آل I از حلقه R، $I \subseteq \delta(I)$ بوده و ثانیاً برای هر دو ایده‌آل P و Q از حلقه R به طوری که $P \subseteq Q$ آنگاه $\delta(P) \subseteq \delta(Q)$. حال فرض کنید δ یک توسیع ایده‌آل‌ها و I ایده‌آل سره حلقه R باشد. آنگاه ایده‌آل I را δ-اولیه نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$ و $ab \in I$ اگر $a \notin I$، آنگاه $b \in \delta(I)$. زمانی در سال ۲۰۱۰ مفهوم ایده‌آل δ-اول معرفی شده در [۱] به زیرمدول‌ها توسیع داد. زیرمدول سره N از M را γ-اول نامند، هرگاه برای هر $a \in R$ و هر $m \in M$، $am \in N \backslash \gamma(N)$ بیانگر این باشد که $m \in N$ یا $a \in (N : M)$، که در آن $\gamma : S(M) \to S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تابع است و $S(M)$ گردایه همه زیر مدول‌های M است. در سال ۲۰۱۸ توسط یزلات زیرمدول δ-اولیه تعریف شد. زیرمدول سره N از R-مدول M را یک زیرمدول δ-اولیه نامند هرگاه برای هر $r \in R$ و هر $m \in M$، $rm \in N$ نتیجه دهد که $m \in N$ یا $r \in \delta((N : M))$، که δ یک توسیع ایده‌آل‌ها است. مبتنی بر مفاهیم ارائه شده برای زیرمدول N از یک R-مدول M، در این مقاله زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه یک R-مدول را معرفی می‌کنیم. تابع $\gamma : S(M) \to S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تحدید زیرمدول نامند هرگاه برای هر زیر مدول

*سخنران. آدرس ایمیل: a.Ranjbar@email.kntu.ac.ir

N، داشته‌باشیم $\gamma(N) \subseteq N$ و به علاوه برای هر دو زیر مدول N و K اگر $K \subseteq N$ آنگاه $\gamma(K) \subseteq \gamma(N)$. حال فرض کنید $\delta : Id(R) \to Id(R) \cup \{\emptyset\}$ یک توسیع ایده‌آل و $\gamma : S(M) \to S(M) \cup \{\emptyset\}$ یک تحدید زیر مدول‌ها باشد. زیرمدول N از یک R-مدول M را (γ, δ)-اولیه نامند هرگاه برای هر $a \in R$ و هر $m \in M$، $am \in N \backslash \gamma(N)$ نتیجه دهد که $m \in N$ یا $r \in \delta((N : M))$. در بخش اول مقاله به ارائه چند خاصیت زیرمدول (γ, δ)-اولیه می‌پردازیم و سپس در بخش دوم به مطالعه تصویر مستقیم و تصویر معکوس زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه خواهیم پرداخت.

۲. زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه

تعریف ۱.۲. یک توسیع ایده‌آل‌ها $\delta : Id(R) \to Id(R) \cup \{\emptyset\}$ تابعی است که به هر ایده‌آل I از حلقه R یک ایده‌آل $\delta(I)$ از R را می‌دهد که دارای شرایط زیر است:

(۱) $I \subseteq \delta(I)$،

(۲) اگر $I \subseteq J$، آنگاه $\delta(I) \subseteq \delta(J)$،

مثال ۲.۲. • تابع همانی $\delta_\circ$ یک نمونه از توسیع ایده‌آل است که در آن به ازای هر $I \in Id(R)$، داریم:

$$\delta_\circ(I) = I.$$

• برای هر ایده‌آل از حلقه R، δ_1 با ضابطه $\delta_1(I) = \sqrt{I}$ یک توسیع ایده‌آل‌ها است.

تعریف ۳.۲. یک تحدید زیرمدول‌ها $\gamma : S(M) \to S(M) \cup \{\emptyset\}$ تابعی است که به هر زیرمدول N از R-مدول M یک زیرمدول $\gamma(N)$ را نسبت می‌دهد که دارای خواص زیر است:

(۱) $\gamma(N) \subseteq N$،

(۲) اگر $N \subseteq K$، آنگاه $\gamma(K) \subseteq \gamma(N)$.

تعریف ۴.۲. زیرمدول سره N از R-مدول M را (γ, δ)-اولیه نامیم هرگاه برای هر $r \in R$ و برای هر $m \in M$ از $rm \in N \backslash \gamma(N)$ بتوان نتیجه گرفت $m \in N$ یا $r \in \delta((N : M))$

مثال ۵.۲. هر ایده‌آل δ-اولیه یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه حلقه R به عنوان یک R-مدول است.

اگر R به عنوان R-مدول در نظر گرفته شود، آنگاه $S(M) = Id(R)$. لذا داریم:

$$ab \in I \backslash \gamma(I) \quad \Longrightarrow \quad a \in I \quad \text{یا} \quad b \in \delta(I) \qquad (a, b \in R).$$

گزاره ۶.۲. فرض کنید M یک R-مدول و γ تحدیدی روی زیرمدول‌ها و δ و δ' دو توسیع روی ایده‌آل‌ها باشند به طوری که:

$$\forall I \trianglelefteq R, \qquad \delta(I) \subseteq \delta'(I).$$

در این صورت برای هر زیرمدول سره N از M، اگر N یک (γ, δ)-اولیه است، آنگاه (γ, δ')-اولیه است.

اثبات. بدیهی است. □

گزاره ۷.۲. فرض کنید M یک R-مدول و δ یک توسیع ایده‌آل و γ و γ' دو تحدید روی مدول‌ها باشند به طوری که $\gamma(N) \subseteq \gamma'(N)$. اگر $N \leq M$ یک (γ, δ)-اولیه باشد، آنگاه (γ', δ)-اولیه است.

اثبات. بدیهی است. □

گزاره ۸.۲. اگر $\{N_i : i \in \Lambda\}$ زنجیری از زیرمدول‌های (γ, δ)-اولیه R-مدول M باشد، آنگاه $N = \bigcup_{i \in \Lambda} N_i$ یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه از M است.

اثبات. چون $\{N_i : i \in \Lambda\}$ زنجیر است، لذا N یک زیرمدول است. بدیهی است که به ازای هر $i \in \Lambda$، داریم $N_i \subseteq N$، پس $\gamma(N_i) \subseteq \gamma(N)$ و لذا $\bigcup_{i \in \Lambda} \gamma(N_i) \subseteq \gamma(N)$. اگر $am \in N \backslash \gamma(N)$، آنگاه $am \notin \gamma(N)$. بنابراین $am \notin \bigcup_{i \in \Lambda} \gamma(N_i)$. پس به ازای هر $i \in \Lambda$، داریم $am \notin \gamma(N_i)$. از طرفی $am \in N$ و لذا $j \in \Lambda$ موجود است به طوری که $am \in N_j$. اما $am \notin \gamma(N_j)$، پس $am \in N_j \backslash \gamma(N_j)$. بنابراین داریم $m \in N_j$ یا $r \in \delta((N_j : M)) \subseteq \delta((N : M))$. □

قضیه ۹.۲. فرض کنید $N < M$ و δ توسیع ایده‌آل و γ تحدید زیرمدول باشد. در این صورت عبارات زیر معادل‌اند:

(۱) N یک زیرمدول (γ,δ)-اولیه است.

(۲) برای هر $a \in R\backslash\delta((N:M))$، داریم

$$(N:_M a) = N \qquad \text{یا} \qquad (N:_M a) = (\gamma(N):_M a).$$

(۳) برای هر $a \in R\backslash\delta((N:M))$، داریم $(N:_M a) = N \cup (\gamma(N):_M a)$.

اثبات. (۲)⇒(۱): می‌دانیم $N \subseteq (N:_M a)$ و چون $\gamma(N) \subseteq N$، لذا $(\gamma(N):_M a) \subseteq (N:_M a)$. حال عکس تساوی‌های فوق را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x \in (N:_M a)$. لذا $xa \in N$. دو حالت روی می‌دهد: $xa \notin \gamma(N)$ یا $xa \in \gamma(N)$.

- اگر $xa \notin \gamma(N)$، آنگاه $xa \in N\backslash\gamma(N)$ و $a \notin \delta((N:M))$. چون N یک (γ,δ)-اولیه است. در نتیجه $x \in N$. پس $(N:_M a) \subseteq N$. بنابراین $(N:_M a) = N$.
- اگر $xa \in \gamma(N)$، آنگاه $x \in (\gamma(N):_M a)$. در نتیجه $(N:_M a) = (\gamma(N):_M a)$.

(۳)⇒(۲): بدیهی است. (۱)⇒(۳): فرض کنید برای هر $a \in R\backslash\delta((N:M))$ و $x \in M$، داریم $xa \in N\backslash\gamma(N)$. کافی است نشان دهیم که $x \in N$. چون $xa \in N$، لذا طبق فرض داریم $x \in (N:_M a) = N \cup (\gamma(N):_M a)$. حال چون $xa \notin \gamma(N)$، لذا $x \notin (\gamma(N):a)$. بنابراین $x \in N$. در نتیجه N یک (γ,δ)-اولیه است. □

گزاره ۱۰.۲. فرض کنید δ یک توسیع ایده‌آل و γ یک تحدید زیرمدول باشد و $N \leq M$. در این صورت N یک زیرمدول (γ,δ)-اولیه است هرگاه به ازای هر $I \trianglelefteq R$ و هر $K \leq M$. اگر $IK \subseteq N$ و $IK \nsubseteq \gamma(N)$، آنگاه:

$$I \subseteq \delta((N:M)) \qquad \text{یا} \qquad K \subseteq N.$$

اثبات. فرض کنید:

$$IK \subseteq N \wedge K \nsubseteq N \wedge I \nsubseteq \delta((N:M))$$

نشان می‌دهیم که $IK \subseteq \gamma(N)$. ابتدا فرض کنید $a \in I \setminus \delta((N:M))$، حال با استفاده از قضیه ۹.۲ داریم $(N:a) = N$ یا $(N:a) = (\gamma(N):a)$. اما با توجه به اینکه $K \nsubseteq N$ پس حالت $(N:a) = N$ روی نمی‌دهد. یعنی اگر $a \in I \setminus \delta(N:M)$، آنگاه با استفاده از مفروضات فقط حالت دوم قضیه ۹.۲ روی می‌دهد، لذا برای هر $a \in I \setminus \delta((N:M))$ داریم $(N:a) = \big(\gamma(N):a\big)$. پس:

$$aK \subseteq IK \subseteq N \implies K \subseteq (N:a) = (\gamma(N):a) \implies aK \subseteq \gamma(N).$$

پس برای هر $a \in I \setminus \delta((N:M))$ داریم $aK \subseteq \gamma(N)$. حال فرض کنید $a \in I \cap \delta((N:M))$. چون $I \nsubseteq \delta(N:M)$ پس $u \in I \setminus \delta((N:M))$ موجود است. لذا اولاً با توجه به مطالب بالا $uK \subseteq \gamma(N)$ و ثانیاً $a+u \in I \setminus \delta((N:M))$. پس برای هر $k \in K$، $ak \in \gamma(N)$ و $(a+u)k \in \gamma(N)$. پس برای هر $a \in I \cap \delta((N:M))$ و برای هر $k \in K$ داریم

$$ak = (a+u)k - uk \in \gamma(N)$$

بنا براین برای هر $a \in I$ و هر $k \in K$ داریم $ak \in \gamma(N)$. پس $IK \subseteq \gamma(N)$. □

گزاره ۱۱.۲. فرض کنید N یک زیرمدول (γ,δ)-اولیه از M و I یک ایده‌آل R باشد به طوری که $I \nsubseteq \delta((N:M))$. در این صورت:

$$(N:_M I) = (\gamma(N):_M I) \qquad \text{یا} \qquad (N:I) = N.$$

اثبات. به طور بدیهی می‌دانیم که $N \subseteq (N:_M I)$ و $(N:_M I) \subseteq (\gamma(N):_M I)$. همچنین

$$I(N:_M I) = \Big\{ \sum_{f.s} am \ : \ a \in I,\ m \in (N:_M I) \Big\} \subseteq N.$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- اگر $I(N :_M I) \nsubseteq \gamma(N)$، آنگاه با استفاده از گزاره ۱۰.۲، داریم $(N :_M I) \subseteq N$ یا $I \subseteq \delta((N : M))$. بنابر فرض می‌دانیم $I \subseteq \delta((N : M))$. در نتیجه $(N :_M I) \subseteq N$. بنابراین $(N :_M I) = N$.
- اگر $I(N :_M I) \subseteq \gamma(N)$، آنگاه $(\gamma(N) :_M I) \subseteq (N :_M I)$ و لذا $(N :_M I) = (\gamma(N) :_M I)$.

□

گزاره ۱۲.۲. فرض کنید δ یک توسیع ایده‌آل و γ یک تحدید زیرمدول باشد و به علاوه فرض کنید برای هر زیرمدول (γ, δ)-اولیه N و هر $r \in R$ ، $\gamma((N :_M r)) = (\gamma(N) :_M r)$. آنگاه $(N : r)$ نیز یک زیر مدول (γ, δ)-اولیه است.

اثبات. فرض کنید $a \in R$ و $m \in M$ و $am \in (N :_M r) \backslash \gamma((N :_M r))$. در این صورت $am \in (N :_M r)$ و $(\gamma(N) :_M r) = \gamma((N :_M r))$ و لذا $ram \notin \gamma(N)$. در این صورت $a(rm) \in N \backslash \gamma(N)$ و لذا $rm \in N$ و در نتیجه $m \in (N :_M r)$ و یا $a \in \delta((N : M)) \subseteq \delta((N : M) : r) = \delta((N : r) : M)$. □

گزاره ۱۳.۲. فرض کنید δ_1 توسیع $\delta_1(I) = \sqrt{I}$ از ایده‌آل‌ها و δ یک توسیع از ایده‌آل‌ها باشد به طوری که $\delta \leq \delta_1$. اگر N یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه باشد به طوری که برای هر $m \in M$، $\delta_1((\gamma(N) : m)) \subseteq (N : m)$، آنگاه:

$$\delta((N : M)) = \delta_1((N : M)) = \sqrt{(N : M)}.$$

اثبات. بنا به فرض داریم $\delta((N : M)) \subseteq \delta_1((N : M))$. حال عکس تساوی را ثابت می‌کنیم. اگر $a \in \delta_1((N : M))$، آنگاه $k \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $a^k \in (N : M)$. فرض کنید $k_\circ$ کوچک‌ترین عدد با این خاصیت باشد. پس $a^{k_\circ - 1} \notin (N : M)$. لذا $m_\circ \in M$ موجود است به طوری که $a^{k-1} m_\circ \notin N$.

- اگر $a^k m_\circ \in \gamma(N)$، آنگاه $a^k \in (\gamma(N) : m_\circ)$. بنابراین $a \in \delta_1((\gamma(N) : m_\circ)) \subseteq \delta_1((N : M))$.
- اگر $a^k m_\circ \notin \gamma(N)$، آنگاه $a^k m_\circ \in N \backslash \gamma(N)$. پس $a(a^{k-1} m_\circ) \in N \backslash \gamma(N)$ و لذا داریم $a \in \delta((N : M))$.

در نتیجه $\delta((N : M)) \subseteq \delta_1((N : M))$. بنابراین $\delta((N : M)) = \delta_1((N : M))$. □

۳. تصویر و تصویر معکوس زیرمدول (γ, δ)-اولیه

گزاره ۱.۳. فرض کنید M و N دو R-مدول و $f : M \to N$ یک R-مدول اپی‌مورفیسم باشد. فرض کنید γ تحدید زیرمدول‌های M و γ' تحدید زیرمدول‌های N باشد و به علاوه، فرض کنید δ یک توسیع ایده‌آل‌ها باشد. همچنین فرض کنید برای هر زیرمدول K از N داشته باشیم:

$$\gamma(f^{-1}(K)) = f^{-1}(\gamma'(K)).$$

حال اگر K یک (γ, δ')-اولیه N باشد، آنگاه یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه از M است.

اثبات. دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} S(M) & \xrightarrow{\gamma} & S(M) \cup \{\emptyset\} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S(N) & \xrightarrow[\gamma']{} & S(N) \cup \{\emptyset\} \end{array}$$

فرض کنید $r \in R$ و $m \in M$ باشد. در این صورت $rm \in f^{-1}(K) \backslash \gamma(f^{-1}(K))$. پس $rm \in f^{-1}(K)$ و لذا $f(rm) \in K$. بنابراین $rf(m) \in K$. همچنین $rm \notin \gamma(f^{-1}(K)) = f^{-1}(\gamma'(K))$ و لذا $rf(m) \notin \gamma'(K)$. در نتیجه $rf(m) \in K \backslash \gamma'(K)$ و K یک (δ, γ)-اولیه است. بنابراین $f(m) \in K$ که نتیجه می‌دهد $m \in f^{-1}(K)$ یا $r \in \delta((K : N)) = \delta((K : f(M))) \subseteq \delta((f^{-1}(K) : M))$. □

گزاره ۲.۳. فرض کنید M و N دو R-مدول و $f : M \to N$ یک R-مدول هومومورفیسم باشد. فرض کنید γ تحدید زیرمدول‌های M و γ' تحدید زیرمدول‌های N باشد و به علاوه، فرض کنید δ یک توسیع ایده‌آل‌ها باشد. همچنین فرض کنید برای هر زیرمدول H از M داشته باشیم:

$$\gamma'(f(H)) = f(\gamma(H)).$$

اگر H یک زیرمدول (γ, δ)-اولیه باشد، آنگاه $f(H)$ یک زیرمدول (γ, δ')-اولیه از مدول N است.

اثبات. مشابه گزاره فوق اثبات می‌گردد. □

مراجع

1. D. Anderson and M. Bataineh, *Generalizations of prime ideals*, Comm. Algebra, 36 (2008), 686–696.
2. A.Y. Darani, *Generalizations of primary ideals in commutative rings*, Novi Sad J. Math., 42 (2012), no. 1, 27–35.
3. A. Jaber, *Properties of ϕ-δ-primary and 2-absorbing δ-primary ideals of commutative rings*, Asian-European J. Math., 13 (2020), no. 1, pp. 11.
4. D. Ssevviiri and N. Groenewald, *Generalization of Nilpotency of ring elements to module elements*, Comm. Algebra, 42 (2014), no. 2, 571–577.
5. G. Yesilot, E. Sengelen and G. Ulucak, *Some results on delta-primary submodules of modules*, Sigma J. Eng. & Nat. Sci., 36 (2018), no. 2, 459–464.
6. N. Zamani, *ϕ-Prime submodules*, Glasgow Math. J., 52 (2010) 253–259.
7. D. Zhao, *δ-Primary ideals of commutative rings*, Kyungpook Math. J., 41 (2001) 17–22.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

نظریه سولو ابزاری برای تحلیل سطوح پاسخ‌های مختلف یک مسئله

افسانه محبت‌پناه[۱,*] ، و نرگس یافتیان [۲]
[۱]گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
[۲]گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

چکیده. یکی از راهکارهایی که آموزش ارائه شده توسط آموزشگران را برای یادگیرنده قابل درک و استفاده می‌نماید تعیین سطح تفکر و یادگیری فراگیران و ارائه آموزش متناسب با این سطح به آن‌ها است. در واقع، هنگامی‌که معلم یا استاد در سطوح مختلف تفکر، بدون در نظر گرفتن سطح تفکر یادگیرنده آموزش بدهد، مفاهیم به طور کامل توسط یادگیرنده درک نمی‌شود. بنابراین، درک سطح تفکر یادگیرندگان برای به کار بردن رویکردهای مناسب آموزشی ضروری است. نظریه‌های رشد شناختی بسیاری برای توصیف رشد و سطح تفکر یادگیرنده به کمک ارزیابی پاسخ‌های آن‌ها وجود دارد. در این پژوهش با رویکردی کیفی و با مطالعه پیشینه و ادبیات تحقیق، به توصیف و کاربردهای آموزشی نظریه رشد شناختی سولو به همراه مثال پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: آموزش ریاضی، حل مسئله، تحلیل پاسخ‌ها، نظریه سولو.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97D60.

۱. مقدمه

ریاضیات نقش بسیار مهمی در رشد توانایی‌های فکری فراگیران در استدلال منطقی، تفکر انتقادی و انتزاعی و تجسم فضایی دارد. ریاضیات نه تنها افراد را برای ادامه تحصیل و فرصت‌های شغلی آینده آماده می‌کند، بلکه آن‌ها را نیز به ابزاری برای حل مشکلات دنیای واقعی مجهز می‌کند. با این حال، موفقیت یادگیرندگان در ریاضیات توسط عوامل زیادی محدود شده است که برخی از آن‌ها مربوط به رویکردهای آموزشی و ارزشیابی نامتناسبی است که معلمان و اساتید اتخاذ می‌کنند [۴]. بنابراین، برای تحقق یادگیری عمیق ریاضیات در فراگیران، تلاش برای درک شرایط رشد و تفکر آن‌ها از سوی معلمان و اساتید ضروری است. نظریه‌های متعددی وجود دارد که سطح تفکر افراد را توصیف می‌کند. نظریه سولو نیز یکی از کاربردی‌ترین طبقه‌بندیهاست که رشد شناختی عمومی (رشد بلند مدت فرد) و موضعی (رشد ساختارهای شناختی) افراد را مورد ارزیابی قرار می‌دهد که اولین بار توسط بیگز و کولیس (Biggs and Collis) در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. برخلاف نظریه پیاژه، سولو به جای تمرکز بر مراحل تحول ذهنی یادگیرندگان، بر پاسخ‌های آن‌ها متمرکز است. نکته قابل توجه این است که یادگیرندگانی که در یک سطح سنی هستند و در معرض شرایط مشابه قرار دارند، ممکن است توانایی شناختی یکسانی در حل یک مسئله نداشته باشند. در واقع با استفاده از طبقه‌بندی سولو، معلمان و اساتید می‌توانند سطوح عملکرد یادگیرندگان خود را در مورد یک مفهوم مثلاً یک مفهوم ریاضی خاص درک کنند. این برای اساتید و معلمان کاملاً حیاتی است زیرا به آنها کمک می‌کند تا هنگام جست‌وجوی روش‌های آموزشی و ارزشیابی مناسب برای تقویت توانایی حل مسئله ریاضی افراد، تصمیمات آگاهانه‌ای بگیرند [۴] . به همین دلیل، طبقه‌بندی سولو که پاسخ فراگیران را براساس پنج سطح پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته ارزیابی می‌کند، گزینه‌ی مناسبی برای تعیین سطح تفکر و درک

*سخنران. آدرس ایمیل: Afsanehmohabatpanah@gmail.com

فراگیران است. در واقع می‌توان گفت این طبقه‌بندی به سطوح پاسخ یادگیرندگان در حل یک تکلیف مربوط می‌شود. یک پاسخ می‌تواند یکی از مراحل پنجگانه پیچیدگی یعنی از پیش‌ساختاری تا انتزاع تعمیم‌یافته را دربرگیرد [۲]. طبق مدل سولو، این مراحل پنجگانه به عنوان سطوح پاسخ که در طی چرخه یادگیری قرار دارند، ارائه می‌شود. همچنین این مراحل، توصیفی سلسه مراتبی در مورد ساختار یک پاسخ ارائه می‌دهند [۳]. توصیف این پنج سطح در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. تشریح سطوح طبقه‌بندی سولو [۵].

سطوح سولو	توصیف
پیش‌ساختاری	فرد از داده‌های نادرست یا فرآیندهای نادرستِ حل مسئله استفاده می‌کند. در نتیجه، پاسخ‌های وی نادرست یا بیربط است. فرد اطلاعات سطحی دارد که حتی به هم ربطی ندارند، بنابراین اصلاً مفهوم واحدی را تشکیل نمی دهد و معنایی ندارد.
تک‌ساختاری	درک فرد از مسئله محدود است و معمولاً تنها روی یک جنبه از مسئله تمرکز دارد. همچنین فقط از یك اطلاعات و یا یك مفهوم یا فرآیند حل مسئله استفاده می‌کند.
چندساختاری	فرد می‌تواند روابط پیچیده‌تری ایجاد کند و بیش از یک جنبه از مسئله را در نظر می‌گیرد، اما نمی‌تواند این جنبه‌ها را به یکدیگر ارتباط دهد.
رابطه‌ای	فرد از برخی داده‌ها / اطلاعات استفاده می‌کند، سپس مفاهیم / فرایندها را به کار می‌گیرد و نتایج موقت را ارائه می‌دهد. سپس داده‌ها و یا سایر فرآیندها را به هم متصل می‌کند تا بتواند نتیجه‌گیری‌های مربوطه را انجام دهد.
انتزاع تعمیم‌یافته	فرد چیزهای جدیدی خلق می‌کند و فراتر از مسئله پیش می‌رود تا راه‌حل جدیدی برای مسئله ارائه دهد. همچنین، به طور مفهومی فکر می‌کند و می‌تواند راه حل خود را در حوزه دیگری از دانش و تجربه تعمیم دهد.

از آن جاییکه سطح پیش‌ساختاری به یک نتیجه بیربط منجر می‌شود، عملاً خارج از طبقه‌بندی قرار می‌گیرد [۲]. دو سطح بعدی یعنی تک‌ساختاری و چندساختاری، هر دو مراحلی از درک سطحی هستند که در آن دانش، بیشتر از نظر کمی ایجاد می‌شود. دو مرحله آخر یعنی رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته، به دلیل یکپارچه‌سازی، ارتباط و افزایش انتزاع، بر کیفیت دانش تأکید دارند [۱]. در جدول ۲، لیستی از رفتارهایی که فراگیران در سطح‌های مختلف چارچوب سولو از خود بروز می‌دهند، ارائه شده است.

جدول ۲. تشریح سطوح طبقه‌بندی سولو [۲].

سطوح سولو	توصیف
تک‌ساختاری	تعریف کردن، شناسایی کردن، محاسبه کردن(ساده)، شمردن، نام بردن، تشخیص دادن
چندساختاری	توصیف کردن، طبقه‌بندی کردن، لیست کردن، محاسبه کردن، حل کردن رویه‌ای
رابطه‌ای	تجزیه و تحلیل کردن، مقایسه کردن، توضیح دادن، تشخیص دادن جز/کل، ادغام کردن، ارتباط برقرار کردن، به کار بردن
انتزاع تعمیم‌یافته	پیشبینی کردن، فرضیه سازی کردن، تعمیم دادن، عمومی ساختن، انعکاس دادن به دامنه جدید، خلق کردن، حدس زدن

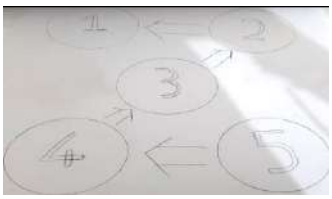
با در نظر گرفتن این نکته که یکی از وظایف معلمان و اساتید تجزیه و تحلیل ایده‌ها و پاسخ‌های ارائه شده توسط یادگیرندگان جهت بهبود فرآیند یاددهی-یادگیری است، این طبقه‌بندی یک زبان و الگو مشترک برای آنان فراهم می‌کند و آن‌ها را قادر می‌سازد مشاهدات خود را از عملکرد یادگیرندگان به روشی معنی‌دار توصیف کنند. اهمیت این نظریه در این است که می‌تواند در همه سنین و مقاطع تحصیلی از جمله مدرسه و دانشگاه، درک و فهم یادگیرنده از یک موضوع را مورد ارزیابی قرار دهد و به مدرس کمک کند که پاسخ‌های فراگیران را براساس سطح تفکر آن‌ها طبقه‌بندی کند و بدین ترتیب متوجه ریشه بسیاری از بدفهمیها و مشکلات آموزش و یادگیری شود. در نتیجه با توجه به اهمیت و کاربرد نظریه سولو در فرآیند آموزش و یاددهی-یادگیری، پژوهش‌های متعددی در مباحث مختلف ریاضی از جمله آمار، جبر و هندسه با استفاده از نظریه سولو به منظور طبقه‌بندی پاسخ‌ها و شناخت سطح تفکر دانش‌آموزان/دانشجویان انجام شده است. در ادامه، به نتایج یکی از این پژوهش‌ها که اخیراً با استفاده از طبقه‌بندی سولو در حوزه آموزش ریاضی انجام شده است، اشاره می‌گردد.

این پژوهش [۶] در دانشگاهی در غرب ترکیه به منظور بررسی سطح تفکر هندسی دانشجو معلمان ریاضی با توجه به طبقه‌بندی سولو انجام شده است. در این پژوهش، دو مسئله ریاضی بازپاسخ از مفاهیم هندسی و مرتبط با بیماری کووید۱۹ که اخیراً موضوع مورد توجهی در جهان است به این دانشجو معلمان ارائه شد.

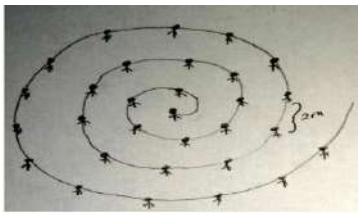
نتایج نشان داد که سطح تفکر اکثر این دانشجو معلمان در سطح چندساختاری بود. به دلیل محدودیت در تعداد صفحات مقاله، در ادامه به اجمال به بررسی نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجو معلمان به مسئله اول پژوهش در سطوح مختلف طبقه‌بندی سولو پرداخته شده است.

مسئله اول: کارشناسان اظهار داشته‌اند که به دلیل شیوع بیماری کووید ۱۹، فاصله اجتماعی بین افراد باید حداقل دو متر باشد. احمد، از بستگان شماست که یک آشپزخانه تهیه غذا دارد، ولی او نمی‌داند که چگونه نقاط انتظار را برای فاصله اجتماعی مناسب تعیین کند تا بتواند جمعیت را در منطقه انتظار بیرون محل کار خود مدیریت کند. احمد با دانستن این که شما یک معلم ریاضی هستید، از شما می‌خواهد که نقاط انتظار را مطابق با قانون فاصله اجتماعی و با حداکثر مشتری در منطقه انتظار، همراه با نقاشی پیش‌نویس که فاصله آن‌ها را نشان می‌دهد، ترسیم کنید. چگونه به احمد کمک می‌کنید؟ با جزئیات توضیح دهید.

در شکل ۱، نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان در سطح پیش‌ساختاری و در شکل ۲ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان در سطح تک‌ساختاری ارائه شده است.



شکل ۱. نمونه پاسخ در سطح پیش‌ساختاری.

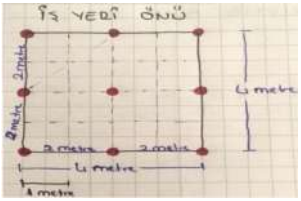


شکل ۲. نمونه پاسخ در سطح تک‌ساختاری.

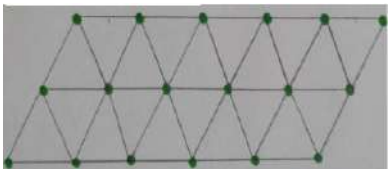
دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۱ بیان کرده بود که هرچه ردیف طولانی‌تر باشد فضای کمتری را اشغال می‌کند. همانطور که مشخص است وی از مفاهیم هندسی برای پاسخ خود استفاده نکرده است و پاسخی نامرتبط با مسئله ارائه داده است بنابراین، پاسخ وی در سطح پیش‌ساختاری سولو طبقه‌بندی شده است.

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۲ بیان کرده بود که نقاط منطبق با فاصله‌گذاری اجتماعی را می‌توان با یک نقاشی مارپیچی ایجاد کرد اما، وی هیچ توضیحی در مورد فاصله بین نقاط انتظار مارپیچ داخلی و مارپیچ بیرونی نداده است. در واقع وی فاصله بین افراد متوالی را در نظر گرفته است ولی راجع به فاصله بین سایر نقاط و همچنین حداکثر جمعیت توضیحی نداده است، چون فقط یک جنبه از مسئله را در نظر گرفته است، پس پاسخ وی در سطح تک‌ساختاری طبقه‌بندی شده است.

در شکل ۳ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان در سطح چندساختاری و در شکل ۴ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان در سطح رابطه‌ای ارائه شده است.



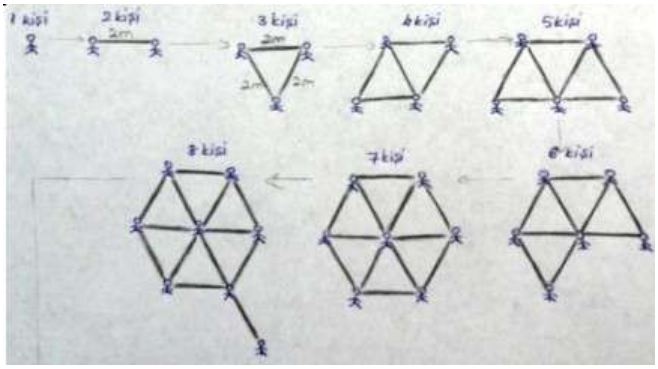
شکل ۳. نمونه پاسخ در سطح چندساختاری.



شکل ۴. نمونه پاسخ در سطح رابطه.

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۳ بیان کرده بود که اول از همه، فرض کرده‌ایم که منطقه انتظار مقابلِ محل کار احمد، ۱۶ متر مربع است. از آنجا که بین هر دو نفر حداقل ۲ متر فاصله وجود دارد، نقاطی را که این فاصله همزمان است (از راست، چپ یا مورب) با نقاط دیگر دارد، با یک نقطه قرمز مشخص کرده‌ایم تا یک نقطه انتظار برای هر مشتری باشد. اگرچه این پاسخ به فاصله‌گذاری اجتماعی ۲ متر از جهت‌های مختلف اشاره کرده است ولی، توضیح یا ترسیمی راجع به حداکثر افرادی که در این مسئله خواسته شده، نداده است. بنابراین پاسخ کامل نیست و در سطح چندساختاری قرار گرفته است.

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۴ بیان کرده بود که از یک مثلث متساوی‌الاضلاع با اضلاع ۲ متر استفاده کرده است. به این ترتیب، قانون فاصله‌گذاری ۲متر رعایت شده است و بیشترین تعداد افراد را در کوچکترین منطقه خواهیم داشت. چنین پاسخی که همه جنبه‌های مسئله را در نظر گرفته است و با ترسیم هندسی مناسبی پاسخ درستی ارائه کرده است، در سطح رابطه‌ای قرار می‌گیرد. در شکل ۵ نمونه‌ای از پاسخ دانشجو معلمان در سطح انتزاع تعمیم‌یافته ارائه شده است.



شکل ۵. نمونه پاسخ در سطح انتزاع تعمیم‌یافته.

دانشجو معلم در توضیح پاسخ شکل ۵ بیان کرده بود که شکلی که برای حل مسئله می‌توان از آن استفاده کرد یک شش ضلعی منتظم است. زیرا به طور مشابه زنبورها در طبیعت به شکل یک شش ضلعی منتظم لانه درست می‌کنند و یک لانه زنبوری متشکل از سلول‌های شش ضلعی منتظم است که بیشترین ذخیره را با حداقل موم فراهم می‌کند. شش ضلعی منتظم نشان داده شده در شکل که از مثلث‌های متساوی الاضلاع تشکیل شده است، این اطمینان را می‌دهد که فاصله بین هر شخص ۲ متر است. برخلاف سایر پاسخ‌ها مشاهده می‌شود که در پاسخ شکل ۵، دانشجو معلم فراتر از زمینه مسئله فکر کرده است و با این مسئله که در لانه زنبور نیز از کمترین فضا برای بیشترین حجم استفاده می‌شود، پیوندی بین زندگی واقعی و مسئله ریاضی ایجاد کرده است.

۲. نتایج اصلی

یکی از کاربردیترین طبقه‌بندی‌ها که نتایج یادگیری و سطح رشد یادگیرندگان را مورد ارزیابی قرار می‌دهد، طبقه‌بندی سولو است. برای تعیین سطح یادگیرندگان، مدرس با توجه به نتایجی که از ارزشیابی‌ها بدست می‌آورد، هم از میزان پیشرفت یادگیری اطلاع حاصل می‌کند و هم نوع تدریس خود را با میزان توانایی و سطح تفکر یادگیرندگان هماهنگ می‌سازد تا بتواند یادگیری را تسهیل و ارتقا ببخشد. در نتیجه با توجه به نتایج پژوهش‌های مرتبط در مقطع‌های مختلف که بیانگر سطح پایین پاسخ‌های فراگیران از نظر سطوح طبقه‌بندی سولو است، لزوم ایجاد تناسب بین سطح آموزش مدرس با سطح رشد و تفکر فراگیران، احساس می‌شود.

مراجع

۱. س. حق‌جو و ا. ریحانی، تحلیل بر نظریه‌های یادگیری ریاضی آپوس و سولو، پنجمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، مازندران، ۱۳۹۹.

2. J. Biggs and K. Collis, Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy, (1982), New York: Academic Press.
3. J. C. Caniglia and M. Meadows, An Application of the Solo Taxonomy to Classify Strategies Used by Pre-Service Teachers to Solve" One Question Problems". Australian Journal of Teacher Education, (2018). 43(9), 75-89.
4. A. Mukuka, S. Balimuttajjo and V. Mutarutinya, Applying the SOLO taxonomy in assessing and fostering students' mathematical problem-solving abilities. In Proceedings of the 28th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education, (2020, January). (pp. 104-112).
5. D. C. Saputra, A. Nurjanah and H. Retnawati, Students' Ability Of Mathematical Problem-Solving Based On SOLO Taxonomy. In Journal of Physics: Conference Series, (2019, October) (Vol. 1320, No. 1, p. 012070). IOP Publishing.
6. M. I.Yurtyapan and G. K. Yilmaz, An Investigation of the Geometric Thinking Levels of Middle School Mathematics Preservice Teachers According to SOLO Taxonomy:" Social Distance Problems". Participatory Educational Research, (2021), 8(3), 188-209.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

کاهش فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز در شبکه‌های بلاکچین با استفاده از یک طرح تسهیم چند راز

رضا ممیوند[۱]، رضا قاسمی[۱] *
[۱]گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

چکیده. فناوری بلاکچین در زمینه‌های بسیار زیادی به جهت غیر متمرکز سازی به کار گرفته شده است. در این فناوری داده‌های مشترک در زنجیره‌ای از بلوک‌ها ذخیره می‌گردد و این زنجیره‌ها توسط اعضای شبکه ذخیره می‌گردند. با افزایش داده‌ها بر روی این زنجیره‌ها کارایی شبکه کاهش می‌یابد زیرا تمامی اعضا توانایی ذخیره‌ی همه‌ی داده‌ها را ندارند. بنابراین طرح‌های بسیاری برای کاهش فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز ارائه گشت. در این مقاله یک طرح مبتنی بر تسهیم چند راز ارائه می‌شود که علاوه بر افزایش قابلیت اطمینان، با کاهش فضای مورد نیاز برای ذخیره‌سازی، کارایی شبکه بلاکچین را افزایش می‌دهد.
واژه‌های کلیدی: بلاکچین، تسهیم چند راز، فضای ذخیره‌سازی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 94A60, 94A62.

۱. مقدمه

در دنیای امروز تمامی سیاست‌های پولی و مالی توسط سیاستمداران و سازمان‌های بزرگ اتخاذ می‌گردد که از آن طریق نظرات و منافع خود را به افراد جوامع تحمیل می‌کنند و افراد اجتماع نیز به ناچار از این تصمیم‌ها تبعیت می‌کنند زیرا برای انجام بسیاری از امور نیاز به یک سازمان متمرکز است. بلاکچین این امکان را فراهم نمود که افراد بدون نیاز به یک سامانه‌ی مرکزی برخی از امور را به صورت غیر متمرکز انجام دهند و تصمیمات اساسی را خود بگیرند. به عنوان مثال می‌توان به رمزارزها اشاره نمود که بدون پشتوانه‌ی هیچ بانک مرکزی توانسته‌اند خدمات دریافت و پرداخت را برای مشتریان خود فراهم کنند.

فناوری بلاکچین بر پایه‌ی تکنولوژی ارتباطی همتا به همتا[۱]، نظریه‌ی شبکه و رمزنگاری بنا نهاده شده است. این فناوری به سرعت در حال گسترش در بخش‌های مختلفی همچون مالی، پزشکی، انرژی و...است. بلاکچین باوجود پتانسیل بالا برای به‌کارگیری در بخش‌های مختلف، دارای محدودیت‌هایی است که کارآمدی آن را کاهش می‌دهد. یکی از دلایل محدودیت‌های گسترش همه‌جانبه بلاکچین، هزینه‌ی فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز است. وقتی حجم داده‌های زنجیره‌ی بلوک افزایش می‌یابد، فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز به‌صورت چشمگیری افزایش می‌یابد که در نهایت مقیاس‌پذیری را محدود می‌کند زیرا هر گره[۲] در شبکه‌ی بلاکچین یک کپی از زنجیره‌ی بلوک‌ها را ذخیره می‌کند و این گره‌ها غالباً از فضای ذخیره سازی زیادی برخوردار نیستند لذا با مشکل فضای ذخیره‌سازی مواجه می‌شوند.

برای حل مشکل فضای ذخیره‌سازی، طرح‌هایی براساس تسهیم راز[۳] پیشنهاد شده است. اصول کلی این دسته از طرح‌ها بدین صورت است که با تسهیم بلوک‌ها بین افراد موجود در شبکه از حجم ذخیره‌سازی مورد نیاز افراد کاسته می‌شود. یکی از روش‌های موجود مبتنی بر تسهیم راز روش DSB [۴]است [۳]. در این روش همتاها را در مجموعه‌هایی با تعداد اعضای

*سخنران. آدرس ایمیل: r.ghasemi@basu.ac.ir

[1]Peer to Peer
[2]Node
[3]Secret Sharing
[4]Distribute Storage Blockchain

مساوی تقسیم می‌کنیم، سپس برای هر دسته یک کلید خصوصی انتخاب می‌کنیم و بلوک را برای اعضای هر دسته با کلید خصوصی خودشان رمز می‌کنیم، بعد از آن بلوک رمز شده را با استفاده از تسهیم راز شامیر، بین اعضای همان دسته تسهیم می‌کنیم. با توجه به اینکه بعداً ممکن است نیاز به بازیابی بلوک باشد، کلید خصوصی هر دسته را نیز بین آن‌ها تسهیم می‌کنیم. کیم و همکاران [۲] روشی مبتنی بر تسهیم راز محلی[۵] ارائه کرده‌اند. آنها با استفاده از کدهای LRC [۶] [۵] فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز در طرح DSB را بهبود بخشیدند. چن و همکاران [۱] یک طرح بر پایه‌ی تسهیم چند راز براساس تسهیم راز شامیر برای کاهش فضای ذخیره‌سازی ارائه کردند که با استفاده از تسهیم چند راز به جای تسهیم راز توانستند فضای مورد نیاز ذخیره‌سازی را کاهش دهند.

در این مقاله ما یک روش برای کاهش فضای ذخیره‌سازی ارائه می‌دهیم به این صورت که افراد را در ناحیه‌هایی با تعداد اعضای مساوی تقسیم می‌کنیم و اطلاعات هر بلوک را در تعداد محدودی از ناحیه‌ها ذخیره می‌کنیم. برای ذخیره کردن اطلاعات بلوک‌ها در یک ناحیه، بلوک را با استفاده از یک طرح تسهیم چند راز بین اعضای ناحیه تسهیم می‌کنیم تا علاوه بر کاهش فضای ذخیره‌سازی، قابلیت اطمینان طرح افزایش یابد. در طرح پیشنهادی، طرح تسهیم چند راز چن و همکاران انتخاب شده است زیرا طرح آنها دارای مقدار همگانی [۷] کمتری است. در طرح پیشنهادی ما اعضای یک ناحیه به جای ذخیره‌ی تمامی بلوک‌های زنجیره بلوک، تعداد کمتری بلوک را ذخیره می‌کنند که این کار باعث کاهش چشمگیر فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز برای اعضای شبکه می‌شود. مشکلی که در این روش با آن مواجه هستیم یافتن افرادی در شبکه است که یک بلوک را ذخیره می‌کنند چرا که بر خلاف روش‌های پیشین در روش ما تنها تعداد محدودی از افراد بلوک‌ها را ذخیره می‌کنند. برای رفع این مشکل یک راه حل ساده این است که برای هر بلوک شماره‌ی افرادی که در تسهیم آن دخالت داشته‌اند را ذخیره کنیم که خود از کارایی طرح بسیار می‌کاهد زیرا بار ذخیره‌سازی بسیاری بر دوش شبکه می‌گذارد. در این مقاله یک راه حل مبتنی بر توابع چکیده‌ساز[۸] ارائه می‌دهیم تا بدون تحمیل حجم اضافی برای ذخیره‌سازی این مشکل برطرف گردد. مزیت دیگر طرح پیشنهادی این است که روش ارائه شده مستقل از الگوریتم اجماع [۹] است بنابراین برای هر شبکه بلاکچین قابل استفاده است.

در ادامه‌ی این مقاله و در بخش دوم به مرور و بررسی طرح‌های موجود برای کاهش فضای ذخیره‌سازی و سپس در بخش سوم به ارائه‌ی طرح پیشنهادی می‌پردازیم. بخش چهارم به مقایسه‌ی طرح پیشنهادی با سایر طرح‌ها اختصاص دارد. بخش آخر نیز نتیجه‌گیری از مطالب گفته شده است.

۲. طرح‌های موجود

روش DSB توسط رامن و وارشنی در سال ۲۰۱۸ ارائه شده است [۳]. این روش با افراز کردن اعضای شبکه، در مجموعه‌هایی با طول مساوی و استفاده از طرح تسهیم راز شامیر [۴] مقدار فضایی را که هر همتا باید ذخیره کند، کاهش می‌دهد. فرض کنید B_t بلوک $t-$ ام و H_t مقدار چکیده‌ی بلوک $(t+1)-$ ام باشد. قرار می‌دهیم $H_t = h(W_t)$ و $W_t = (H_{t-1}, g(B_t))$ الحاق B_t و H_{t-1} است که h و g دو تابع چکیده‌ساز هستند . فرض کنید $\mathcal{P}_t$ افرازی از مجموعه‌ی n همتا، به مجموعه‌هایی با اندازه‌ی m در زمان t باشد. n بر m بخش‌پذیر فرض شده است. به هر یک از مجموعه‌های افراز یک ناحیه می‌گویند. این ناحیه‌ها را با اعداد $1, \ldots, \frac{n}{m}$ مشخص می‌کنیم. در زمان t برای هر همتای $i \in [n]$ ، $p_t^{(i)} \in \left[\frac{n}{m}\right]$ ناحیه‌ای را که شامل همتای i است را نشان می‌دهد. در این روش یک نسخه از هر بلوک طی روشی توزیع‌شده در هر ناحیه ذخیره می‌شود. بلوک B_t متناظر با زمان t را درنظر بگیرید. ابتدا یک کلید خصوصی k_t از فضای کلید $\mathcal{K}$ برای هر ناحیه انتخاب می‌کنیم و بلوک را با آن کلید، رمز می‌کنیم. این کلید را با استفاده از تسهیم راز شامیر بین همتاهای آن ناحیه تسهیم می‌کنیم. بلوک رمزگذاری‌شده را نیز میان همتاهای ناحیه توزیع می‌کنیم. برای حفظ یکپارچگی اطلاعات، در هر ناحیه با استفاده از طرح تسهیم راز شامیر، همتاها یک سهم [۱۰] از W_t دریافت می‌کنند [۳].

[5] Local Secret Sharing
[6] Locally Recoverable Codes
[7] Public Value
[8] Hash Function
[9] Consensus Algorithm
[10] Share

کیم و همکاران در سال ۲۰۱۹ براساس طرح DSB رامن و وارشنی، روشی مبتنی بر تسهیم راز محلی ارائه کرده‌اند [۲]. در این روش با ترکیب کردن روش DSB و کدهای LRC [۵] مقدار فضایی که هر همتا باید ذخیره کند، کاهش می‌یابد. چن وهمکاران در سال ۲۰۱۹ براساس طرح تسهیم راز شامیر روشی برای کاهش فضای ذخیره‌سازی ارائه کردند [۱]. در روش آنها هر بلوک ابتدا به t قسمت با اندازه‌ی مساوی تقسیم می‌شود، سپس این t قسمت با استفاده از تسهیم راز به m سهم تبدیل می‌شوند. بنابراین هر گره به جای ذخیره‌ی کل بلوک، یک سهم از میان این m سهم ذخیره می‌کند که این کار باعث کاهش فضای ذخیره‌سازی می‌شود. در روش آن‌ها بلوک α به t قسمت با اندازه‌ی $\frac{|\alpha|}{t}$ ، تقسیم می‌شود که آن‌ها را با $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ مشخص می‌کنیم به‌طوریکه الحاق [11] آنها برابر بلوک α است یعنی:

$$\alpha_1 \| \alpha_2 \| \ldots \| \alpha_t = \alpha.$$

تمام محاسبات در این روش در میدان متناهی $\mathbb{Z}_p$ که p عددی اول و بزرگ‌تر از m و α_i ، $1 \leq i \leq t$، است انجام می‌شود. برای تسهیم بلوک، طرح تسهیم راز شامیر $(2, 2)$ برای قطعه‌ی α_1 اجرا می‌شود به این صورت که در ابتدا به طور تصادفی یک چندجمله‌ای درجه‌ی یک $g_1(x)$ که α_1 مقدار ثابت آن است، ساخته می‌شود. برای بدست آوردن دو سهم از α_1 مقادیر $g_{1,1} = g_1(1)$ و $g_{1,2} = g_1(2)$ را محاسبه می‌کنیم. گام بعدی ساخت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $g_2(x)$ است که α_2 مقدار ثابت آن است و ضرایب آن دو سهمی هستند که در مرحله‌ی قبل بدست آوردیم.

$$g_2(x) = \alpha_2 + g_{1,1}x + g_{1,2}x^2 \mod p.$$

فرض کنید که i سهم از α_{i-1} ، $2 \leq i \leq t-1$، را داریم که با $g_{i-1,1}, g_{i-1,2}, \ldots, g_{i-1,i}$ مشخص می‌شوند. می‌توانیم یک چندجمله‌ای درجه‌ی i برای قطعه‌ی بعدی یعنی α_i با استفاده از $g_{i-1,j}$ ، $j \in \{1, \ldots, i\}$ ، به‌عنوان ضریب $-j$ ام بسازیم. به همین ترتیب چندجمله‌ای‌های دیگر را می‌سازیم. آخرین گام ساخت چندجمله‌ای با درجه‌ی t زیر است.

$$g_t(x) = \alpha_t + g_{t-1,1}x + g_{t-1,2}x^2 + \cdots + g_{t-1,k}x^t \mod p.$$

m سهم نهایی $g_t(x_1), g_t(x_2), \ldots, g_t(x_m)$ به گره‌ها تعلق می‌گیرند که $x_m, \ldots, x_2, x_1$ نمایه‌های عمومی گره‌ها هستند. این طرح تسهیم در الگوریتم ۱ شرح داده شده است [۱].

الگوریتم ۱ تسهیم بلوک به روش چن و همکاران

۱: بلوک α و نمایه‌های عمومی $x_m, \ldots, x_2, x_1$ مفروض هستند.
۲: بلوک α را به t قسمت $\alpha_t, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ با اندازه‌های مساوی تقسیم کن.
۳: عدد اول p را طوری انتخاب کن که $p > \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, m\}$.
۴: یک عدد تصادفی $r \in \mathbb{Z}_p$ انتخاب کن و چندجمله‌ای درجه‌ی یک $g_1(x) = \alpha_1 + rx \pmod p$ را بساز.
۵: مقادیر $g_{1,1} = g_1(1)$ و $g_{1,2} = g_1(2)$ را محاسبه کن.
۶: **برای** $i = 2$ تا $t-1$ **انجام بده:**
۷: چندجمله‌ای درجه‌ی $-i$ ام $g_i(x) = \alpha_i + g_{i-1,1}x + g_{i-1,1}x^2 + \cdots + g_{i-1,i}x^i \pmod p$ را بساز.
۸: **برای** $j = 1$ تا $i+1$ **انجام بده:**
۹: مقدار $g_{i,j} = g_i(j)$ را محاسبه کن.
۱۰: **پایان حلقه.**
۱۱: **پایان حلقه.**
۱۲: چندجمله‌ای درجه‌ی $-t$ ام $g_t(x) = \alpha_t + g_{t-1,1}x + g_{t-1,2}x^2 + \cdots + g_{t-1,k}x^k \pmod p$ را بساز.
۱۳: **برای** $i = 1$ تا n **انجام بده:**
۱۴: مقدار $\beta_i = g_t(x_i)$ را محاسبه کن.
۱۵: سهم β_i و نمایه‌ی عمومی x_i را به گره‌ی متناظر توزیع کن.
۱۶: **پایان حلقه.**

[11] Concatenation

۳. طرح پیشنهادی

در طرح پیشنهادی، اعضای شبکه را به ناحیه‌هایی با تعداد اعضای مساوی تقسیم می‌کنیم و این ناحیه‌ها را با اعداد $z = ۱, ۲, ..., \frac{n}{m}$ نشان می‌دهیم. در این طرح به جای ارسال تمامی بلوک‌ها به تمام ناحیه‌ها و افزایش هزینه‌ی ذخیره‌سازی هر بلوک را فقط به تعداد محدودی ناحیه، k ناحیه، ارسال می‌کنیم. متغیر k براساس نیازهای مشتری تعیین می‌شود که در آن $k = ۱$ کمترین قابلیت اطمینان و بیشترین صرفه جویی در فضای ذخیره‌سازی مورد نیاز خواهد بود و بیشترین مقدار k که برابر n/m است بیشترین میزان قابلیت اطمینان و کمترین صرفه جویی را برای استفاده کنندگان شبکه‌ی بلاکچین در پی خواهد داشت. در نتیجه طرح پیشنهادی انعطاف پذیر خواهد بود تا بر اساس نیاز مشتری متغییر k انتخاب شود.

یکی از چالش‌های طرح پیشنهادی پیدا کردن افرادی است که در تسهیم یک بلوک شرکت داشته‌اند زیرا ذخیره‌ی اطلاعات افراد شرکت کننده در تسهیم هر بلوک باعث افزایش چشمگیر هزینه‌ی ذخیره‌سازی می‌شود. برای رفع این مشکل در طرح پیشنهادی از یک تابع چکیده‌ساز برای افراز اعضای شبکه به ناحیه‌های متمایز استفاده می‌شود. فرض کنید g یک تابع چکیده‌ساز با برد اعداد طبیعی باشد و بلوک $j-$ام را می‌خواهیم ذخیره کنیم. ابتدا $g(j)$ را حساب می‌کنیم. جواب آن نشان دهنده‌ی اولین عضوی از شبکه است که در ناحیه‌ی اول قرار می‌گیرد. در ادامه $g(g(j))$ را حساب می‌کنیم و جواب آن دومین عضو ناحیه را مشخص می‌کند. این کار را به همین صورت m بار تکرار می‌کنیم تا m عضو ناحیه مشخص شوند. در نتیجه شماره‌ی افراد ناحیه‌ی اول برای ذخیره سازی برابر مجموعه زیر است.

$$\{g(j), g^{۲}(j), \ldots, g^{m}(j)\}$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا نواحی دیگر بدست آیند.

$$\{g^{m+۱}(j), \ldots, g^{۲m}(j)\}, \ldots, \{g^{km-m+۱}(j), \ldots, g^{km}(j)\}$$

این مراحل در الگوریتم ۲ شرح داده شده است.

الگوریتم ۲ افراز اعضای شبکه با استفاده از توابع چکیده‌ساز

۱: فرض کنید g یک تابع چکیده‌ساز باشد به طوری که برد آن اعداد طبیعی باشد.
۲: بلوک $j-$ام و متغیر k مفروض است.
۳: مقادیر $\{g^{m+۱}(j), \ldots, g^{۲m}(j)\}, \ldots, \{g^{km-m+۱}(j), \ldots, g^{km}(j)\}$ را محاسبه کن.
۴: نواحی بدست آمده را به خروجی ارسال کن.

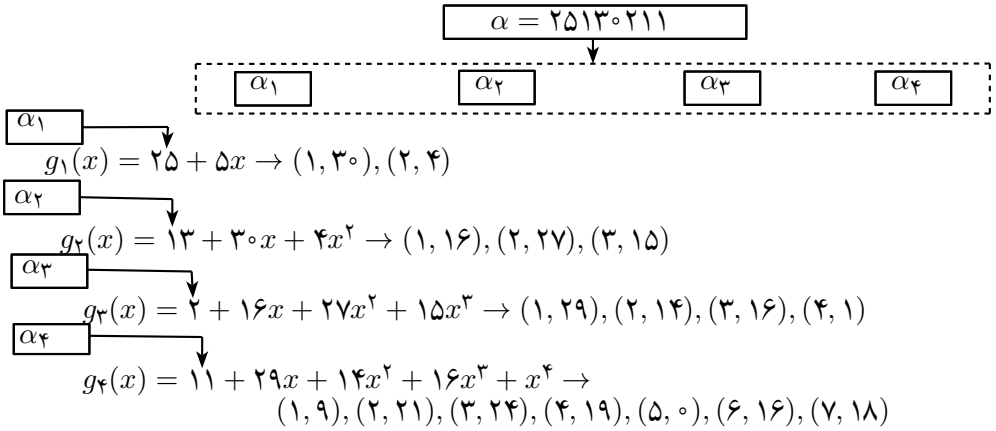
در این طرح برای ذخیره‌سازی بلوک در یک ناحیه، بلوک را با استفاده از یک طرح تسهیم چند راز بین اعضای آن ناحیه تسهیم می‌کنیم. این کار باعث افزایش قابلیت اطمینان طرح می‌شود زیرا از دست رفتن سهم برخی از اعضا تاثیری بر بازسازی بلوک نخواهد داشت. ما روش چن و همکاران در تسهیم راز را انتخاب می‌کنیم چون روش آن‌ها به نسبت دارای مقادیر همگانی کمتری است. مراحل طرح ما در الگوریتم ۳ بیان شده است.

الگوریتم ۳ طرح پیشنهادی برای کاهش فضای ذخیره‌سازی در یک بلاکچین

۱: بلوک α و عدد k $(۱ \leq k \leq n/m)$مفروض است.
۲: k ناحیه m عضوی با استفاده از الگوریتم ۲ انتخاب کن.
۳: **برای بلوک α، k ناحیه را انتخاب و برای هر ناحیه انجام بده:**
۴: یک آستانه t $(۱ \leq t \leq m)$ انتخاب کن. این آستانه با توجه به سیاست‌های شبکه و تعداد گره‌های هر ناحیه انتخاب می‌شود.
۵: برای ناحیه‌های انتخاب شده، بلوک α را با استفاده از الگوریتم ۱ تسهیم کن.
۵: سهم‌های تولید شده توسط الگوریتم ۱ را میان اعضای ناحیه توزیع کن.
۶: **پایان حلقه**

به منظور درک بهتر روش پیشنهادی یک مثال تسهیم بلوک ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۳. فرض کنید می‌خواهیم بلوک $\alpha = ۲۵۱۳۰۲۱۱$ را با استفاده از الگوریتم ۳ ذخیره کنیم و همچنین شبکه دارای بیست و یک عضو است. در این مثال برای راحتی k در نظر گرفته شده برابر یک است. ابتدا افراد را با استفاده از الگوریتم ۲ به سه ناحیه ($m = ۷$) با تعداد اعضای مساوی تقسیم می‌کنیم. بلوک را فقط به ناحیه‌ی اول برای ذخیره‌سازی می‌دهیم. بلوک را به چهار قسمت $\alpha_۱ = ۲۵، \alpha_۲ = ۱۳، \alpha_۳ = ۲$ و $\alpha_۴ = ۱۱$ تقسیم می‌کنیم. این بلوک قرار است بین هفت عضو ناحیه‌ی اول تسهیم شود به‌طوریکه با هر پنج سهم از میان هفت سهم بلوک را بتوانیم بازسازی کنیم یا به عبارتی $t = ۵$. عدد اول $p = ۳۱$ را انتخاب کرده و تمام محاسبات را در میدان $\mathbb{Z}_{۳۱}$ انجام می‌دهیم. برای شروع کار عدد تصادفی $r = ۵$ را انتخاب می‌کنیم و طبق الگوریتم ۱ سهم‌ها را تولید می‌کنیم (شکل ۱).



شکل ۱. تسهیم بلوک میان اعضای ناحیه با استفاده از طرح پیشنهادی.

در انتها سهم‌های شرکت‌کنندگان به ترتیب برابر $(۷, ۱۸), (۶, ۱۶), (۵, ۰), (۴, ۱۹), (۳, ۲۴), (۲, ۲۱), (۱, ۹)$ است. برای بازسازی بلوک این افراد می‌توانند با استفاده از سهم‌های خود و به ترتیب با بازسازی $\alpha_۴$، $\alpha_۳$، ... و $\alpha_۱$ بلوک را بازسازی کنند.

۴. مقایسه طرح‌های موجود

در این بخش به مقایسه طرح‌های موجود و طرح پیشنهادی می‌پردازیم. طرح‌های موجود را در سه زمینه‌ی هزینه‌ی ذخیره‌سازی، استفاده از رمزنگاری و توانمندی شبکه مقایسه می‌کنیم. نتایج این مقایسه‌ها در جدول زیر آورده شده است.

نام روش	بلاکچین معمولی	روش DSB [۳]	روش کیم و همکاران [۲]	روش چن و همکاران [۱]	روش پیشنهادی ما
هزینه‌ی ذخیره سازی	$\beta n(\log_۲ q + \log_۲ p)$	$\beta n(\frac{\log_۲ q}{m} + ۲\log_۲ p)$	$\beta n(\frac{\log_۲ q}{m-۱} + \log_۲ p)$	$\beta n(\frac{\log_۲ q + \log_۲ p}{t})$	$km\beta(\frac{\log_۲ q + \log_۲ p}{t})$
استفاده از رمزنگاری	خیر	بله	بله	خیر	خیر
توانمندی شبکه	$n-۱$	$\frac{n}{m} - ۱$	$\frac{۲n}{m} - ۱$	$n - t - ۱$	$km - t - ۱$

جدول ۱. مقایسه‌ی طرح پیشنهادی با طرح‌های موجود. در این جدول $B \in \mathbb{F}_q$، $W \in \mathbb{F}_p$، β نشان دهنده‌ی تعداد بلوک‌ها در شبکه، k تعداد ناحیه‌هایی است که هر بلوک را برای ذخیره‌سازی به آنها داده‌ایم، n تعداد کل اعضای شبکه و m تعداد اعضا در یک ناحیه است. هزینه ذخیره سازی و توانمندی به ترتیب نشان دهنده‌ی فضای مورد نیاز برای ذخیره‌ی بلوک‌ها در شبکه و حداقل تعداد اعضای شبکه است که با از دست رفتن آن‌ها شبکه حتماً از کار خواهد افتاد.

برای محاسبه‌ی هزینه‌ی ذخیره‌سازی در طرح پیشنهادی فرض می‌کنیم که هر بلوک را تنها به k ناحیه برای تسهیم بین اعضای آن ناحیه داده‌ایم. با توجه به اینکه در طرح پیشنهادی هر بلوک به جای ذخیره در تمام ناحیه‌ها، در k ناحیه ذخیره

می‌شود و همینطور کوچک‌تر بودن km از n، طرح پیشنهادی توانسته است در ازای کاهش توانمندی شبکه از میزان فضای ذخیره سازی مورد نیاز به طور قابل ملاحظه‌ای بکاهد. اما این کاهش توانمندی قابل چشمپوشی است زیرا با فرض ثابت بودن m میزان فضای مورد نیاز برای ذخیره سازی در طرح پیشنهادی بر خلاف دیگر طرح‌ها مستقل از n است بنابراین با افزایش تعداد گره‌ها در شبکه، فضای مورد نیاز در طرح ارائه شده تغییری نخواهد کرد. یکی دیگر از ویژگی‌های طرح پیشنهادی عدم استفاده از سامانه‌های رمزنگاری است که باعث بهبود عملکرد از نظر زمان اجرا خواهد شد.

۵. نتیجه‌گیری

بلاکچین با سرعت زیادی در حال گسترش در دنیای امروز است. با توجه به محدودیت اعضا در ذخیره سازی بلوک‌ها در یک شبکه بلاکچین، نیاز به طرح‌هایی که باعث کاهش فضای ذخیره‌سازی می‌شوند بیش از پیش احساس می‌شود. در این مقاله یک طرح پیشنهادی مبتنی بر تسهیم چند راز ارائه شد که با استفاده از افراز گره‌های شبکه و اختصاص هر بلوک به تعداد مشخصی از نواحی این افراز، فضای مورد نیاز برای ذخیره‌سازی بلوک‌ها را کاهش می‌دهد. همچنین با استفاده از یک تابع چکیده ساز نیاز به ذخیره سازی آدرس‌های گره‌های ذخیره سازی یک بلوک که بار ذخیره سازی زیادی به شبکه وارد می‌کرد را برطرف ساختیم.

مراجع

1. Chen, H., Wu, H. L., Chang, C. C., Chen, L. S. (2019). Light repository blockchain system with multisecret sharing for industrial big data. Security and Communication Networks, 2019.
2. Kim, Y., Raman, R. K., Kim, Y. S., Varshney, L. R., Shanbhag, N. R. (2018). Efficient local secret sharing for distributed blockchain systems. IEEE Communications Letters, 23(2), 282-285.
3. Raman, R. K., Varshney, L. R. (2018, February). Distributed storage meets secret sharing on the blockchain. In 2018 Information Theory and Applications Workshop (ITA) (pp. 1-6). IEEE.
4. Shamir, A. (1979). How to share a secret. Communications of the ACM, 22(11), 612-613.
5. Tamo, I., Barg, A. (2014). A family of optimal locally recoverable codes. IEEE Transactions on Information Theory, 60(8), 4661-4676.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

پیرامون یک تساوی در مورد قاب های پیوسته در فضای هیلبرت

سید محمد مشتاقیون[۱]،
نرجس سادات بنی طبا[۲]*
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه یزد ، یزد ، ایران
[۲]بخش ریاضی، دانشگاه پیام نور ، تهران ، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا قاب های پیوسته معرفی شده است . این معرفی شامل تعریف قاب های پیوسته ، خصوصیات ابتدایی آن ، عملگر قابی پیوسته و عملگرهای تجزیه و ترکیب می باشد . مختصری نیز در مورد خواص عملگر قاب پیوسته بحث شده است . موضوع اصلی طرح و اثبات یک تساوی در زمینه قاب های پیوسته است که برای اثبات آن از یک لم کاربردی مربوط به عملگرها استفاده شده است .
واژه‌های کلیدی: قاب پیوسته ، عملگر قاب پیوسته ، عملگر ترکیب ، عملگر تجزیه.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 00A69 , 06D22.

۱. مقدمه

مفهوم قاب ها در فضاهای هیلبرت توسط دافین و شیفر [۳] برای اولین بار در زمینه مطالعه مسایلی در سری های فوریه غیر هارمونیک مطرح گردید . سپس دابشی ، گراسمن و میر [۲] مفهوم قاب را در موجکها و قاب های گابور توسعه دادند قاب ها در پردازش سیگنال ها ، تصاویر و مهندسی کاربرد فراوانی دارد . در حالت کلی ، یک قاب خانواده ایی شمارا از عناصر فضای جدایی پذیر هیلبرت است که می توان هر عنصر دلخواه فضا را به شکل ترکیبی از انها (نه لزوما منحصر به فرد) نوشت . مفهوم تعمیم قاب ها به خانواده ایی از عناصر اندیس دار در یک فضای موضعا فشرده و با یک اندازه رادون ، توسط کیزر [۴] معرفی شد . این سری از قاب ها به قاب های پیوسته معروف شدند . در حالتی که یک قاب پیوسته مورد بحث باشد با فرض $\Omega := N$ و μ به عنوان اندازه شمارشی ، به قاب گسسته میرسیم . بسیاری از نتایج به دست امده در نظریه قاب ها در زمینه قابهای پیوسته نیز برقرار است . در این نوشته ، قابهای پیوسته همراه با یک اندازه مثبت مورد نظر است و H فضای هیلبرت مختلط خواهد بود .

تعریف ۱.۱. فضای هیلبرت مختلط H و (Ω, μ) یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ مفروض است .
نگاشت $F : \Omega \longrightarrow H$ یک قاب پیوسته متناظر با (Ω, μ) نامیده می شود اگر
(i) F به طور ضعیف اندازه پذیر باشد . یعنی به ازای هر $f \in H$ ، تابع $\omega \longrightarrow \langle f, F(\omega)\rangle$ روی Ω اندازه پذیر باشد .
(ii) ثابتهای A و B >۰ موجود باشند که به ازای هر $f \in H$ ،

$$A \|f\|^۲ \leq \int_{\Omega} |\langle f, F(\omega)\rangle|^۲ d\mu(\omega) \leq B\|f\|^۲ \quad . \tag{۱}$$

*سخنران. آدرس ایمیل: nargesbanitaba@yahoo.com

ثابتهای A و B کران های قاب پیوسته اند و اگر $A = B$ ، F یک قاب چسبان نامیده می شود . نگاشت F را بسل می نامیم اگر سمت راست نامساوی (۱)برقرار باشد که در این حالت B را ثابت بسلی می نامیم . قسمت چپ نامساوی (۱) نشان میدهد که F در H کامل است یعنی $\overline{span}\{F(\omega)\}_{\omega\in\Omega} = H$. [۱، نتیجه ۱.۱.۳]

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. اگر تابع $\hbar \in L^2(\Re)/\{0\}$ مفروض باشد ، تبدیل فوریه کوتاه از تابع $\tau \in L^2(\Re)$ متناظر با تابع $\hbar$ به صورت زیر تعریف می گردد :

$$\Psi_\hbar(\tau)(y,\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x)\ \overline{\hbar(x-y)} e^{-2\pi i x\gamma}\ dx \quad , \quad y,\gamma \in \Re \quad .$$

به کمک عملگرهای انتقال و مدولاسیون با تعاریف زیر ،

$$T_a \ : \ L^2 \longrightarrow L^2 \quad , \quad (T_a f)(x) = f(x-a)$$
$$E_b \ : \ L^2 \longrightarrow L^2 \quad , \quad (E_b f)(x) = e^{2\pi i b x}\ f(x)$$

در اینصورت داریم :

$$\Psi_\hbar(\tau)(y,\gamma) = \langle \tau, E_r\ T_y\ \hbar\rangle \quad .$$

اگر $\hbar \in L^2(\Re)\ /\ \{0\}$ مفروض باشد ، $\{E_b\ T_a\ \hbar\}_{a,b\in\Re}$ یک مثال از قاب پیوسته برای فضای $L^2(\Re)$ متناظر با $X = \Re^2$ با اندازه لبگ می باشد .اکثر خواص مربوط به قاب ها در مورد قاب های پیوسته نیز برقرار است . از جمله اینکه در شرایطی که فضای اندازه (μ,Ω) ، σ - متناهی باشد می توان از وجود قابی پیوسته برای یک زیر فضای چگال V از H با کرانهای A و B ، به یک قاب پیوسته متناظر با (Ω,μ) برای فضای H با همان کرانهای A و B رسید . این مورد مشابه قاب ها گسسته در فضای هیلبرت است . [۶، گزاره ۲.۵]
حال تصور کنید F قاب پیوسته ایی متناظر با (Ω,μ) باشد ، نگاشت $\Phi \ : \ H\times H \longrightarrow C$ به صورت زیر تعریف می گردد :

$$\Phi(f,g) = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle\langle F(\omega), g\rangle\ \ d\mu(\omega) \quad , \quad f,g \in H \qquad (۲)$$

که عملگری خوش تعریف است . اگر از نامساوی کشی - شوارتز استفاده کنیم به نامساوی های زیر می رسیم :

$$|\Phi(f,g)| \le \int_\Omega\ |\langle f, F(\omega)\rangle\langle F(\omega), g\rangle|\ \ d\mu(\omega)\ \le (\int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2\ \ d\mu(\omega))^{1/2}$$
$$(\int_\Omega |\langle F(\omega), g\rangle|^2\ \ d\mu(\omega))^{1/2} \quad \Longrightarrow \|\Phi\|\ \le B \ .$$

پس عملگر Φ کراندار با کران B است و بر اساس قضیه نمایش ریس عملگر کراندار منحصر به فرد $\xi_F \ : \ H \longrightarrow H$ هست به طوری که به ازای $f,g \in H$ ، $\Phi(f,g) = \langle \xi_F\ f, g\rangle$ و لذا داریم $\|\Phi\| = \|\xi_F\|$.
از طرفی $\langle \xi_F f, f\rangle = \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2\ \ d\mu(\omega)$ و لذا بر اساس تعریف ، ξ_F عملگری مثبت است و

$$AI \le \xi_F \le BI \Longrightarrow \frac{A}{B} I \le B^{-1}\xi_F \le I \Longrightarrow 0 \le I - B^{-1}\xi_F \le \frac{B-A}{B} I$$
$$\Longrightarrow \|I - B^{-1}\xi_F\| = sup_{\|f\|}|\langle (I - B^{-1}\xi_F) f, f\rangle| \le \frac{B-A}{B} < 1$$

و در نتیجه ξ_F وارون پذیر است . عملگر قابی پیوسته متناظر با F نامیده می شود . میتوان اثر این عملگر را بر روی $f \in H$ به این صورت نشان داد : $\xi_F\ f = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle\ F(\omega)\ d\mu(\omega)$.
در نتیجه برای هر $f \in H$ ،

$$f = \xi_F^{-1}\ \xi_F\ f = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle \xi_F^{-1}\ F(\omega)\ d\mu(\omega)$$

یا

$$. \ f = \xi_F\ \xi_F^{-1}\ f = \int_\Omega \langle f, \xi_F^{-1}\ F(\omega)\rangle\ F(\omega)\ d\mu(\omega)$$

همچنین مشابه قاب ها می توان عملگرهای ترکیب و تجزیه را برای قاب های پیوسته نیز نوشت . در این مورد به قضایایی از [۶] اشاره می کنیم .

قضیه ۲.۲. فرض کنید (Ω,μ) یک فضای اندازه و F یک نگاشت بسل از Ω به H باشد . در این صورت عملگر $T_F : L^2(\Omega,\mu)\longrightarrow H$ به شکل زیر تعریف می گردد :

$$\langle T_F\varphi,h\rangle=\int_\Omega \varphi(\omega)\langle F(\omega),h\rangle\, d\mu(\omega)\quad,\quad h\in H,\ \varphi\in L^2(\Omega,\mu)\ .$$

عملگری خوش تعریف ، خطی و کراندار است و می توان الحاقی آن را به صورت زیر در نظر گرفت :

$$T_F^*\ ;\ H\longrightarrow L^2(\Omega,\mu)\quad,\quad (T_F^*\,h)(\omega)=\langle h,F(\omega)\rangle\quad,\quad \omega\in\Omega\ .$$

عملگر T_F عملگر ترکیب و T_F^* عملگر تجزیه نامیده می شود .

می توان ثابت کرد که حاصل ضرب عملگر کراندار و وارون پذیر τ با قاب پیوسته F ، مجددا قابی پیوسته خواهد بود . در این حالت $\tau\xi_F\tau^*$ عملگر قابی پیوسته جدید می باشد و $A\|\tau^{-1}\|^{-2}$ و $B\|\tau\|\|^2$ کران های قاب پیوسته جدید است . همین طور به ازای هر $\alpha\in\Re$ ، $\xi_F^\alpha F$ نیز یک قاب پیوسته برای فضای H با عملگر قابی پیوسته $\xi^\sim=\xi_F{}^{2\alpha+1}$است به ویژه ξ_F^{-1} نیز یک قاب پیوسته می باشد که دوگان استاندارد F نامیده می شود .همچنین $\xi_F^{\frac{-1}{2}}F$ یک قاب فشرده نرمال با عملگر قابی I خواهد بود . برای رسیدن به نتیجه مورد نظر این مقاله ابتدا به یک لم اشاره میکنیم .

لم ۳.۲ ([۵، لم ۱]). فرض کنید $L_1,L_2,T\in B(H)$ به گونه ایی باشند که $L_1+L_2=T$. در این صورت برای هر پارامتر $\lambda\in[0,1]$ ،

$$L_1^*\,L_1+\lambda(L_1^*T+T^*L_2)=L_2^*L_2+(1-\lambda)(L_1^*T+T^*L_1)+(2\lambda-1)$$
$$T^*T\geq(2\lambda-\lambda^2)T^*T.$$

اکنون تساوی مورد نظر را ارایه میدهیم . این تساوی مربوط به یک قاب پیوسته و دو دنباله بسل در فضای هیلبرت مورد بحث می باشد . به کمک عملگر Φ که قبلا تعریف آن اورده شده است و پارامتری که مقادیر ان بین صفر تا یک خواهد بود ، تساوی مورد نظر برقرار می شود .

قضیه ۴.۲. فرض کنید F قابی پیوسته برای فضای هیلبرت H و $\{g_j\}_{j\in J}$ و $\{h_j\}_{j\in J}$ دو دنباله بسل در H باشند (J مجموعه اندیس می باشد) و عملگر Φ به شکل تعریف شده در (۲) باشد ، در این صورت برای هر $\lambda\in[0,1]$ و هر $f\in H$ ،

$$\|Rf\|^2+Re\langle\Phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle=\|Qf\|^2+Re\langle\Phi^*(f,g_j)Rf,f\rangle$$

که در ان

$$Qf=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle F(\omega),g_j-h_j\rangle d\mu(\omega)$$

و

$$Rf=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle F(\omega),h_j\rangle d\mu(\omega)$$

و $f\in H$ دلخواه است .

اثبات. چون $Q,R\in B(H)$ است ، داریم

$$Qf+Rf=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle F(\omega),g_j-h_j\rangle d\mu(\omega)+\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle F(\omega),h_j\rangle d\mu(\omega)=$$
$$\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle F(\omega),g_j\rangle d\mu(\omega)=\Phi(f,g_j).$$

با توجه به لم ۳.۲

$$\|Qf\|^2+2\lambda Re\langle\Phi^*(f,g_j)Rf,f\rangle=\|Rf\|^2+2(1-\lambda)Re\langle\Phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle+$$
$$(2\lambda-1)Re\langle\Phi(f,g_i)f,\Phi(f,g_i)f\rangle\Longrightarrow\|QF\|^2=\|Rf\|^2+2(1-\lambda)Re\langle\Phi^*(f,g_i)Qf,f\rangle+$$
$$(2\lambda-1)Re\langle\Phi(f,g_j)f,\Phi(f,g_j)f\rangle-2\lambda Re\langle\Phi^*(f,g_j)Rf,f\rangle=\|Rf\|^2+2Re\langle\Phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle$$
$$-2\lambda Re\langle(\Phi^*(f,g_j)Q+\Phi^*(f,g_j)R)f,f\rangle+(2\lambda-1)Re\langle\Phi(f,g_j)f,\Phi(f,g_j)f\rangle=\|Qf\|^2+$$

$$۲Re\langle\phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle - Re < \Phi(f,g_j)f,\Phi(f,g_j)f\rangle = \|Rf\|^۲ + ۲Re\langle\Phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle -$$

$$Re\langle\Phi^*(Q+R)f,f\rangle = \|Rf\|^۲ + Re\langle\phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle - Re\langle\Phi^*(f,g_j)Rf,f\rangle$$

$$\|Rf\|^۲ + Re\langle\Phi^*(f,g_j)Qf,f\rangle = \|Qf\|^۲ + Re\langle\langle\Phi^*(f,g_j)Rf,f\rangle.$$

□

به نظر میرسد که تساوی فوق در حالتی که F قاب پیوسته پارسوال باشد و یا اگر به جای قاب پیوسته یک زوج دوگان تغییر یافته را جایگزین کنیم ، به شکل های مشابه برقرار خواهد بود .

مراجع

1. O. Cheristensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhauser, 2003.
2. I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, "Painhess nonorthogonal expansions,' Journal of Mathematical Physics, vol. 27, no. 5, pp.1271-1283, 1986.
3. R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, "A class of nonharmonic Fourier series, " Transactions of the American Mathematical Society, vol. 72, pp. 341-366, 1952.
4. G. Kaiser, A Firendly Guide to Wavelets, Birkhauser, Boston, 1994.
5. Z. Qi Xiang, A New Inequality for Frames in Hilbert Spaces, Journal of Function Spaces, Vol 2018, Article ID 2108580, 6 pages.
6. A. Rahimi, A. Najati and Y. N. Dehghan, Continuous frames in Hilbert spaces, Math. Func. Anal. Top., Vol. 12, No.2 (2006) 170-182.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بررسی تفاوت جنسیّتی در نگرش دانشجویان دانشکده ریاضی و کامپیوتر نسبت به درس آمار (مورد: دانشگاه شهید باهنر کرمان)

آرزو ملکی[۱,*] ، محسن مددی[۲] و ابوالفضل رفیع پور [۳]

[۱] بخش آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲] بخش آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۳] بخش آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. هدف پژوهش حاضر بررسی نگرش دانشجویان دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان نسبت به درس آمار است. نمونه مورد بررسی در این پژوهش، ۹۸ دانشجو (شامل ۶۰ دانشجوی دختر و ۳۸ دانشجوی پسر) بودند، که از بین دانشجویان دانشکده ریاضی و کامپیوتر(شامل دانشجویان رشته آمار، ریاضی و علوم کامپیوتر) که درس آمار را با عنوان آمار و احتمال مقدّماتی در نیمسال اوّل سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ اخذ نمودند، انتخاب شدند. در این مطالعه از مقیاس نگرش به آمار (SATS) جهت سنجش نگرش دانشجویان نسبت به درس آمار استفاده شده‌است. جهت تحلیل داده‌های پرسشنامه حاضر از نرم افزار SPSS استفاده شد، ضمن اینکه آزمون آماری مورد استفاده نیز جهت دستیابی به نتایج، آزمون t دو نمونه مستقل بود. نتایج به دست آمده حاکی از آن بود که نگرش دختران و پسران نسبت به درس آمار، یکسان است و این موضوع ممکن است نشان دهنده این باشد که باورهای جنسیّتی در رابطه با درس آمار در ذهن دانشجویان کمرنگ است و این در حالی است که در برخی موارد ممکن است رشته‌هایی مانند آمار و یا ریاضی را حوزه‌ای کاملا مردانه تلقّی نمایند.

واژه‌های کلیدی: دانشکده ریاضی و کامپیوتر، نگرش به آمار، تفاوت جنسیّتی .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97C20, 97K80.

۱. مقدمه

بررسی برخی از تفاوت‌های فردی، از جمله تفاوت‌های جنسیّتی یکی از مباحث مهم و بحث برانگیز در حوزه تعلیم و تربیّت به شمار می‌آید و یکی از دلایلی که مطالعه تفاوت‌های جنسیّتی را به موضوع مهمّی تبدیل نموده‌است این است که مساوات آموزشی جزء یکی از شش اصل مطرح شده در اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای به حساب می‌آید و در نظر گرفتن تفاوت‌های جنسیّتی نیز یکی از مصداق‌های مساوات آموزشی ذکر شده‌است که با توجّه به این موضوع، ضروری است که تحقیقات بیشتری در زمینه تفاوت جنسیّتی صورت گیرد. چرا که با در نظر گرفتن این تفاوت‌ها و تمرکز بر آن‌ها، می‌توان در غنی کردن محیط های آموزشی متناسب با سطح توانایی دانشجویان و یا دانش‌آموزان، اهتمام بیشتری ورزید [۴] . از طرفی مقایسه یادگیری دروسی مانند ریاضی و یا آمار در دانشجویان و یا دانش‌آموزان دختر و پسر و تلاش برای یافتن علّت‌هایی که گاها موجب این تفاوت می‌شوند، توجّه محقّقان بسیاری را به خود جلب کرده‌است و در برخی موارد نیز پژوهشگران دریافتند که، باورها و نگرش‌ها می‌توانند یادگیری و عملکرد شخص را تحت تأثیر قرار دهند [۳] به این علّت که نگرش‌ها و باورهای ذهنی هر فرد یکی از بخش‌های اثر گذار در زندگی او محسوب می‌شود که قادر است آینده وی را نیز تحت تأثیر قرار دهد. لذا بدیهی است که اگر تصوّر نمی‌شد که نگرش‌ها به طریقی بر عملکرد افراد تأثیر گذارند، آنگاه ارزیابی نگرش‌ها نسبت به دروسی

*سخنران. آدرس ایمیل: maleki.arezoo92@gmail.com

مانند ریاضی نیز کمتر مورد توجّه قرار می‌گرفت و مسلّم است که رابطه میان نگرش و عملکرد، یک رابطه متقابل است، به طوریکه نگرش بر موفقیّت و موفقیّت نیز بر نگرش تأثیر گذار است [۶] . لذا بنابر اهمیّت موضوع نگرش و هم چنین تفاوت جنسیّتی در حوزه آموزش و نادیده گرفتن این اهمیّت در حوزه آموزش آمار، این پژوهش نیز با هدف بررسی و مقایسه نگرش دانشجویان دختر و پسر دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان طرح ریزی شده‌است و مهمترین هدف از انجام این پژوهش پاسخ به سؤال پژوهشی زیر می‌باشد:

۱- آیا میان نگرش دانشجویان دختر و پسر مشغول به تحصیل در دانشکده ریاضی و کامپیوتر(دانشگاه شهید باهنر کرمان)، نسبت به درس آمار تفاوت معناداری وجود دارد؟

۲. پیشینه نظری

بنا به نوظهور بودن رشته آموزش آمار و عدم آگاهی برخی از اساتید و دانشجویان از وجود این رشته بعنوان یک رشته مجزّا، تحقیقات بسیار ناچیزی در این حوزه به چشم می‌خورد که غالبا نیز توسط دانشجویان مشغول به تحصیل در رشته‌های غیرآماری به ثبت رسیده‌اند و این در حالی است که در حوزه آموزش ریاضی به خصوص در زمینه نگرش افراد نسبت به درس ریاضی، تحقیقات تقریبا زیادی انجام شده‌است. بعنوان مثال شمسی نژاد [۱] ، در پژوهشی به بررسی نگرش و احساسات دانش‌آموزان نسبت به ریاضیّات پرداخت که در نتیجه این تحقیق، تفاوت معناداری میان نگرش دختران و پسران نسبت به درس ریاضی یافت نشد. از دیگر مطالعات موجود در این زمینه، می‌توان به پژوهش فرامرزپور و رفیع پور [۳] ، اشاره کرد که با هدف بررسی باورهای دانش‌آموزان در رابطه با ماهیّت حوزه ریاضی از منظر جنسیّت انجام شد که در نهایت نتیجه به دست آمده حاکی از آن بود ریاضی از نظردانش‌آموزان یک حوزه مردانه محسوب می‌شود. همانطور که گفته شد، برخلاف توجّه اندکی که در داخل کشور به حوزه آموزش آمار و موضوع نگرش در این حوزه شده‌است، می‌توان گفت که در خارج از کشور تحقیقات نسبتا زیادی در زمینه نگرش افراد نسبت به درس آمار به انجام رسیده‌است که از جمله این تحقیقات پژوهش شائو [۷] ، بود که با استفاده از پرسشنامه نگرش به آمار(SATS) صورت گرفت. وی در این پژوهش دیدگاه و نگرش دانشجویان را نسبت به درس آمار مورد سنجش قرار داد و به این نتیجه رسید که اگرچه نگرش گفتاری آنان نسبت به پاسخ‌هایی که به سؤالات پرسشنامه دادند منفی‌تر بود، اما به‌طور کلّی مشخّص شد که نگرش دانشجویان نسبت به توانایی درک آمار و ارزشمندی آن مثبت بود و این در حالی است که نگرش آنان در مؤلّفه عاطفی، خنثی و در مؤلّفه نگرش به دشواری آمار، منفی اعلام شد؛ ضمن اینکه این پژوهش به رابطه مثبت میان نگرش دانشجویان و موفقیّت آنان نیز تأکید داشت.

۳. روش تحقیق

جهت بررسی نگرش دانشجویان دختر و پسر مشغول به تحصیل در دانشکده ریاضی و کامپیوتر(دانشگاه شهید باهنر کرمان) نسبت به درس آمار، از مقیاس SATS استفاده شد که این مقیاس دارای ۲۸ گویه و ۴ مؤلّفه است که عبارتند از: نگرش عاطفی، نگرش به توانایی درک، ارزشمندی و دشواری آمار. ابتدا پرسشنامه مذکور به فارسی ترجمه و توسط دو استاد بخش آموزش ریاضی و بخش آمار مورد بازبینی قرار گرفته و اصلاحات لازم انجام شد و سپس جهت تکمیل در اختیار دانشجویان قرار گرفت. نمونه تحقیق نیز شامل ۹۸ دانشجوی (۶۰ دانشجوی دختر و ۳۸ دانشجوی پسر) مشغول به تحصیل در دانشکده ریاضی و کامپیوتر (شامل رشته‌های آمار و کاربردها، ریاضی و علوم کامپیوتر) دانشگاه شهید باهنر کرمان می‌باشد که در نیمسال اوّل سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ درس آمار مقدّماتی را اخذ نمودند. پس از تکمیل پرسشنامه‌ها توسط دانشجویان، پاسخ‌های پرسشنامه از ۱ تا ۵ نمره‌گذاری شدند و سپس با استفاده از نرم افزار آماری SPSS (نسخه ۲۳)، مورد تحلیل قرار گرفتند. جهت بررسی و پاسخ به سؤال پژوهش نیز از آزمون t دو نمونه مستقل استفاده شد.

۴. یافته ها

جهت پاسخ به سؤال اصلی پژوهش، از آزمون t دو نمونه مستقل استفاده شد که با توجه به جداول به دست آمده در خروجی، ابتدا به بررسی فرض برابری واریانس‌ها با استفاده از آزمون لون پرداخته شد و سپس نتیجه شد که فرض برابری واریانس‌ها در آزمون لون مورد پذیرش واقع می‌گردد. در نتیجه به منظور بررسی فرض برابری میانگین نگرش دختران و پسران در هریک از مؤلّفه‌ها، سطر اوّل آزمون t مورد بررسی قرار گرفت و در نتیجه بنابر مقدارهای احتمال (p-value) مندرج در جدول که

همگی از آلفای در نظر گرفته شده (۰/۰۵) بزرگتر بودند، این نتیجه حاصل شد که میان نگرش دانشجویان دختر و پسر مشغول به تحصیل در دانشکده ریاضی و کامپیوتر (شهید باهنر کرمان)، در هیچ یک از مؤلّفه‌های نگرشی تفاوت معناداری یافت نمی‌شود. لذا به طور کلّی نتیجه می‌شود که نگرش دانشجویان دختر و پسر در دانشکده ریاضی و کامپیوتر، نسبت به درس آمار یکسان است. همچنین می‌توان گفت که نگرش دختران و پسران در تمامی مؤلّفه‌های نگرشی نسبتا مطلوب و مثبت گزارش شده‌است.

۵. بحث و نتیجه گیری

امروزه ارزیابی مستمر نگرش افراد، دانش‌آموزان و دانشجویان به ضرورتی انکار ناپذیر تبدیل شده‌است و علاوه بر آن، نوع نگرش افراد به دروس مختلف و علّت‌های مؤثّر در به وجود آمدن نگرش‌های مثبت و یا منفی در آنان، یکی از دغدغه‌های اصلی دست‌اندرکاران در حوزه تعلیم و تربیّت به شمار می‌آید [۲] . برخی نیز، در اهمیّت موضوع نگرش معتقدند که نگرش‌ها و نحوه اندیشیدن به یک موضوع جز چالش‌های مهمّی است که از دیرباز در بین محقّقان ودانشمندان مورد توجّه واقع گردیده‌است [۵] لذا با توجّه به اهمیّت این موضوع در حوزه آموزش، پژوهش حاضر نیز با هدف بررسی نگرش دانشجویان دختر و پسر دانشکده ریاضی و کامپیوتر (دانشگاه شهید باهنر کرمان) انجام شد. در تحقیق حاضر این نتیجه یافت شد که نه تنها نگرش دانشجویان دانشکده ریاضی و کامپیوتر نسبت به درس آمار، مثبت است، بلکه میان نگرش دانشجویان دختر و پسر مشغول به تحصیل در این دانشکده، نسبت به درس آمار، تفاوت معناداری به چشم نمی‌خورد که این نتیجه با نتیجه پژوهش شمسی نژاد [۱] که به بررسی نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضیّات پرداخت، همخوانی دارد و این درحالی‌است که نتایج تحقیق فرامرز پور و رفیع پور [۳] ، نشان داد که در باور برخی از دانش‌آموزان، درس ریاضی یک حوزه کاملا مردانه‌است که با توجّه به نتایج به دست آمده از این پژوهش می‌توان اذعان داشت که بنا بر یکسان بودن نگرش دانشجویان دختر و پسر نسبت به درس آمار، عدم وجود تفاوت جنسیّتی نسبت به این درس کاملا مشهود است که این موضوع، خود یک امتیاز مثبت محسوب می‌شود.

مراجع

۱. ف. شمسی نژاد راوری، بررسی نگرش دانش آموزان پایه سوّم راهنمایی شهرستان راور نسبت به درس ریاضی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۸۶.

۲. ن.شیربیگی، و آ. همّتی، مطالعه تغییر ناپذیری ساختار عاملی مقیاس نگرش ریاضی فنما-شرمن در دانش آموزان دبیرستانی دو زبانه ایرانی، نشریه اندازه گیری تربیّتی، ۱ (۱۳۸۹)، شماره ۳، ۷۰-۴۹.

۳. ن.فرامرزپور و ا. رفیع پور، باورهای جنسیّتی مرتبط با ریاضی در ذهن دانش آموزان، فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران ، ۹ (۱۳۹۳)، شماره ۳۴، ۱۳۲-۱۱۷.

۴. ل.جوکار و ا. رفیع پور، بررسی نقش جنسیّت و پایه تحصیلی در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در حل یک مسئله غیر معمول، فصلنامه نوآوری‌های آموزشی ، ۱۲ (۱۳۹۲)، شماره ۴۸، ۴۴-۲۷.

۵. س. مهدوی، بررسی تأثیر نگرش و تفکّر به موضوع درس ریاضی و ارتباط مستقیم آن با پیشرفت یادگیری دانش آموزان و دانشجویان در مقاطع تحصیلی در سطح کلانشهر تبریز در سال ۹۷-۹۶، چاپ شده در مجموعه مقالات هفدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ، ۲۶ الی ۲۸ مرداد ۱۳۹۸. تبریز، ایران.

6. Jr. Aiken and R. Lewis, *Attitudes toward mathematics* . Review of educational research. (1970), no. 4, 551–596.

7. C. Schau, Student's Attitudes: The Other Important outcome in Statistics Education. paper presented at the Joint statistical meeting of the American Statistical Association , 2003.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مقایسه روش‌های یادگیری خود-نظارتی برای قطعه‌بندی معنایی تصاویر با استفاده از شبکه‌های عصبی عمیق کانولوشن

حوریه نصیری[۱,*] ، مهدی افتخاری[۲] و کاوه بهرامن[۳]

[۱] بخش مهندسی کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲] بخش مهندسی کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۳] بخش مهندسی کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. شبکه‌های عمیق کانولوشن به داده‌های برچسب‌دار زیادی برای آموزش نیاز دارند. اخیرا برای کاهش حاشیه‌نویسی، قطعه‌بندی معنایی خودنظارتی پیشنهاد شده است که شبکه را بدون هیچ داده برچسب‌داری آموزش می‌دهد. در این مقاله ما به بررسی عملکرد این نوع شبکه بر روی داده‌های بدون برچسب با استفاده از روش‌های یادگیری خودنظارتی MoCo-v۱، MoCo-v۲، SimClr و Jigsaw پرداخته‌ایم. در این کار ما با استفاده از روش‌های خودنظارتی به پیش آموزش شبکه‌ی کانولوشن پرداخته‌ایم و سپس از این شبکه‌ی پیش آموزش شده برای تنظیم دقیق کار پایین دستی قطعه‌بندی معنایی تصاویراستفاده کرده‌ایم. این آزمایش روی مجموعه داده‌های Mini-ImageNet و PASCAL VOC2012 انجام شده است. طبق نتایج بدست آمده روش MoCo-v1 با دقت(mIOU) ۵۶ درصد عملکرد نسبتا بهتری در مقایسه با روش‌های دیگر داشته است.

واژه‌های کلیدی: قطعه‌بندی معنایی، یادگیری خودنظارتی، شبکه‌های عصبی عمیق، یادگیری متضاد.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 68T07.

۱. مقدمه

یادگیری عمیق زیر مجموعه‌ای از یادگیری ماشین است.که در آن از الگوریتم‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی استفاده می‌شود. در قطعه‌بندی معنایی تصویر به حجم داده برچسب‌دار زیادی نیاز داریم به همین دلیل از روش یادگیری خودنظارتی در شبکه‌های عصبی عمیق استفاده می‌کنیم در بینایی ماشین هدف از قطعه‌بندی معنایی تصاویر، قطعه‌بندی یک تصویر است بطوریکه همه‌ی اشیاء مشابه به هم با یک برچسب مشخص می‌شوند که به این منظور می‌بایست تک تک پیکسل‌های تصویر بر چسب‌دار شوند. قطعه‌بندی معنایی تصاویر با استفاده از شبکه‌های کانولوشن عمیق به اینصورت است که یک تصویر را به عنوان ورودی دریافت می‌کنند و به تک تک پیکسل‌های تصویر برچسب داده می‌شود. در این کار ما با استفاده از روش‌های خودنظارتی به پیش آموزش شبکه‌ی کانولوشن پرداخته‌ایم، سپس از این شبکه‌ی پیش آموزش شده برای تنظیم دقیق کار پایین دستی قطعه‌بندی معنایی تصاویراستفاده کرده‌ایم. این آزمایش بر روی مجموعه داده‌های Mini-ImageNet و PASCAL VOC2012 انجام شده است. نتایج بدست آمده نشان می دهد روش MoCo-v1 عملکرد نسبتا بهتری در مقایسه با روش‌های دیگر داشته است. در ادامه به کارهای قبلی که در این زمینه انجام شده است اشاره می‌کنیم. براساس تحقیقات انجام شده در این [۱] یادگیری عمیق خودنظارت شده برای قطعه‌بندی تصاویر معرفی شده است که از شبکه عصبی "کارگر" برای قطعه‌بندی تصاویر ورودی و شبکه عصبی " ناظر" برای ارزیابی کیفیت نتایج قطعه‌بندی استفاده می‌کند. در مقاله [۲] از ماژول جمع کننده و ساختار رمزگذار و رمزگشا در شبکه‌های عصبی عمیق برای کار قطعه‌بندی معنایی استفاده شده است.

*سخنران. آدرس ایمیل: nassiry.hoorie@gmail.com

۲. یادگیری خود-نظارتی

یادگیری خود نظارتی شکل دیگری از یادگیری بدون نظارت است که اخیرا از یادگیری متضاد برای بهبود عملکرد یادگیری خود نظارتی استفاده می شود که در ادامه روش های یادگیری خودنظارتی را شرح می دهیم.

۱.۲. روش تقابل گشتاور(موکو). در روش تقابل گشتاور [1] ، کیمینگ هی و همکارانش موکو [۳] را با یک تابع هزینه متضاد برای یادگیری بازنمایی بدون نظارت ارائه دادند (طبق رابطه (۱)). که دراین رابطه τ پارامتر دما، q نماد پرس‌وجو، k_+ نماد کلید مثبت و k_i نماد کلیدهای منفی هستند.

$$L_q = -\log \frac{\exp(q.k_+/\tau)}{\sum_{i=۰}^{k} \exp(q.k_i/\tau)} \quad (۱)$$

۲.۲. روش تقابل گشتاور-نسخه دو(موکو-۲). روش تقابل گشتاور نسخه دو [2] [۴] توسعه یافته روش تقابل گشتاور هست و تابع هزینه آن در رابطه (۲) ذکر شده است. در این رابطه q بازنمایی پرس‌وجو، τ پارامتر دما، k^+ نمونه مثبت(مشابه) و k^- نمونه منفی (غیرمشابه) می‌باشد.

$$L_{q,k^+,k^-} = -\log \frac{\exp(q.k^+/\tau)}{\exp(q.k^+/\tau) + \sum_{k^-} \exp(q.k^-/\tau)} \quad (۲)$$

۳.۲. روش سیم‌سی‌ال‌آر. روش سیم‌سی‌ال‌آر [3] [۵] یک چارچوب ساده برای یادگیری متضاد از بازنمایی‌های بصری می‌باشد. که بازنمایی را با استفاده از به حداکثر رساندن توافق بین داده‌های متفاوت تقویت یافته در فضای نهان با استفاده از تابع هزینه متضاد می‌آموزد(طبق رابطه (۳)). در این رابطه τ پارامتر دما است و (z_i, z_j) جفت مثبت و مشابه و (z_i, z_k) جفت منفی و غیرمشابه هستند.

$$L_{i,j} = -\log \frac{\exp(sim(z_i, z_j)/\tau)}{\sum_{K=۱}^{۲N} [k \neq i] \exp(sim(z_i, z_k)/\tau)} \quad (۳)$$

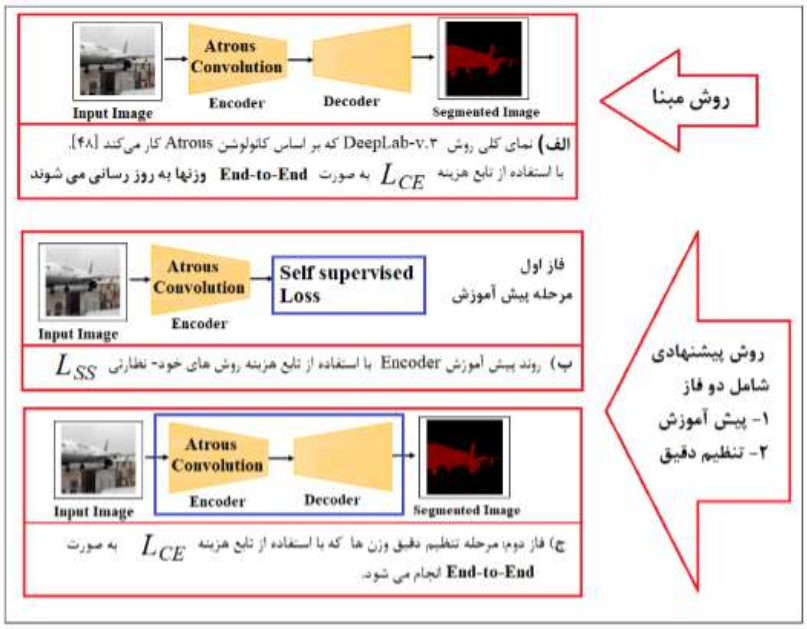
۴.۲. روش جیگسا. روش جیگسا [4] [۶] ویژگی‌ها را توسط داده‌های بدون برچسب استخراج می‌کند. برای یادگیری بازنمایی ویژگی‌ها از این طریق میبایست شبه برچسب تولید کرد که به ازای هر تصویر به صورت تصادفی تعدادی جایگشت تولید می‌کنیم در ادامه به ازای هر کدام از جایگشت‌هایی که انتخاب می‌شود یک عدد را به عنوان برچسب در نظر می‌گیریم که این برچسب همان شبه برچسبی است که برای آموزش دادن مدل از آن استفاده می‌کند و طبق رابطه (۴) تابع هزینه آن محاسبه می‌شود. که CE همان تابع هزینه آنتروپی متقابل است که $p \in \{۱, ..., P\}$ برچسب‌های جیگسا هستند.

$$L_{jigsaw}(C) = E_{x \sim pdata(x)}[CE(C(x) - p)] \quad (۴)$$

۳. روش پیشنهادی

مدل پیشنهادی این مقاله [۲] DeepLabv3+ می‌باشد که مدل DeepLabv3+ را با استفاده از ساختار رمزگذار-رمزگشا گسترش می‌دهد. ماژول رمزگذار با استفاده از کانولوشن آتروس(کانولوشن آتروس ابزاری قدرتمند است که وضوح ویژگی‌های محاسبه شده،توسط شبکه‌های عصبی عمیق کانولوشن را کنترل می‌کند در واقع عمل کانولوشن استاندارد را تعمیم می‌دهد.) ویژگی‌ها را استخراج می‌کند و ماژول رمزگشای ساده نتایج قطعه‌بندی را در امتداد مرزهای شی اصلاح می‌کند. طبق شکل ۱ از ماژول جمع‌کننده هرمی فضایی آتروس(در ماژول جمع‌کننده هرمی فضایی آتروس از چندین کانولوشن آتروس موازی با نرخ های مختلف استفاده می‌شود.) در قسمت رمزگذار استفاده می‌شود و همین امر باعث می‌شود که شبکه رمزگذار-رمزگشا سریع‌تری ایجاد شود. در شکل ۱ قسمت الف LCE همان تابع هزینه آنتروپی متقابل و در قسمت ب LSS تابع هزینه روش‌های خودنظارتی است. در این کار ما تاثیر روش‌های یادگیری خودنظارتی را بر روی کار پایین دستی قطعه‌بندی

[1] momentum contrast(MOCO)
[2] momentum contrast version2(MOCO-V2)
[3] Simclr
[4] Jigsaw



شکل ۱. الف) روش مبنای استفاده شده در مقاله DeepLabv3+ ب) فاز اول روش پیشنهادی پیش آموزش Encoder با استفاده از توابع هزینه روش‌های خودنظارتی ج) فاز دوم روش پیشنهادی تنظیم دقیق وزن‌ها با شروع از وزن‌های یاد گرفته شده از مرحله قبل.

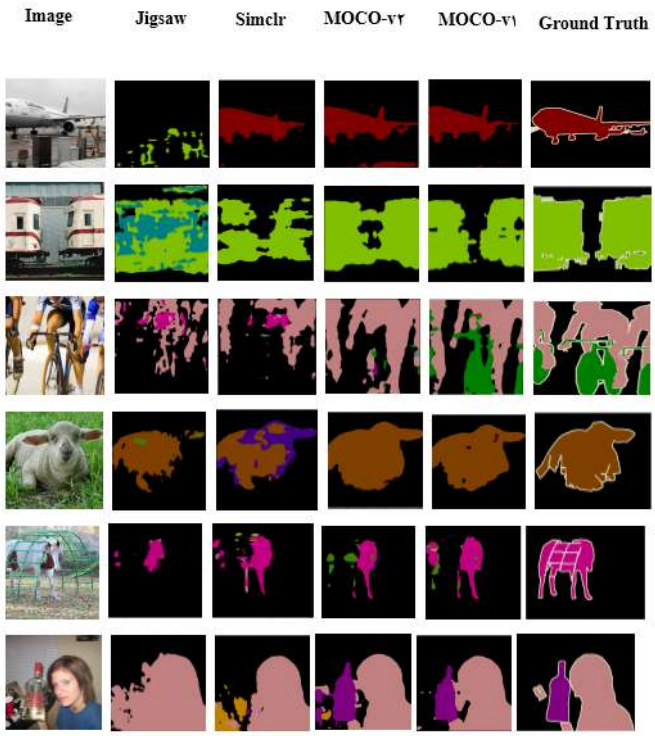
معنایی تصاویر بررسی می‌کنیم و می‌خواهیم پی‌ببریم کدام یک از این روش‌ها تاثیر بهتری روی قطعه‌بندی معنایی دارند و تصاویر را بهتر قطعه‌بندی می‌کنند. از مقاله [۲] برای بررسی کار خود استفاده کرده‌ایم و نوآوری ما در این بوده است که از دو مرحله پیش آموزش و تنظیم دقیق استفاده شده است که طبق شکل ۱ قسمت ب در مرحله پیش آموزش از روش‌های یادگیری خودنظارتی تقابل گشتاور نسخه۱، تقابل گشتاور نسخه۲، سیم‌سی‌ال‌آر و جیگسا به آموزش شبکه‌ی کانولوشن پرداخته‌ایم سپس طبق شکل ۱ قسمت ج در مرحله تنظیم دقیق، شبکه پیش آموزش داده شده را برای تنظیم دقیق کار پایین دستی قطعه‌بندی معنایی تصاویر استفاده می‌کنیم. سه روش تقابل گشتاور نسخه۱، تقابل گشتاور نسخه۲ و سیم‌سی‌ال‌آر روش‌های یادگیری خودنظارتی متضاد هستند، اما روش جیگسا نوعی روش یادگیری خودنظارتی می‌باشد در روش یادگیری خودنظارتی متضاد نمونه‌های مشابه به هم نزدیک و نمونه‌های غیرمشابه از هم دور می‌شوند و این امر باعث می‌شود که این روش نسبت به روش‌های یادگیری خودنظارتی، یادگیری بهتری را انجام دهد. دیگر روش های یادگیری خود نظارتی به این شکل عمل می کنند که یک شبه برچسب تولید می‌شود و از این شبه برچسب برای آموزش شبکه استفاده می‌شود. با توجه به مطالب گفته شده روش‌های یادگیری خودنظارتی متضاد نسبت به روش‌های یادگیری خودنظارتی بهتر عمل می‌کنند وطبق جدول ۱ و شکل ۲ روش تقابل گشتاور نسخه۱ نسبت به سه روش دیگر عملکرد بهتری داشته است و توانسته است با دقت بالاتری تصاویر را قطعه‌بندی معنایی کند. در مرحله پیش آموزش از شبکه Resnet50، دیتاست Mini-ImageNet، تعداد اپک ۲۰۰، میزان نرخ یادگیری ۰٫۰۶، میزان گشتاور ۰٫۹ و وزن کاهشی ۰٫۰۰۰۱ استفاده شده است. در قسمت تنظیم دقیق از شبکه Resnet101، دیتاست PASCAL VOC2012، تعداد اپک ۵۰، میزان نرخ یادگیری ۰٫۰۰۷، میزان گشتاور ۰٫۹ و وزن کاهشی ۰٫۰۰۰۵ استفاده کرده‌ایم.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله ما به بررسی عملکرد روش‌های یادگیری خودنظارتی برای کار پایین دستی قطعه‌بندی معنایی تصاویر پرداخته‌ایم. و طبق نتایج به دست آمده روش یادگیری خودنظارتی متضاد تقابل گشتاور نسخه۱ نسبت به دیگر روش‌ها بهتر عمل کرده است و تصاویر را با دقت بالاتری قطعه‌بندی می‌کند. این روش یادگیری برای کار قطعه‌بندی معنایی تصاویر مناسب تر است.

جدول ۱. مقایسه چهار روش تقابل گشتاور نسخه۱، تقابل گشتاور نسخه۲، سیم‌سی‌ال‌آر، جیگسا برای ارزیابی معیارهای mIOU و Accuracy را نشان می‌دهد.

	mIOU	Accuracy
$MOCO-V۱$	۵۶	۸۸
$MOCO-V۲$	۵۳	۸۷
$Simclr$	۴۲	۸۲
$Jigsaw$	۱۳	۷۱



شکل ۲. مقایسه روش‌های یادگیری خودنظارت شده برای کار پایین دستی قطعه‌بندی معنایی

مراجع

1. Z. Zeng, Y. Xulei, Y. Qiyun, Y. Meng, Z. Le, *SeSe-Net: Self-Supervised deep learning for segmentation*, Pattern Recognit. Lett, 128 (2019), 23-29.
2. L.C. Chen, Y. Zhu, G. Papandreou, F. Schroff, H. Adam, *Encoder-Decoder with atrous separable convolution for semantic image segmentation*, ArXiv, abs/1802.02611, (2018).
3. K. He, H. Fan, Y. Wu, S. Xie, R. Girshick, *Momentum contrast for unsupervised visual representation learning*, 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), (2020), 9726-9735.
4. X. Chen, H. Fan, R. Girshick, K. He, *Improved baselines with momentum contrastive learning* , ArXiv, abs/2003.04297, (2020).
5. T. Chen, S. Kornblith , M. Norouzi , G. Hinton, *A simple framework for contrastive learning of visual representations*, ArXiv, abs/2002.05709, (2020).
6. M. Noroozi , P. Favaro, *Unsupervised learning of visual representations by solving jigsaw puzzles*, ECCV, (2016).

پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

ساخت ماتریس متقارن با مقادیر ریتز معلوم از مرتبه کوچکتر یا مساوی سه

علی‌محمد نظری[۱,*] و عطیه نظامی[۲]
[۱]گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ایران
[۲]گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ایران

چکیده. مقادیر ریتز یک ماتریس مجموعه مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی پیش‌روی آن است. در این مقاله با فرض معلوم بودن مجموعه مقادیر ریتز از بعد حداکثر سه، ما یک ماتریس متقارن می‌یابیم به‌گونه‌ای که مجموعه معلوم، مجموعه مقادیر ریتز ماتریس متقارن یافت شده باشد. هم‌چنین شرایط وجود جواب مورد بررسی قرار می‌گیرد.
واژه‌های کلیدی: مقادیر ریتز، ماتریس متقارن، مساله مقدار ویژه معکوس.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 15A18,15A29.

۱. مقدمه

مجموعه مقادیر ریتز یک ماتریس $n \times n$ مجموعه‌ای است که اعضای آن مجموعه مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی پیش‌رو برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ هستند. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر ریتز آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$R(A) = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۲۲}; \lambda_{۱۳}, \lambda_{۲۳}, \lambda_{۳۳}; \cdots; \lambda_{۱n}, \cdots, \lambda_{nn}\},$$

که در آن عبارت بین سیمکالن $i-۱$ام و iام مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌رو از مرتبه i برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ می‌باشد. پارلت[۱] و استرانگ[۲] در [۲] دو سوال اساسی مطرح کردند:

(۱) آیا برای یک مجموعه دلخواه به شکل (۱) ماتریس متقارنی وجود دارد که مجموعه داده شده مقادیر ریتز آن باشد؟
(۲) آیا برای یک مجموعه مختلط از مقادیر ریتز ماتریس حقیقی وجود دارد؟

سوالات مطرح شده فوق سوالات جالبی هستند و نویسندگان آن مقاله موفق به یافتن یک ماتریس سه‌قطری متقارن شدند که مقادیر ریتز آن از قبل داده شده باشد و در حالت نامتقارن توانستند یک ماتریس هسنبرگی یکتایی بیابند که مقادیر ریتز آن معلوم باشد. در این مقاله برای ما نیز همان سوالات بالا مطرح هستند و ما سعی در یافتن ماتریس متقارن برای مقادیر ریتز معلوم هستیم. در سال ۲۰۱۴ نظری و افشاری حالت خاصی از مقادیر ریتز معلوم برای ماتریس متقارن نامنفی را طی الگوریتمی حل نمودند [۳]. در این مقاله ما حالت نامنفی را در نظر نگرفته‌ایم که با آن برای $n \geq ۳$ حل مساله اگر غیرممکن نباشد، بسیار سخت می‌گردد.

نکته مهمی که باید در نظر داشته باشیم این است که مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی پیش‌رو ماتریس‌های سه‌قطری متقارن در خاصیت تداخلی کوشی صدق می کنند به‌عبارت دیگر برای مجموعه (۱) ما رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\lambda_{۱,j+۱} \leq \lambda_{۱j} \leq \lambda_{۲,j+۱} \leq \lambda_{۲j} \leq \ldots \leq \lambda_{j+۱,j+۱},$$

*علی‌محمد نظری. آدرس ایمیل: a-nazari@araku.ac.ir

[1] Parlett
[2] Srtang

که در آن $\lambda_{jj}, \cdots, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \cdots$ مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌رو jام و $\lambda_{j+1,j+1}, \cdots, \lambda_{1,j+1}, \lambda_{2,j+1}, \cdots$ مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌روی $j+1$ام است.

اگرچه در [۳] مساله برای ابعاد دلخواه حل شده است، اما مساله مقادیر ریتز با شرط تداخلی (۲) را ما ابتدا برای $n = ۳$ حل کرده و در مقاله‌ای دیگر سعی در تعمیم آن خواهیم داشت. با الگوریتم ارائه شده در [۳] مساله ما برای $n = ۱, ۲$ حل می شود به‌شرطی که داشته باشیم $\lambda_{۱۱} \geq ۰$. یعنی

$$A_۱ = (\lambda_{۱۱}),$$

با تک مقدار ریتز $R_۱ = \{\lambda_{۱۱}\}$ و

$$A_۲ = \begin{pmatrix} \lambda_{۱۱} & \sqrt{(\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۱})(\lambda_{۱۱} - \lambda_{۱۲})} \\ \sqrt{(\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۱})(\lambda_{۱۱} - \lambda_{۱۲})} & \lambda_{۲۲} + \lambda_{۱۲} - \lambda_{۱۱} \end{pmatrix},$$

یک ماتریس ۲×۲ نامنفی با مجموعه مقادیر ریتز $R_۲ = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۲۲}\}$ جواب مساله خواهد بود. اگر $\lambda_{۱۱} \leq ۰$ در این صورت واضح است که شرط نامنفی بودن خودبه‌خود از بین خواهد رفت ولی با همان الگوریتم جواب فوق خوش‌تعریف است زیرا در صورت نامثبت شدن $\lambda_{۱۱}$ مقدار $\lambda_{۱۲}$ نیز به‌خاطر خاصیت تداخلی کوشی(ماتریس ۲×۲ متقارن خودش یك ماتریس سه‌قطري متقارن است) نامثبت شده و زیر رادیکال نامنفی شده و ماتریس $A_۲$ خوش‌تعریف خواهد بود. هم‌چنین اگر هر سه مقدار ریتز مجموعه $R_۲$ منفی باشند با استدلالی کاملاً مشابه ماتریس $A_۲$ خوش‌تعریف خواهد بود. پس جواب ارائه شده در [۳] برای $n = ۱, ۲$ مساله را حل خواهد کرد.

ما مساله را ابتدا برای حالت $n = ۳$ حل کرده و در ادامه شرایط حل‌پذیری مساله را در این حالت بررسی کرده و در مقاله‌ای دیگر سعی در ارائه الگوریتمی خواهیم بود که مساله را در حالت کلی حل نماید.

۲. حالت $n = ۳$

فرض کنیم مجموعه مقادیر ریتز یک ماتریس متقارن ۳×۳ به‌صورت زیر داده شده باشد:

$$R_۳ = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۲۲}; \lambda_{۱۳}, \lambda_{۲۳}, \lambda_{۳۳}\},$$

داده شده باشد. در این صورت با توجه با ماتریس (۳)، ماتریس جواب این حالت باید دارای شکل زیر باشد:

$$A_۳ = \begin{pmatrix} A_۲ & & a \\ & & b \\ a & b & \lambda_{۱۳} + \lambda_{۲۳} + \lambda_{۳۳} - (\lambda_{۱۲} + \lambda_{۲۲}) \end{pmatrix},$$

که در آن دو متغیر a و b مجهول هستند. واضح است که اثر ماتریس $A_۳$ برابر است با $\lambda_{۱۳} + \lambda_{۲۳} + \lambda_{۳۳}$ که شرط لازم برای حل‌پذیری مساله است با توجه به درایه‌های قطری ماتریس $A_۲$ و این‌که اثر ماتریس برابر با مجموع مقادیر ویژه است پس درایه $(۳, ۳)$ ماتریس $A_۳$ به‌سادگی حاصل می‌شود. حال دو مجهول a و b را به‌گونه‌ای تعیین می کنیم که مجموعه مقادیر ویژه ماتریس $A_۳$ برابر با $\{\lambda_{۱۳}, \lambda_{۲۳}, \lambda_{۳۳}\}$ گردد. ابتدا چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $A_۳$ را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} P(A_۳, \lambda) = {} & \lambda^۳ - (\lambda_{۱۳} + \lambda_{۲۳} + \lambda_{۳۳})\lambda^۲ - (a^۲ + b^۲ - \lambda_{۱۳}\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۳}\lambda_{۱۲} - \\ & \lambda_{۲۳}\lambda_{۲۲} - \lambda_{۲۳}\lambda_{۱۲} - \lambda_{۳۳}\lambda_{۲۲} - \lambda_{۳۳}\lambda_{۱۲} + {\lambda_{۲۲}}^۲ + \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲} + {\lambda_{۱۲}}^۲)\lambda - \\ & \lambda_{۱۱}a^۲ - ۲\,a\sqrt{(\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۱})\,(\lambda_{۱۱} - \lambda_{۱۲})}b + b^۲\lambda_{۱۱} + a^۲\lambda_{۲۲} + \\ & a^۲\lambda_{۱۲} - \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲}\lambda_{۱۳} - \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲}\lambda_{۲۳} - \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲}\lambda_{۳۳} + {\lambda_{۲۲}}^۲\lambda_{۱۲} + \lambda_{۲۲}{\lambda_{۱۲}}^۲ = \\ & (\lambda - \lambda_{۱۳})(\lambda - \lambda_{۲۳})(\lambda - \lambda_{۳۳}), \end{aligned}$$

ضرایب $\lambda^۰$ و λ را در عبارت فوق مساوی قرار داده و دو معادله زیر را بر اساس دو متغیر a و b حاصل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(a,b) = (a^۲ + b^۲ - \lambda_{۱۳}\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۳}\lambda_{۱۲} - \lambda_{۲۳}\lambda_{۲۲} - \lambda_{۲۳}\lambda_{۱۲} - \lambda_{۳۳}\lambda_{۲۲} - \\ \quad \lambda_{۳۳}\lambda_{۱۲} + {\lambda_{۲۲}}^۲ + \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲} + {\lambda_{۱۲}}^۲) - (\lambda_{۱۳}\lambda_{۲۳} + \lambda_{۱۳}\lambda_{۳۳} + \lambda_{۲۳}\lambda_{۳۳}) = ۰ \\ g(a,b) = (\lambda_{۱۱} + \lambda_{۲۲} + \lambda_{۱۲})a^۲ - ۲\,a\sqrt{(\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۱})\,(\lambda_{۱۱} - \lambda_{۱۲})}b + b^۲\lambda_{۱۱} - \\ \quad \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲}\lambda_{۱۳} - \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲}\lambda_{۲۳} - \lambda_{۲۲}\lambda_{۱۲}\lambda_{۳۳} + {\lambda_{۲۲}}^۲\lambda_{۱۲} + \lambda_{۲۲}{\lambda_{۱۲}}^۲ - (\lambda_{۱۳}\lambda_{۲۳}\lambda_{۳۳}) = ۰ \end{cases}$$

درصورتی‌که دستگاه غیرخطی فوق دارای جواب باشد مساله ما حل‌پذیر است. معادله اول با توجه به شرط تداخلی کوشی همواره دارای مجموعه جواب ناتهی است. یعنی با هر مجموعه دلخواه از مقادیر ریتز که در شرط تداخلی کوشی صدق نمایند

این دایره دارای شعاع نامنفی است و در نتیجه سازگار است. معادله دوم نیز بسته به مقادیر ریتز داده شده یا یک هذلولی، یا دو خط متقاطع در مبداء مختصات و یا یک دایره و در حالت خاص نقطه مبداءمختصات(دایره با شعاع صفر) است، پس معادله دوم نیز سازگار است. در [۱] شرط حل‌پذیری دستگاه غیر خطی فوق به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial a} \neq ۰,$$

در ادامه با چندنکته و مثال این مطلب را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۲. برای مجموعه مقادیر ریتز $R_۳ = \{۲; -۲, ۳; -۴, ۴, ۸\}$ ماتریس‌های ۳×۳ بیابید که این مجموعه مقادیر ریتز آن باشند.

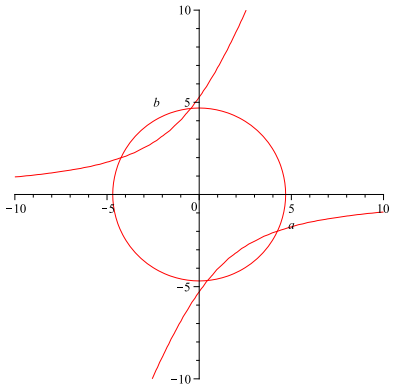
حل: ابتدا دو معادله (۴) را می یابیم

$$f(a,b) = a^۲ + b^۲ - ۲۲ = ۰,$$
$$g(a,b) = -۴b\sqrt{۲}a + ۲b^۲ - ۵۶ = ۰,$$

معادله اول در عبارت بالا یک دایره است و معادله دوم یک هذلولی است. شرط حل‌پذیری (۵) برقرار است با حل دو معادله غیر خطی فوق جواب‌های زیر برای دو متغیر a و b حاصل می‌شود:

$$\{a = -۳\sqrt{۲}, b = ۲\}, \quad \{a = ۳\sqrt{۲}, b = -۲\},$$
$$\{a = -(۱/۳)\sqrt{۲}, b = ۱۴/۳\}, \quad \{a = (۱/۳)\sqrt{۲}, b = -۱۴/۳\}.$$

شکل ۱ تصویر این دو معادله را نشان می‌دهد. در این صورت یکی از چهار ماتریس ۳×۳ جواب به شرح زیر است و بقیه



شکل ۱. مثال (۱.۲)

جواب‌ها نیز با جای‌گذاری مقادیر a ، بدست خواهند آمد.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲\sqrt{۲} & -۱/۳\sqrt{۲} \\ ۲\sqrt{۲} & ۰ & ۱۴/۳ \\ -۱/۳\sqrt{۲} & ۱۴/۳ & ۵ \end{bmatrix},$$

ملاحظه ۲.۲. مساله ما ممکن است یک یا دو و یا چهار و یا بی‌نهایت جواب داشته باشد. اگر همه اعضای مجموعه $R(A)$ متمایز باشند در این صورت هر دو معادله دستگاه معادلات (۴) سازگار بوده و یکی ازآن‌ها دایره و دیگری یک هذلولی است که در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و در این حالت مساله دارای چهار جواب متمایز است که مثال بالا نمونه‌ای از آن است. اگر مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی مرتبه پایین‌تر با مرتبه بالاتر عضوهای مشترک داشته باشند مساله ممکن است همه حالات مطرح شده را داشته باشد. مثلاً برای مجموعه مقادیر ریتز

$$\{-۳; -۸, ۱; -۸, -۳, ۱\},$$

مقادیر دو مجهول a و b فقط صفر هستند و زیرا معادله اول فقط نقطه مبداء مختصات است و معادله دوم نیز هذلولی

$$۴a^۲ + ۴a\sqrt{۵}b + ۳b^۲ = ۰,$$

است که از مبداء مختصات عبور می‌کند. در این صورت ماتریس جواب شکل زیر را خواهد داشت:

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۲\sqrt{۵} & ۰ \\ ۲\sqrt{۵} & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}.$$

نکته دیگر انکه برای مجموعه مقادیر ریتز

$$\{-۸; -۸, -۸; -t, -۸, ۱\},$$

با مقدار $t > ۸$ همواره بی‌نهایت جواب خواهیم داشت زیرا هر دو معادله دستگاه غیرخطی (۴) به‌صورت $a^۲ + b^۲ = ۳t$ خواهند بود و ماتریس جواب دارای شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & a \\ ۰ & -۸ & b \\ a & b & -t + ۹ \end{bmatrix}$$

با مقادیر دو متغیر a و b که روی محیط دایره $a^۲ + b^۲ = ۳t$ قرار دارند. به‌عنوان مثال برای $t = ۱۸$ خواهیم داشت:

$$R(A) = \{-۸; -۸, -۸; -۱۸, -۸, ۱\},$$

بی‌نهایت جواب وجود دارد زیرا هر دو معادله در دستگاه معادلات غیرخطی (۴) به دایره $a^۲ + b^۲ = ۹۰$ می‌رسند و ماتریس A مجموعه مقادیر ویژه آن به‌ترتیب به‌شکل زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & a \\ ۰ & -۸ & b \\ a & b & -۹ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -۸ \\ -۱۷/۲ + ۱/۲\sqrt{۱ + ۴a^۲ + ۴b^۲} \\ -۱۷/۲ - ۱/۲\sqrt{۱ + ۴a^۲ + ۴b^۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ \\ ۱ \\ -۱۸ \end{bmatrix}.$$

هم‌چنین برای مقادیر ریتز

$$R(A) = \{-۸; -۸, -۶; -۸, -۸, ۱\},$$

ما دو جواب خواهیم داشت زیرا دستگاه معدلات غیرخطی (۴) به دایره $a^۲ + b^۲ = ۱۴$ و بیضی $۳a^۲ + ۴b^۲ = ۶۶$ تبدیل شده و آن‌ها در دو نقطه $(a = ۰, b = \pm\sqrt{۱۴})$ یکدیگر را قطع می‌کنند که در این صورت ماتریس جواب به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۶ & \sqrt{۱۴} \\ ۰ & \sqrt{۱۴} & -۱ \end{bmatrix}.$$

مراجع

[۱] م. نیکوکار و م. درویشی، محاسبات عددی، انتشارات گسترش علوم پایه، چاپ سی و پنجم ، (۱۳۹۸).

[2] B. Parlett a, G. Strang, Matrices with prescribed Ritz values, Linear Algebra and its Applications 428 (2008) 1725–1739.

[3] A. M. Nazari, E. Afshari, On the construction of symmetric nonnegative matrix with prescribed Ritz values, Journal of Linear and Topological Algebra, Vol. 03, No. 02, 2014, 61- 66.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

حل عددی معادله موج کسری با مشتق کسری تطبیق پذیر

آسیه یادگاری[۱,*] و مریم عرب عامری[۲]

[۱,۲]گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش عددی برای حل معادلات موج کسری مکان-زمان، مبتنی بر مشتقات کسری تطبیق‌پذیر معرفی شده است [۲]. روش عددی مورد استفاده بر پایه چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته نوع دوم است. با اعمال این روش، ابتدا معادله موج کسری مکان-زمان به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود، سپس با استفاده از روش تفاضلات متناهی، دستگاه معادلات خطی حاصل می شود که از آن جواب معادله موج کسری به دست می آید.

واژه‌های کلیدی: معادله موج کسری، مشتق کسری تطبیق پذیر، چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته نوع دوم.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34K37, 74S25, 65M06.

۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل کاربردهای آن‌ها در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. از آن‌جایی‌که اکثر معادلات دیفرانسیل کسری جواب دقیق ندارند، امروزه روش‌های جدیدی برای به‌دست آوردن جواب‌های تحلیلی و تقریبی این نوع معادلات توسعه یافته‌اند. مشتقات کسری دارای انواع گوناگونی هستند و اخیراً، نوعی مشتق کسری بانام مشتق تطبیق‌پذیر توسط خلیل [۱] و همکاران معرفی شده است [۳] و همچنین محققانی به بررسی خواص متمایز مشتق کسری تطبیق‌پذیر نسبت به سایر مشتقات کسری پرداخته‌اند [۱]. هدف این مقاله معرفی روشی عددی برای حل معادله موج کسری است. بررسی‌ها پیرامون معادله موج کسری نشان می‌دهد که بیشتر مطالعات بر معادله موج کسری زمانی با مشتقات کاپوتو تمرکز دارند و معادله موج کسری مبتنی بر مشتقات تطبیق‌پذیر خیلی مورد بررسی قرار نگرفته است. در سال ۲۰۱۸، یاسلان [۲] معادله موج کسری مکان زمان مبتنی بر مشتق کسری تطبیق‌پذیر را معرفی و روشی عددی برای حل این دسته از معادلات معرفی کرد [۲]. در این مقاله، روش عددی معرفی شده در [۲]مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. شکل کلی معادلات مورد بحث در [۲] به ازای $0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T$ به شکل زیر است:

$$T_t^{\mu} u(x,t) = f(x,t) T_x^{\alpha} u(x,t) + g(x,t), 1 < \mu \leqslant 2, 1 < \alpha \leqslant 2, \quad (1)$$

$$u(x,0) = f_1(x),\ u_t(x,0) = f_2(x),\ 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0,t) = h_1(t),\ u(1,t) = h_2(t),\ 0 < t < T, \quad (3)$$

*سخنران. آدرس ایمیل: Asyih.yadgare@email.com

[1]Khalil
[2]Yaslan

که T_α عملگر مشتق کسری تطبیق‌پذیر از مرتبه α است که برای تابع $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T_t^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (۴)$$

برخی از خواص مهم این نوع مشتق عبارت اند از [۳]:

۱- برای تمام ثابت های حقیقی b, a داریم: $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$

۲- برای تمام ثابت های حقیقی p داریم: $T_\alpha(t^p) = pt^{(p-\alpha)}$

۳- $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$

۴- $T_\alpha(\frac{f}{g}) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

۵- برای ثابت حقیقی c داریم: $T_\alpha(c) = 0$.

۲. حل عددی معادلات موج کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم

در این بخش به ارائه روش معرفی شده در [۲] برای حل تقریبی معادله (۱) به همراه شرایط اولیه و مرزی (۲) و (۳) می‌پردازیم، به همین منظور ابتدا به معرفی اجمالی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم می‌پردازیم، سپس نحوه به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های مورد نظر در به‌دست آوردن جواب تقریبی معادله (۱) را توضیح می‌دهیم.

۱.۲. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم از درجه n با نماد $U_n(x)$ نمایش داده می‌شود، این دسته چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ صدق می‌کنند [۲]. مقادیر اولیه عبارت‌اند از: $U_0(x) = 1$ و $U_1(x) = 2x$. چندجمله‌ای‌های مذکور بر بازه‌ی $[-1, 1]$ متعامدند. چنانچه بخواهیم چندجمله‌ای‌های چبیشف را بر بازه $[a, b]$ استفاده کنیم، می‌توانیم از تغییر متغیر $X = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$ استفاده کنیم. در این‌صورت چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم انتقال یافته حاصل می‌شوند که با نماد $U_n^*(x)$ نمایش داده می‌شوند. فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های انتقال یافته نوع دوم به شکل زیر است:

$$U_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{\Gamma(2n - k + 2)x^{n-k}}{\Gamma(2n - 2k + 2)\Gamma(k + 1)}, \quad (۵)$$

۲.۲. حل عددی معادله موج کسری. در این بخش با استفاده از روش مبتنی بر چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم به حل عددی معادله (۱) می‌پردازیم [۲]. $u_N(x,t)$ را تقریبی از $u(x,t)$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_N(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(t) U_i^*(x). \quad (۶)$$

با استفاده از فرمول چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته نوع دوم و با استفاده از خواص مشتق کسری تطبیق پذیر داریم:

$$T_x^\alpha y_N(x) = \sum_{i=n+1}^{N} \sum_{k=0}^{i-(n+1)} b_i(t) A_i^\alpha x^{i-k-\alpha}, \ n < \alpha \leqslant n + 1 \quad (۷)$$

$$A_{i,k}^\alpha = (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i - k + 2)\Gamma(i - k + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(2i - 2k + 2)\Gamma(i - k - n)} \quad (۸)$$

که Γ، نشان دهنده تابع گاما است.حال با استفاده از معادلات (۱) ،(۷) و (۸) و با استفاده خواص مشتق کسری داریم:

$$\sum_{i=0}^{N} t^{1-\lambda} \frac{d^2 a_i(t)}{dt^2} U_i^*(x) = f(x,t) \sum_{i=2}^{N} \sum_{k=0}^{i-2} a_i(t) A_{i,k}^\alpha x^{i-k-\alpha} + g(x,t). \quad (۹)$$

که در آن $0 < \lambda < 1$ و $\mu = 1 + \lambda$. نقاط هم محلی x_p را ریشه‌های چندجمله‌ای $U_N^*(x)$ در نظر می‌گیریم، با جایگذاری نقاط هم محلی x_p در معادله (۹)، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل می‌شود. به منظور حل عددی این دستگاه، برای عدد صحیح M، قرار می‌دهیم $\Delta t = \frac{T}{M}$ که Δt طول گام زمانی است. همچنین به ازای $k = 0, 1, \cdots, M$، t_k را به‌صورت $t_k = k\Delta t$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $V^k = (a_0^k, a_1^k, \cdots, a_N^k)^T$. ضرایب $a_i(t_0), i = 0, 1, \cdots, N$ و $\frac{ad_{i(t)}}{dt}|_{t=t_0}$ به‌عبارت دیگر به ترتیب V^0 و $(V^0)'$ را می‌توان با استفاده از شرایط اولیه (۲) محاسبه نمود و سپس با استفاده از تقریب تفاضلات پیشرو $(V^0)' = \frac{V^1 - V^0}{\Delta t}$و ضرایب $a_i(t_1), i = 1, \cdots, N$ به‌عبارت دیگر V^1 نیز قابل محاسبه است. بنابراین دستگاه معادلات مورد نظر، به فرم گسسته زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{N} t_n^{1-\lambda} \frac{a_i(t_{n+1}) - 2a_i(t_n) + a_i(t_{n-1})}{\Delta t^2} U_i^*(x_p) = f(x_p, t) \sum_{i=2}^{N} \sum_{k=0}^{i-2} a_i(t_n) A_{i,k}^{\alpha} x_p^{i-k-\alpha} + g(x_p, t). \quad (10)$$

هم‌چنین شرایط مرزی (۳) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sum_{i=0}^{N} (-1)^i (i+1) a_i(t_{n+1}) = h_1(t_{n+1}), \ \sum_{i=0}^{N} (i+1)(i+1) a_i(t_{n+1}) = h_2(t_{n+1}). \quad (11)$$

با ترکیب معالادت (۱۰) و (۱۱)، دستگاه معادلات خطی جبری زیر حاصل می‌شود:

$$AV^{n+1} = (2C + B)V^n - CV^{n+1} + D, \ n = 1, \cdots, M-1, \quad (12)$$

$$A = \begin{pmatrix} t_n^{1-\lambda} U_0^*(x_0) & t_n^{1-\lambda} U_1^*(x_0) & \cdots & t_n^{1-\lambda} U_N^*(x_0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_n^{1-\lambda} U_0^*(x_{N-2}) & t_n^{1-\lambda} U_1^*(x_{N-2}) & \cdots & t_n^{1-\lambda} U_N^*(x_{N-2}) \\ 1 & -2 & \cdots & (-1)^N (N+1) \\ 1 & 2 & \cdots & (N+1) \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_2^n(x_0) & \cdots & F_N^n(x_0) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & F_2^n(x_{N-2}) & \cdots & F_N^n(x_{N-2}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

$$C = t_n^{1-\lambda} \begin{pmatrix} U_0^*(x_0) & U_1^*(x_0) & \cdots & U_N^*(x_0) \\ U_0^*(x_{N-2}) & U_1^*(x_{N-2}) & \cdots & U_N^*(x_{N-2}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

$$D = (\Delta t^2 g_0^n, \Delta t^2 g_1^n, \cdots, \Delta t^2 g_{N-2}^n, h_1^{n+1}, h_2^{n+1})^T_{(N+1)\times 1}.$$

از حل دستگاه معادلات (۱۲) به ازای nهای مختلف، جواب معادله (۱) در گام‌های زمانی مختلف به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۲. $u(x,t)$ را جواب حاصل از چندجمله ای چیپشف و $\bar{u}(x,t)$ را جواب دقیق معادله (۱) با شرایط (۲) و (۳) در نظر بگیرید. اگر $\bar{u}(x,t_n)$ به اندازه کافی هموار باشد و داشته باشیم $R(x) = \left(U_0^*(x), \cdots, U_N^*(x)\right)^T$، آنگاه برای ثابت‌های C_1، C_2 و C_3 خطای حاصل از این تقریب در نامساوی زیر صدق می‌کند [۲]:

$$|\bar{u}(x,t_n) - u(x,t_n)| \leqslant |H(x,t)| + (C_1 + C_2)\|R(x)\| + C_2 \Delta t \|R(x)\| \\ .\|\bar{V}' - V\| + C_3 \|R(c)\| + \|\Delta H\| + O(\Delta t^2). \quad (13)$$

که در آن $\xi \in (0,1)$، $H(x,t_n) = \frac{1}{(N-1)!} \frac{\partial^{N-1} \bar{u}(\xi, t_n)}{\partial x^{N-1}} (x - x_0) \cdots (x - x_{N-2})$.

۳. نتایج عددی

مثال ۱.۳. معادله موج کسری با شرایط زیر را در نظر بگیرید [۲]:

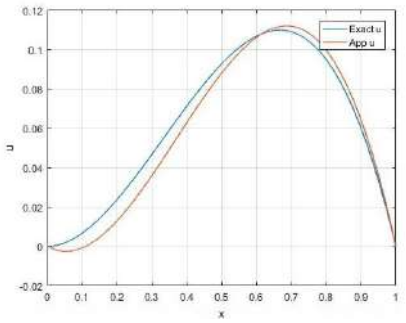
$$T^{1/4}u(x,t) = \frac{x^{1/7}t^{0/6}}{2}T_x^{1/7}u(x,t) + 2x^3t^{0/6}\exp(-t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \tag{۱۴}$$
$$u(x,0) = x^2 - x^3,\ u_t(x,0) = -x^2 + x^3,\ 0 < x < 1,$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ 0 < t < T.$$

جواب دقیق معادله $u_e(x,t) = (x^2 - x^3)e^{-t}$ است. در اینجا این معادله را در حالت $N = 3$ با دادهای اولیه $V^0 = (\frac{3}{32}, \frac{1}{32}, \frac{-1}{32}, \frac{-1}{64})^T$ حل می‌کنیم. لازم به ذکر است الگوریتم استفاده شده همان الگوریتم معرفی شده در [۲] می باشد ولی نتایج حاصل از کدنویسی انجام شده در اینجا گزارش شده است. در جدول ۱ خطای مطلق بین جواب دقیق $u_e(x,t)$ و جواب تقریبی $u_3(x,t)$ در نقاط $x = 0/2, 0/4, 0/6, 0/8$ و در لحظه $t = 0/3$ ارائه شده است. نتایج نشان می دهد که جواب تقریبی به دست آمده با استفاده از روش چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم انتقال یافته حتی به ازای مقادیر کوچک N دقت مطلوبی ارائه می‌دهد. علاوه بر این زمان محاسبات بسیار کم (۴/۴ ثانیه)می باشد.

جدول ۱. خطای مطلق به‌ازای $N = 3$ و $M = 10^2$ در لحظه $t = 0/3$ و به ازای $T = 1$

$x = 0/8$	$x = 0/6$	$x = 0/4$	$x = 0/2$
4×10^{-3}	1×10^{-4}	6×10^{-3}	8×10^{-3}

در شکل ۱، نمودار جواب تقریبی و دقیق مساله (۱۴) در لحظه $t = 0/3$ به ازای $N = 3$ و $M = 10^2$ رسم شده است.



شکل ۱. جواب تقریبی و دقیق مساله (۱۴) در لحظه $t = 0/3$ به ازای $N = 3$ و $M = 10^2$

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی روش ارائه شده در [۲] برای حل عددی معادلات موج کسری مکان-زمان بر پایه مشتقات کسری تطبیق‌پذیر پرداخته شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که جواب حاصل از روش معرفی شده حتی به ازای مقادیر کوچک N دقت مطلوبی با زمان محاسبات پایین ارائه می‌دهد.

مراجع

[1] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, *J. Comput. Appl. Math.* **279** (2015), 57–66.
[2] H. Çerdik Yaslan, Numerical solution of the conformable space-time fractional wave equation, *Chinese Journal of Physics,* **56** (2018), 2916-2925.
[3] R. Khalil, M. Al Horani , A. Yousef and M. Sababheh, A new difintion of fractional derivative ,Journal of Computational and Applied Mathematics, **264** (2014), 65-70.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

k-نگاشت تکانی و کوهومولوژی هموردا

محمد دارا[۱]، * و اکبر دهقان نژاد[۲]

[۱]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

[۲]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده. نگاشت تکانی یک بیان ریاضی از مفهوم کمیت‌های پایستار مرتبط با تقارن‌های یک دستگاه همیلتونی و یک ابزار اساسی برای مطالعه فروکاست روی خمینه‌های همتافته به حساب می‌آید. در نظر گرفتن ویژگی‌های توپولوژیکی نگاشت تکانی و تعمیم فضای تعریف آن سبب می‌شود تا بتوان فضای پیکربندی سیستم‌های دینامیکی را با استفاده از نگاشت‌هایی که لزوماً خطی نیستند، بیش از قبل کاهش داد. کاهش بُعد فضاها به وسیله نگاشت تکانی تعمیم یافته کمک می‌کند تا با استفاده از یکریختی‌ای که بین گروه‌های کوهومولوژی دورام فضای کاهش یافته و کوهومولوژی هموردا سطح تراز نگاشت‌های تکانی تعمیم یافته است، محاسبه ساده تری برای برخی از فضاها داشته باشیم.

واژه‌های کلیدی: خمینه همتافته، سیستم‌های همیلتونی، k-نگاشت تکانی، فروکاست، کوهومولوژی هموردا.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 53D20, 55N25.

۱. مقدمه

در توصیف طبیعت، تقارن نقش مهم و بنیادی ایفا می‌کند. در مکانیک کلاسیک تقارن‌ها، تبدیلات هندسی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کنند. از طرفی وجود کمیت‌های پایستار، از دیرباز مورد توجه بوده و اهمیت فراوانی داشته است. کمیت‌های پایستار توسط بنیان‌گذاران مکانیک کلاسیک برای خرد کردن بُعد فضای دستگاه‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گرفتند. به این روش که با استفاده از تقارن‌های موجود در یک دستگاه راه حل‌های اصلی آن را در یک فضا با بُعد کمتر مورد بررسی قرار می‌دهند، فروکاست گفته می‌شود. فروکاست یک روش بسیار معمول مشتمل بر روش‌های ترکیبی از تکنیک‌های مختلف مانند استفاده از تقارن و کمیت‌های پایستار می‌باشد و برای کاهش بُعد فضای فاز دستگاه‌های دینامیکی متقارن به کار گرفته می‌شود. نگاشت تکانی تعمیمی برای تابع همیلتون است و از این رو یک بیان ریاضی از مفهوم کمیت‌های پایستگی مرتبط با تقارن‌های یک دستگاه همیلتونی و یک ابزار اساسی برای مطالعه فروکاست روی خمینه‌های همتافته به حساب می‌آید.

نظریه فروکاست یک مفهوم دیرینه است که ریشه آن به مکانیک کلاسیک باز می‌گردد. مفاهیم این نظریه در بسیاری از کتب مکانیک هندسی یا هندسه همتافته وجود دارد. نظریه فروکاست همتافته توسط میر[۱]، ماردسن[۲] و وینشتین[۳] بیان گردید. برای تاریخچه این نظریه می‌توان به منبع [۴] مراجعه کرد. در این نظریه، با داشتن یک عمل گروه لی روی یک G-خمینه‌ی همیلتونی و با در نظر گرفتن یک سطح تراز از نگاشت تکانی و یک عمل آزاد و سره از زیرگروه پایاگر روی آن، یک خمینه‌ی خارج‌قسمتی جدید معرفی می‌شود.

*سخنران. آدرس ایمیل: m_dara@mathdep.iust.ac.ir

[1]Kenneth Ray Meyer(1937)
[2]Jerrold Eldon Marsden (1942-2010)
[3]Alan David Weinstein (1943)

۲. k-نگاشت تکانی

اشیای معرفی شده مانند فرم همتافته و نگاشت تکانی، به راحتی قابل استفاده هستند ولی در عین حال از پیچیدگی عمیقی برخوردار می‌باشند. برای غلبه بر این پیچیدگی اغلب مجبوریم تمرکز خود را محدود بر ویژگی‌های خاص این اشیا مانند پایایی نگاشت تکانی و یا داده‌های توپولوژیکی قرار دهیم. در نظر گرفتن این ملاحظات توپولوژیکی منجر به تعمیم نگاشت تکانی می‌شود که توسط سه ریاضیدان به نام‌های یال کارشون، ویکتور گیلمین و ویکتور گینزبرگ[۴] در سال ۱۹۹۸ تحت عنوان نگاشت تکانی مجرد معرفی گردید [۳]. فرض کنید G یک گروه لی، M یک G-خمینه هموار و H زیرگروه لی بسته از G باشد. نگاشت شمول $i : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ و مجموعه نقاط ثابت تحدید عمل G به H بر روی M که با M^H نمایش می‌دهیم را در نظر می‌گیریم. در این صورت نگاشت تکانی مجرد، نگاشت هموردِ $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ است، به طوری که به ازای هر زیرگروه لی و بسته H از G، نگاشت زیر:

$$\mu^H := i^* \circ \mu : M \longrightarrow \mathfrak{h}^*,$$

به طور موضعی روی زیر خمینه M^H ثابت باشد. این تعریف ویژگی‌های نگاشت تکانی را دارد ولی در عین حال M به ۲-فرم بسته مجهز نیست. نگاشت تکانی و تکانی مجرد از G-خمینه M به فضای خطی $\mathfrak{g}^*$ تعریف می‌شود. در این مقاله به دنبال تعمیم کلی تر از نگاشت تکانی هستیم تا بتوانیم قضیه فروکاست را برای همه خمینه‌ها به کار ببریم. فروکاست همتافته ابتدا توسط کارشون با استفاده از نگاشت تکانی مجرد، برای خمینه‌هایی که لزوماً مجهز به ۲-فرم بسته و ناتباهیده نیستند تعمیم داده شد [۱]. او با استفاده از این تعریف رابطه هم‌مرزی بین خمینه‌ها را برای خمینه‌هایی که لزوما فشرده نیستند تعمیم داد. ما با استفاده از تعمیم فضای تعریف نگاشت تکانی مجرد، قضیه فروکاست را گسترش می‌دهیم تا بتوانیم بُعد خمینه‌ها رو بیش از قبل کاهش دهیم.

تعریف ۱.۲. فضای خطی $\mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ متشکل از k-تانسور های هموردِ را در نظر بگیرید. عمل هم‌الحاقی G روی $\mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Ad^{\#} : & G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)) \\ & g \longmapsto \begin{cases} Ad^{\#}_g : \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*) \\ \qquad\qquad \xi \longmapsto Ad^{\#}_g(\xi) \end{cases}, \end{aligned}$$

که به ازای هر $X = (X_1, ..., X_k) \in \underbrace{\mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}}_{k \text{ بار}}$، k-تانسور $Ad^{\#}_g(\xi)_{(X)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ad^{\#}_g(\xi)_{(X)} := (C^*_{g^{-1}})_e(\xi)_{(X)} = \xi((C_{g^{-1}_*})_e X) = \xi(Ad_{g^{-1}}(X)).$$

تعریف ۲.۲. (k-نگاشت تکانی) فرض کنید M یک G-خمینه هموار با عمل ψ باشد. یک k-نگاشت تکانی روی M، نگاشت هموار $\mu : M \longrightarrow \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ است که دارای دو ویژگی زیر می‌باشد:

۱. μ، G-هموَرد است. به عبارت دیگر به ازای هر $g \in G$ نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*) \\ {\scriptstyle \psi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ad^{\#}_g} \\ M & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*) \end{array}$$

۲. به ازای هر زیرگروه لی بسته H از G نگاشت μ^H که به صورت ترکیب $\mu^H := i^* \circ \mu : M \to \mathcal{T}^k(\mathfrak{h}^*)$ تعریف می‌شود، روی مولفه‌های همبندی M^H ثابت می‌باشد.

[4] Yael Karshon, Victor Guillemin, Viktor Ginzburg

لم ۳.۲. اگر به ازای هر میدان برداری $X = (X_1, ..., X_k) \in \underbrace{\mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}}_{k \text{ بار}}$ و عنصر $q \in M$ تابع $\mu^X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\mu^X(q) = \mu(q)(X_1, ..., X_k)$، روی مجموعه نقاط صفر $(X_1^M, ..., X_k^M)$ ثابت باشد، آنگاه ویژگی دوم k-نگاشت تکانی برقرار است.

ملاحظه ۴.۲.

۱. X^M مولد بسیار کوچک متناظر با $X \in \mathfrak{g}$ از عمل $\psi : G \times M \longrightarrow M$ است که به ازای هر $q \in M$ به صورت زیر تعریف شود:
$$X^M(q) = \frac{d}{dt}(\psi_{exp(tX)}(q))\Big|_{t=0},$$
۲. به ازای $k = 1$ تعریف ۲.۲ معادل با تعریف یال کارشون از نگاشت تکانی مجرد در [۳] است.
۳. فرض کنید (M, ω, G, μ) یک G-خمینه همیلتونی باشد. در این صورت نگاشت تکانی μ، یک ۱-نگاشت تکانی می‌باشد. توجه کنید که μ G-هموردا است و به ازای هر $X \in \mathfrak{g}$ در رابطه $d\mu^X = \iota_{X^M}\omega$ صدق می‌کند. بنابرین μ^X روی مجموعه نقاط صفر میدان برداری X^M، صفر است زیرا $d\mu^X = \iota_{X^M}\omega = 0$.

اگر به دنبال یک مثال غیر بدیهی از تعریف جدیدمان باشیم، می‌توانیم به ۲-نگاشت‌های تکانی اشاره کنیم که روی G-خمینه‌ها با متریک ریمانی پایا تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $\psi : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل هموار از گروه لی G به روی خمینه هموار M باشد. متریک ریمانی $< ., . >$ را روی G-خمینه هموار M، پایا می‌گوییم هرگاه به ازای هر $g \in G$ ، $q \in M$ و $X, Y \in TM$ داشته باشیم:
$$< X, Y >_q = < \psi_{g*}(X), \psi_{g*}(Y) >_{\psi_g(q)}$$

گزاره زیر می‌تواند دسته جدیدی از ۲-نگاشت‌های تکانی را معرفی کند که روی خمینه های ریمانی تعریف می‌شوند.

گزاره ۶.۲. فرض کنید G یک گروه لی دلخواه باشد. عمل هموار $\psi : G \times M \longrightarrow M$ را روی خمینه M نظر بگیرید. در این صورت به ازای هر متر ریمانی پایا روی M مانند $< ., . >$، خمینه M دارای ۲-نگاشت‌های تکانی زیر است.
$$\mu : M \longrightarrow \mathcal{T}^2(\mathfrak{g}^*)$$
$$q \longmapsto \begin{cases} \mu(q) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu(q)(X, Y) = < X^M, Y^M >_q \end{cases}.$$

۳. فروکاست با k-نگاشت‌های تکانی

مهمترین هدف در تعریف k-نگاشت تکانی تعمیم مفاهیم فروکاست و استفاده از آن برای محاسبه برخی از گروه‌های کوهومولوژی هموردا است. در واقع تعمیم قضیه فروکاست به ما کمک می‌کند تا بُعد یک فضا را بیشتر کاهش دهیم و از این رو با استفاده از یکریختی که بین گروه‌های کوهولوژی دورام فضای کاهش یافته و کوهومولوژی هموردا سطح تراز k-نگاشت‌های تکانی است، محاسبه ساده تری داشته باشیم.

قضیه ۱.۳. [۵] اگر گروه لی G به صورت آزاد و سره روی M عمل کند، آنگاه M/G خمینه است و نگاشت مداری $\pi : M \longrightarrow M/G$ یک G-کلاف اصلی می‌باشد.

تعریف ۲.۳. (کوهومولوژی هموردا) [۲] فرض کنید G یک گروه لی فشرده و M یک G-خمینه می‌باشد. فضای توپولوژیک انفباض‌پذیر E وجود دارد به طوری که G به صورت آزاد بر آن عمل می‌کند. کوهومولوژی هموردا G-خمینه M به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$H_G^k(M) := H_{dR}^k(\frac{E \times M}{G}),$$
که در آن G به صورت قطری و آزاد به روی فضای حاصلضربی $E \times M$ عمل می‌کند. این تعریف خوشتعریف است و مستقل از انتخاب E می‌باشد زیرا E و $(E \times M)/G$ هموتوپ هم‌ارز هستند.

نتیجه ۳.۳. اگر عمل G روی M آزاد باشد، آنگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $H^k_G(M) = H^k_{dR}(M/G)$، زیرا $(E \times M)/G$ یک کلاف تاری روی M/G با تار انقباض‌پذیر E است.

قضیه ۴.۳. G- خمینه M با k-نگاشت تکانی $\mu : M \longrightarrow \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\xi \in \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ یک مقدار منظم نگاشت μ باشد و زیرگروه پایاگر G_ξ تحت عمل هم‌الحاقی $Ad^\#$ روی $\mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ به صورت آزاد و سره بر $\mu^{-1}(\xi)$ عمل کند، آنگاه:

۱) فضای مداری $M_\xi := \dfrac{\mu^{-1}(\xi)}{G_\xi}$ یک خمینه هموار با بُعد زیر است:

$$\dim M_\xi = \dim M - (\dim G)^k - \dim G_\xi.$$

۲) نگاشت خارج‌قسمتی $\pi_\xi : \mu^{-1}(\xi) \longrightarrow M_\xi$ یک G-کلاف اصلی است.

۳) به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم: $H^k_G(\mu^{-1}(\xi)) = H^k_{dR}(M_\xi)$.

۴) به ازای هر کلاس کوهومولوژی هموردِ $[\omega]$ روی M، کلاس کوهومولوژی دورام $[\omega_\xi]$ روی M_ξ به گونه‌ای وجود دارد که $\pi^*_\xi \omega_\xi = i^*\omega$ ، که در آن $i : \mu^{-1}(\xi) \hookrightarrow M$ نگاشت شمول است.

نتیجه ۵.۳.

۱) با در نظر گرفتن فرض‌های قضیه ۴.۳ ، شرط لازم برای وجود خمینه‌ی M_ξ این است که:

$$\sqrt[k]{\dim M - \dim G_\xi} > \dim G.$$

۲) در حالت خاص اگر $\xi \in \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ یک مقدار منظم از نگاشت μ باشد و تحت عمل هم‌الحاقی $Ad^\#$ روی $\mathcal{T}^k(\mathfrak{g}^*)$ ثابت باشد، آنگاه $G_\xi = G$ و خواهیم داشت:

$$\dim M_\xi = \dim M - (\dim G)^k - \dim G.$$

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با تعمیم مفاهیم نگاشت تکانی در هندسه همتافته به k-نگاشت تکانی، ضمینه تعمیم مفاهیم فروکاست همتافته را پدید آوردیم. فروکاست به وسیله‌ای k-نگاشت تکانی کمک می‌کند تا بتوان بُعد خمینه‌هایی که مجهز به این نگاشت هستند را بیشتر از حالت همتافته کاهش داد. این فروکاست به دلیل کاهش بُعد بیشتر و همچنین یکریختی‌ای که بین گروه‌های کوهومولوژی دورام فضای کاهش یافته و کوهومولوژی هموردِ سطح تراز k-نگاشت تکانی است، می‌تواند نقش به سزایی در محاسبه گروه‌های کوهومولوژی هموردِ برخی خمینه‌ها داشته باشد.

مراجع

1. Guillemin, Victor, Ohsawa, TL, Karshon, Yael, and Ginzburg, Viktor L. Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions. number 98. American Mathematical Soc., 2002.
2. Guillemin, Victor W and Sternberg, Shlomo. Supersymmetry and equivariant de Rham theory. Springer Science & Business Media, 2013.
3. Karshon, Yael. Moment maps and non-compact cobordisms. Journal of Differential Geometry, 49(1):183–201, 1998.
4. Marsden, Jerrold E, Misiolek, Gerard, Ortega, Juan-Pablo, Perlmutter, Matthew, and Ratiu, Tudor S. Hamiltonian reduction by stages. Springer, 2007.
5. Ortega, Juan-Pablo and Ratiu, Tudor S. Momentum maps and Hamiltonian reduction, volume 222. Springer Science & Business Media, 2013.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بررسی مدل‌های ردیابی شاخص بازار و حل مدل مبتنی بر ارزش با روش تفاضل توابع محدب

فرناز هوشمند خلیق[۱,*]

[۱]دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده. ردیابی شاخص بازار یکی از رویکردهای موفق در بهینه‌سازی سبد سهام است و مدل‌های مختلفی برای آن ارائه شده است. این مقاله به فرمول‌بندی و مقایسه چهار مدل مبتنی بر بازدهی، ارزش، ضریب بتا و خوشه‌بندی می‌پردازد و سبد حاصل از آنها را از نظر دقت ردیابی روی داده‌های درون‌نمونه‌ای و برون‌نمونه‌ای مقایسه می‌کند. همچنین، برای حل مدل مبتنی بر ارزش که دقت خوبی در ردیابی دارد، روشی کارا مبتنی بر تفاضل توابع محدب مطرح می‌گردد. نتایج محاسباتی روی داده‌های واقعی، عملکرد مدل‌ها و الگوریتم را ارزیابی می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های ردیابی شاخص، قید تعداد، روش مبتنی بر تفاضل توابع محدب .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90C11, 90C30, 90B99.

۱. مقدمه

مدیریت سبد سهام یکی از کاربردهای بهینه‌سازی است که بسیار مورد توجه محققین قرار دارد و شامل دو رویکرد فعال و غیرفعال است. در رویکرد فعال، مدیر سبد به طور مستمر (روزانه، هفتگی، ماهانه) وضعیت سبد را ارزیابی و بر اساس تحلیل‌های تکنیکال و بنیادی به تعدیل آن می‌پردازد. مزیت آن، سرعت رشد و پویایی و ضعف آن، هزینه معاملاتی بالاست. در رویکرد غیرفعال، مدیر سبد تمایلی به تعدیل مستمر سبد ندارد بلکه یک سبد مناسب را تشکیل می‌دهد و تا مدت‌ها آن را حفظ می‌کند و اهدافی بلندمدت را مدنظر قرار می‌دهد. یکی از روش‌های کارآمد برای مدیریت غیرفعال، ردیابی شاخص است که به انتخاب سبدی می‌پردازد که ضمن آن که زیرمجموعه محدودی از دارایی‌های بازار را شامل است، تغییرات شاخص بازار را تا حد خوبی منعکس کند. از آنجا که عموماً در بلندمدت بازدهی شاخص بازار مثبت و مناسب است، تنها با ساخت یک سبد ردیاب شاخص می‌توان به بازدهی مطلوبی در بلند مدت دست یافت. در این خصوص، مدل‌های بهینه‌سازی مختلفی مانند مدل مبتنی بر بازدهی [۴]، ارزش [۲]، ضریب بتا [۱] و خوشه‌بندی [۶] ارائه شده‌اند. تابع هدف این مدل‌ها عموماً مبین خطای ردیابی است و قید تعداد از طریق متغیرهای دودوئی بیان می‌گردد. وقتی اندازه مسأله افزایش می‌یابد حل مستقیم با بهینه‌یاب زمان‌بر می‌شود اما می‌توان این مسائل را به صورت یک مدل مبتنی بر تفاضل توابع محدب بازنویسی و به یک جواب شدنی خوب در زمانی مناسب دست یافت. روش‌های تفاضل توابع محدب (DCA) اخیراً مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته‌اند. برای مروری جامع [۳] و [۵] را ببینید.

در این مقاله، برخی از مدل‌های ردیابی شاخص بررسی و دقت آنها مقایسه می‌شود. سپس، با توجه به دقت خوب ردیابی در مدل مبتنی بر ارزش، یک روش تکراری مبتنی بر DCA برای حل آن ارائه می‌گردد. نتایج محاسباتی روی داده‌های واقعی، عملکرد مدل‌ها و روش را ارزیابی می‌کنند. سازمان‌دهی مقاله بدین شرح است: بخش ۲ به شرح مسأله ردیابی شاخص و ارائه

*سخنران. آدرس ایمیل: f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir

چهار فرمول‌بندی مختلف می‌پردازد و آنها را از نظر کیفیت سبد ردیاب مقایسه می‌کند. بخش ۳ روشی کارا مبتنی بر DCA را برای حل مدل مبتنی بر ارزش شرح می‌دهد. بخش ۴ به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی می‌پردازد.

۲. شرح مسأله و فرمول‌بندی

فرض کنید $\mathbb{I}$ (با اندیس i, j) مجموعه دارایی‌های موجود در بازار و $\mathbb{T}$ (با اندیس t) مجموعه دوره‌های زمانی گذشته است که به ازای آن اطلاعات بازدهی دارایی‌ها و شاخص در اختیار است. سرمایه‌گذاری قصد دارد سبدی متشکل از C دارایی را تشکیل دهد مشروط به آن که در صورت انتخاب دارایی i کسری از سرمایه که به آن تخصیص داده می‌شود، حداقل l_i و حداکثر u_i باشد و هدف آن است که سبد تا حد خوبی شاخص بازار را ردیابی کند. فروش استقراضی مجاز نیست و از آنجا که سبد در بلندمدت به کار گرفته می‌شود از هزینه‌های تراکنش اغماض می‌گردد. با فرض آن که $r_t^{'}$ $r_{i,t}$ به ترتیب، بازدهی دارایی i و بازدهی شاخص در دوره t هستند، ضریب بتای دارایی i (β_i)، ضریب همبستگی بازدهی دارایی‌های i و j $(\rho_{i,j})$ و ماتریس کواریانس بازدهی دارایی‌ها (Q با مؤلفات $q_{i,j}$) قابل محاسبه است. همچنین، فرض بر آن است که a_i ارزش فعلی دارایی i در بازار است. در ادامه به شرح انواع مدل‌های ردیابی شاخص (مدل مبتنی بر بازدهی (RM)، مدل مبتنی بر ارزش (VM)، مدل مبتنی بر ضریب بتا (BM) و مدل خوشه‌بندی (CM)) می‌پردازیم و عملکرد آنها را مقایسه می‌کنیم.

مدل‌های RM، VM، BM و CM

در مدل RM هدف کمینه‌سازی مجموع مربعات اختلاف بازدهی سبد و بازدهی شاخص در دوره‌های تاریخی $t \in \mathbb{T}$ است. فرض کنید δ_i متغیر دودوئی است که اگر در دارایی i سرمایه‌گذاری شود، یک و در غیر این صورت، صفر است و فرض کنید متغیر پیوسته و نامنفی x_i کسری از سرمایه است که به دارایی i اختصاص داده می‌شود. مدل RM به صورت زیر است:

(RM)

$$min \sum_{t\in\mathbb{T}}(\sum_{i\in\mathbb{I}} r_{i,t}x_i - r'_t)^2 \quad (1)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i\in\mathbb{I}} \delta_i = C \quad (2)$$
$$\sum_{i\in\mathbb{I}} x_i = 1 \quad (3)$$
$$l_i\delta_i \le x_i \le u_i\delta_i \qquad \forall i \in \mathbb{I} \quad (4)$$
$$x_i \ge 0 \qquad \forall i \in \mathbb{I} \quad (5)$$
$$\delta_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \mathbb{I} \quad (6)$$

اگر در ابتدای دوره ۱، سرمایه‌ای معادل x_i به دارایی i اختصاص داده شود، ارزش آن در دوره t برابر با $\prod_{t'=1}^{t}(1+r_{i,t'})x_i$ است. همچنین، اگر در ابتدای دوره ۱ ارزش شاخص ۱ واحد باشد، ارزش آن در دوره t برابر با $\prod_{t'=1}^{t}(1 + r'_{t'})$ خواهد بود. در مدل VM هدف کمینه‌سازی مجموع مربعات اختلاف ارزش سبد و ارزش شاخص در دوره‌های تاریخی است. در مدل BM اختلاف بتای سبد و بتای بازار (که برابر با یک است) کمینه می‌گردد. این دو مدل به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند:

(VM)

$$min \sum_{t\in\mathbb{T}}(\sum_{i\in\mathbb{I}}(\prod_{t'=1}^{t}(1 + r_{i,t'})x_i) - \prod_{t'=1}^{t}(1 + r'_{t'}))^2$$
$$s.t.(2) - (6)$$

(BM)

$$min(\sum_{i\in\mathbb{I}} \beta_i x_i - 1)^2$$
$$s.t.(2) - (6)$$

مبنای خوشه‌بندی آن است که دارایی‌هایی که با توجه به ضریب همبستگی، شباهت بیشتری با یکدیگر دارند، در یک خوشه قرار گیرند و از هر خوشه یک دارایی به عنوان نماینده انتخاب گردد به طوری که سبد متشکل از نمایندگان به خوبی شاخص را ردیابی کند. با فرض آن که متغیر دودوئی $\gamma_{i,j}$ مبین آن است که دارایی j به خوشه‌ای که دارایی i نماینده‌اش است تعلق دارد یا خیر، مدل CM به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود. تابع هدف (۷) مجموع همبستگی اعضای هر خوشه و نماینده آن را بیشینه می‌کند و قیود هر دارایی را با یک نماینده نظیر و میزان سرمایه‌گذاری در دارایی‌های انتخابی را تعیین می‌کنند.

(CM)

$$max \sum_{i\in\mathbb{I}} \sum_{j\in\mathbb{J}} \rho_{i,j}\gamma_{i,j} \quad (7)$$
$$s.t.(2) - (6)$$
$$\sum_{i\in\mathbb{I}} \gamma_{i,j} = 1 \ \forall j \in \mathbb{J} \quad (8)$$
$$0 \le \gamma_{i,j} \le \delta_i \ \forall i, j \in \mathbb{I} \quad (9)$$
$$x_i = \frac{\sum_{j\in\mathbb{J}} a_j\gamma_{i,j}}{\sum_{j\in\mathbb{J}} a_j} \ \forall i \in \mathbb{I} \quad (10)$$

ارزیابی مدل‌ها

از چهار مجموعه داده از شاخص FTSE100 (شامل ۱۰۰ دارایی) استفاده می‌شود که به چهار روند مختلف بازار (نزولی-نزولی، نزولی-صعودی، صعودی-نزولی و صعودی-صعودی) اشاره دارند و به ترتیب DD، DU، UD و UU نام دارند و هر یک اطلاعات سه سال را دربردارد که اطلاعات دو سال اول (۱۰۴ هفته) به عنوان داده‌های درون‌نمونه‌ای است و بر اساس آن مدل حل می‌گردد و اطلاعات سال سوم (۵۲ هفته) به عنوان داده‌های برون‌نمونه‌ای است و بر اساس آن، خطای ردیابی سبد ارزیابی می‌شود. اطلاعات از آدرس https://or-brescia.unibs.it/instances قابل دریافت است. برای حل مدل‌های RM، VM و BM از بهینه‌یاب BARON و برای حل CM از CPLEX استفاده می‌شود. جواب بهین مدل‌های BM و CM حدوداً در یک ثانیه حاصل می‌گردد اما حل مدل‌های RM و VM زمان‌بر است و روی آن محدودیت زمانی ۱۰۰۰ ثانیه تنظیم و جواب حاصل مبنای مقایسات قرار می‌گیرد. نتایج در جدول ۱ آمده که در آن ستون ID به روند بازار اشاره دارد. به ازای هر مدل، اگر x جواب به دست آمده از بهینه‌یاب باشد، متوسط درصد انحراف مطلق ارزش سبد از ارزش شاخص روی داده‌های درون‌نمونه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌گردد (مشابهاً می‌توان متوسط درصد انحراف مطلق و متوسط درصد انحراف از پایین را روی داده‌های برون‌نمونه‌ای محاسبه کرد):

$$ISD = \sum_{t=۱}^{۱۰۴} \left| \frac{\sum_{i\in\mathbb{I}}(\prod_{t'=۱}^{t}(۱+r_{i,t'})x_i) - \prod_{t'=۱}^{t}(۱+r'_{t'})}{\prod_{t'=۱}^{t}(۱+r'_{t'})} \right| \times ۱۰۰$$

جدول ۱. مقایسه مدل‌ها.

ID	C	متوسط درصد انحراف مطلق ارزش سبد از ارزش شاخص روی داده‌های درون‌نمونه‌ای				متوسط درصد انحراف مطلق ارزش سبد از ارزش شاخص روی داده‌های برون‌نمونه‌ای				متوسط درصد انحراف پایین ارزش سبد از ارزش شاخص روی داده‌های برون‌نمونه‌ای			
		RM	VM	BM	CM	RM	VM	BM	CM	RM	VM	BM	CM
DD	۱۰	۱۰٫۲	۰٫۶	۹٫۵	۱۵٫۰	۱٫۷	۲٫۸	۲٫۶	۲٫۴	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۸	۲٫۳
DU	۱۰	۴٫۲	۰٫۶	۵٫۸	۵٫۵	۳٫۵	۱٫۳	۲٫۲	۳٫۰	۳٫۵	۰٫۹	۰٫۲	۲٫۱
UD	۱۰	۴٫۲	۰٫۷	۹٫۷	۱۱٫۱	۵٫۵	۹٫۳	۹٫۹	۲٫۰	۵٫۳	۰٫۰	۹٫۹	۱٫۸
UU	۱۰	۳٫۹	۰٫۴	۹٫۴	۶٫۸	۱٫۴	۱٫۶	۳٫۹	۱٫۳	۱٫۳	۱٫۵	۰٫۶	۰٫۳
DD	۱۵	۱٫۸	۰٫۵	۵٫۲	۱۰٫۱	۲٫۳	۲٫۴	۵٫۵	۳٫۹	۰٫۰	۰٫۰	۵٫۴	۳٫۸
DU	۱۵	۴٫۰	۰٫۴	۲٫۵	۶٫۰	۱٫۸	۱٫۱	۴٫۸	۴٫۱	۰٫۷	۰٫۵	۴٫۷	۴٫۱
UD	۱۵	۲٫۹	۰٫۵	۵٫۸	۵٫۱	۸٫۱	۵٫۹	۶٫۴	۲٫۷	۰٫۰	۰٫۰	۳٫۳	۰٫۹
UU	۱۵	۲٫۳	۰٫۳	۱۴٫۵	۸٫۱	۳٫۲	۳٫۱	۲٫۴	۲٫۱	۳٫۲	۰٫۶	۰٫۲	۰٫۳
متوسط		۳٫۱	۰٫۵	۷٫۸	۷٫۳	۳٫۴	۳٫۴	۵٫۰	۳٫۳	۱٫۸	۰٫۵	۳٫۱	۲٫۰

نتایج جدول ۱ بر کارایی مدل VM دلالت دارند. به خصوص، به ازای سبد حاصل از این مدل، درصد انحراف پایین از شاخص روی داده‌های برون‌نمونه‌ای بسیار کوچک و مناسب است. به دلیل زمان‌بر بودن حل این مدل با بهینه‌یاب، در بخش بعد، روشی تکراری مبتنی بر DCA برای یافتن یک جواب شدنی خوب در زمانی مناسب تشریح می‌گردد.

۳. روش مبتنی بر DCA

در مدل VM، با آزادسازی شرط دودوئی متغیر δ_i و اضافه نمودن قید $\sum_{i\in\mathbb{I}} \delta_i(۱-\delta_i) \leq ۰$ به VM' می‌رسیم که با VM معادل است. از سوی دیگر $\sum_{i\in\mathbb{I}} \delta_i(۱-\delta_i)$ تابعی مقعر و نامنفی است و با فرض آن که m عددی مثبت و به اندازه کافی بزرگ است، می‌توان VM' را به طور معادل به صورت VM'' بازنویسی نمود. تابع هدف VM'' تفاضل دو تابع محدب است و می‌توان با اعمال الگوریتم DCA در زمان مناسب، به جواب شدنی خوبی دست یافت.

$$\mathbf{(VM')}$$
$$min \sum_{t\in\mathbb{T}} (\sum_{i\in\mathbb{I}} (\prod_{t'=۱}^{t}(۱+r_{i,t'})x_i) - \prod_{t'=۱}^{t}(۱+r'_{t'}))^۲$$
$$s.t.(۲)-(۵),\ \sum_{i\in\mathbb{I}} \delta_i(۱-\delta_i) \leq ۰,\ ۰ \leq \delta_i \leq ۱\ \forall i \in \mathbb{I}$$

(VM″)

$$min \sum_{t\in\mathbb{T}}(\sum_{i\in\mathbb{I}}(\prod_{t'=1}^{t}(1+r_{i,t'})x_i) - \prod_{t'=1}^{t}(1+r'_{t'}))^2 + m(\sum_{i\in\mathbb{I}}\delta_i(1-\delta_i))$$
$$s.t.(2)-(5),\ 0 \le \delta_i \le 1\ \forall i \in \mathbb{I}$$

الگوریتم DCA

گام اول: به صورت تصادفی، جواب شدنی اولیه $(\hat{\delta}, \hat{x})$ را برای VM″ تولید و دقت مطلوب ϵ را تعیین می‌کنیم.
گام دوم: مدل فرعی (SP) را حل و جواب آن را با $(\tilde{\delta}, \tilde{x})$ نشان می‌دهیم. اگر $||(\hat{\delta}, \hat{x}) - (\tilde{\delta}, \tilde{x})|| \le \epsilon$ جواب $(\tilde{\delta}, \tilde{x})$ را بازمی‌گردانیم و به الگوریتم خاتمه می‌دهیم. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $(\hat{\delta}, \hat{x}) := (\tilde{\delta}, \tilde{x})$ و گام دوم را تکرار می‌کنیم.

(SP)

$$min \sum_{t\in\mathbb{T}}(\sum_{i\in\mathbb{I}}(\prod_{t'=1}^{t}(1+r_{i,t'})x_i) - \prod_{t'=1}^{t}(1+r'_{t'}))^2 + m(\sum_{i\in\mathbb{I}}\delta_i(1-2\hat{\delta}_i))$$
$$s.t.(2)-(5),\ 0 \le \delta_i \le 1\ \forall i \in \mathbb{I}$$

الگوریتم DCA در زمانی کوتاه منجر به یک جواب شدنی خوب برای مدل VM می‌شود، البته کیفیت این جواب به انتخاب $(\hat{\delta}, \hat{x})$ در گام اول وابسته است. لذا، ما DCA را داخل یک روش تکراری به دفعات به کار می‌بریم به این صورت که ابتدا الگوریتم DCA اجرا و بر اساس آن کران بالای UB روی مقدار بهین تابع هدف مدل VM شناسایی می‌شود. سپس به مسأله VM″ قیدی اضافه می‌گردد که مقدار تابع هدف مسأله VM را کوچکتر مساوی $UB - \Delta$ قرار می‌دهد که Δ یک پارامتر مثبت است. مجدداً الگوریتم DCA اجرا می‌شود (روی نسخه جدید VM″) و اگر منجر به جواب شدنی بهتری شد، مقدار UB به‌روزرسانی می‌گردد. دوباره الگوریتم DCA اجرا می‌شود و این روند ادامه می‌یابد. مقدار پارامتر Δ در طول الگوریتم تغییر می‌کند به این صورت که هربار که UB به‌روزرسانی می‌شود، مقدار آن برابر با $0/4UB$ قرار می‌گیرد و در صورت عدم بهبود در UB مقدار آن نصف می‌شود. قیدی که در این روش به مدل VM″ اضافه می‌گردد ممکن است سبب شود که بعضاً در خروجی الگوریتم DCA برخی از مولفات بردار $\tilde{\delta}$ مقدار اعشاری بگیرند. در این صورت، با اعمال رویکرد گرد کردن، یک بردار دودوئی شدنی ایجاد و با تثبیت متغیرهای دودوئی مدل VM روی این جواب، مقدار x تعیین و بر اساس آن، UB به‌روزرسانی می‌شود.
نتایج محاسباتی بر کارایی روش پیشنهادی دلالت دارند و نشان می‌دهند که در مقایسه با BARON این روش قادر است در زمانی کوتاه (به طور متوسط ۱۵۰ ثانیه) به جوابی مطلوبتر و یا با کیفیتی مشابه دست یابد.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، چهار مدل مختلف ردیابی شاخص بررسی شد و به دلیل دقت خوب ردیابی در مدل VM براي آن یک روش حل کارا مبتنی بر DCA ارائه گردید که منجر به جواب شدنی خوب در زمانی مناسب می‌شود. ترکیب مدل‌های مذکور و ساخت مدلی که منجر به عملکردی بهتر از شاخص گردد، به عنوان کار آتی پیشنهاد می‌شود.

مراجع

1. C. Chen and R.H. Kwon, *Robust portfolio selection for index tracking*, COR. 39 (2012), no. 4, 829–837.
2. G. Guastaroba and M.G. Speranza, *Kernel Search: An application to the index tracking problem*, EJOR. 217 (2012), no. 1, 54–68.
3. M. Moeini, *Solving the index tracking problem: a continuous optimization approach*, CEJOR. (2019), DOI: 10.1007/s10100-019-00633-0.
4. L.R. Sant'Anna, T.P. Filomena, P.C. Guedes and D. Borenstein, *Index tracking with controlled number of assets using a hybrid heuristic combining genetic algorithm and non-linear programming*, Ann Oper Res, 258 (2016), no. 1, 849–867.
5. H.A.L. Thi and T.P. Dinh, *DC programming and DCA: thirty years of developments*, Mathematical Programming. 169 (2018), no. 1, 5–68.
6. D. Wu, R.H. Kwon and G.Costa, *A constrained cluster-based approach for tracking the SP index*, IJPE. 193 (2017), no. 1, 222–243.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

یک روش انتخاب ویژگی ترکیبی برای داده‌های با ابعاد بالا بر اساس الگوریتم شاهین هریس

زهرا اصغری ورزنه[1,*] ، سوده حسینی[2]

[1]بخش ریاضی و کامپیوتر،دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[2]بخش ریاضی و کامپیوتر،دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. امروزه با گسترش داده‌های با ابعاد بالا در علوم مختلف، مسئله انتخاب ویژگی بعنوان یکی از موضوعات مهم در حوزه یادگیری ماشین مطرح شده است. در این مقاله یک روش انتخاب ویژگی ترکیبی برای داده‌های با ابعاد بالا ارائه می‌گردد. در روش پیشنهادی، انتخاب ویژگی در دو مرحله انجام می‌شود. در مرحله اول از روش فیلتری mRMR برای حذف ویژگی‌های افزونه و نامربوط استفاده شده و در مرحله دوم، الگوریتم شاهین هریس(HHO)، از بین ویژگی‌های باقیمانده، ویژگی‌های بهینه را بر اساس دسته‌بندی کننده KNNانتخاب می‌کند. روش پیشنهادی بر روی شش مجموعه داده استاندارد مورد ارزیابی قرار گرفته و مقایسه نتایج با چندین الگوریتم شناخته شده، کارایی روش پیشنهادی را تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: انتخاب ویژگی، شاهین هریس، دسته‌بندی.

۱. مقدمه

مسئله انتخاب ویژگی یکی ازمسائل مهمی است که امروزه مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. روش‌های کاهش بعد میتواند تأثیر بسزایی در حل مسائل یادگیری ماشین برای مسائل با ابعاد بالا داشته باشد. این روش‌ها در دو دسته استخراج ویژگی و انتخاب ویژگی قرار دارند. روش‌های استخراج ویژگی با ترکیب ویژگی‌های اصلی، مجموعه‌ای از ویژگی‌های جدید را می‌سازند. در حالیکه روش‌های انتخاب ویژگی با حذف ویژگی‌های غیر مرتبط و تکراری به کاهش ابعاد منجر می‌شوند [۲]. در این مقاله، از روش انتخاب ویژگی برای کاهش ابعاد داده استفاده می‌شود. روش‌های انتخاب ویژگی بطور کلی به سه گروه فیلتر[۱]، پیچشی [۲]و جاسازی شده [۳]تقسیم می‌شوند. روش‌های فیلتر مستقل از الگوریتم یادگیري عمل مي‌کند و در آن خصوصیات ذاتي داده براي رتبه‌بندي مورد استفاده قرار گرفته و به‌طور مستقل ویژگی‌ها امتیاز دهی می‌شوند. روش‌های پیچشی شامل یک الگوریتم یادگیری به‌عنوان جعبه سیاه می‌باشند که زیرمجموعه‌ای از ویژگی‌ها را با توجه به عملکرد کلاسبندی انتخاب می‌کنند و روش جاسازی، ترکیبی از دو روش قبلی است. درمرحله اول، روش‌هاي فیلتري به کاهش ابعاد داده مي‌پردازند و سپس، بهترین زیرمجموعه‌هاي ویژگي، توسط روش پیچشی انتخاب خواهند شد [۳]. بطور کلی مسئله انتخاب ویژگی، از آن دسته مسائلی هست که دارای پیچیدگی محاسباتی بالاست و دارای راه حل قطعی نیست . یک راه برای حل اینگونه مسائل، روش‌های بهینه‌سازی فرا ابتکاری و الگوریتم‌های تکاملی است. در سال‌های اخیر الگوریتم‌های فراابتکاری در مسئله انتخاب ویژگی مورد توجه محققان زیادی قرارگرفته است و سعی دارند با انتخاب کمترین تعداد ویژگی‌ها بالاترین دقت دسته‌بندی را بدست آورند. طباطبایی و همکاران [۱]، برای انتخاب ژن‌های مؤثر در تشخیص نوع سرطان با استفاده از داده‌های ریز آرایه، از یک روش انتخاب ویژگی مبتنی بر تئوری اطلاعات استفاده کردند. آنها به جای بی نظمی، از مفهوم پیوستگی خالص بعنوان معیار مرتبط بودن استفاده کردند و برای کاهش افرونگی، ارتباط هر ویژگی با تک تک کلاسها

*سخنران. آدرس ایمیل: zasghari.606@gmail.com

[1]Filter
[2]Wrapper
[3]Embedded

به طور جداگانه بررسی شده است. در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم انتخاب ویژگی مبتنی بر روش پیچشی ارائه شد که در آن از عملگرهای همبری و جهش برای بهبود الگوریتم وال استفاده شده و سپس این الگوریتم، انتخاب ویژگی را بر اساس دسته‌بند KNN اجرا کرده است [۴]. نویسندگان در [۵]، از ترکیب دو الگوریتم گرگ خاکستری و شاهین هریس برای تعادل اکتشاف و بهره وری الگوریتمها استفاده کردند و آن را برای مسئله انتخاب ویژگی بکار بردند. الگوریتم شاهین هریس، یک الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر جمعیت و با الهام از طبیعت در سال ۲۰۱۹ ارائه شده است [۶]و در حل مسائل بهینه‌سازی توانسته است به خوبی پاسخ‌های بهینه را پیدا کند. از این رو در این مقاله یک روش ترکیبی مبتنی بر الگوریتم HHO را برای انتخاب ویژگی در داده‌های با ابعاد بالا ارائه دادیم. در ادامه، در بخش ۲، الگوریتم شاهین به اختصار معرفی می‌شود. در بخش ۳ روش پیشنهادی ارائه شده است و بخش ۴ و ۵ به ترتیب شامل نتایج شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری می‌باشد.

۲. الگوریتم شاهین هریس

الگوریتم HHO یکی از الگوریتم‌های جدید مبتنی بر جمعیت است که رفتار شاهین‌ها را در فرایند شکار شبیه‌سازی می‌کند و دارای ۳ فاز اصلی است [۶]:

فاز اول: کاوش

در این مرحله شاهین به دنبال تعقیب و کشف طعمه است و موقعیت شاهین‌ها در هر تکرار بصورت تصادفی و یا براساس موقعیت طعمه، تعیین می‌شود.

فاز دوم: انتقال از فاز کاوش به فاز بهره‌گیری

در الگوریتمHHO انتقال از فاز کاوش به فاز بهره‌گیری با آزاد شدن انرژی اجرا می‌شود .

فاز سوم: بهره‌گیری

فرایند تعقیب در میان شاهین‌ها و طعمه در فاز بهره‌گیری شبیه‌سازی می‌شود که برخی از استراتژی‌ها را برای واکنش‌های شاهین در مقابل حقه‌های طعمه توصیف می‌کند و شامل محاصره نرم و محاصره سخت می‌باشد. در محاصره نرم، زمانیکه: $r \geq 0.5, |E| \geq 0.5$ در این حالت طعمه انرژی کافی برای فرار کردن را دارد ولی سرانجام شاهین‌ها طعمه را خسته کرده و آن را شکار می‌کنند که در r عدد تصادفی و E مقدار انرژی است.

در محاصره سخت زمانیکه: $r \geq 0.5, |E| < 0.5$ خرگوش انرژی خود را برای فرار از دست داده و خسته می‌شود. در این میان، شاهین‌ها اطراف طعمه را گرفته و آن را شکار می‌کنند.

در محاصره نرم، زمانیکه: $r < 0.5, |E| \geq 0.5$ در این حالت خرگوش انرژی کافی برای فرار دارد. در این زمان موقعیت شاهین در دو گام تغییر میکند. اگر در گام اول بهبودی حاصل نشد، گام دوم بر اساس عملگر Levy برای ایجاد حرکات نامنظم اجرا می‌شود.

در محاسبه سخت، زمانیکه: $r < 0.5, |E| < 0.5$ خرگوش انرژی کافی ندارد و شاهین‌ها محاصره سخت را قبل از شکار طعمه ندارند. این مرحله مشابه محاصره نرم است با این تفاوت که کل شاهین‌ها به طعمه حمله میکنند.

۳. روش پیشنهادی

در این مقاله، ما انتخاب ویژگی را در دو گام روی مجموعه داده ها انجام می‌دهیم. در روش پیشنهادی ابتدا انتخاب ویژگی بر اساس روش فیلتر mRMR روی مجموعه‌داده اصلی اعمال می‌شود. mRMR به هر ویژگی یک امتیاز اختصاص می‌دهد، بسته به ابعاد داده‌ها تعدادی از ویژگی‌هایی که بالاترین امتیاز را دارند بعنوان ویژگی‌های برتر انتخاب می‌شوند. سپس زیرمجموعه انتخاب شده از مرحله قبل بعنوان ورودی به بخش دوم اعمال می‌شوند. در مرحله دوم، الگوریتم HHO، بعنوان روش wrapper به منظور انتخاب بهینه ویژگی‌ها استفاده می‌شود. در هر تکرار از الگوریتم HHO، زیرمجموعه بهینه ویژگی‌ها بر اساس تابع ارزیابی بدست می‌آیند و این فرایند تا رسیدن به شرط توقف، تکرار می‌شود تا در نهایت بهترین زیرمجموعه ویژگی‌ها که کمترین مقدار شایستگی را دارند انتخاب شوند. تابع ارزیابی انتخاب شده در این مقاله در معادله زیر نشان داده شده است.

$$fitness = \alpha E_R + \beta \frac{|F|}{|R|} \quad (۱)$$

که در آن، E_R خطای دسته‌بندی است که توسط طبقه بندKNN محاسبه می‌شود. F و R به ترتیب تعداد ویژگی‌های انتخاب شده و تعداد کل ویژگی‌های داده است. ضرایب α و β نیز پارامترهای کنترلی هستند که میزان اهمیت فاکتورهای خطا و تعداد ویژگی را تعیین می‌کنند. در این مقاله مقدار پارامتر α برابر ۰.۹۹ و β برابر ۰.۰۱ در نظر گرفته شده است.

۴. نتایج شبیه‌سازی

به منظور اررزیابی روش پیشنهادی، شش مجموعه داده انتخاب شدند و شبیه‌سازی در محیط MATLAB بر روی این داده‌ها انجام شد. جدول ۱ مشخصات داده‌ها شامل تعداد نمونه‌ها، تعداد کلاس و تعداد ویژگی‌های آن‌ها را نشان می‌دهد. به منظور ارزیابی و تست روش پیشنهادی و مقایسه آن با سایر الگوریتم‌ها از روش اعتبارسنجی متقابل k بخشی با $k = 10$ برای بخش‌بندی داده به آموزش و اعتبازستجی استفاده شده است. همچنین الگوریتم دسته‌بندی کننده KNN برای ارزیابی و محاسبه میزان دقت دسته‌بندی بکار رفته است که در آن $k = 5$ است. همچنین در هنگام اجرای گام اول از الگوریتم انتخاب ویژگی، بر حسب امتیازاتی که مدل mRMR برای هر یک از ویژگی‌ها بدست می‌آورد، برای داده‌های با ابعاد بالاتر ۰.۳ و برای داده‌های با ابعاد پایین‌تر ۰.۶ از ویژگی‌هایی که امتیاز بالاتری دارند برای ورود به مرحله بعدی انتخاب می‌شوند.
در تمام الگوریتم‌ها، اندازه جمعیت برابر با ۲۰ و تعداد تکرارها برابر با ۱۰۰ می‌باشد. همچنین برای دستیابی به نتایج دقیقتر هر الگوریتم ۱۰ بار اجرا شده و میانگین خروجی بدست آمده از اجراهای مختلف بعنوان خروجی نهایی در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱. مشخصات مجموعه داده‌ها.

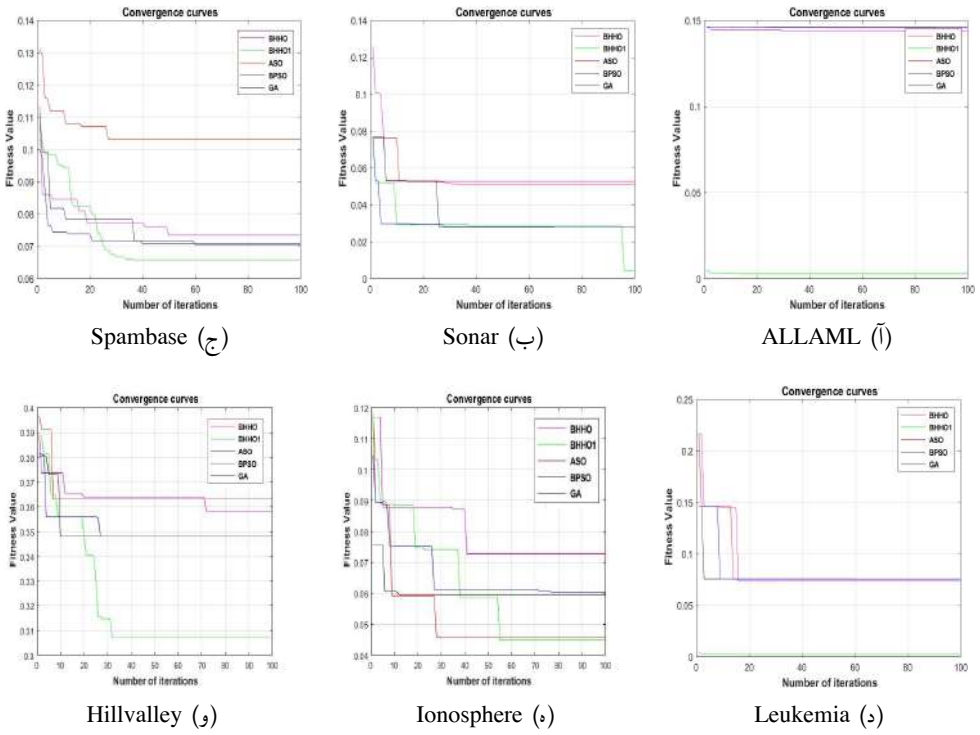
مجموعه داده	تعداد ویژگی‌ها	تعداد نمونه‌ها	تعداد کلاس‌ها
ALLAML	۷۱۲۹	۷۲	۲
Sonar	۶۰	۲۰۸	۲
Spambase	۵۷	۴۶۰۱	۲
Leukemia	۷۰۷۰	۷۲	۲
ionosphere	۳۴	۳۵۱	۲
Hillvalley	۱۰۰	۶۰۶	۲

روش پیشنهادی ترکیبی مبتنی بر الگوریتم HHO با الگوریتم HHO و الگوریتم‌های ASO و PSO و GA مقایسه شد و مبانگین دقت دسته‌بندی بصورت عددی در جدول۲ ارائه شده است.

جدول ۲. نتیجه مقایسه دقت الگوریتم‌ها.

مجموعه داده	HHO	ASO	PSO	GA	روش پیشنهادی
ALLAML	۰.۸۴	۰.۸۴	۰.۸۵	۰.۸۵	۰.۹۹
Sonar	۰.۹۵	۰.۹۵	۰.۹۷	۰.۹۷	۱
Spambase	۰.۹۲	۰.۹۰	۰.۹۳	۰.۹۳	۰.۹۵
Leukemia	۰.۹۶	۰.۹۵	۰.۹۵	۰.۹۵	۱
Ionosphere	۰.۹۳	۰.۹۶	۰.۹۴	۰.۹۴	۰.۹۶
Hillvalley	۰.۶۴	۰.۶۴	۰.۶۵	۰.۶۵	۰.۷۰

همچنبن شکل ۱ نتایج اجرای الگوریتم‌ها را روی شش مجموعه‌داده نشان می‌دهد. الگوریتم ترکیبی پیشنهادی با برچسب BHHO1 و با رنگ سبز مشخص شده است. همانطورکه مشاهده می‌شود، برای تمام داده‌ها، مدل پیشنهادی نسبت به سایر الگوریتم‌ها بهتر عمل کرده و مقدار بدست آمده برای تابع ارزیابی برای مدل پیشنهادی کمترین مقدار را دارد.
همچنین با مقایسه نمودارهای الگوریتم HHO با الگوریتم ترکیبی پیشنهادی برای مسئله انتخاب ویژگی در شکل ۱ به این نتیجه می‌رسیم که ترکیب دو مدل فیلتر و wrapper برای انتخاب بهینه ویژگی، تأثیر بسیار خوبی روی کارایی دقت دسته‌بندی دارد.



(آ) ALLAML (ب) Sonar (ج) Spambase

(د) Leukemia (ه) Ionosphere (و) Hillvalley

شکل ۱. نتایج مقایسه مقدار شایستگی الگوریتم‌ها روی داده‌ها.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش انتخاب ویژگی ترکیبی برای دسته‌بندی داده‌های با ابعاد بالا معرفی شد. روش پیشنهادی در دو مرحله پیاده سازی شد. در مرحله اول، از متد mRMR به منظور کاهش ویژگی‌های افزونه استفاده شد. سپس ویژگی‌های با امتیاز بالاتر انتخاب شدند و در مرحله دوم ویژگی‌های بهینه با کمک الگوریتم HHO و بر اساس ارزیابی دسته‌بندی کننده KNN انتخاب شدند. نتایج بدست آمده در این مقاله، کارایی روش پیشنهادی را نسبت به سایر الگوریتم‌ها نشان می‌دهد.

مراجع

۱. س. ا. طباطبایی، و. درهمی، ر. شیخ‌پور و م. پژوهان، انتخاب ویژگی مبتنی بر تئوری اطلاعات برای انتخاب ژن‌های مؤثر در تشخیص نوع سرطان با استفاده از داده‌های ریز آرایه، مجله مهندسی پزشکی زیستی، دوره ۱۳، شماره ۴، ۳۴۸-۳۳۷.

2. A. Jain, D. Zongker, "Feature selection: Evaluation, application, and small sample performance,"IEEE transactions on pattern analysis and Machine Intelligence, vol. 19, no. 2, pp. 153-158, 1997.
3. B. Venkatesh, J. Anuradha, "A review of feature selection and its methods,"Information Technologies, vol. 19, no. 1, pp. 3-26, 2019.
4. M. Mafarja and S. A. Mirjalili, "Whale optimization approaches for wrapper feature selection,"Applied Soft Computing, vol. 62, pp. 441-453, 2018.
5. R. Al-Wajih, S. J. Abdulkadir, N. Aziz, Q. Al-Tashi, and N. Talpur, "Hybrid Binary Grey Wolf With Harris Hawks Optimizer for Feature Selection,"IEEE Access, vol. 9, pp. 31662-31677, 2021.
6. A. A. heidari, S. mirjalili, H. Faris, I. Aljarah, M. mafarja, H. Chen, " Harris hawks optimization: Algorithm and applications",Future Generation Computer Systems, vol. 97, pp. 849-872, 2019.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

گرافهای نامتباین گروه های پوچتوان

غلامرضا آقابابایی بنی[۱,*] ، کاظم حمیدی زاده[۲]

[۱]بخش ریاضی، دانشگاه جامع علمی کاربردی، صندوق پستی ۱۵۹۹۶۶۵۱۱۱، تهران، ایران

[۲]بخش ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،ایران

چکیده. **گراف نامتباین گروه G نسبت به زیر گروه H که آن را با $\Pi_{G,H}$ نشان می دهیم گرافی است با مجموعه راسهای $G-\{e\}$ و دو راس g و h از این گراف به هم متصل اند اگر $(|g|,|h|) \neq ۱$ و g یا h متعلق به H باشند. . در این مقاله گراف های نامتباین برخی گروه های ماتیو را معرفی و مورد بررسی قرار داده ایم. همچنین ثابت می‌کنیم گراف های نامتباین گروه های پوچتوان هم مرتبه یکریخت هستند.**

واژه‌های کلیدی: گراف های نامتباین، گروه های ماتیو، گروه های پوچ توان .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C15, 20D15, 05C75.

۱. مقدمه

در این مقاله تمامی گراف ها ساده بدون لوپ و بدون جهت هستند. فرض کنیم G یک گروه متناهی و H زیرگروهی از G باشد. گراف نامتباین G نسبت به H که آن را با $\Pi_{G,H}$ نشان می دهیم گرافی است با مجموعه راسهای $G-\{e\}$ و دو راس g و h از این گراف به هم متصل اند اگر $(|g|,|h|) \neq ۱$ و g یا h متعلق به H باشند. اگر $G=H$ باشد $\Pi_{G,H}$ را با Π_G نشان می دهیم و به آن گراف نامتباین گروه G می گوییم.

در سال ۲۰۱۴ در ([۶]) گراف های متباین و نامتباین روی گروه‌ها تعریف و بر خی از مشخصات این گراف‌ها مورد بررسی قرار داده شدند همچنین برخی ویژگی های این گراف توسط منصوری، عرفانیان و طلوعی مورد بررسی قرار گرفتند.([۷])

فرض کنیم u و v دو رأس از گراف Π باشند. در این صورت فاصله بین u و v که با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود، طول کوتاهترین مسیر بین u و v است. قطر گراف Π را با (Π) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(\Pi) = \sup\{d(u,v) \mid u,v \in V(\Pi)\};$$

عدد رنگی گراف Π برابر مینیمم تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ آمیزی رئوس گراف Π است به طوری که هیچ دو رأس مجاور هم رنگ نباشند. عدد رنگی گراف Π را با $\chi(\Pi)$ نشان می‌دهیم. در این مقاله گراف های نا متباین گروه های ماتیو را با استفاده از نرم افزار گپ تعریف و برخی ویژگی های این گراف ها را در ارائه می کنیم همچنین ثابت می کنیم گراف های نامتباین گروه های پوچتئان که هم مرتبه هستند یکریختند.

۲. گراف های نا متباین گروه های ماتیو

در این قسمت به بررسی خواص گراف‌های نامتباین گروه‌های ماتیو $M_{۱۱}$و $M_{۱۲}$و $M_{۲۲}$ و $M_{۲۳}$و $M_{۲۴}$می‌پردازیم. تعداد عناصری از گروه G را که عدد اول p می شمارد را با $m_p(G)$ نشان می دهیم.

*سخنران. آدرس ایمیل: g_aghababaei@yahoo.com

با گروه $M_{۱۱}$ شروع می کنیم. توجه داریم که این گروه دارای مرتبه $|M_{۱۱}| = ۸۹۲۰ = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۱۱$ است. با استفاده از نر افزار گپ([۱۰]) مرتبه عناصر این گروه و تعداد عناصر دارای مرتبه برابر را بدست می آوریم . این تعداد به شرح ذیل است:

$$[[۱, ۱], [۲, ۱۶۵], [۳, ۴۴۰], [۴, ۹۹۰], [۵, ۱۵۸۴], [۶, ۱۳۲۰], [۸, ۱۹۸۰], [۱۱, ۱۴۴۰]]$$

داد عناصری که مرتبه آنها را اعداد ۲و۳ و ۵ و ۱۱ می شمارد که این اعداد همان اعداد اول شمارنده مرتبه $M_{۱۱}$ می‌باشند یعنی $|M_{۱۱}| = ۸۹۲۰ = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۱۱$ به صورت ذیل می‌باشد:

$$[[۲, ۴۴۵۵], [۳, ۱۷۶۰], [۵, ۱۵۸۴], [۱۱, ۱۴۴۰]]$$

بنابراین گراف $\Pi_{M_{۱۱}}$ از سه مولفه همبندی تشکیل شده است که دو تا از مولفه‌ها عبارتند از $K_{۱۵۸۴}$و $K_{۱۴۴۰}$ و مولفه سوم گرافی با مرتبه عناصر ۲و۳و۴و۶و۸ می‌باشد که بزرگترین درجه، مربوط به عناصر مرتبه ۶ می‌باشد و کوچکترین مرتبه مربوط به عناصر مرتبه ۱۱ است. همچنین واضح است که در هر سه مولفه همبندی قطر گراف کوچکتر یا مساوی با عدد ۲ است. عناصر مرتبه زوج تشکیل بزرگترین خوشه را می‌دهند و این تعداد برابر است با $\omega(\Pi_{M_{۱۱}}) = ۴۸۹۵$. چون عدد خوشه‌ای مولفه ی غیر کامل که همان عدد خوشه‌ای گراف است برابر است با۴۴۵۵ و تعداد رئوس این مولفه برابر با ۴۸۹۵ است بنابراین این مولفه با تعداد ۴۴۵۵ رنگ قابل رنگ آمیزی بوده و همچنین دو مولفه کامل دیگر را نیز میتوان با همین تعداد رنگ رنگ آمیزی نمود بنابراین عدد رنگی گراف با عدد خوشه‌ای برابر است. که این محاسبات و سایر محاسبات را در قالب گزاره ای به شرح ذیل می آوریم:

گزاره ۱.۲. گراف $\Pi_{M_{۱۱}}$ همبند نیست و دارای ۳ مولفه همبندی است.در مولفه‌های همبندی گراف قطر کوچکتر یا مساوی ۲ است. کمترین درجه و بیشترین درجه گراف به ترتیب عبارتند از ۱۴۳۹ و ۴۸۹۴ و عدد خوشه ای این گراف ۴۸۹۵ بوده و $\omega(\Pi_{M۱۱}) = \chi(\Pi_{M۱۱})$

مرتبه گروه ماتیو $M_{۱۲}$ عبارت است از $|M_{۱۱}| = ۹۵۰۴۰ = ۲^۶ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۱۱$ و مرتبه عناصر و تعداد آنها در این گروه گروه به شرح ذیل می‌باشد :

$$[[۱, ۱], [۲, ۸۹۱], [۳, ۴۴۰۰], [۴, ۵۹۴۰], [۵, ۹۵۰۴], [۶, ۲۳۷۶۰], [۸, ۲۳۷۶۰], [۱۰, ۹۵۰۴], [۱۱, ۱۷۲۸۰]]$$

همچنین تعداد عناصری که مرتبه آنها را اعداد ۲و۳ و ۵ و ۱۱ می شمارد که این اعداد همان اعداد اول شمارنده مرتبه $M_{۱۲}$ می‌باشند یعنی $|M_{۱۱}| = ۹۵۰۴۰ = ۲^۶ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۱۱$ به صورت ذیل می‌باشد:

$$[[۲, ۶۳۸۵۵], [۳, ۲۸۱۶۰], [۵, ۱۹۰۰۸], [۱۱, ۱۷۲۸۰]]$$

بنابراین گراف مذکور از دو مولفه همبندی تشکیل شده است که یکی از مولفه‌ها عبارت است از $K_{۱۷۲۸۰}$و مولفه دوم گرافی با مرتبه عناصر ۲و۳و۴و۵و۶و۸و ۱۰ می‌باشد که بزرگترین درجه، مربوط به عناصر مرتبه ۱۰ می‌باشد و کوچکترین مرتبه مربوط به عناصر مرتبه ۱۱ است. همچنین واضح است که در هر دو مولفه همبدی قطر گراف کوچکتر یا مساوی با عدد ۳است. عناصر مرتبه زوج تشکیل بزرگترین خوشه را می‌دهند و این تعداد برابر است با $\omega(\Pi_{M_{۱۲}}) = ۶۳۸۵۵$. چون عدد خوشه‌ای مولفه ی غیر کامل که همان عدد خوشه‌ای گراف است برابر است با۶۳۸۵۵ و تعداد رئوس این مولفه برابر با ۷۷۷۵۹ است بنابراین این مولفه با تعداد ۶۳۸۵۵ رنگ قابل رنگ آمیزی بوده و همچنین مولفه کامل دیگر را که ۱۷۲۸۰ رأس دارد نیز میتوان با همین تعداد رنگ رنگ آمیزی نمود بنابر این عدد رنگی گراف با عدد خوشه‌ای برابر است. نتیجه محاسبات را در قالب گزاره زیر ارائه میکنیم :

گزاره ۲.۲. گراف $\Pi_{M_{۱۲}}$ همبند نیست و دارای ۲مولفه همبندی است.یکی از مولفه های همبندی عبارت است ازگراف کامل $K_{۱۷۲۸۰}$ و مولفه دیگر دارای قطر ۳ می باشد. کمترین درجه و بیشترین درجه گراف به ترتیب عبارتند از ۱۷۲۷۹ و ۷۳۳۵۹ و $\omega(\Pi_{M۱۱}) = \chi(\Pi_{M۱۱}) = ۶۳۸۵۵$

حال به بررسی گراف نا متباین گروه $M_{۲۲}$ می پردازیم $|M_{۱۱}| = ۴۴۳۵۲۰ = ۲^۷ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$ و مرتبه عناصر و تعداد آنها در گروه $M_{۲۲}$به شرح ذیل می‌باشد :

$$[[۱, ۱], [۲, ۱۱۵۵], [۳, ۱۲۳۲۰], [۴, ۴۱۵۸۰], [۵, ۸۸۷۰۴], [۶, ۳۶۹۶۰], [۷, ۱۲۶۷۲۰], [۸, ۵۵۴۴۰], [۱۱, ۸۰۶۴۰]]$$

همچنین تعداد عناصری که مرتبه آنها را اعداد ۲و۳ و ۵ و۷و ۱۱ می شمارد که این اعداد همان اعداد اول شمارنده مرتبه $M_{۱۲}$ می‌باشند یعنی $|M_{۱۱}| = ۴۴۳۵۲۰ = ۲^۷ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$ | به صورت ذیل می‌باشد:

$$[[۲, ۱۳۵۱۳۵], [۳, ۴۹۲۸۰], [۵, ۸۸۷۰۴], [۷, ۱۲۶۷۲۰], [۱۱, ۸۰۶۴۰]]$$

بنابراین گراف مذکور از چهار مولفه همبندی تشکیل شده است که سه تا از مولفه‌ها عبارت اند از گراف‌های کامل $K_{۸۸۷۰۴}$و و$K_{۱۲۶۷۲۰}$ و $K_{۸۰۶۴۰}$ و مولفه چهارم گرافی با مرتبه عناصر ۲و۳و۴و۶و۸ می‌باشد که بزرگترین درجه، مربوط به عناصر مرتبه ۶ می‌باشد و کوچکترین مرتبه مربوط به عناصر مرتبه ۱۱ است. با توجه به اینکه می‌توان یالهای گراف را به خوشه‌هایی چنان افراز کرد که هر رأس حداکثر در دو خوشه قرار گیرد پس گراف خط است. همچنین واضح است که در سه مولفه کامل قطر یک و در مولفه غیر کامل قطر برابر ۲ می باشد پس قطر گراف کوچکتر یا مساوی با عدد ۲ است. عناصر مرتبه زوج تشکیل بزرگترین خوشه را می‌دهند و این تعداد برابر است با $\omega(\Pi_{M_{۲۲}}) = ۱۳۵۱۳۵$. و با استدلالی مشابه گراف نامتباین گروه $M_{۱۲}$ داریم $\chi(\Pi_{M_{۲۲}}) = \omega(\Pi_{M_{۲۲}})$ نتیجه محاسبات را در قالب گزاره زیر ارائه میکنیم :

گزاره ۳.۲. گراف $\Pi_{M_{۲۲}}$ گراف خط است که همبند نیست و دارای ۴مولفه همبندی است که سه تا از این مولفه ها عبارتند از گرافهای کامل $K_{۸۸۷۰۴}$و و$K_{۱۲۶۷۲۰}$ و $K_{۸۰۶۴۰}$ و مولفه چهارم دارای قطر ۳ می باشد. کمترین درجه و بیشترین درجه گراف به ترتیب عبارتند از ۴۹۲۷۹ و ۱۴۷۴۵۴ و ۱۳۵۱۳۵ $\omega(\Pi_{M۱۱}) = \chi(\Pi_{M۱۱})$

به همین ترتیب با محاسبه توسط نر افزار گپ می توانیم گزاره های زیر را برای گراف های نامنتباین گروه های ماتیو $\Pi_{M_{۲۳}}$ و$\Pi_{M_{۲۴}}$ بیان کنیم.

گزاره ۴.۲. گراف $\Pi_{M_{۲۳}}$ همبند نیست و دارای ۳مولفه همبندی است که دو تا از این مولفه ها عبارتند از گرافهای کامل $K_{۱۸۵۴۷۲۰}$ و $K_{۸۸۷۰۴۰}$ و مولفه سوم دارای قطر ۳ می باشد. کمترین درجه و بیشترین درجه گراف به ترتیب عبارتند از ۸۸۷۰۳۹ و ۵۳۶۲۳۳۴. ۳۹۰۵۰۵۵ $\omega(\Pi_{M۱۱}) = \chi(\Pi_{M۱۱})$

گزاره ۵.۲. گراف $\Pi_{M_{۲۴}}$ همبند نیست و دارای ۳مولفه همبندی است که دو تا از این مولفه ها عبارتند از گرافهای کامل $K_{۲۱۲۸۸۹۶۰}$ و$K_{۲۲۲۵۶۶۴۰}$ و و مولفه سوم گراف غیر کامل دارای قطر ۳ می باشد. کمترین درجه و بیشترین درجه گراف به ترتیب عبارتند از ۲۱۲۸۸۹۵۹ و ۱۲۸۸۶۶۸۱۵. ۲۴۷۰۰۳۶۴۶ $\omega(\Pi_{M۲۴}) = \chi(\Pi_{M۲۴})$

۳. گراف های نا متباین گروه های پوچتوان

قضیه ۱.۳. فرض کنیم G یک گروه پوچ توان متناهی از مرتبه n باشد که $n = p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} \dots p_r^{k_r}$ و p_i ها اعداد اول متمایز هستند و $\mathbb{Z}_n$ گروه دوری از مرتبه n باشد. در این صورت تعداد عناصری که مرتبه آنها را $p_{i_۱} p_{i_۲} \dots p_{i_t}$ که $۱ \le i_۱, i_۲, \dots i_t \le r$ می‌شمارد ولی p_j که $۱ \le j \le r$ و $j \neq i_۱, i_۲, \dots, i_t$ مرتبه آنها را نمی‌شمارد در دو گروه G و $\mathbb{Z}_n$ با هم برابراند.

اثبات. فرض کنیم $P_{i_۱} P_{i_۲} \cdots P_{i_t}$ زیرگروه‌های سیلوی G باشند و

$$H = P_{i_۱} P_{i_۲} \cdots P_{i_t}.$$

کافی است ثابت کنیم:
$x \in H \setminus (P_{i_۲} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_۱} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup P_{i_۱} P_{i_۲} \cdots P_{i_{t-۱}})$ اگر و تنها اگر
$p_{i_۱} p_{i_۲} \dots p_{i_t} \mid o(x)$ و به ازای هر $j \neq i_۱, i_۲, \dots, i_t$ $(۱ \le j \le r)$ داشته باشیم $p_j \nmid o(x)$
ابتدا توجه داریم که اگر $p_{i_۱} p_{i_۲} \cdots p_{i_t} \mid o(x)$ و $p_j \nmid o(x)$ آنگاه
$x \notin P_{i_۲} P_{i_۳} \cdots P_{i_t}$ و $x \notin P_{i_۱} P_{i_۳} \cdots P_{i_t}$ و $\cdots$ و $x \notin {}_{i_۱}P_{i_۲} \cdots P_{i_{t-۱}}$ که نشان می‌دهد

$$x \in H \setminus (P_{i_۲} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_۱} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup \cdots {}_{i_۱}P_{i_۲} \cdots P_{i_{t-۱}}).$$

برعکس اگر $x \in H \setminus (P_{i_۲} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_۱} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup P_{i_۱} P_{i_۲} \cdots P_{i_{t-۱}})$ آنگاه
$x \in H$ و $x \notin P_{i_۲} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup P_{i_۱} P_{i_۳} \cdots P_{i_t} \cup \cdots {}_{i_۱}P_{i_۲} \cdots P_{i_{t-۱}}$ که این نشان می‌دهد $p_{i_۱} p_{i_۲} \cdots p_{i_t} \mid o(x)$ و $p_j \nmid o(x)$.

سپس ثابت می‌کنیم تعداد عناصری که مرتبه آنها را $p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_t}$ که $1 \le i_1, i_2, \cdots i_t \le r$ می‌شمارد ولی p_j که $1 \le j \le r$ و $j \neq i_1, i_2, \cdots, i_t$ مرتبه آنها را نمی‌شمارد در هر دو گروه G و $\mathbb{Z}_n$ با هم برابر است. در گروه G این تعداد برابر است با:

$$\begin{aligned}
&|H \setminus (P_{i_2}P_{i_3}\cdots P_{i_t} \cup P_{i_1}P_{i_3}\cdots P_{i_t} \cup \cdots \cup \quad P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_{t-1}})| \\
&= |H| - (|P_{i_2}P_{i_3}\cdots P_{i_t}| + |P_{i_1}P_{i_3}\cdots P_{i_t}| + \cdots + |P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_{t-1}}| - |P_{i_3}P_{i_4}\cdots P_{i_t}| \\
&\quad |P_{i_1}P_{i_4}\cdots P_{i_{t-1}}| - \cdots - |P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_{t-2}}| + \cdots + (1)^t) \\
&= p_{i_1}^{k_{i_1}}p_{i_2}^{k_{i_2}}\cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} - p_{i_2}^{k_{i_2}}p_{i_3}^{k_{i_3}}\cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} - p_{i_1}^{k_{i_1}}p_{i_3}^{k_{i_3}}\cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} - \cdots - p_{i_1}^{k_{i_1}}p_{i_2}^{k_{i_2}}\cdots p_{i_{t-1}}^{k_{i_{t-1}}} \\
&\quad + p_{i_3}^{k_{i_3}}p_{i_4}^{k_{i_4}}\cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} + p_{i_1}^{k_{i_1}}p_{i_4}^{k_{i_4}}\cdots p_{i_t}^{k_{i_t}} + \cdots + p_{i_1}^{k_{i_1}}p_{i_2}^{k_{i_2}}\cdots p_{i_{t-2}}^{k_{i_{t-2}}} \cdots + (-1)^t \\
&= (p_{i_1}^{k_{i_1}} - 1)(p_{i_2}^{k_{i_2}} - 1)\cdots(p_{i_t}^{k_{i_t}} \cdots - 1).
\end{aligned}$$

و در گروه $\mathbb{Z}_n$ این تعداد برابر است با

$$|A_{p_{i_1}} + A_{p_{i_2}} + \cdots + A_{p_{i_t}}|;$$

که برای $1 \le j \le t$

$$A_{p_{i_j}} = \{\frac{n}{{p_{i_j}}^{k_{i_j}}}, \frac{2n}{{p_{i_j}}^{k_{i_j}}}, \frac{3n}{{p_{i_j}}^{k_{i_j}}}, \cdots \frac{({p_{i_j}}^{k_{i_j}} - 1)n}{{p_{i_j}}^{k_{i_j}}}\}$$

و در نتیجه

$$|A_{p_{i_1}} + A_{p_{i_2}} + \cdots + A_{p_{i_t}}| = (p_{i_1}^{k_{i_1}} - 1)(p_{i_2}^{k_{i_2}} - 1)\cdots(p_{i_t}^{k_{i_t}} - 1).$$

□

واضح است اگر G_1 و G_2 دو گروه باشند و $G_1 \cong G_2$ آنگاه $\Pi_{G_1} \cong \Pi_{G_2}$. حال عکس این موضوع را ثابت می کنیم.

قضیه ۲.۳. اگر G_1 و G_2 دو گروه پوچ توان باشند، آنگاه $\Pi_{G_1} \cong \Pi_{G_2}$ اگروتنهااگر $|G_1| = |G_2|$.

اثبات. اگر G یک گروه پوچ توان از مرتبه $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r}$ باشد که p_i ها اعداد اول متمایز هستند، با فرض اینکه $P_r, \dots, P_2, P_1$ زیرگروه‌های سیلوی G باشند، آنگاه

$$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r.$$

حال ثابت می‌کنیم $\Pi_{P_1\times P_2\times\cdots\times P_r} \cong \Pi_{\mathbb{Z}_n}$.

می‌دانیم عناصر مرتبه p_i و توانهای آن در گروه G به صورت $(1, 1, \cdots 1, a_i, 1, \dots, 1)$ هستند که $a_i \in P_i$ و $a_i \neq 1$ و این تعداد برابر است با $p_i{}^{k_i} - 1$. به همین شکل، عناصر مرتبه p_i و توانهای آن در $\mathbb{Z}_n$ عبارتند از:

$$A_i = \{\frac{n}{{p_i}^{k_i}}, \frac{2n}{{p_i}^{k_i}}, \frac{3n}{{p_i}^{k_i}}, \cdots \frac{({p_i}^{k_i} - 1)n}{{p_i}^{k_i}}\}$$

همچنین عناصر مرتبه p_ip_j و توانهای آنها در گروه G به صورت $(1, 1, \cdot 1, a_i, 1, 1, \cdot 1, a_j, 1, 1, \cdot 1)$ هستند که $a_i \in P_i, a_j \in P_j$ و $a_i, a_j \neq 0$ و عناصر مرتبه p_ip_j و توانهای آن در $\mathbb{Z}_n$ عبارتند از عناصر مجموعه $A_i + A_j$ به همین ترتیب عناصر مرتبه $p_1p_2\cdots p_r$ و توانهای آنها در گروه G به صورت $(a_1, a_2, \cdots a_r)$ هستند که $a_i \in P_i$ و $a_i \neq 0$ $(1 \le i \le r)$. و عناصر مرتبه $p_1p_2\cdots p_r$ و توانهای آنها در $\mathbb{Z}_n$ برابر است با مرتبه عناصر مجموعه $A_1 + A_2 + \cdots A_r$. پس می‌توانیم یکریختی زیر را تعریف کنیم:

$$\varphi : v(\Pi_{P_1\times P_2\times\cdots\times P_r}) \longrightarrow v(\Pi_{\mathbb{Z}_n})$$

$$\varphi(a_{1_{j_1}}, a_{2_{j_2}}, \cdots, a_{r_{j_r}}) = j_1\frac{n}{{p_1}^{k_1}} + j_2\frac{n}{{p_2}^{k_2}} + \cdots j_r\frac{n}{{p_1}^{k_1}}$$

که $a_{i_{j_i}} \in P_i$ و $1 \le j_i \le p_i{}^{k_i}$ و اگر $a_{i_{j_i}} = 0$ آنگاه $j_i = 0$. □

مراجع

[1] Gh. R. Aghababaei−Beni, A. R. Ashrafi, A.jafarzadeh, *The non-coprim graph of a finite group with respect to a subgroupgroup*,Ital. J. Pure Appl. Math. N (42) (2019) 25–35.

[2] Gh. R. Aghababaei−Beni, A.jafarzadeh, *The non-coprim graph of a finite group* ,MIR (3) (2018) 109–119.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976.

[4] H. R. Dorbidi, *A note on the coprime graph of a group*, Int. J. Group Theory 5 (4) (2016) 17–22.

[5] C. Godsil and G. F. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer Science, Business Media, 2013.

[6] X. Ma, H. Wei and L. Yang, *The coprime graph of a group*, Int. J. Group Theory 3 (3) (2014) 13–23.

[7] F. Mansoori, A. Erfaniana and B. Tolue, *Non-coprime graph of a finite group*, AIP Conference Proceedings 1750 (2016) 050017.

[8] Z. Mehranian, A. Gholami and A. R. Ashrafi, *A note on the power graph of a finite group*, Int. J. Group Theory 5 (2016) 1–10.

[9] M. Mirzargar, A. R. Ashrafi and M. J. Nadjafi-Arani,*On the power graph of a finite group*, Filomat 26 (2012) 1201–1208.

[10] The Gap Team, GAP – Groups, Algorithms and Programing,

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

کاربرد اکستروپی باقیمانده طول عمر در آزمون نمایی بودن

معصومه اکبری لاکه* ، عارفه کثیری
گروه آمار، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

چکیده. اکستروپی معیار دیگری برای اندازه گیری عدم قطعیت است. در این مقاله آماره‌های آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی بر اساس اکستروپی باقیمانده طول عمر معرفی می‌شوند. سپس از طریق شبیه‌سازی، توان آزمون‌های پیشنهادی تحت توزیع‌های رقیب مختلف با آزمون‌های نیکویی برازش معروف موجود مقایسه می‌شوند.
واژه‌های کلیدی: آزمون نمایی بودن، اکستروپی باقیمانده طول عمر، مشخصه سازی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62G10, 62E10.

۱. مقدمه

توزیع نمایی یکی از پر کاربردترین توزیع‌ها در توصیف مکانیسم نرخ شکست یک سیستم است که در نظریه قابلیت اعتماد به توزیع طول عمر معروف است. همان‌طور که در [۶] اشاره شده است ارزیابی میزان خوب بودن توزیع نمایی برای یک مجموعه داده جهت استفاده از آن در کاربردهای واقعی ضروری و مهم به نظر می‌رسد. زیرا اتلاف وقت و هزینه گزاف از نتایج عدم انتخاب صحیح توزیع مناسب خواهد بود.

تا کنون محققین زیادی به مسئله آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی بر اساس آماره‌های مختلفی نظیر کولموگروف–اسمیرنوف و کرامر فون میزس پرداخته‌اند. همچنین آماره‌هایی بر حسب توابع توزیع تجربی و آنتروپی شانون نیز برای نمایی بودن توسعه و معرفی شده‌اند. جزئیات بیش‌تر را در مراجع [۴]، [۱]، [۳] و [۲] می‌توان دید.

اخیراً آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر مشخصه‌سازی مورد توجه محققین قرار گرفته است. نیکیتین [۷] آماره‌های آزمونی را معرفی کرده‌اند که از مشخصه‌سازی توزیع مورد آزمون در آن استفاده می‌شود. این آماره‌های آزمون از نوع آماره آزمون کولموگروف–اسمیرنوف و کرامر فون میزس است. اما ایشان نشان دادند که کارایی و توان آزمون‌های پیشنهادی بر حسب مشخصه‌سازی به مراتب بیش‌تر است.

مشخصه‌سازی یک توزیع نظیر توزیع نمایی، ویژگی است که مختص آن توزیع است. لذا منطقی به نظر می‌رسد که در نظر گرفتن آماره آزمون مبتنی بر مشخصه توزیع مورد آزمون، دارای عملکرد بهتر قابل توجهی باشد.

در بخش دوم این مقاله، آماره‌های آزمون برای آزمون نمایی بودن معرفی و توصیف می‌شوند. در بخش سوم، از طریق شبیه‌سازی مونت کارلو توان آزمون‌های پیشنهادی محاسبه و عملکرد آن‌ها با دیگر آزمون‌ها مقایسه می‌گردد.

*سخنران. آدرس ایمیل: m.akbari@umz.ac.ir

۲. آزمون نمایی بودن

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. علاقمند به آزمون فرضیه

$$H_0 : F(x) = F_0(x) = 1 - e^{-\lambda x};\ \forall x \in (0, 1),$$

در مقابل فرضیه

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x),\ \text{for some}\ \ x \in (0, 1),$$

هستیم. که λ مقداری نا مشخص و مثبت است. تاکنون محققین زیادی آزمون های متعددی را برای آزمون فرضیه های فوق ارائه کرده‌اند. برخی از این آزمون‌ها بر پایه مفاهیم برآورد آنتروپی شانون و اطلاع کولبک-لایبلر است.
آنتروپی شانون معیاری برای اندازه‌گیری عدم قطعیت توزیع است که برای توزیع پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log(f(x))dx.$$

تعمیم‌هایی از این اندازه تحت عناوین آنتروپی رنی و تیسالیس نیز وجود دارد و همچنین نتایج زیادی در خصوص ویژگی‌های آنتروپی و مشخصه‌سازی توزیع‌ها بر اساس آنتروپی در حالت داده کامل، داده‌های ترتیبی و سانسور شده گزارش شده است.
اخیراً لد و همکاران [۵] اندازه دیگری از عدم قطعیت معرفی کرده‌اند و نشان داده‌اند که تابع دوگانه اندازه آنتروپی شانون است و برای توزیع پیوسته $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$J(X) = -1/2\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx.$$

متغیرتصادفی $X_t = [X - t|X \geq t]$، طول عمر باقی‌مانده یک قطعه از سیستم را که تا زمان t عمر کرده است را نشان می‌دهد. اکستروپی X_t که به اکستروپی باقی‌مانده طول عمر معروف است به صورت زیر است.

$$J_t(X) \equiv J(X_t) = -\frac{1}{2\bar{F}^2(t)}\int_t^{\infty} f^2(x)dx,\ t \geq 0, \tag{1}$$

زیرا تابع چگالی X_t برابر است با

$$f_t(x) = \frac{1}{\bar{F}(t)}f^2(x),\ x > t.$$

داده‌های ترتیبی کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلفی از جمله استنباط اماری، آزمون‌های نیکویی برازش، قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت آماری دارند. اگر $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ آماره‌های مرتب $X_1, \ldots, X_n$ باشند، آنگاه اکستروپی باقی‌مانده طول عمر اولین آماره مرتب به صورت زیر است.

$$J_t(X_{1:n}) = -\frac{n^2}{2\bar{F}^{2n}(t)}\int_t^{\infty} \bar{F}^{2n-2}(x)f^2(x)dx. \tag{2}$$

کیو و جیا [۸] مشخصه‌سازی‌هایی از چندین توزیع استاندارد پیوسته از جمله توزیع نمایی بر اساس اندازه‌های (۱) و (۲) معرفی کرده‌اند. آن‌ها نشان دادند که توزیع پیوسته $F(\cdot)$ نمایی است اگر و فقط اگر یکی از عبارات زیر برقرار باشد.

$$J_t(X) = -\frac{\lambda}{4}. \tag{3}$$

$$J_t(X_{1:n}) = \frac{-n\lambda}{4}. \tag{4}$$

با استفاده از تساوی‌های (۳) و (۴) می‌توان دو آماره آزمون برای فرضیه $H_0 : F(x) = F_0(x)$ که در ابتدای این بخش اشاره شد ساخت. بدین صورت که این فرضیه صفر معادل است با فرضیه‌های $H_0' : J_t(X) + \frac{\lambda}{4} = 0$ و

H_0'' : $J_t(X_{1:n}) + \frac{n\lambda}{4} = 0$ برای $t \geq 0$ است. بنابراین می‌توان برای آزمون نمایی بودن از فرضیه دیگر H_0' و H_0'' استفاده کرد و آماره‌های آزمون را براساس این فرضیه‌ها ساخت که در بخش بعدی به آن پرداخته شده است.

۳. محاسبه و مقایسه توان

بر اساس مشخصه‌سازی‌های ارائه شده در روابط (۳) و (۴) در بخش قبل، آماره‌های آزمون پیشنهادی زیر جهت آزمون نمایی بودن، به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد. با استفاده از (۳) داریم.

$$\begin{aligned} J_t(X) &= -\frac{1}{2\bar{F}^2(t)} \int_0^\infty f(F^{-1}(u)) I(u \geq t) du \\ &= -\frac{1}{2\bar{F}^2(t)} \int_0^\infty \left[\frac{dF^{-1}(u)}{du}\right]^{-1} I(u \geq t) du. \end{aligned}$$

درنتیجه برآورد $J_t(X)$ بر اساس نمونه $X_1, \ldots, X_n$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{J}_t(X) = -\frac{1}{(1-\hat{F}(t))^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2m}{n^2(X_{i+m:n} - X_{i-m:n})} I(\frac{i}{n+1} \geq \hat{F}(t))\right],$$

که $m \leq \frac{n}{2}$ عدد صحیح مقدار و مثبت است و $\hat{F}(\cdot)$ تابع توزیع تجربی X را نشان می‌دهد. مقادیر بزرگ $|\hat{J}_t(X) + \frac{\lambda}{4}|$ که λ می‌تواند با برآوردگر درستنمایی $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum X_i}$ جایگزین شود، منجر به رد فرضیه نمایی بودن می‌شود. بنابراین یک آماره آزمون نمایی بودن به صورت زیر پیشنهاد می‌شود.

$$E_1 = |\hat{J}_t(X) + \frac{n}{\sum X_i}|.$$

بر اساس رابطه (۴)، آماره آزمون پیشنهادی دیگر برای نمایی بودن به صورت زیر خواهد بود.

$$E_2 = |\hat{J}_t(X_{1:n}) + \frac{n\lambda}{4}|.$$

مقادیر بزرگ آماره E_2 نیز منجر به رد فرضیه نمایی بودن می‌شود و برآورد $\hat{J}_t(X_{1:n})$ به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{J}_t(X_{1:n}) = -\frac{n^2}{2(1-\hat{F}(t))^{2n}} \sum_{i=1}^{n} \left[(1-u)^{2n-2} \frac{2m}{n^2(X_{i+m:n} - X_{i-m:k})} I(\frac{i}{n+1} \geq \hat{F}(t))\right].$$

به منظور بررسی عملکرد آزمون‌های پیشنهادی، آزمون‌های زیر را جهت مقایسه توان‌ها در نظر می‌گیریم.

۱- آماره آزمون کرامر-فون میزس

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{2n} - F_0(X_{i:n})\right)^2.$$

۲- آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنوف

$$D = \max(D^+, D^-),$$

که در آن $D^+ = \max_{1 \leq i \leq n}\{\frac{i}{n} - F_0(X_{i:n})\}$ و $D^- = \max_{1 \leq i \leq n}\{F_0(X_{i:n}) - \frac{i-1}{n}\}$.

۳- آماره آزمون اندرسن-دارلینگ.

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \Big\{ \log F_0(X_{i:n}) + \log[1 - F_0(X_{n-i+1:n})] \Big\}.$$

۴- آماره شاپیرو-ویلک

$$SW = \frac{n(\bar{X} - X_{1:n})^2}{(n-1)S^2}.$$

برای مقایسه توان‌ها، از توزیع های زیر که معمولا از آنها به عنوان رقیب توزیع نمایی نام برده می‌شود، استفاده می‌کنیم.

- توزیع وایبل با چگالی $f(x) = \theta x^{\theta-1}e^{-x^\theta}$ که با نماد $W(\theta)$ نشان داده می‌شود.
- توزیع گاما با چگالی $f(x) = \frac{1}{\gamma(\theta)}x^{\theta-1}e^{-x}$ که با نماد $\gamma(\theta)$ نشان داده می‌شود.
- توزیع لگ نرمال با چگالی $f(x) = \frac{1}{\theta x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\log x)^2}{2\theta^2}}$ که با نماد $LN(\theta)$ نشان داده می‌شود.
- توزیع نیم نرمال با چگالی $\gamma^{1/2}(\frac{2}{\pi})e^{-\frac{x^2}{2}}$ که با نماد HN نشان داده می‌شود.
- توزیع یکنواخت استاندارد که با نماد U نشان داده می‌شود.

توان آماره‌های آزمون مختلف به ازای توزیع‌های رقیب مختلف با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو با ۱۰۰۰۰ تکرار و در سطح خطای $\alpha = 0/05$ بدست آمده است که در جدول زیر نتایج قابل مشاهده است. آماره‌های آزمون پیشنهادی E_1 و E_2 به دو پارامتر m و t بستگی دارد. با شبیه سازی‌های انجام شده، نتیجه می شود که ماکزیمم توان به ازای $m = \frac{n}{2}$ حاصل می‌شود لذا در جدول زیر $m = 2$ در نظر گرفته شده است. همچنین مقداری از t در نظر گرفته شده است که توان آزمون را ماکزیمم کند. نتایج جدول ذیل نشان می‌دهد که توان آزمون‌های پیشنهادی در اکثر موارد بیش‌ترین است و یا به بیش‌ترین توان نزدیک است و بر خلاف آماره‌های آزمون دیگر، که توانشان با تغییر توزیع رقیب دارای نوسانات زیاد است، توان آماره‌های آزمون پیشنهادی تحت تاثیر شدید توزیع رقیب نیست.

جدول ۱. توان آزمون‌ها

حجم نمونه	توزیع رقیب	آماره E_1	آماره E_2	آماره W^2	آماره D	آماره A^2	آماره SW
۵	$W(0/2)$	0/7536	0/6636	0/457	0/5551	0/6568	0/0004
	$W(2)$	0/7127	0/6717	0/1527	0/2284	0/001	0/1364
	$\Gamma(0/4)$	0/6804	0/7579	0/8522	0/7932	0/0013	0/0192
	$\Gamma(1)$	0/3105	0/3269	0/2242	0/1984	0/001	0/0536
	HN	0/5339	0/5662	0/2877	0/2596	0/002	0/077
	$LN(0/8)$	0/472	0/189	0/0001	0/0028	0/0001	0/1482
	$LN(1/5)$	0/7962	0/7362	0/2938	0/337	0/775	0/011
	U	0.999	0/9997	0/9538	1/00	0/0001	0/1866

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، دو آزمون نمایی بودن بر اساس نتایج مشخصه‌سازی حاصل از اکستروپی باقی‌مانده طول عمر در دو حالت داده کامل و داده ترتیبی بدست آمد. نتایج شبیه مونت کارلو، عملکرد خوب این آماره‌ها را در مقایسه با آماره‌های معروف نیکویی برازش که در اکثر نرم افزارهای آماری وجود دارند، را نشان می‌دهد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب سپاس‌گزاری خود را از کمیته برگزاری پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران که در دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار می‌شود، اعلام می‌دارد.

مراجع

1. N. Ebrahimi, M. Habibullah and E. Soofi, Testing exponentiality based on Kullback-Leibler information, J. R. Statist. Sco. Ser. B, 54 (1992), 739–748.
2. B. Epstien, Truncated life tests in the exponential case, J. Amer. Statist. Assoc., 25 (1954), 555–564.
3. B. Epstien and M. Sobel, Sequential life tests in the exponential case, Ann. Math. Statist., 26 (1955), 82–93.

4. P. Grzegorzewski and R. Wieczorkowski, Entropy-based goodness-of-fit test for exponentiality, Commun. Stat. Theory Methods , 28 (1999), 1183–1202.
5. F. Lad, G. Sanfilippo and G. Agrò, Extropy: complementary dual of entropy, Statist. Sci. 30 (2015), 40–58.
6. J.F. Lawless, Statistical models and methods for life-time data, Wiley, New York, 1982.
7. Ya.Yu. Nikitin, Test based on characterizations, and their efficiencies: A survey, ACUTM., 21 (2017), 3–24.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

پیشنهاد لایه ادغام در شبکه‌های عصبی همبافت سادکی

نیره الیاسی[۱,*] ، مهدی حسینی مقدم[۲] و میرمحسن پدرام [۳]

[۱]دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

[۲]دانشکده مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

[۳]دانشکده مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده. لایه‌های ادغام در شبکه‌های عصبی معمولاً جهت ساده‌سازی و خلاصه‌سازی تصاویر و همچنین جهت کاهش سربار محاسباتی استفاده می‌شوند اما کمبود یک چنین لایه‌هایی در شبکه‌های عصبی همبافت سادکی بسیار به چشم می‌خورد. در این مقاله مفهوم لایه ادغام در شبکه‌های عصبی همبافت سادکی معرفی می‌گردد. اساس تعریف این لایه، نظریه مُرس گسسته و نقش آن در کاهش همبافت های سادکی می‌باشد. ایده اصلی در ساخت لایه ادغام شبکه‌های عصبی همبافت سادکی استفاده از مفهوم عصب همبافت سادکی برای کاهش این نوع ساختارداده است که حافظ ویژگی‌های توپولوژیکی است.

واژه‌های کلیدی: پیشنهاد لایه‌ی ادغام، شبکه‌های عصبی همبافت سادکی، کاهش همبافت سادکی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 55U05, 57Q05, 97R40.

۱. مقدمه

لایه‌های کانولوشني ساده و لایه‌های ادغام در شبکه‌های عصبی ژرف معمولی [1] به گونه‌ای ساخته شده‌اند که مي‌توانند رابطه دادگان را در فضای اقلیدسي به دست آورند، به عنوان مثال اگر یک پیکسل از یک عکس را در نظر بگیریم لایه‌های کانولوشني مي‌توانند رابطه این پیکسل و پیکسل های مجاور خود که همگي در فضای اقلیدسي هستند را به دست آورند. از طرفي با پیشرفت تکنولوژی، ساختارداده‌های جدید به وجود آمدند که لزوماً نمي‌توان آن‌ها را در فضای اقلیدسي بررسي کرد ، مانند ساختارداده‌هایي از جنس گراف‌ها که در شبکه‌های اجتماعي کاربرد فراواني دارند. از آن جا که شبکه‌های کامپیوتری کانولوشني توانایي بسیار خوبي در استخراج ویژگي‌ها دارند پس مي‌توان از این لایه‌ها همچنین در ساختارداده‌های همچون گراف‌ها استفاده کرد. شبکه‌های عصبی گرافی نشان داده‌اند که می‌توانند در امر استخراج ویژگی و نمایش گراف و داده‌هایی بدون ساختار مشخص بسیار مفید باشند. شبکه‌های گرافی را می‌توان به دو دسته کلی طیفی [2] و فضایی [3] تقسیم کرد. در [۱] نویسندگان از روش طیفی و با استفاده از لاپلاسین گرافی، شبکه عصبی گرافی را تعریف کرده‌اند، بر پایه‌ی همین روش در [۲] نویسندگان این بار با استفاده از لاپلاسین همبافت سادکی، [4] شبکه عصبی همبافت سادکی [5] را ایجاد کرده‌اند که یک همبافت سادکی را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و تلاش می‌کند تا روابط گم‌شده موجود در مجموعه دادگان را پیدا کند. همان‌طور که در بخش چکیده گفته شد لایه‌های ادغام جهت ساده‌سازی داده و کاهش سربار محاسباتی ایجاد شده‌اند و از انواع لایه‌های ادغام می‌توان

*سخنران. آدرس ایمیل: elyasi82@khu.ac.ir

[1] Pooling
[2] Spectral
[3] Spatial
[4] Simplicial Complex
[5] Simplicial Neural Network

به لایه‌های ادغام میانگین و لایه‌های ادغام بیشینه اشاره کرد. همبافت‌های سادکی یکی از انواع دادگان پیچیده هستند که نیاز به ساده‌سازی آنها بسیار دیده می‌شود. ما در اینجا قصد داریم تا با استفاده از عصب همبافت سادکی الگوریتمی را جهت ساده‌سازی این نوع داده در غالب لایه ادغام همبافت سادکی معرفی کنیم.

۲. پیش‌نیازها

تعاریف و قضایای این بخش عموماً از منابع [۴]، [۵] و [۳] آورده شده‌اند و خواننده برای اطلاعات بیشتر می‌تواند به آن‌ها مراجعه کند.

تعریف ۱.۲. یک همبافت سادکی مجرد یک مجموعه K است به همراه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌هایش مانند S که دارای دو شرط زیر است:

(۱) برای هر $v \in K$ و $\{v\} \in S$، به تمام مجموعه‌های $\{v\}$ رئوس K گوییم.

(۲) اگر $\tau \subseteq \sigma \in S \implies \tau \in S$

به هر یک از اعضای این گردایه یک سادک گفته می‌شود. و همچنین گوییم یک سادک دارای بعد p است اگر دارای $p+۱$ عضو باشد، همچنین آن را یک $p-$ سادک نیز می‌نامیم، مجموعه‌ی تمام یک چنین سادک‌هایی از بعد p را با علامت K_p نشان می‌دهیم. [۴]

تعریف ۲.۲. یک $p-$ سادک دارای $p+۱$ سادک از بعد $p-۱$ است که وجه‌های آن نامیده می‌شوند. اگر سادک σ یک وجه از سادک τ باشد، آنگاه گوییم τ یک هموجه σ است.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $C_p(K)$ گروه $p-$ زنجیرهای نظیر همبافت سادکی K باشد، تابع مرز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_p : C_{p+۱}(K) \longrightarrow C_p(K)$$

$$\partial_p([v_۰, ..., v_{p+۱}]) = \sum_{i=۰}^{p+۱} (-۱)^i [v_۰, ..., \hat{v_i}, ..., v_{p+۱}]$$

به اختصار $c_p(K)$ را با c_p نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲. برای هر عملگر مرز $\partial_d : C_d \longrightarrow C_{d-۱}$ از K، قرار می‌دهیم B_d نمایش ماتریسی این عملگر باشد، که در آن C_d و $C_{d-۱}$ دارای پایه استانداردی هستند. واضح است که تعداد سطرهای B_d برابر است با تعداد $(d-۱)-$ سادک‌های K و تعداد ستون‌های آن برابر است با تعداد $d-$ سادک‌های K.
متناسب با ∂_d عملگر الحاقی ∂_d را بصورت ∂_d^* نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_d^* : C_{d-۱} \longrightarrow C_d$$

به وضوح نمایش ماتریسی متناسب با ∂_d^* برابر است با B_d^T.

تعریف ۵.۲. فرض کنید K یک همبافت سادکی جهت‌دار است و $d \leq ۰$ یک عدد طبیعی باشد. لاپلاسین ترکیبیاتی مرتبه d همبافت سادکی K یک عملگر خطی $\Delta_d : C_d \longrightarrow C_d$ است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \partial_{d+۱} \circ \partial_{d+۱}^* + \partial_d^* \circ \partial_d.$$

و همچنین ماتریس لاپلاسین مرتبه d را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\ell_d = B_{d+۱} B_{d+۱}^T + B_d^T B_d$$

حال فرض کنیم $\lambda_۱ > \lambda_۲ > ... > \lambda_{|K_p|}$ مقادیر ویژه ماتریس ℓ_p هستند، با توجه به تجزیه‌ی مقدار ویژه ماتریس ℓ_p داریم:

$$\ell_p = U diag(\Lambda) U^T$$

که در آن U ساخته شده از بردارهای ویژه متناسب با مقادیر ویژه ℓ_p است و $\Lambda = [\lambda_1, ..., \lambda_{|K_p|}]$. حال با توجه به [۲] عملگر تبدیل فوریه و معکوس آن را بترتیب با F_p^{-1} و F_p نشان می‌دهیم که نمایش ماتریسی آن‌ها U و U^T است. و با توجه به عملگر فوریه، عملگر کانولوشن همبافت سادکی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: [۲]

$$c \star_p c^{'} = F_p^{-1}(F_p(c)F_p(c^{'})), \;\; c, c^{'} \in C^p(K)$$

تعریف ۶.۲. یک پوشش $\mathcal{U}$ از فضای توپولوژیک $\mathcal{X}$ را یک پوشش خوب می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\{\mathcal{U}_{i_1}, \mathcal{U}_{i_2}, ..., \mathcal{U}_{i_n}\} \subseteq \mathcal{U}$ اجتماع $\cap_{i_j}\mathcal{U}_{i_j}$ یا تهی باشد و یا قابل انقباض باشد. عصب پوشش $\mathcal{U}$ یک همبافت سادکی مجرد است که برابر است با مجموعه‌ی شامل اشتراک تمام اعضای ناتهی $\mathcal{U}$.

قضیه ۷.۲. عصب یک پوشش بسته خوب $\mathcal{U}$ دارای هموتوپی یکسانی با فضای $\mathcal{X} := \cup_{\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_\alpha$ است.

در توپولوژی و توپولوژی محاسباتی، عصب یک ساختار بسیار مهم و پراستفاده است که درواقع یک فضای پیوسته‌ی توپولوژیکی را به یک فضای گسسته‌ی ترکیبیاتی تبدیل می‌کند بدون آن‌که ساختار هموتوپیک فضا را تغییر دهد.

۱.۲. **عصب یک همبافت سادکی.** عصب $\mathcal{N}(K)$ یک همبافت سادکی $\mathcal{K}$ عبارت است از تمامی سادک‌های ماکسیمال $\mathcal{K}$ که می‌توان آن را به عنوان پوششی برای همبافت سادکی $\mathcal{K}$ در نظر گرفت. پس رئوس $\mathcal{N}(K)$ عبارت است از سادک‌های ماکسیمال $\mathcal{K}$ و سادک‌های $\mathcal{N}(K)$ عبارتند از اشتراک‌های ناتهی سادک‌های ماکسیمال $\mathcal{K}$ همچنین می‌توان عصب های توان بالاتر یک همبافت سادکی $\mathcal{K}$ را بصورت زیر تعریف کرد.

(1) $N^n(K) = N(N^{n-1}(K))$
(2) $N(N(K)) = N^2(K)$

تعریف ۸.۲. فرض کنیم K یک همبافت سادکی باشد و σ سادکی از K، گوییم σ یک همبافت آزاد است هرگاه σ، هم‌وجه یکتایی مانند $\tau \in K$ داشته باشد، همچنین جفت $\{\sigma, \tau\}$ را یک جفت آزاد می‌نامیم.

تعریف ۹.۲. به عمل حذف یک جفت آزاد از همبافت سادکی K $(K \to K \setminus \{\sigma, \tau\})$ یک کاهش سادکی گوییم. به دنباله‌ای از چنین کاهش‌های سادکی یک کاهش سادکی گوییم که با نماد $K \searrow L$ نمایش داده می‌شود. این عملگر کاهش حافظ هموتوپی است که با علامت $K \sim L$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱۰.۲. برای یک همبافت سادکی K زیرهمبافتی مانند L وجود دارد که $L \cong N(K)$ به‌طوری که $K \searrow L$.

نتیجه‌ای که از قضیه‌ی بالا به‌دست می‌آید، این است که یک همبافت سادکی مینیمال است اگر و تنها اگر یکریخت با $N^2(K)$ باشد.

۳. نتایج

همان‌گونه که لایه‌های ادغام در شبکه‌های عصبی معمولی خروجی لایه‌های قبل را ساده تر می‌کنند در این جا ما قصد داریم تا با استفاده از لایه ادغام همبافت سادکی و با تکیه بر مفاهیم کاهش سادکی و عصب سادکی، خروجی حاصل از لایه‌های شبکه عصبی همبافت سادکی را ساده کنیم و پیچیدگی محاسباتی آن را کاهش دهیم بطوری‌که خواص توپولوژیکی آن با همافت سادکی اولیه (خروجی لایه قبل) یکسان باشد. در این قسمت ابتدا ماتریس مجاورت نظیر همبافت سادکی K را معرفی می‌کنیم و سپس الگوریتم مربوط به لایه ادغام شبکه عصبی همبافت سادکی را بیان می‌کنیم که روال محاسبه آن به صورت زیر است.

ماتریس مجاورت M نظیر همبافت سادکی K را می‌توان به این صورت تعریف کرد که در آن سطرهای ماتریس M نشان‌دهنده رئوس همبافت سادکی K و ستون‌های M نشان‌دهنده سادک‌های از بعد صفر به بالای همبافت سادکی K باشند، حال درایه m_{ij} از ماتریس M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر راس v_i نظیر همبافت سادکی K در سادک σ_j باشد، آنگاه $m_{ij} = 1$، در غیراین صورت $m_{ij} = 0$. حال با فرض داشتن ماتریس مجاورت M نظیر همبافت سادکی K و با روشی مشابه روش [۴] و با استفاده از یک سری عملیات زیرفضاگیری که در ادامه توضیح داده می‌شود سعی می‌کنیم تا با پیدا کردن ماتریس مجاورت $N^{2n}(K)$ برای $n \in \mathbb{N}$ دلخواه به همبافت سادکی $N^{2n}(K)$ برسیم که در واقع دارای پیچیدگی کمتری نسبت به K است ولی درعین حال از نظر خواص توپولوژکی برابر با K است. از آنجایی که سادک‌های

ماکسیمال یک همبافت سادکی حامل تمام خواص توپولوژکی آن همبافت سادکی هستند پس عصب همبافت سادکی که به نوعی تنها از سادک‌های ماکسیمال ساخته شده است، دارای مشخصات و خواص توپولوژکی برابر با همبافت سادکی اولیه است. بنابراین برای بدست آوردن عصب یک همبافت سادکی تنها کاری که نیاز است انجام شود آن است که سادک‌های ماکسیمال از همبافت سادکی استخراج شوند و بقیه حذف شوند. برای این کار نیز کافی است تا سادک‌هایی که زیرسادکی از سادک دیگری هستند را حذف کنیم. پس کافی است نظیر حذف زیرسادک‌ها، عملیات زیرفضاگیری یعنی صفر کردن و سپس حذف سطرها وستون‌های نظیر زیرسادک‌های سادک‌های ماکسیمال از ماتریس مجاورت M را اعمال کنیم. حال باتوجه به نحوه‌ی کار لایه‌های ادغام در شبکه‌های عصبی و مفهوم عصب همبافت سادکی، به راحتی می‌توان مفهومی مانند لایه‌ی ادغام را در شبکه عصبی همبافت سادکی ایجاد کرد . در این روش پیشنهادی که در الگوریتم ۱ آمده است، از عصب مرتبه $2n$-ام یک همبافت سادکی برای ساده‌سازی آن استفاده می‌شود.

Algorithm 1 Pooling of Simplicial Complex Neural Net

procedure SIMPLICIAL POOLING(M, n) ▷ M is the adjacency matrix of K
  while $n \neq 0$ **do**
    for row_i in M **do**
      for row_j in M **do**
        if $row_i == row_j$ **then** pass
        else
          if $row_i < row_j$ **then** ▷ $<$ means subspace
            mark row_i as 'IsSubSet'
    Remove all rows marked as 'IsSubSet'
    Do steps 2-8 for columns
    Substitude M with reduced M
    $n \leftarrow n - 1$
  Return reduced M ▷ reduced M is $N^{2n}(K)$

References

[1] M. Defferrard, X. Bresson, P. Vandergheynst, *Convolutional neural networks on graphs with fast localized spectral filtering*, Advances in neural information processing systems, 29 (2016) 3844–3852.

[2] S. Ebli , M. Defferrard, G. Spreemann, *Simplicial Neural Networks*, arXiv preprint arXiv:2010.03633,(2020).

[3] H. Edelsbrunner, J. Harer, *Computational topology: an introduction*, American Mathematical Soc. (2010).

[4] S. Pritam, *Collapses and Persistent Homology (Doctoral dissertation*, UCA; Inria), (2020).

[5] A. Zomorodian, *Topology for Computing*, CAMBRIDGE University, (2005).

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بکارگیری الگوریتم‌های K-هارمونیک میانگین، بهینه‌سازی ازدحام ذرات اصلاح شده و بهینه‌سازی نهنگ برای خوشه‌بندی

زهره آذرگون[۱,*] ، سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی[۲] و الهام عباسی[۳]

[۱]بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران

[۲]بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران

[۳]بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. الگوریتم‌های خوشه‌بندی از مهمترین الگوریتم‌های داده‌کاوی است و کاربردهای بسیاری در کشف دانش دارد. یکی از الگوریتم‌های خوشه‌بندی، الگوریتم K-هارمونیک میانگین [۱]، یک الگوریتم خوشه‌بندی مبتنی بر مرکز است. در این مقاله با بهره‌گیری از این الگوریتم والگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات اصلاح شده [۲] سعی براین است تا بهبود در خوشه‌بندی حاصل شود. بدین منظور از الگوریتم بهینه‌سازی نهنگ [۳] استفاده گردید و الگوریتم حاصل الگوریتم K-هارمونیک میانگین - ازدحام ذرات - نهنگ نام گذاری گردیده است. نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی بر روی مجموعه داده‌های استاندارد و مقایسه با دیگر الگوریتم‌ها نشانگر بهبود و کارایی موثر این الگوریتم می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم K-هارمونیک میانگین، بهینه‌سازی ازدحام ذرات، بهینه‌سازی نهنگ .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: ۶۸W۹۹ ، ۶۲H۳۰ .

۱. مقدمه

خوشه‌بندی فرآیندی است که به کمک آن می‌توان مجموعه‌ای از اشیاء را به گروه‌های مجزا افراز کرد، هر افراز یک خوشه نامیده می‌شود. اعضاء هر خوشه با توجه به ویژگی‌هایی که دارند به یکدیگر بسیار شبیه هستند و در عوض میزان شباهت بین خوشه‌ها کمترین مقدار است. در چنین حالتی هدف از خوشه‌بندی، نسبت دادن برچسب‌هایی به اشیاء است که نشان دهنده عضویت هر شیء به خوشه است. روش‌ها و الگوریتم‌های متعددی برای تبدیل اشیاء به گروه‌های هم‌شکل یا مشابه وجود دارد. الگوریتم K-میانگین یکی از ساده‌ترین و محبوب‌ترین الگوریتم‌هایی است که در «داده‌کاوی» بخصوص در حوزه «یادگیری بدون ناظر» به کار می‌رود. با این حال، K-میانگین به مراکز اولیه حساس و دارای یک مشکل بهینه‌ی محلی است. ازدیگر الگوریتم‌ها، الگوریتم خوشه‌بندی K-هارمونیک میانگین [۴]، است که میانگین هارمونیک تمامی داده‌ها را تا مراکز خوشه‌ها کمینه می‌کند و مسئله‌ی مقداردهی اولیه الگوریتم K-میانگین را حل می‌کند، اما دارای یک مشکل بهینه‌ی محلی است. برای غلبه بر کاستی‌های الگوریتم‌های K-میانگین و K-هارمونیک میانگین، برخی از الگوریتم‌های ابتکاری با این روش‌ها ترکیب شده‌اند [۲]. اخیراً الگوریتم‌های تکاملی، فرابتکاری و سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی با الگوریتم‌های خوشه‌بندی استاندارد و اساسی از جمله K-میانگین، K-میانگین فازی و K-هارمونیک میانگین [۱]برای رسیدن به کیفیت و عملکرد مورد نیاز در فرایندهای خوشه‌بندی ترکیب شده‌اند. در بسیاری از مطالعات از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای خوشه‌بندی استفاده شده‌است. در این الگوریتم‌ها ملاحظه می‌شود، نتیجه‌ی خوشه‌بندی شدیدا به مراکز انتخاب شده‌ی اولیه وابسته است و ارتباط زیادی بین داده‌ها با نزدیکترین مرکز وجود دارد و باعث می‌شود که مراکز خوشه‌ها از محدوده‌ی تراکم محلی خارج گردند. هر

*سخنران. آدرس ایمیل: zohre.azargun@gmail.com

[4] K-Harmonic Means

داده فقط به یک مرکز اختصاص داده می‌شود. در نواحی با تراکم زیاد داده و مراکز ، ممکن است یک مرکز نتواند از یک داده دور شود، علی رغم اینکه مرکز دیگری در آن حوالی وجود دارد. انتخاب مرکز دوم ممکن است باعث شود که جواب محلی کمی بدتر شود اما اثر کلی آن در خوشه‌بندی بسیار مفید خواهد بود، درحالی‌که روش KHM با استفاده از درجه‌ی عضویت بر این مشکل فایق آمده است. در این مقاله الگوریتم جدید برای حل مشکل بهینه‌ی محلی براساس K-هارمونیک میانگین و نسخه اصلاح شده الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات [5] و الگوریتم بهینه‌سازی نهنگ [6] [۴] با استفاده از تابع هدف K-هارمونیک میانگین ارائه شده‌است.

۲. الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم پیشنهادی براساس دو مرحله اصلی درنظرگرفته شده‌است که فقط یک نوع حرکت توسط ذرات انجام می‌شود. مرحله اول برای فرار از بهینه‌ی محلی و مهاجرت از مکان‌های نامناسب در فضای جستجو و مرحله دوم برای همگرایی به بهینه سراسری استفاده شده است. این دو مرحله به طور متناوب تکرار می شوند تا زمانی که معیارهای خاتمه صورت گیرد (به عنوان مثال حداکثر تعداد تکرار حاصل شود یا تغییری در تعداد مشخصی از تکرارها رخ ندهد). در الگوریتم پیشنهادی ($KHM - WAO - MPSO$) از الگوریتم WAO استفاده شده است که در یافتن همسایگان جدید مناسب و برای جواب‌های بهتر کارآمد است. علاوه بر این، بهترین نسل نهنگ نیز به‌عنوان یک جواب ارزشمند که ممکن است در تولید ذرات بعدی توسط $MPSO$ در نظر گرفته شود به $MPSO$ کمک می‌کند تا از همگرایی سریع به بهینه محلی خلاص شود. در برخی مواقع، بهترین ذره $MPSO$ ممکن است توسط الگوریتم WAO انتخاب شود در صورتی که مقدار تابع هدف از جواب تولید شده $MPSO$ بهتر ازجواب تولید شده توسط الگوریتم WAO باشد.

الگوریتم پیشنهادی $KHM - WAO - MPSO$.

---

۱. پارامترهای اولیه را تنظیم می‌کنیم.
۲. نتیجه خوشه‌های اولیه الگوریتم KHM را در S_i قرارمی‌دهیم.
۳. تازمانی‌که (حداکثر تکرار $t <$) یا معیارهای توقف برآورده نشده است مراحل زیررا محاسبه می‌کنیم.
   a) الگوریتم $MPSO$ را با جمعیت اولیه S_i فراخوانی می‌کنیم.
   b) الگوریتم WOA را با جمعیت اولیه S_i فراخوانی می‌کنیم.
   (بقیه ذرات به صورت تصادفی مقداردهی اولیه می‌شوند)
   c) نتیجه الگوریتم $MPSO$ و WOA را مقایسه می‌کنیم و بهترین جواب S_i را پیدا می‌کنیم.
   d) بهترین جواب را در S_i قرارمی‌دهیم.
۴. پایان

---

۳. نتایج اصلی

الگوریتم پیشنهادی روی دوازده مجموعه‌داده پیاده‌سازی شده‌است و با الگوریتم‌های معروف دیگر مقایسه شده‌است. این مجموعه داده‌ها شامل هشت مجموعه داده واقعی با تعداد خوشه‌های متفاوت و چهار مجموعه‌داده مصنوعی می‌باشد.

[5] MPSO
[6] Whale Optimization Algorithm

جدول ۱. خصوصیات هفت مجموعه‌داده واقعی از UCI و سه مجموعه‌داده مصنوعی.

مجموعه داده	تعداد ویژگی	تعداد کلاس	داده پرت	نمونه‌ها
ArtSet۱	۲	۳	no	۳۰۰
ArtSet۲	۳	۳	no	۳۰۰
Triangular۲	۳	۳	no	۹۰
Iris	۴	۳	no	۱۵۰
Wine	۱۳	۳	no	۱۷۸
wdbc	۳۰	۲	no	۵۶۹
pima	۹	۲	no	۷۶۸
glass Ripley's	۹	۶	no	۲۱۴
sonar	۶۱	۳	no	۲۰۸
Ecoli	۸	۸	no	۳۳۶

عملکرد الگوریتم پیشنهادی برروی مجموعه داده‌های انتخاب شده با الگوریتم‌های $MPSO$ ، KHM ، $PSOKHM$ و $(KHM-WAO-MPSO)$ مقایسه شده‌است. متداول‌ترین روش اندازه‌گیری کیفیت برای الگوریتم‌های خوشه‌بندی معیار فیشر [۷] است، معیار فیشر از دقت و فراخوانی بازیابی اطلاعات استفاده می‌کند. واضح است که مقدار بزرگتر معیار فیشرکیفیت بهتر الگوریتم خوشه‌بندی را نشان می‌دهد. هر خوشه j(تولید شده توسط الگوریتم) به‌عنوان مجموعه موارد n_jدر نظرگرفته می‌شود و n_{ij} تعداد عناصر کلاس i را در خوشه j نشان می‌دهد. معیار فیشر برای هر کلاس i و خوشه j ، دقت (p) و فراخوان (r) به صورت زیر تعریف شده است:

$$F(i,j) = ((b^۲ + ۱).p(i,j).r(i,j))/(b^۲p(i,j) + r(i,j)),$$

که درآن $b = ۱$ برای به‌دست آوردن وزن برابر برای $p(i,j)$ و $r(i,j)$ به‌صورت :

$$p(i,j) = (n_{ij}/n_j)$$

و

$$r(i,j) = (n_{ij}/n_i)$$

تعریف می‌شوند. در نهایت F به‌صورت :

$$F = \sum_i \frac{n_i}{n} max_j F(i,j)$$

محاسبه می‌گردد.

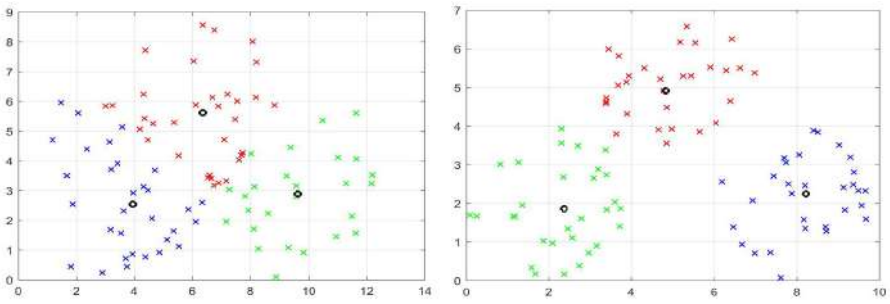
۴. نتایج عددی

برای مقایسه عملکرد الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم‌ها، هر الگوریتم برای هر یک از مجموعه داده‌ها با ۵۰۰ تکرارپیاده‌سازی شده‌است و نتایج در شکل (۲)در جدول (۱) نشان داده شده است. نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که $(KHM-WAO-MPSO)$ و $PSOKHM$ بسیار دقیق هستند و به طور متوسط $(KHM-WAO-MPSO)$ $MPSO$ دقیق تر از $PSOKHM$است. علاوه بر این، در تمام مجموعه‌داده‌ها الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم‌های دیگردارای یک معیار فیشر بزرگ‌تر است که کیفیت بهتر الگوریتم خوشه‌بندی را نشان می‌دهد. جواب‌های به‌دست آمده از الگوریتم‌های KHM ، PSO ، $PSOKHM$ و $(KHM-WAO-MPSO)$ نشان می‌دهد که $(KHM-WAO-MPSO)$ بهترین روش برای همه مجموعه داده‌ها است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با ترکیب الگوریتم‌های KHM و $MPSO$ و WAO یک الگوریتم خوشه‌بندی ترکیبی ارائه شده‌است. $MPSO$ از دو مفهوم جدید بدترین محلی$(pworts)$ و بدترین سراسری$(gworts)$ در الگوریتم PSO معمولی استفاده نموده‌است. بنابراین، ترکیب الگوریتم KHM ، $MPSO$ و WAO از مزایای KHM استفاده نموده و نواقص KHM را برطرف کرده است و می‌توان بر حساسیت اولیه KHM غلبه کرده و بهینه سراسری را به طور موثر به دست آورد. الگوریتم

[7](F-Measure)



شکل ۱. $KHM-WAO-MPSO$ و $PSOKHM$ (ArtSet۱)

جدول ۲. نتایج به‌دست آمده برای خوشه‌بندی $(KHM-WAO-MPSO)$ براساس تابع هدف $KHM(X,C)$ با ۵۰۰ تکرار

مجموعه‌داده	شاخص	KHM	$MPSO$	$PSOKHM$ [۱]	$(KHM-WAO-MPSO)$
Iris	بهترین جواب	۱۸۲.۱۸۶۶	۱۸۸.۸۲۰۸	۹۶.۶۳۰۱	۱۷۸.۲۴۲۴
	معیار فیشر	۰.۸۹۲۳	۰.۸۹۱۸	۰.۸۸۹۳	۰.۸۹۴۷
Wine	بهترین جواب	۵.۴۲۷۵ E +۰۶	۵.۴۳۵۵ E +۰۶	۵.۴۰۱۸ E +۰۶	۵.۴۰۱۸ E +۰۶
	معیار فیشر	۰.۷۰۳۵	۰.۷۰۴۳	۰.۶۹۸۴	۰.۷۱۴۵
pima	بهترین جواب	۸.۰۱۵۸ E +۰۶	۸.۲۳۶۷ E +۰۶	۸.۰۳۰۸ E +۰۶	۸.۰۱۵۸ E +۰۶
	معیار فیشر	۰.۶۴۰۶	۰.۶۴۰۰	۰.۶۴۴۴	۰.۶۶۹۹
glass Ripley's	بهترین جواب	۹۵۹.۶۸۰۰	۲.۲۶۱۸ E +۰۳	۱.۷۱۴۴ E +۰۳	۹۵۶.۱۲۹۸
	معیار فیشر	۰.۵۰۰۳	۰.۵۱۳۷	۰.۵۴۷۴	۰.۵۸۱۴
sonar	بهترین جواب	۳۶۰.۷۰۲۴	۷۶۶.۰۶۳۲	۳۸۰.۶۹۶۷	۳۵۹.۰۲۱۰
	معیار فیشر	۰.۵۵۳۰	۰.۶۲۴۷	۰.۶۰۲۱	۰.۶۵۷۸
wdbc	بهترین جواب	۱.۲۴۶۶ E +۰۸	۱.۲۸۲۱ E +۰۸	۱.۲۴۶۰ E +۰۸	۱.۲۴۶۰ E +۰۸
	معیار فیشر	۰.۸۴۴۳	۰.۸۴۲۳	۰.۸۴۴۳	۰.۸۵۳۷
Ecoli	بهترین جواب	۷.۳۸۰۱ E +۰۵	۸.۴۹۱۶ E +۰۵	۳۵۰،۳۳۸،۱۲۴	۷.۳۷۹۶ E +۰۵
	معیار فیشر	۰.۵۸۱۰	۰.۵۳۰۷	۰.۶۰۱۶	۰.۶۲۹۵
ArtSet۱	بهترین جواب	۶۸۴.۲۰۳۸	۶۹۳.۲۷۳۱	۱۱۹.۵۶۰،۱۲۷	۶۸۱.۵۴۵۶
	معیار فیشر	۱	۱	۱	۱
ArtSet۲	بهترین جواب	۴.۱۷۱۴ E +۰۴	۵.۳۳۵۱ E +۰۴	۵.۳۴۲۱ E +۰۴	۴.۱۶۶۹ E +۰۴
	معیار فیشر	۱	۱	۱	۱
Triangular۲	بهترین جواب	۴۱۲.۹۳۵۷	۴۱۰.۰۵۱۷	۴۰۶.۱۲۵۶	۴۰۴.۱۲۲۸
	معیار فیشر	۱	۱	۱	۱

پیشنهادی بر روی چندین مجموعه داده واقعی و مصنوعی آزمایش شده‌است. این آزمایشات تایید کرد که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم‌های PSO ، KHM و $PSOKHM$ دقیق‌تر و قوی‌تر و قادر به ایجاد جواب‌های امیدوارکننده با همگرایی سریع، دقت بالا و درستی است و در عین حال زمان پردازش را به‌طور چشمگیری بهبود می‌بخشد.

مراجع

1. Asgarali Bouyer, Nacer Farajzadeh, *An Optimized K-Harmonic Means AlgorithmCombined with Modified Particle Swarm Optimization and Cuckoo Search Algorithm*, previously published online June 25, 2015.
2. Asgarali Bouyer, Nacer Farajzadeh, *An Efficient Hybrid Clustering Method based on Improved Cuckoo Optimization and Modified Particle Swarm Optimization Algorithms*, Applied Soft Computing, 67, (2018), 1568–4946.
3. K. M. Passino, Biomimicry of bacterial foraging for distributed op timization and control, IEEE Control Syst. 22 (2002), 52–67.
4. Seyedali Mirjalili and Andrew Lewis, The Whale Optimization Algorithm, *Advances in Engineering Software*. 95 (2016), 51-67.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مفاهیم ریاضی چگونه در ذهن انسان شکل می‌گیرند؟

فاطمه احمدپور*

گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

چکیده. نوشتار حاضر چگونگی شکل‌گیری یک مفهوم ریاضی در ذهن انسان را توصیف می‌کند. تعمیم، تجرید و بازنمایی به عنوان فرآیندهایی مطرح می‌شوند که در شکلگیری مفاهیم ریاضی دخیل هستند. در این رستا برای فهم بهتر، مثال‌هایی آشنا با جزئیات تشریح شده‌اند. در انتها، مطلب با دلالت‌های آموزشی خاتمه می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: شکل‌گیری مفاهیم ریاضی، تعمیم، تجرید، اشیاء ریاضی در مقابل فرآیندهای ریاضی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97D40, 97E20.

۱. مقدمه

آیا می‌توانید زمانی را به خاطر بیاورید که برای اولین بار به «تابع» فکر کرده‌اید، بدون اینکه نیاز به اشاره به یک تابع خاص داشته باشید؟ کودکان چطور با دیدن «چهار چیز»ها، به تدریج مفهوم عدد «چهار» را درک می‌کنند؟ کودکانی که برای انجام عملیات جمع از انگشتان خود استفاده می‌کنند، دارای چه مشخصهٔ شناختی‌ای هستند؟ در تاریخ، اعداد منفی چگونه برای ریاضیدان‌ها به طور رسمی متولد شد؟ چرا برخی از دانش‌آموزان علامت اعداد منفی را از خود عدد جدا فرض می‌کنند؟ در این نوشتار تلاش شده است، چارچوبی نظری فراهم شود که در پرتو آن به‌توان به سوالاتی از این نمونه پاسخ داد.

۲. از مثال تا تولد یک مفهوم

برای اینکه مفهوم عدد «چهار» در ذهن کودک شکل گیرد، طبق نظریات روانشناسانی مانند پیاژه، کودک باید بر مفاهیمی بنیادی همچون مفهوم تناظر یک به یک و مفهوم بقا تسلط داشته باشد [۳] . در تناظر یک به یک کودک قادر است اعضای دو مجموعه الف و ب را یک به یک –صرف نظر از حالت‌های مختلف– به هم مرتبط کند. واضح است که برای برقراری تناظر یک به یک نیازی به شمردن نیست. نقش مفهوم بقا در شکل‌گیری عدد آنجایی ایفا می‌شود که با تغییر آرایش فیزیکی اشیاء دو مجموعه، کودک همچنان تغییری در تعداد اعضای مجموعه احساس نکند.

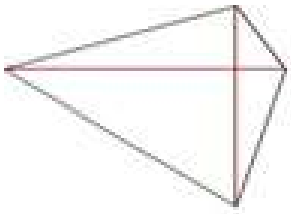
مثال‌هایی از دسته‌های چهارتایی از اشیاء در ذهنتان تصور کنید: مثلا یک دسته چهارتایی شکلات قرمز و یک دسته چهارتایی سیب قرمز. این دو دسته به غیر از چهار عضوی بودن، ویژگی‌های مشترک دیگری هم دارند: هر دو دسته خوراکی هستند، همه قرمز هستند و احتمالا ویژگی‌های مشترک دیگر. اینکه انتظار داشته باشیم کودک به کاردینالتی مجموعه‌ها توجه کند و نه دیگر ویژگی‌ها، از یک طرف نیازمند دیدن مثال‌هایی است که خوراکی نیستند، قرمز نیستند، ... و از طرف دیگر نیازمند شمارش است. با شمارش، عدد اصلی مجموعه (تعداد اعضای مجموعه) به دست می‌آید. نقش کلمات یک، دو، سه، چهار و رعایت ترتیب آنها در هنگام شمارش مجموعه‌های چهارتایی در شکل‌گیری مفهوم عدد «چهار» بسیار کمک کننده است. در حقیقت در کار با کودکان بسیار اتفاق می‌افتد که مفهومی برای کودک شکل گرفته است، بدون آنکه کلمه‌ای برای بیان آن داشته باشد و بالعکس کلمه‌ای را به کار می‌گیرد، بدون آنکه درک صحیحی از آن داشته باشد.

*سخنران. آدرس ایمیل: f.ahmadpour.86@gmail.com

کلاس همه مجموعه‌های چهار عضوی دارای یک ویژگی مشترک است: تعداد اعضای آنها، «چهار» است. به بازشناسیِ یک ویژگی مشترک بین همه‌ی اشیاءِ یک کلاس، تعمیم [1] گفته می‌شود. زمانی که کودک در این مرحله است، «چهار» به تنهایی برای او معنا ندارد، بلکه آن را به عنوان تعداد اعضای یک دسته درک می‌کند: چهار شکلات، چهار کتاب، ... . ساخت ایده‌ای انتزاعی که مشخصهٔ کلاس مجموعه‌های چهار عضوی باشد، برای کودکان ساده نیست و به سرعت اتفاق نمی‌افتد. تا زمانی که برای فکر کردن به عدد «چهار» و انجام عملیات بر روی آن نیازمند انگشتان خود یا اشیاء دیگر است، کودک به ایدهٔ مجردی از این عدد نرسیده است.

در واقع در تجرید [2] باید بر روی ویژگی‌های به‌خصوصی از یک شیءِ معین تمرکز کرده و سپس این ویژگی‌ها را جدای منشاء اصلی (شیءِ اولیه) مد نظر قرار داد. دانش‌آموزی که به قطرهای یک مربع نگاه می‌کند ممکن است متوجه شود که در آن مربع، برخورد قطرها، زوایای قائمه ایجاد می‌کند. این امکان هم وجود دارد که او حدسش را این‌گونه تعمیم دهد که در همه‌ی مربع‌ها در محل برخورد قطرها، زوایای قائمه ایجاد می‌شود. حتی بتواند حدس خود را اثبات هم نماید. اما چنین نظری هم‌چنان فقط به عنوان یک اظهار نظر در مورد مربع‌ها باقی است. نکته مهم آن است که این ویژگی، کلاس «مربع‌ها» را تعریف نمی‌کند یا به وجود نمی‌آورد و فقط یک ویژگی از کلاس مربع‌هاست.

زمانی که ویژگی از موارد و حالت‌هایی که در آن مشاهده شده، جدا شود و یک شیء جدید (در این‌جا، یک چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم [3]) به وجود آورد، یک فرایند تجرید انجام شده‌است. از این پس، شیء انتزاع شده، دیگر قائم به ذات است و می‌توان آن را مستقل از مثال‌های اولیه بررسی نمود. در شکل ۱ مثالی از یک چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم را ببینید.



شکل ۱. مثالی از یک چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم.

طبق [۲] تجرید، به جداسازیِ ویژگی‌های تعریف‌کننده‌ی یک کلاس گفته می‌شود؛ هنگام تجرید، تغییر توجهِ ظریفی رخ می‌دهد. توجه، از یک حالتِ تعمیم یافته به یک شیء یا ویژگی معطوف می‌شود. در آن تغییرِ توجهِ بسیار ظریف، صورت و قالب یک چیز محسوس، دور ریخته می‌شود.

۳. بازنمایی یک مفهوم مجرد

برای به اشتراک گذاشتن یک شیءِ مجرد (که یک مفهوم، ساختار یا رویه در ذهن فرد است) باید آن را بازنمایی کرد؛ به عبارت دیگر صورتی به آن داد که به‌توان آن را با دیگران به اشتراک گذاشت. مسیرِ مثال، تعمیم و تجرید، غالباً با تغییر در بازنمایی‌ها از عینی به نمادین همراه است. نمادهای نوشتاری اغلب به مفاهیم مجرد و انتزاعی مربوط است و موقعیت‌ها، دست‌ورزها و تصاویر، با مثال‌های عینی و فهم تجربی ارتباط دارد. البته این مسئله عمومیت ندارد و امکان دارد افراد، مفاهیم مجرد خود را در غالب تصاویر، دست‌ورزها و موقعیت‌های مرتبط نیز نشان دهند.

استفاده از بازنمایی‌های نمادی، در طی برنامه‌درسی ریاضی دانش‌آموزان دوره متوسطه اول به مرور پررنگ‌تر و پر اهمیت‌تر می‌شود. وقتی ایده‌های ریاضی به صورت نمادی، بازنمایی می‌شوند، «برای فرایندهای مکانیکی سازگار و تعدیل می‌گردند» [۱]. به عبارت دیگر این امکان فراهم می‌گردد که به جای مجردات، با نمادهای نشان‌دهنده‌ی آنها کار شود. بیشترین قدرت جبر،

[1] Generalization
[2] Abstraction
[3] An Orthodiagonal Quadrilateral

از همین صوری‌سازی [۴] است. البته صوری‌سازی خیلی پیش‌تر از این‌ها و در سال‌های ابتدایی مدرسه به‌کار گرفته می‌شود؛ همان زمانی که به جای «چهارِ» انتزاعی و مجرد، روی نماد «۴»، عملیات انجام می‌گیرد.

۴. اشیاء ریاضی در مقابل فرآیندهای ریاضی

هنگامی که از نحوه شکل‌گیری مفاهیم ریاضی سخنی به میان می‌آید، مرور مدل اسفرد [۵] کمک شایانی به قوت بحث می‌کند [۵]. به عقیده وی، در روند شکل‌گیری مفهوم می‌توان به ترتیب سه مرحلهٔ درونی‌سازی، چگالش و جسمیت دادن را مشخص کرد.

شروع شکل‌گیری یک مفهوم با دست‌ورزی روی اشیاء (فیزیکی، تصویری، نمادین، ذهنی) و ماهر شدن در عملیات و فرآیندهای روی آن اشیاء است که پیاژه آن را درونی‌سازی می‌نامد [۳]. به این معنا که شخص بتواند یک عملیات را «از طریق بازنمایی‌هایی [ذهنی]» انجام دهد و برای در نظر گرفتن، تحلیل کردن و مقایسهٔ آن احتیاج به اجرای عملی آن نداشته باشد. در مورد شکل‌گیری مفهوم اعداد طبیعی، آن مرحله‌ای است که شخص در شمارش ماهر می‌شود.

به تدریج شخص نسبت به برخی از ویژگی‌ها و مشخصه‌های آن اشیاء، ادراکی به دست آورده و بدون آنکه نیازی به پرداختن به جزئیات احساس کند، می‌تواند بیشتر و بیشتر به عملیات انجام شده به عنوان یک «کل» فکر کند. در این مرحله که چگالش نامیده می‌شود، یک ویژگی به‌عنوان عبارتی کلی، تبیین شده و یک مفهوم جدید «به طور رسمی» متولد می‌شود. در مورد شکل‌گیری مفهوم اعداد طبیعی، آن مرحله‌ای است که شخص عدد اصلی «چهار» را به عنوان ویژگی مشترک مجموعه‌های چهارعضوی در نظر می‌گیرد. بنابراین هر موقع بخواهد چهار را در نظر بگیرد، به یک مجموعهٔ چهار عضوی از اشیاء نیاز دارد.

مرحله‌ی چگالش تا زمانی ادامه می‌یابد که آن موجود جدید، رابطه تنگاتنگش را با یک عملیات مشخص حفظ کند، ولی زمانی که به صورت موجودی مستقل از عملیات دیده شود، می‌توان با آن دست‌ورزی کرده و ویژگی‌های بیشتری را درمورد آن یافت. در واقع در اینجا فرآیند تجرید رخ داده و یک شیء تکامل‌یافته حاصل شده است. به تعبیر پیاژه «مفهوم انتزاع شده [ریاضیاتی]، از شیءای که عمل بر روی آن انجام گرفته، بیرون کشیده نمی‌شود، بلکه از خود عمل انتزاع می‌شود» [۳]. در این حالت به زبان اسفرد مفهوم، جسمیت یافته است [۵].

ادراک حاصل از مرحلهٔ چگالش، عملیاتی است، بنابراین پویا، پی‌درپی و همراه با جزئیات است. در حالی‌که برونداد مرحلهٔ جسمیت‌سازی، ادراک ساختاری است، به این معنا که یک شیء تکامل‌یافته ریاضی تجرید یافته، بنابراین ایستا، یک‌پارچه و آنی در ذهن وجود دارد.

۵. دلالت‌های آموزشی

مسیرِ مثال، تعمیم و تجرید، مانند مسیرِ شکل‌گیری «مفاهیم خودبه‌خودی [۶] » در نظریه ویگوتسکی [۷] است [۶]. وی این مفاهیم را از «مفاهیم علمی [۸] » که در جهت عکس شکل می‌گیرند، متمایز می‌کند. منشاء دانش علمی یا نظری، در یک میانجی‌گر آموزشی [۹] ، خارج از فرد است. چگونگی به‌کارگیریِ این دو مفهوم و سهم هر کدام در آموزش، مورد بحث و نقد است. در حالی‌که در سنت ویگوتسکی ارزش بیشتری برای مفاهیم علمی قائل می‌شوند، در سنت پیاژه تاکید بیشتری بر تجرید از تجارب است. نظریه رشد شناختی پیاژه فراگیری دانش و مهارت را به عنوان پی‌آمدِ رشد [زیستی]، و کنشِ متقابل با محیط فیزیکی و اجتماعی تلقی می‌کند [۳] . در حالی که دویدف [۱۰] ، از دنباله‌روان ویگوتسکی، بر این باور بود که وقتی یک کودک به مدت طولانی در سطح رویکردهای تجربی نگه داشته شود، رشد تفکر نظری او به تأخیر می‌افتد. تفکر نظری هم شامل درک یک مفهوم در بالاترین سطح کلیت و انتزاع است و هم شامل به‌کارگیری ادراک تعمیم یافته در موارد خاص [۴].

---

[4] Formalization
[5] Sfard
[6] Spontaneous Concepts
[7] Vygotsky
[8] Scientific Concepts
[9] Instructional Mediation
[10] Davydovl

نویسندهٔ این نوشتار بر این عقیده است که توسعهٔ مفهومی هم از طریق نظری و هم تجربی، می‌تواند ثمربخش باشد و در عمل، این دو رویکرد بر هم اثر متقابل دارند.

مراجع

1. P. J. Davis and R. Hersh, *The mathematical experience*, Birkhäuser: Boston, 1981.
2. J. Mason, *Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention*, For the Learning of Mathematics, (1981), 9(2), 2-8.
3. J. Piaget, *Genetic epistemology*, W. W. Norton, New York, 1970.
4. J. Schmittau and A. Morris, *The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov*, The Mathematics Educator. (2004), 8(1), 60 – 87.
5. A. Sfard, *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, (1991), 22(1), 1-36.
6. L. S. Vygotsky, *Thought and language*, Cambridge, MA: MIT Press, Translation newly revised and edited by Alex Kozulin, 1986.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

کنترل بهینه یک مدل دینامیکی بیماری کووید-۱۹ مبتنی بر تاثیرات عوامل محیطی

زهرا دیهیم[۱,*]
امید سلیمانی فرد[۲]
[۱]گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
[۲]گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده. در این پژوهش به مدل سازی وبررسی مدل دینامیکی بیماری $Covid-19$ پرداخته ایم. وجود جواب برای این سیستم و پایداری مدل را در حالتی که جامعه عاری از بیماری است بررسی کرده ایم. در نهایت با اعمال کنترل های مناسب روی سیستم توانستیم به نحوه پیشگیری از این بیماری بپردازیم.
واژه‌های کلیدی: مدل ریاضی $Covid-19$ ،کنترل بهینه،اصل ماکسیسم پونتریاگین.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 93A30, 93C15, 34H15.

۱. مقدمه

بیماری $Covid-19$ نوعی از ویروس کرونا است که مشکلات تنفسی شدید و کشنده ایجاد می کند. این بیماری قدرت انتقال بالایی نسبت به سایر کرونا ویروس ها دارد و همچنین دوره نهفتگی آن طولانی است. در این پژوهش سه کنترل را روی سیستم اعمال می کنیم و با استفاده از نظریه کنترل، کنترل بهینه های مناسب را برای این سیستم به دست می آوریم و از انتقال بیش از حد بیماری جلوگیری می کنیم.

۲. مدل سازی ریاضی بیماری $Covid-19$

در این پژوهش ما سیستم دینامیکی بیماری کووید-۱۹ را با تقسیم $N(t)$ (کل جمعیت جامعه) به پنج زیر جمعیت: (افراد مستعد بیماری) $S=$ و (افراد در معرض بیماری) $E=$ و (افراد بدون علائم بیماری) $A=$ و (افراد بیمار) $I=$ و (افرا بهبود یافته) $R=$و (ویروس موجود روی سطح) $B=$ به فرم زیر می توانیم تعریف کنیم :

$$\frac{dS}{dt} = \wedge - \gamma\frac{S}{N} - dS$$
$$\frac{dE}{dt} = \gamma\frac{S}{N} - (\delta + d)E$$
$$\frac{dI}{dt} = (1-\tau)\delta E - (d + d_1 + \gamma_1)I$$
$$\frac{dA}{dt} = \tau\delta E - (d+\gamma_2)A$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 A - dR$$

*سخنران. آدرس ایمیل: Z.deihim97@gmail.com

$$\frac{dB}{dt} = \psi_1 E + \psi_2 I + \psi_3 A - \phi B$$

(۱)

۳. بررسی وجود جواب و پایداری مدل

لم ۱.۳ ([۲، لم ۱]). داده های اولیه $H(0) \geq 0$ را در نظر بگیرید که $H(t) = (S(t), E(t), I(t), A(t), R(t), B(t))$ آنگاه برای هر $t > 0$ جواب نامنفی برای سیستم (۱) وجود دارد. به علاوه

$$\lim_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{\wedge}{d}$$

که $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + A(t) + R(t)$.

لم ۲.۳ ([۲، لم ۲]). ناحیه زیستی شدنی Ω که برای سیستم(۱) به این صورت تعریف می شود:

$$\Omega = \{(S(t), E(t), I(t), A(t), R(t), B(t)) \in R_+^5 : N(t) \leq \frac{\wedge}{d}, B(t) \in R_+^5 : \frac{\wedge}{d}\frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3}{\phi}\}$$

همراه با شرایط اولیه نامنفی، ناحیه ای مثبت است.

حال پایداری مدل را در حالتی که جامعه عاری از بیماری است بررسی می کنیم، پس در این حالت نقطه تعادل به فرم زیر است:

$$Y_0 = (S_0, E_0, I_0, A_0, R_0, B_0) = (\frac{\wedge}{d}, 0, 0, 0, 0, 0)$$

قضیه ۳.۳. مدل دینامیکی کرونا ویروس (۱) در نقطه Y_0 پایدار مجانی سراسری است، اگر $R_0 < 1$.

۴. کنترل بهینه

در این بخش ما سه کنترل :(حفاظت شخصی) $= v_1$ ،(درمان افراد آلوده) $= v_2$ ،(ضد عفونی کردن سطوح) $= v_3$ را روی سیستم(۱) اعمال میکنیم و با استفاده از اصل ماکسیمم پونتریاگین کنترل بهینه را برای این سیستم به دست می آوریم. برای این کار ابتدا باید تابعی J را با شرایط زیر مینیمم کنیم:

$$J(v_1, v_2, v_3) = min \int_0^{t_f} [E + A + I + B + \frac{1}{2}(n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + n_3 v_3^2)]dt$$

به طوری که:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \wedge - (1 - v_1)\gamma\frac{S}{N} - dS \\
\frac{dE}{dt} &= (1 - v_1)\gamma\frac{S}{N} - (\delta + d)E \\
\frac{dI}{dt} &= (1 - \tau)\delta E - (d + d_1 + \gamma_1 + v_2)I \\
\frac{dA}{dt} &= \tau\delta E - (d + \gamma_2)A \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I + \gamma_2 A - dR + v_2 I \\
\frac{dB}{dt} &= \ _1E + \ _2I + \ _3A - \phi B - v_3 B
\end{aligned}$$

(۲)

همراه با مجموعه کنترل قابل قبول که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vartheta := v = \{(v_1, v_2, v_3) | 0 \leq v_i(t) \leq 1, t \in [0, t_f], i = 0, 1, 2\}$$

حال با توجه به اصل ماکسیمم پونتریاگین هامیلتونی را به فرم زیر داریم:

$$
\begin{aligned}
H &= E^* + A^* + I^* + B^* + \frac{۱}{۲}(n_۱v_۱^۲ + n_۲v_۲^۲ + n_۳v_۳^۲) + \varphi_۱[\wedge - (۱ - v_۱)\gamma\frac{S^*}{N} - dS^*] \\
&+ \varphi_۲[(۱ - v_۱)\gamma\frac{S^*}{N} - (\delta + d)E^*] \\
&+ \varphi_۳[(۱ - \tau)\delta E^* - (d + d_۱ + \gamma_۱ + v_۲)I^*] \\
&+ \varphi_۴[\tau\delta E^* - (d + \gamma_۲)A^*] \\
&+ \varphi_۵[\gamma_۱ I^* + \gamma_۲ A^* - dR^* + v_۲ I^*] \\
&+ \varphi_۶[\psi_۱ E^* + \psi_۲ I^* + \psi_۳ A^* - \phi B^* - v_۳ B^*]
\end{aligned}
$$

(۳)

حال متغیر های هم حالت $\varphi_i, i = ۱, ۲, ..., ۶$ را به این صورت در نظر می گیریم که در معادلات زیر با شرایط انتهایی $\varphi_i(t_f) = ۰$ صدق کند:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi_۱}{dt} &= \varphi_۱[(۱ - v_۱)\frac{\gamma}{N} + d]\varphi_۲(۱ - v_۱)\frac{\gamma}{N} \\
\frac{d\varphi_۲}{dt} &= -۱ + \varphi_۲(\delta + d) - \varphi_۳(۱ - \tau)\delta - \varphi_۴\tau\delta - \varphi_۶\psi_۱ \\
\frac{d\varphi_۳}{dt} &= -۱ + \varphi_۳(d + d_۱ + \gamma_۱ + v_۲) - \varphi_۵\gamma_۱ - \varphi_۵ v_۲ - \varphi_۶\psi_۲ \\
\frac{d\varphi_۴}{dt} &= -۱ + \varphi_۴(d + \gamma_۲) - \varphi_۵\gamma_۲ - \varphi_۶\gamma_۳ \\
\frac{d\varphi_۵}{dt} &= d\varphi_۵ \\
\frac{d\varphi_۶}{dt} &= \varphi_۶\phi + v_۳
\end{aligned}
$$

(۴)

با توجه به (۳)و(۴) و شرط لازم بهینگی $\frac{\partial H}{\partial v_i} = ۰, (i = ۱, ۲, ۳)$ کنترل بهینه برای سیستم(۱) به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
v_۱^* &= min[max(۰, \frac{۲\gamma S^*(m_۲ - m_۱)}{b_۱ N}), ۱] \\
v_۲^* &= min[max(۰, (\frac{I^*(m_۳ - m_۵)}{b_۲}), ۱] \\
v_۳^* &= min[max(۰, (\frac{m_۶ B^*}{b_۳})), ۱]
\end{aligned}
$$

مراجع

1. J. K. Asamoah,M .A. Owusu,Z. Jin,F .T.Oduro,A.Abidemi ,E.O.Gyasi *Global stability and cost-effectiveness analysis of COVID-19 considering the impact of the environment: using data from Ghana*, Chaos, Solitons and Fractals (2020), https://doi.org/10.1016/j.chaos.
2. M. S.Alqarni, M. Alghamdi,T. Muhammad,A.S .Alshomrani ,M. A. Khan*Mathematical modeling for novel coronavirus (COVID-19) and control*(2020),DOI: 10.1002/num.22695
3. S. N.Kyere, E.Okyere, J. De-Graft Ankamah, *Compartmental SEIRW Covid-19 Optimal Control Model*, Commun. Math. Biol. Neurosci.(2020),2052-2541,https://doi.org/10.28919/cmbn/4998.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

عملکرد دانش آموزان در حل مسایل کلامی ریاضی

ابولفضل رفیع پور[۱]، زهره خزاعی [۲,*]

[۱]عضو هیئت علمی بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان. ایران

[۲]کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی، دبیر ریاضی شهرستان زاهدان. ایران

چکیده. طی دهه های اخیر، مطالعات گسترده ای در مورد مسائل کلامی تفسیری ریاضی انجام شده است. مطالعه شناخته شده «سن کاپیتان» یکی از مشهورترین مطالعاتی است که موجب شد تا توجه دانش پژوهشی به عملکرد دانش آموزان هنگام حل مسائل کلامی تفسیری جلب گردد. نتایج نشان داده است که در بسیاری از موارد، دانش آموزان دانش زندگی روزمره شان را هنگام حل این نوع از مسائل به کار نمی گیرند. به منظور درک عمیقی از این پدیده، مسیر های خاصی از مطالعات پیرامون این نوع از مسائل کلامی انجام گرفته است. در این مقاله، روش ها و نتایج برخی از این مطالعات که در کشور های مختلف انجام گرفته است، به اختصار مرور می گردد.

واژه‌های کلیدی: مسائل کلامی ریاضی، مسائل کلامی تفسیری، دنیای واقعی، دنیای ریاضی .

۱. مقدمه

نمونه های زیادی از پاسخ های دانش آموزان به مسائل کلامی وجود دارد، که نشان می دهد آنان دانش دنیای واقعی را هنگام حل مسائل کلامی به کار نمی گیرند. مشهورترین مثال در این زمینه، مربوط به پژوهشی در فرانسه است که برای دانش آموزان پایه اول و دوم دبستان، مطرح گردید: «۲۶ گوسفند و ۱۰ بز روی یک کشتی هستند. سن کاپیتان چه قدر است؟» اکثر آنان به این مسئله ی غیر قابل حل، به وسیله جمع اعداد داده شده در مسئله پاسخ دادند، بدون این که به بی معنا بودن مسئله و راه حلشان توجه کنند. این یافته بسیار مسئله ساز شد، چرا که یکی از توجیهات عمده برای اهمیت نقش ریاضی در برنامه درسی، درک و حل مسائل دنیای واقعی است [۴].

جهت بررسی نظام مندتر عملکرد دانش آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی، محققین دانش آموزان را با دو دسته از مسائل کلامی (استاندارد و تفسیری) مواجه کردند. مسائل کلامی استاندارد: مسائلی هستند که دارای یک جواب سر راست عددی بوده و جواب نهایی مسئله با استفاده از عملیات حسابی بر روی اعداد داده شده در مسئله به دست می آید و جواب نهایی نیازی به تفسیر ندارد [۵]. به عنوان مثال، مسئلهٔ «یک مرد یک طناب ۱۲ متری را به تکه های ۵/۱ متری می برد. او چند تکه طناب به دست می آورد. مسائل کلامی تفسیری: مسائلی هستند که برای پاسخگویی مناسب به آن، نیاز به در نظر گرفتن موقعیت دنیای واقعی است و تنها با استفاده از یک یا چند عملیات حسابی با اعداد داده شده در مسئله نمی توان به آن پاسخ داد [۲]. به عنوان مثال، مسئلهٔ «یک مرد می خواهد بین دو ستون را که به فاصله ۱۲ متری از هم قرار دارند را طنابی بکشد، اما او فقط تکه های ۵.۱ متری از طناب دارد. او به چند تکه طناب نیاز دارد تا بین دو ستون طناب بکشد؟».

*سخنران. آدرس ایمیل: z.khazaei26@gmail.com

۲. پیشینه

تحقیقاتی در ایرلند شمالی و فلاندر انجام گرفت که از دانش آموزان آزمونی با مسائل کلامی استاندارد و تفسیری گرفته شد. روی هم رفته نتایج نشان داد که دانش آموزان تمایل به حذف دانش دنیای واقعی و ملاحظات واقع گرایانه دارند [۷]. مشابه این تحقیقات در بسیاری از کشور ها مانند بلژیک، چین، مجارستان، ژاپن، سوییس و ونزوئلا تکرار شد که نتایج این تحقیقات در یک راستا بود و موجب تعجب و ناامیدی محققینی شد که پیش بینی می کردند این تصویر «فاجعه بار» در مورد دانش آموزان خودشان صادق نیست [۹].

محققین تلاش های مختلفی برای افزایش تعداد پاسخ های واقع بینانه دانش آموزان هنگام حل مسائل کلامی انجام دادند. برخی با ایجاد مداخلاتی طولانی مدت و برخی کوتاه مدت، تلاش کردند تا تعداد واکنش های واقع بینانه دانش آموزان بیشتر شود. از جمله مداخلات طولانی مدت، می توان به مطالعه ورشافل و همکاران [۸] اشاره نمود. این مداخله در ۱۲ هفته و جمعاً ۱۵ ساعت انجام گرفت که روی هم رفته تأثیر مثبتی روی توسعه استراتژی ها و مهارت های حل مسئله شرکت کنندگان گذاشت [۶].

از جمله تلاش های کوتاه مدت به منظور به کارگیری عقل سلیم و درنظر گرفتن ملاحظات واقع گرایانه در حل مسائل کلامی تفسیری؛ می توان به مطالعه سین و همکاران [۱۰] اشاره کرد، آنان ۱۰ زوج از مسائل کلامی تفسیری و استاندارد که از مطالعه اصلی ورشافل و همکاران، گرفته شده بود، را به دو صورت بررسی کردند: «راهنمایی با هشدار» و «راهنمایی فرایند گرا» که این راهنمایی ها بالای برگه امتحان چاپ شده بود. در «راهنمایی با هشدار» به دانش آموزان اعلام می شد که برخی از مسائل آن گونه که آسان به نظر می رسد، نیست و در «راهنمایی فرایند گرا» از دانش آموزان خواسته می شد، تا امتحان را با توجه به دو سؤال که به راه حلشان کمک می کند، شروع کنند:

(۱) چه موقعیت هایی از زندگی واقعی در پس صورت مسئله است؟

(۲) آیا استفاده از عملیات ریاضی سر راست برای حل این مسائل مناسب است؟

نتایج نشان داد، از لحاظ آماری درصد ملاحظات واقع بینانه کم است (راهنمایی با هشدار ۲۱ درصد و راهنمایی فرایندگرا ۲۸ درصد). آموزش فرایندگرا، تاحدی باعث فعال شدن دانش و تجربیات دنیای واقعی دانش آموزان گردید، اما تأثیر این هشدارها پایین بود.

علاوه بر آن دولف و همکاران [۱] در بخشی از مطالعه شان تأثیر بازنمایی تصویری را بررسی کردند. محققان، دو پژوهش مشابه را در ترکیه و بلژیک انجام دادند، در حالی که انتظار می رفت بازنمایی های تصویری به ایجاد تصویر ذهنی دانش آموزان از موقعیت منجر شود، محققان دریافتند که هم دانش آموزان ترکیه و هم دانش آموزان بلژیک، هنگام حل مسائل کلامی ریاضی، تمایل به حذف دانش دنیای واقعی دارند. در ادامه این مطالعات، دولف و همکاران [۲]، در دو آزمایش دلیل مؤثر نبودن بازنمایی های تصویری را بررسی کردند. آنان در اولین آزمایش حرکت چشمان دانش آموزان را ثبت کردند. نتایج اولین آزمایش نشان داد که دانش آموزان به میزان کم و یا هیچ توجهی به تصاویر نداشتند. بنابراین آن ها آزمایش دوم را به گونه ای طراحی کردند که دانش آموز قبل از آن که متن مسئله را بخواند، بایستی به مدت ۵ ثانیه به تصویر نگاه می کردند. نتایج این تحقیق نیز اثر مثبتی را روی واقع گرایی پاسخ ها نشان نداد. هر چند نتایج هر دو مطالعهٔ [۱، ۲] ناامید کننده بود، دولف و همکاران [۳] برای نمایش پیچیدگی مدلسازی واقعی، عناصری اضافی به تصاویر اضافه کردند. در حالی که انتظار می رفت اثر مثبتی دیده شود، اما هیچ کدام به پاسخ واقع بینانه مسائل کلامی تفسیری کمکی نکرد. این یافته ها نشان داد که دانش آموزان مدارس ابتدایی، هنگام حل مسائل کلامی، تمایل بسیار قوی و مقاومی به حذف دانش دنیای واقعی دارند [۳].

در ادامه، مطالعات دیگری تأثیر افزایش اصالت را در این مسائل بررسی کردند. به عنوان مثال، نوع متفاوتی از حالت سنتی مسئله کلامی اتوبوس (۳۲۸ نفر از شهروندان یک شهر می خواهند به سفر بروند. در هر اتوبوس ۴۰ نفر می توانند بنشینند. چند اتوبوس نیاز هست تا آنان بتوانند به سفر بروند؟) را به دانش آموزان ارائه داد و از دانش آموزان خواست تا یک برگهٔ سفارش را پر کنند: روی این برگه، آن ها باید، اسم مدرسه، تاریخ گردش، تعداد اتوبوس های مورد نیاز و تذکرات اضافه را می نوشتند. در قسمت اول، تنها دو نفر از ۲۰ نفر پاسخ مناسب دادند و از ۱۸ نفری که پاسخ نامناسب داده بودند، ۱۷ نفر تفسیر نادرستی از باقی مانده داشتند. در مقابل در قسمت دوم که مسئله با زمینه دنیای واقعی داده شده بود؛ ۱۶ نفر از ۲۰ نفر پاسخ واقع بینانه ای دادند. ملن و همکاران [۴]، تأثیر بازنویسی مسائل کلامی تفسیری و تعامل در گروه های دونفره، را بررسی کردند. در این مطالعه از دانش آموزان خواسته شد تا مسائل را بازنویسی کنند. روی هم رفته، تعداد پاسخ

های واقع بینانه خیلی کم بود (یعنی ۶۷/۲۲ درصد). این نتایج در راستای مطالعات قبلی انجام گرفته بود. در مطالعه دیگری، ورشافل، دکرت و برگارت [۸]، هفت مسئله کلامی تفسیری را از معلمان ضمن خدمت مدارس ابتدایی فلاندر، آزمون گرفتند. نتایج آنان نشان داد که تنها ۴۸ درصد از معلمان به مسائل پاسخ واقع بینانه دادند. از جمله مطالعات اخیر در این زمینه، مطالعهٔ ون دورن و همکاران [۶] است. آنان برای تغییر در گرایش دانش آموزان به حذف ملاحظات دنیای واقعی، مسائل را در بافتی طنز آمیز ارائه کردند که روی هم رفته واکنش های واقع بینانه (برای سه مسئله از چهار مسئله) افزایش یافت.

۳. بحث و نتیجه گیری

دیدگاه و فنون حل مسائل کلامی ریاضی معمولا به طور ضمنی و تدریجی از طریق فرهنگ و عملکرد در کلاس درس ریاضی شکل می گیرد [۹]. یکی از روندهای فرهنگ پذیری، از طریق ماهیت مسائلی که در کلاس درس به دانش آموزان داده می شود، شکل می گیرد [۵] و در واقع وجود این نوع مسائل در کتاب های درسی در تغییر و اصلاح دیدگاه دانش آموزان مؤثر خواهد بود. مسائل کلامی تفسیری به عنوان نوعی تمرین برای «مدلسازی» شناخته شدهاند و می تواند با توجه به سطح دانش ریاضی هر پایه تحصیلی، در قالبی از دنیای واقعی و نزدیک به تجربهٔ دانش آموزان طراحی شوند. این نوع مسائل در راستای اهداف برنامه درسی ملی یعنی «تقویت توانایی حل مسائل روزمره و مدلسازی» است و می تواند به عنوان راهبردی اجرایی در این زمینه به کار گرفته شود. به عنوان نمونه در ادامه تعدادی مسئله کلامی تفسیری متناسب با ریاضیات دوره دبستان و متوسطه آمده است.

مسئله کلامی- تفسیری؛ دونده علی در مسابقه دو میدانی بین مدارس شرکت می کند. او در تمریناتی که برای این مسابقه داشت، ۱۰۰ متر را در ۷۰ ثانیه می دوید. در مسابقه اصلی، فاصله خط شروع تا پایان ۱ کیلومتر است، علی این فاصله را در چه مدتی طی می کند؟

مسئله کلامی- تفسیری: آب استخر یکی از کشاورزان استان خوزستان، استخری را برای ذخیره آب کشاورزی که به صورت روباز است، ساخته است. این استخر ۷۵۰ متر مکعب آب دارد. اگر کشاورز در هر هفته ۲۵ مترمکعب برای آبیاری درختان استفاده کند. او تا چند هفته می تواند از آب استخر استفاده کند؟

مسئله کلامی- تفسیری: سود کارگاه تولیدی در یک کارگاه تولیدی کاکتوس، اگر x، تعداد کاکتوس های فروخته شده در یک هفته باشد و معادله هزینه این کارگاه در یک هفته به صورت $c = ۲۲۰/۵ + ۴۲x$ و معادله سود کارگاه در یک هفته به صورت $R = ۲x^۲$ باشد. در این صورت این کارگاه تولیدی در یک هفته چند کالا باید بفروشد تا این که فعالیت تولیدی آن سودآور باشد؟

مراجع

1. T. Dewolf, W. Van Dooren, E. Ev Cimen, and L. Verschaffel, *The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically*, European Journal of Psychology of Education, 82 (2014), no. 1, 103-120.
2. T. Dewolf, W. Van Dooren, F. Hermens, and L. Verschaffel, L.*Do students attend to representational illustrations of nonstandard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they?*, Instructional Science, 43 (2015), 147–3171.
3. T. Dewolf, W. Van Dooren, and L. Verschaffel, *Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical word problems more realistically?*, European Journal of Psychology of Education, 32 (2017), 335–351.
4. M. Mellone, L. Verschaffel, and W. Van Dooren, *The effect of rewording and dyadic interaction on realistic reasoning in solving word problems*, Journal of Mathematical Behavior, 46 (2017), 1-12.
5. B. Greer, L. Verschaffel, and S. Mukhopadhyay, *Modling for life: Mathematics and childerens experience. Modelling and applications in mathematics education*, The 14th ICMI Study, (pp. 98-89), 2007.
6. W. Van Dooren, S. Lem, H. De Wortelaer, and L. Verschaffel, *Improving realistic word problem solving by using humor*, Journal of Mathematical Behavior, 53 (2019), 96-104.
7. L. Verschaffel, E. De Corte, and S. Lasure, *Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems*, Learning and Instruction, 4 (1994), no. 4, 273–294.
8. L. Verschaffel, E. De Corte, and I. Borghart, *Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real world knowledge in mathematical modelling of school word problems*, Learning and Instruction, 4 (1997), 339–359.

9. L. Verschaffel, W. Van Dooren, B. Greer, and S. Mukhopadhyay, *Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling*, Journal für Mathematik-Didaktik, 31 (2010), 9-29.
10. Z. Xin, C. Lin, L. Zhang, and R. Yan, *The performance of Chinese primary school students on realistic arithmetic word problems*, Educational Psychology in Practice, 23 (2007), 145–159.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

وضعیت ریاضی در دانشگاه‌های افغانستان

میرحکیم الله سیدی[۱,*] ، زهرا گویا [۲]

[۱]گروه ریاضیات کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

[۲]گروه ریاضیات کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. هدف این مقاله، بررسی وضعیت ریاضی در دانشگاه‌های افغانستان است. این مطالعه به روش کتابخانه‌ای انجام شد و در آن، اسناد مربوط به وضعیت ریاضی در ۳۹ دانشگاه دولتی این کشور از جمله دانشگاه‌های کابل، مزارشریف و البیرونی، جمع‌آوری شد. تحلیل داده‌ها نشان داد که مهم‌ترین مشکل وضعیت ریاضی کمبود شدید استادان ریاضیِ ورزیده برای تدریس ریاضی و فقدان استادان آموزش ریاضی در گروه‌های ریاضیِ دانشگاه‌های دولتی در افغانستان است. برای خروج از این وضعیت، سیاست‌گذاران بومی می‌توانند با کمک سازمان‌های بین‌المللی، تفاهم‌نامه‌هایی بین افغانستان و کشورهای منطقه به‌ویژه ایران، برای تربیت و تأمین نیروی انسانی مورد نیاز برای ارتقای ریاضی در دانشگاه‌های این کشور، منعقد کنند.

واژه‌های کلیدی: وضعیت ریاضی در دانشگاه‌های دولتی افغانستان، مدرس ریاضی، رشته ریاضی، رشته آموزش ریاضی .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97B20, 97A40.

۱. مقدمه

افزایش کیفیت یادگیری ریاضی، همیشه و در برهه‌های زمانی گوناگون، مورد توجه گروه‌های مختلف جامعه قرار گرفته است. ریاضی بهعنوان یک حوزه معرفتی، از یک سو به شدت انتزاعی، سلسله‌مراتبی، استنتاجی، دقیق، رسمی و فشرده است و از سوی دیگر، علمی کاربردی است که توانایی حل مسائل واقعی را در زندگی روزمره انسان دارد. همچنین ریاضی را می‌توان به‌مثابه یک زبان نگاه کرد که با آن، می‌توان روش‌های تحلیلی برای زبان ابداع نمود که در دنیای مجازی جدید، نیاز به این مهارت بیش از پیش، احساس می‌شود، زیرا نقش زبان ریاضی در توسعه تکنولوژی‌های نوین و تولید انواع پلتفورم‌های الکترونیکی، بی‌بدیل است. بنابراین فرآیند یادگیری ریاضی در دوره‌های آموزش عمومی و عالی، نیازمند توجه و دقت زیاد است. سه عامل اصلیِ اثرگذار بر این فرایند، یاددهنده- معلم و استاد ریاضی، یادگیرنده- دانش‌آموز و دانشجوی ریاضی، و محتوای درسی یا همان برنامه درسی است که تمرکز این مقاله، تنها بر عامل یاددهنده برای تدریس ریاضی در دانشگاه‌های افغانستان است. در فرآیند یادگیری و تدریس ریاضی، استادان نقش حائز اهمیتی دارند. زیرا آنان هستند که به برنامه درسی ریاضی معنا می‌بخشند و با ایجاد محیط آموزشی مناسب، زمینه‌های درک و فهم ریاضیِ دانشجویان را فراهم می‌کنند. چنین تدریسی، به پرورش تفکر ریاضی، بالابردن انگیزه یادگیری ریاضی و ارتقای وضعیت ریاضی در کلاس‌های درس دانشگاهی کمک می‌کند. ریاضی یکی از درس‌های اصلی دانشگاهی است که داشتن درک درست از آن، در آینده تحصیلی دانشجویان و پیشرفت علمی هر کشور، نقش مهمی دارد. با وجود این، یکی ازمشکلات عمده نظام تعلیمی و تحصیلی در افغانستان، جبهه‌گیری بین دانشجویان و مدرسان درس ریاضی است که باعث گسست بین آن‌ها شده است. ریشه این جبهه‌گیری از آنجاست که معمولاً استادان درس ریاضی، بدون توجه به ظرفیت و انگیزه و علاقه دانشجویان، بیشترین تلاششان در جهت تطابق برنامه ریاضی با آنان است، بدون آن که به توانمندیِ دانشجو و پیشینه آموزشی وی توجه کافی شود. با این وضعیت،

*سخنران. آدرس ایمیل: mirhakimullah2440@gmail.com

دانشجو احساس آزادی نمی‌کند تا آنچه را که در ذهن و اندیشه خود نسبت به ریاضی و یادگیری آن دارد، برای استادش بازگو کند. علاوه بر این، بعضی از استادان در دانشگاه‌های افغانستان، در شروع نیم‌سال تحصیلی و قبل از آغاز به تدریس، از دانشجویان امتحان می‌گیرند که اگرچه این کار در مدرسه مرسوم است و به آن «ارزشیابی آغازین» گفته می‌شود [۱]، ولی در دانشگاه دور از انتظار است. به‌ویژه برای دانشجویانی که اولین بار با فضای آموزشیِ متفاوت دانشگاه مواجه می‌شوند که تفاوت زیادی با مدرسه دارد که عموماً، فضایی آشنا با زندگی دانش‌آموزان به لحاظ فرهنگی و اجتماعی دارند. برای ورود به دانشگاه، داوطلبان از طریق آزمون ورودی یا همان کنکور اقدام می‌کنند و تعیین دانشگاهِ محل تحصیل، بر اساس رتبه آنان است که در بسیاری مواقع، با انتخابشان یا خواسته‌شان، مطابقت ندارد. بدین سبب دانشجویانی که از ولایات دوردست یا از روستاهای کشور به دانشگاه‌های ناآشنا می‌روند، برایشان سخت است که از همان ابتدا، مورد قضاوت استاد واقع شوند. این کار باعث می‌شود که دانشجویان، به جای آن که تشویق شوند، احساس کنند که مورد تهدید قرارگرفته و دچار ترس و اضطرابی شوند که مانع یادگیری ریاضی آنها شود [۳]. علاوه بر این، منابع تدریسیِ استادان به‌روز نیست و گاهی ازجزوه‌های درسی حدود چندین دهه گذشته استفاده می‌شود که به غیر از موارد استثنایی، قاعده اکثر دانشگاهای دولتی همین است. این در حالی است که با گسترش فناوری اطلاعات و ارتباطات، دسترسی به اینترنت، و رشد روز افزون مجلات معتبر درسطح جهان، انحصار کتاب و جزوه را به‌عنوان تنها منبع برای تدریس، در بسیاری از نظام‌های آموزش عالی جهان شکسته است. در شرایط جدید می‌توان با توسعه زیرساخت‌های لازم، به استادان و دانشجویان کمک کرد تا با مطالب علمی جدید و مرتبط به درسی که تدریس می‌کنند، وضعیت ریاضی را بهبود بخشید. این در صورتی است که مدرسان ریاضی در دانشگاه‌های افغانستان، از این امکان به ندرت استفاده می‌کنند که بخشی از این مشکل، مربوط به برنامه درسی ریاضی مصوب در افغانستان است. در حقیقت، کمبود شدید متخصصان باتجربه در ریاضی و آموزش ریاضی و برنامه درسی ریاضی در افغانستان، سبب شده که اکثر اعضای هیئت علمی، به دلیل به‌روز نشدن دانش خود، همان مطالبی را تدریس کنند که خودشان در دوره تحصیلات دانشگاهی، با آنها آموزش دیده بودند و از همان منابع قدیمی از جمله جزوه‌های شخصی و کتاب‌های درسی، برای تدریس به دانشجویان خود، استفاده می‌کنند. چنین نگاهی به تدریس، استاد و دانشجو را به برنامه‌های درسی گذشته محدود می‌کند، اگرچه برنامه‌های درسی ریاضی بازنگری شده‌اند.

۲. نظام آموزشی افغانستان

در کشور افغانستان، نظام آموزش عالی متمرکز است و زبان آموزش، «فارسی» و «پشتوه» است. در تدوین برنامه‌های درسی دوره‌های کارشناسی، تلاش شده است تا از طریق طراحی مجموعه درس‌های عمومی و مشترک درزمینه‌های علم اخلاق، آموزش و پرورش دینی، فلسفه، مهندسی، پزشکی و ریاضیات برای همه رشته‌ها، ارتباط بین فرهنگ و آموزش و پرورش اسلامی، برقرار شود و همه دانشجویان صرف‌نظر از رشته تخصصی خود، این درس‌ها را بگیرند. درحالی که با ورود به جامعه جهانی و با حمایت جامعه جهانی، آموزش رسمی به عرصه ظهور در آمد. طی سال‌های قبل از ۲۰۰۰، دانشگاه کابل در شهرکابل، دانشگاه مزار در شهر مزارشریف، دانشگاه هرات درشهرهرات و چندین دانشگاه دیگر در سایر شهرها، احداث گردید و از آن زمان به بعد، آموزش عالی در کشور، پیشرفت قابل توجهی داشته و در مجموع، ۳۹ دانشگاه و چندین دانشکده ریاضی در آنها، تأسیس شده است [۲]. طی بیش از ۲۰ سال، دانشگاه‌ها ومؤسسات آموزش‌عالیِ افغانستان، به ایفای نقش خود جهت برطرف نمودن نیازهای دانشجویان و به‌روزکردن دانش تدریسی و موضوعیِ مدرسان ریاضی، تاحدی موفق بوده است. همچنین، جذب دانشجو که از بین آنها، استادان آینده دانشگاه‌ها تربیت می‌شوند، توسط آزمون ورودی متمرکز (کنکور) که از طرف وزارت تحصیلات عالی افغانستان برگزار می‌شود، صورت می‌پذیرد. در این کنکور، دانشجویان بسیاری که نمره‌های پایینی در ریاضی دارند، وارد رشته ریاضی می‌شوند که باعث ایجاد مشکل در تدریس ریاضی در دانشگاه می‌شود.

۳. چارچوب قانون سیاست ملی

در قانون اساسی افغانستان و در طرح عملیِ گسترش علم و دانش در میان شهروندان افغانستانی آمده است که «قانون تحصیلات عالیِ ملکی دارای ۷ فصل و ۷۲ ماده است». درفصل نخست احکام عمومی، چون هدف و اصطلاح‌ها ، وظایف و مکلفیت‌های[۱] وزارت تحصیلات عالی» ذکر شده است. وظایف و صلاحیت‌های شورای عالی و برگزاری جلسات، در فصل

[۱] وظایف و تعهدات (تکلیف‌ها)

دوم توضیح داده شده است. فصل سوم این قانون، در مورد دانشگاه است و مسایلی چون تأسیس دانشگاه‌های دولتی و خصوصی، وظایف و صلاحیت‌های دانشگاه‌ها، چارچوب‌های آکادمیک اعضای هیئت علمی، زبان تدریس، نصاب درسی و تمام مسایل مربوط به ساختار وظایف و صلاحیت‌های دانشگاه‌ها، دانشکده‌ها و گروه‌های درسی، در این فصل آمده است. فصل چهارم دربرگیرنده اعضای کادر علمی و شرایط پذیرش استادان و وظایف کادرعلمی و موارد مرتبط با نیروی انسانی مورد نیاز تدریس و پژوهش در دانشگاه‌هاست. در فصل پنجم، به بورد ارتقای کیفیت و اعتباردهی آکادمیک دانشگاه‌ها پرداخته شده است. فصل ششم مربوط به پذیرش دانشجویان دردوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری در دانشگاه‌ها است و به چگونگی توزیع آنان در دانشگاه‌ها و سایر مسایل دانشجویی پرداخته شده است. با وجود این، تا به حال در هیچ‌کدام از دانشگاه‌های دولتیِ افغانستان، دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی و آموزش ریاضی، راه‌اندازی نشده است. قانون تحصیلات عالی ملکی، اگرچه بی‌عیب و کاستی نیست، اما تا اندازه زیادی راه را برای اصلاحات اساسی و توسعه دانشگاه‌ها در درازمدت، باز کرده است. مشکل بنیادین در افغانستان در همه زمینه‌ها، عدم سازگاری و سازماندهی و اجرای این قانون در دانشگاه‌هاست. در صورتی که اجرایی کردن این قانون، بسیاری از نارسایی‌ها وکاستی‌های موجود در آموزش‌عالی و دانشگاه‌های افغانستان، از بین می‌رود و نابه‌سامانی دانشگاه‌ها، کاهش خواهد یافت. در هدف‌های اساسی این قانون، بر مواردی تأکید شده است که مهم‌ترین‌شان بدین قرارند: رشد و بالابردن کیفیت آموزش عالی به منظور تقویه ی منابع انسانی، تعیین مکلفیت‌ها و مسئولیت‌های اعضای کادر علمی در امر آموزش و پرورش دانشجویان، تربیه‌ی کادر علمی در رشته‌های مختلف از جمله رشته ریاضی، پیشرفت فعالیت‌های آموزشی، علمی، پژوهشی و خدماتی و تقویه‌ی روحیه وحدت ملی و وطن‌دوستانه در میان جوانان. در این قانون، وزارت تحصیلات عالی، از دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی خواسته است که به منظور تربیت کادر علمی مورد نیاز خود با درجه لیسانس (کارشناسی) و بالاتر از آن و برای پژوهش‌های علمی، فعالیت نمایند. در افغانستان، دانشگاه دولتی به دانشگاهی گفته می‌شود که بودجه آن از هر جهت، توسط دولت تأمین می‌شود. در صورتی که دانشگاه‌های خصوصی، تنها از وزارت تحصیلات عالی، جوازِ فعا لیت می‌گیرند و دولت درکمک مالی به آنها، نقشی ندارد. در این قانون، دانشگاه به نهاد آموزشی گفته می‌شود که حداقل دارای شش دانشکده با برنامه‌های درسی مصوب (معیار) باشد. در حالی که تعداد زیادی از دانشگاه‌ها، برنامه درسی مدون ندارند و درس‌هایی که ارائه میدهند، دانشجویان را با چالش‌های زیادی مواجه می‌کند و بیشتر درس‌هایی را که دانشجویان می‌گذرانند، با لایحه یا «برنامه درسی جدید[۲]»، سازگاری کمی دارد. در صورتی که این سیستم، تنها ضوابط اولیه را برای درس‌ها تعیین نموده و برای بالا بردن سطح برنامه، زمان زیادی لازم است.

۴. برنامه درسی ریاضی دوره دانشگاهی

بین سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۲۰، وزارت علوم افغانستان با دعوت از کادر علمی دانشگاه‌ها، برنامه درسی ریاضی را دوباره‌نگری نمود و برای اجرا به دانشگاه‌ها ابلاغ کرد. در برنامه جدید، بر چهار مورد زیر تأکید شده است:

- ویژگی‌های لازم در اهداف برنامه درسی ریاضی،
- تأکید بیشتر بر تجربه‌ها و روش‌های نوین آموزشی،
- تقویت به‌سازی مدرسان ریاضی ضمن خدمت،
- ادامه تحصیل معلمان شاغل با مدرک دیپلم و کاردانی در در دوره کارشناسی ریاضی در دانشگاه‌ها.

در دانشگاه‌های افغانستان، درس‌های ریاضی دوره لیسانس، برای تمام دانشجویان ارائه می‌گردد تا درک مناسبی از حل مسئله و استفاده از ریاضی در زندگی روزمره پیدا کنند. این درس‌ها، برای تمام رشته‌ها از جمله ریاضی، علوم پایه، مهندسی، اقتصاد، کشاورزی، مدیریت و علوم تربیتی است.

۵. پیشنهادات

- توسعه نیروی انسانی در حوزه ریاضی و آموزش ریاضی در دانشگاه‌های افغانستان از طریق همکاری با دانشگاه‌های ایران و منطقه و اهدای بورس تحصیلی به دانشجویان مستعد و مدرسان شاغل.
- استفاده ازتجارب کشورهایی که از لحاظ فرهنگی، با افغانستان تقارب بیشتر دارند. دراین زمینه، ایران یک مثال زنده و خوب بوده و این کشور می‌تواند از برنامه‌های آموزشی نوین آن در توسعه ریاضی دانشگاهی، استفاده کند.

[۲] به برنامه درسی جدید، «سیستم کریدت» گفته می‌شود.

- هماهنگی و همکاری دانشگاه‌های ایران و افغانستان برای ارتقای کیفیت برنامه‌ها و تدریس ریاضی.
- فراهم‌آوری امکانات و تسهیلات در زمینه‌های مختلف ازجانب وزارت علوم افغانستان و در رأس آن زیرساخت‌های آموزش مجازی مانند اینترنت، برق و اطاق‌های مجهز به امکانات آموزشی.
- استفاده از تجربه راه‌اندازی دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری آموزش ریاضی ایران برای دانشگاه‌های افغانستان.

مراجع

۱. قانون لوایح تحصیلات عالی افغانستان(۱۳۹۴)، نشرات تحصیلات عالی .
۲. نگاهی تحلیلی به تاریخ دانشگاه کابل http://www.au.edu.af .
۳. ش. شفیق. چالش‌های پیچیده تحصیلات عالی در افغانستان و جنجال بر سر قانون(۱۳۹۴). بازیابی از سایت www.af.shafaqna.com کد خبری ۷۹۱۴.
۴. نگاهی به وضعیت کنونی دانشگاه‌های افغانستان. www،af.shafaqna.com
۵. ا. غرجی. تحصیلات عالی، امنیت و توسعه در افغانستان(۱۳۹۲). نشرنامه کابل http://fa.wikipdia.org/wiki
6. A. Maher, Learning outcomes in higher education: Implications for curriculum Design and student learning. Journal of Hospitality, Leisure, Sport and Tourism Education (2004), 3(2), 46-54.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بررسی نگهدارنده‌های خطی بردارهای فرزز $n \times ۱$

لیلا فضل‌پر[۱,*] ، علی آرمند نژاد[۲]

[۱]گروه ریاضی، دانشگاه ولیعصر(عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

[۲]گروه ریاضی، دانشگاه ولیعصر(عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

چکیده. فرض کنیم m و n اعداد صحیح مثبت و $R = (r_۱, r_۲, \ldots, r_m)$ و $S = (s_۱, s_۲, \ldots, s_n)$ بردارهای صحیح نامنفی باشند. فرض کنیم درایه های R و S به صورت نزولی مرتب شده باشند. $(۰, ۱)$–ماتریس $m \times n$ $F(R, S)$ فرزز نامیده می‌شود اگر برای هر i، سطر iام آن شامل r_i درایه ۱ و $n - r_i$ درایه ۰ باشد. در این مقاله ما به بررسی نگهدارنده‌های خطی مجموعه بردارهای فرزز $n \times ۱$ بر روی نیم حلقه‌های بولی دوتایی می‌پردازیم و همچنین نمایش ماتریس نگهدارنده‌های خطی بردارهای فرزز $n \times ۱$ را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: نگهدارنده‌ی خطی، نگهدارنده‌ی خطی قوی، بردار فرزز، بردار پله‌ای، شاخص بردار فرزز .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: ۱۵A۳۰

۱. مقدمه

نظریه ماتریس‌های $(۰, ۱)$ در بررسی موضوعات مربوط به محیط شناسی نقش مهمی دارد. برخی از کاربردهای آن در محیط شناسی در ایجاد مدل‌های رشد شرایط آب و هوایی و مدل‌های گرده افشانی گیاهان می‌باشد.

فرض کنیم B نیم حلقه‌ی بولی دوتایی باشد. به عبارت دیگر $B = \{۰, ۱\}$ که در آن $۱ + ۱ = ۱$ و سایر عملیات جمع و ضرب به صورت معمولی می‌باشد. فرض کنیم $M_{m,n}(B)$ مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ را نشان می‌دهد که درایه‌های هر ماتریس متعلق به مجموعه B است. فرض کنیم فرض کنیمI_n ماتریس همانی $n \times n$را نشان دهد که در صورت مشخص بودن بعد ماتریس به اختصار با I نشان می دهیم.

یک عملگر خطی بر روی مجموعه $M_{m,n}(B)$ یک نگاشت T است به طوری که دارای خاصیت جمعی و همگن است. به عبارت دیگر $T(A + B) = T(A) + T(B)$ و $T(\alpha A) = \alpha T(A)$ برای هر $\alpha \in B$.

فرض کنیم $T : M_{m,n}(B) \to M_{m,n}(B)$ یک عملگر خطی باشد. گویم عملگر T مجموعه $X \subseteq M_{m,n}(B)$ را حفظ می‌کند اگر $A \in X \Rightarrow T(A) \in X$ و همچنین گفته می شود عملگر T به طوری قوی مجموعه X را حفظ می‌کند اگر $A \in X \Leftrightarrow T(A) \in X$.

بیزلی در [؟] عملگرهای خطی دو سویی حافظ مجموعه ماتریس‌های فرزز $n \times n$ را به صورت زیر دسته بندی کرده است:

قضیه ۱.۱. فرض کنیم $T : M_{m,n}(B) \to M_{m,n}(B)$ نگهدارنده‌ی خطی مجموعه ماتریس‌های فرزز باشد. در این صورت یکی ازموارد زیر برقرار است:

(۱). $T = I$

(۲). $m = n, T(A) = A^t, A \in M_{m,n}(B)$

ما در این مقاله به بررسی عملگرهای خطی حافظ مجموعه بردارهای فرزز $n \times ۱$ می‌پردازیم.

*لیلا فضل پر. آدرس ایمیل: fazlparleila65@gmail.com

تعریف ۲.۱. یک ماتریس $m \times n$ با درایه های ۰ و ۱ ماتریس فرزز نامیده می‌شود اگر دارای جمع سطری نزولی بوده و هر سطر آن شامل تعدادی ۱ بوده و سایر درایه‌ها ۰ باشد یا به طور معادل $a_{ij} = ۱$ نتیجه دهد که

$$k \leqslant i \ , \ \mu \leqslant j \Rightarrow a_{k\mu} = ۱$$

مثال ۳.۱. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس فرزز است.

ملاحظه ۴.۱. در این مقاله بردارهای فرزز را با نماد V و مجموعه بردارهای فرزز $n \times ۱$ را با نماد FV نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱. گوییم بردار $V \in B^n \{۰, ۱\}$ پله‌ای از مرتبه i است اگر i مولفه‌ی اول آن ۰ و مولفه‌ی $i+۱$–ام آن ۱ باشد که در آن $۰ \leqslant i \leqslant n-۱$. مرتبه بردار پله‌ای V را با نماد $S(V)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۶.۱. سطر iام ماتریس نمایش A را با نماد A_i نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۱. فرض کنیم $A \neq ۰$ ماتریس نمایش یک عملگر T باشد. در این صورت A نگهدارنده خطی بردارهای فرزز $n \times ۱$ است اگر و فقط اگر به ازای هر $i = ۰, ۱, \ldots, n$، A_i یک بردار پله‌ای باشد و $S(A_۱) = ۰$ و

$$S(A_۱) \leqslant S(A_۲) \leqslant \ldots \leqslant S(A_n)$$

به عبارت دیگر اگر و فقط اگر A به فرم زیر باشد.

$$\begin{bmatrix} ۱ & & * & & & \\ \vdots & & & & & \\ ۱ & \cdots & & & & \\ & & ۱ & & * & \\ & ۰ & \vdots & & & \\ & & ۱ & \cdots & & \\ & & & & ۱ & & * \\ & & ۰ & & \vdots & \\ & & & & ۱ & \cdots & \end{bmatrix}$$

تعریف ۸.۱. تعداد یک‌های بردار فرزز V را شاخص بردار V نامیده و با $l(V)$ نشان نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۹.۱. مجموعه کل عملگرهای حافظ بردارهای فرزز $n \times ۱$ را با نماد LFV نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱. تعداد کل عملگرهای حافظه بردارهای فرزز $n \times ۱$ که با نماد $|LFV|$ نشان داده می شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|LFV| = \sum_{j=۱}^{n} \sum_{i_۱=j}^{n} \sum_{i_۲=i_۱}^{n} \cdots \sum_{i_{n-۲}=i_{n-۱}}^{n} ۲^{l(V_j)+l(V_{i_۱})+\cdots+l(V_{i_{n-۲}})} \left(n+۱-l\left(V_{i_{n-۲}}\right)\right)$$

مثال ۱۱.۱. ماتریس نمایش عملگرهای حافظ بردارهای فرزز ۱×۳ با توجه به قضیه ذکر شده به صورت زیر است.

$$\underset{۲^۵ = ۳۲}{\begin{bmatrix} ۱ & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} \\ ۰ & ۱ & \alpha_{۲۳} \\ ۰ & \alpha_{۳۲} & \alpha_{۳۳} \end{bmatrix}} \quad , \quad \underset{۲^۳ = ۸}{\begin{bmatrix} ۱ & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \alpha_{۳۳} \end{bmatrix}} \quad , \quad \underset{۲^۲ = ۴}{\begin{bmatrix} ۱ & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}}$$

$$\underset{۲^۶ = ۶۴}{\begin{bmatrix} ۱ & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} \\ ۱ & \alpha_{۲۲} & \alpha_{۲۳} \\ ۰ & \alpha_{۳۲} & \alpha_{۳۳} \end{bmatrix}} \quad , \quad \underset{۲^۶ = ۶۴}{\begin{bmatrix} ۱ & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} \\ ۱ & \alpha_{۲۲} & \alpha_{۲۳} \\ ۱ & \alpha_{۳۲} & \alpha_{۳۳} \end{bmatrix}}$$

همچنین این تعداد با توجه به فرمول داده شده در قضیه ۹.۱ قابل محاسبه است.

$$|LFV| = \sum_{j=۱}^{۳} \sum_{i_۱=j}^{۳} ۲^{l(V_j)+l\left(V_{i_۱}\right)} \left(n+۱-l\left(V_{i_۱}\right)\right) = \sum_{j=۱}^{۳} \sum_{i_۱=j}^{۳} ۲^{j+i_۱} \left(n+۱-i_۱\right)$$

اگر $P_j = \sum_{i_۱=j}^{۳} ۲^{j+i_۱} \left(n+۱-i_۱\right)$ در این صورت

$$P_۱ = ۲۸$$
$$P_۲ = ۶۴$$
$$P_۳ = ۶۴$$

در این صورت $|LFV| = ۱۷۲$ که از روی ماتریس نمایش قابل توجیه است.

۲. نتیجه‌گیری

نگهدارنده‌های خطی حافظ بردارهای فرزز ۱ × n دارای نمایش ماتریسی مشخصی هستند؛ و تعداد آن‌ها با استفاده از الگوریتم توسط برنامه متلب قابل محاسبه است.

مراجع

1. L. B. Beasley and N. J. Pullman, Linear operators that strongly preserve graphical properties of matrices, Discrete Mathematics, 104 (2), (1992) 143-157.
2. L. B. Beasley, (0,1)-Matrices, Discrepancy, and preservers, Czechoslovak Mathematical Journal, 69, (2019) 1123–1131.
3. L. Fazlpar and A. Armandnejad, Linear preservers of Ferrers matrices, Preprint.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

می‌خواهم متقلب بمانم!
(نقدی بر روش‌های سختگیرانهٔ تشخیص تقلب در ارزشیابی مجازی ریاضی و ضرورت تغییر رویکرد)

محمدحسام قاسمی[۱،*] ، زهرا گویا [۲]

[۱]گروه ریاضیات کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

[۲]گروه ریاضیات کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. اثرگذاری گسترده بحران کرونا بر آموزش ریاضی به ویژه موضوع تقلب و اعتبار نمرات در ارزشیابی‌های آنلاین و مجازی، ما را بر آن داشت تا این موضوع مهم را بررسی و عوامل بروز آن را ریشه‌یابی کنیم. برای این کار، با استفاده از پرسش‌نامه‌ای که طراحی کردیم، نظرات ۸۰ معلم ریاضی را از سراسر کشور، راجع به آزمون‌های آنلاین و مجازی، دریافت کردیم. سپس با نقد عوامل زمینه‌ساز تقلب، روش‌های نوین خنثی‌سازی مبتنی بر فناوری و همچنین نقد روش‌های فعلی مورد استفاده برای کنترل و سختگیری بیشتر در امتحانات، راه علاج این معضل را درگرو تغییر رویکرد به روش‌ها و اهداف ارزشیابی ریاضی و افزایش اعتبار و استقلال معلمان و اعتماد کامل به آن‌ها در فرایند سنجش، یافتیم.

واژه‌های کلیدی: ارزشیابی مجازی، تقلب، همه‌گیری کووید ۱۹، آموزش ریاضی، اعتبار معلمان .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97Q70. 97U50 97D60.

---

۱. مقدمه

با اعلام شروع همه‌گیری کووید-۱۹ توسط «سازمان بهداشت جهانی» در ژانویه ۲۰۲۰، به یک‌باره شوک بزرگی بر پیکر نظام‌های آموزشی سراسر دنیا وارد شد. با اعلام وضعیت قرنطینه، کلاس‌ها از حالت حضوری خارج شد و آموزش‌های آنلاین و مجازی جایگزین آن گردید. به دلیل مهیا نبودن زیرساخت‌های مربوط به این نوع از آموزش و بی‌تجربگیِ نظام‌های آموزشی در مواجهه با این پدیده، بار اصلی آموزش را معلمان و اساتیدی به دوش کشیدند که آنها هم برای چنین شرایطی، آموزش ندیده بودند. تدریس در چنین وضعی، نه تدریس آنلاین و الکترونیکی و نه آموزش از راه دور و تدریس خانگی، بلکه این تدریس، تدریس بحران بود! [۳]. در این بین، مسئله ارزیابی کیفیت آموزش و سنجش میزان یادگیری و شایستگی دانش‌آموزان و دانشجویان از ابتدا به دشوارترین کار برای معلمان و استادان تبدیل شد. برای معلمان ریاضی با نگاه غالباً سنتی به تدریس و روش‌های سنجش یادگیری ریاضی، اعتبار و سلامت نمره‌های امتحانی که بیشتر از راه دور و بدون تسلط معلم بر محیط آزمون کسب می‌شد، به موضوعی حساس و حیثیتی بدل شد. انواع روش‌های سنتی برای کنترل تقلب در امتحان، یکی پس از دیگری ناکارامدی خود را عیان ساختند. از این رو، معلمان به روش‌هایی ابتکاری و گاهی مبتنی بر تکنولوژی‌های پیشرفته برای شناسایی تقلب در آزمون‌ها، روی آوردند. هرچند این تمهیدها به شکل محدودی مؤثر بود، اما در عمل و به دلیل ماهیت پاسخ‌های درس ریاضی، مهم‌ترین و مؤثرترین راه چاره، اعتماد به دانش‌آموزان و دانشجویان است.

*سخنران. آدرس ایمیل: ghasemi.math91@gmail.com

۲. ارزشیابی آنلاین و مجازی ریاضی

در رویکردهای نوین آموزشی، ارزشیابی و تدریس درهم‌تنیده‌اند و علاوه بر آگاهی از وضعیت یادگیریِ یادگیرندگان و ارزیابی آنان، به بهبود تدریس نیز کمک می‌کند . معلمان به روش‌های گوناگون قبل از شروع تدریسِ یک بخش یادگیری، برای اطمینان از دانش پیش‌نیاز لازم، «ارزشیابی تشخیصی[۱]»انجام می‌دهند. سپس در فرایند تدریس، از طریق «ارزشیابی تکوینی[۲]»، به جمع‌آوری شواهد و مستندات یادگیری برای قضاوت کردن در مورد چگونگیِ یادگیری دانش‌آموزان هستند. در پایان سال یا نیم‌سال تحصیلی نیز، به ارزیابی پایانی از میزان یادگیری محتوای تدریس شده می‌پردازند که به آن «ارزشیابی تراکمی[۳]» گفته می‌شود. در شروع آموزش‌های مجازی نیز تصور می‌شد که می‌توان از هر سه نوع ارزشیابی که در آموزش‌های حضوری مرسوم است، همچنان و با همان کیفیت در آموزش مجازی استفاده نمود. ولی در اجرای آموزش مجازی، معلمان مدرسه و استادان دانشگاه، با چالشی جدی مواجه شدند و اعتبار انواع ارزشیابی‌ها به‌ویژه ارزشیابی تراکمی، برای آنان به یک مسئله جدی تبدیل شد. به طور خاص در مورد ارزشیابی در درس ریاضی، پیچیدگی کار سنجش تا حدود زیادی با ماهیت ریاضی گره خورده است. در سؤال‌هایی با جواب‌های عددی یا برهان‌های مشخص و مسائلی با راه‌حل‌های الگوریتمی، تشابه و یکسانی پاسخ‌های دانش‌آموزان، ناگزیر است و تنها سؤال‌های تحلیلی از این قاعده مستثنی هستند. تومال و همکاران (۲۰۲۱) در تحقیق خود به این نتیجه رسیدند که پاسخ‌های سؤال‌های ریاضی نسبت به سایر موضوع‌های درسی، از نظر ماهیتی امکان تشابه بیشتری دارند. آن‌ها دریافتند که نمره‌های درس ریاضی و آمار که امتحانشان به صورت آنلاین برگزار شده بود، نسبت به آموزش حضوریِ پیش از کرونا، افزایش چشمگیری داشته است. این در حالی است که نمره درس‌هایی که ماهیت نظری دارند و سؤال‌های آن‌ها بیشتر مبتنی بر تفسیرها و استدلال‌های شخصی است، همچنین درس‌های علوم کامپیوتر و مهندسی که سؤال‌هایشان بیشتر مبتنی بر خلاقیت‌های فردی و طراحی‌های شخصی پاسخ‌دهندگان است، نسبت به قبل از همه‌گیری، کاهش داشته‌اند [۴]. این واقعیت که بعد از همه‌گیری، سطح نمرات ریاضی در آزمون‌های آنلاین در مقایسه با دیگر دروس بالاتر رفته است، ضرورت توجه ویژه به ارزشیابیِ آموزش ریاضی به صورت مجازی و آنلاین را آشکار می‌سازد. همین خصلت ذاتی پاسخ‌های سوالات ریاضی، می‌تواند دانش‌آموزان و دانشجویان را به تقلب تشویق کند. بنابراین، تغییر در رویکردهای سنتی به سنجش یادگیری در ریاضی امری لازم به نظر می‌آید.

۳. اِعمال روش‌های سختگیرانه در آزمون‌ها به قصد جلوگیری از تقلب

تقلب از نظر ماهیتی، عملی خلاف اخلاق و در نتیجه، مورد نکوهش است و تقلب در امتحان، باعث تضییع حقوق دیگران می‌شود. به ویژه در مورد آزمون‌هایی در سطح ملی، استخدامی و آن‌هایی که منتج به صدور مدرک، گواهی‌نامه یا مجوز خاصی می‌شوند، سخت‌گیری برای جلوگیری از وقوع تقلب، ناگزیر است. ولی بحث این مقاله، تنها محدود به سنجش یادگیری درس‌های ریاضی و ارزشیابی‌های کلاسی است که با آزمون‌های گفته شده، از اساس متفاوت است. به اعتقاد نویسندگان این مقاله، می‌توان با تغییر نگاه نسبت به ارزشیابی آموزشی و پرهیز از روش‌های نمره‌دهی سنتی و با استفاده از طیف متنوعی از روش‌های ارزشیابی کمّی و کیفی، انگیره‌های توسل به تقلب را تا میزان زیادی کاهش داد. به طور کلی، مطالعات انجام شده برای ریشه‌یابیِ عوامل بروز تقلب در امتحانات را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. دسته اول آن‌هایی هستند که به بیان علیوردی‌نیا و صالح‌نژاد (۱۳۹۲)، بر عوامل انگیزشی و درونی متمرکز هستد و بنابراین، با رشد باورهای اخلاقی در فرد آزمون‌دهنده، می‌توان تمایل او را به تقلب تا حد زیادی کاهش داد [۲]. این در حالی است که پژوهش‌های قابل دسترسی، مبنی بر این که نشان دهد با رفع عوامل درونی یا پرورش و تقویت اخلاقیات، مسئله تقلب قابل پیشگیری باشد، مشاهده نشد. دستهٔ دوم عوامل بروز تقلب، ناشی از عوامل ساختاری، بیرونی و محیط آزمون است (امید و منتظری، ۱۴۰۰) [۱]. بدین سبب، توصیه آن‌ها، بر کنترل فضای برگزاری امتحان، تأثیر انگیزه‌های اجتماعی و فرهنگی و در ابعاد کوچک‌تر، شکل و کیفیت نظارت بیرونی، شکل و نوع سؤال‌های آزمون‌هاست. در آزمون‌های آنلاین که با شیوع همه‌گیری کرونا و جایگزینیِ آموزش مجازی با آموزش حضوری، عوامل بیرونی شامل محدودکردن زمانِ امتحان، عدم امکان بازگشت به عقب و مرور

[۱] Evaluation Initial
[۲] Evaluation Formative
[۳] Evaluation Summative

امتحان، استفاده از نرم‌افزارهای تقلب‌یاب یا سامانه‌های محافظت از آزمون‌ها نیز شد. در راستای کنترل و جهت‌دهی به عوامل بیرونی، استفادهٔ گسترده از نرم‌افزارهای نظارت بر آزمون‌های آنلاین به مسئله‌ای چالش برانگیز تبدیل شده است، تا جایی که باعث اعتراض دانشجویان، معلمان و دانش‌آموزان شده است. برای مثال، نرم‌افزار مراقبت آنلاین Proctorio که حداقل در ۵۰۰ مؤسسه آموزشی در سراسر دنیا مورد استفاده واقع شده است، برای شناسایی تقلب، از فناوری هوش مصنوعی بهره گرفته و با رصد حرکات بدنِ دانشجو و محیط اتاقی که در آن امتحان می‌دهد، موارد مشکوک را شناسایی و یک گزارش فوری همراه با مستندات، برای بخش آموزش محل تحصیل دانشجو ارسال می‌کند. به‌عنوان مثال، چنانچه دانشجو برای مدتی به گوشه‌ای خیره شود یا صدایی متفاوت با صدای او در اتاق شنیده شود، این نرم‌افزار آن را تقلب تشخیص می‌دهد و دانشجو را متقلب معرفی می‌کند. از این گذشته، سامانه‌های نظارت و کنترل هوشمند ،Proctrotrack Examity و TOPHAT نیز با دریافت مبلغی به عنوان حق اشتراک برای هر دانش‌آموز یا دانشجو (از ۱۰ تا ۱۰۰ دلار)، دارای رویه‌هایی مشابه با Proctorio هستند و بعضی از آن‌ها، حتی تا دو میلیون آزمون را نیز نظارت می‌کنند. همچنین سامانه فارسی Self SEB) exam ،(browser با دریافت حق اشتراک، خدمات نظارتی و ضد تقلب ارائه می‌کند. همه این‌ها در حالی است که به طور طبیعی ارزشیابی به این شیوه‌ها، با ماهیت و اهداف سطوح بالاتر ارزشیابی در تعارض است و یکی از بزرگ‌ترین معایب این سامانه‌ها، نقض آشکارِ حریم خصوصی افراد است. برای نمونه در هلند، دادخواستی با ۵۰۰۰ امضا علیه Proctorio جمع‌آوری شده و نمایندگان اتحادیه اروپا نیز مشغول بررسی نقض «مقررات عمومی حفاظت از داده[۴]» (GDPR) توسط این سامانه‌ها هستند [۵]. با تمام این تلاش‌ها، یک سؤال کلیدی مطرح است که کدام یک از این فناوری‌ها و روش‌های سخت‌گیرانه، توانسته است مسئله تقلب را حل کند و چرا همچنان، سرقت علمی و تقلب در آزمون‌ها، به طور گسترده‌ای مشاهده می‌شود؟ برای یافتن پاسخی نسبی به این سؤال، پژوهشی انجام شد که در این مقاله، تنها اشاره‌ای اجمالی به آن می‌شود.

۴. دیدگاه معلمان ریاضی در ایران نسبت به تقلب در آزمون‌ها

با توجه به دغدغه زیاد جامعه آموزشی نسبت به پدیده تقلب و به منظور آشنایی با دیدگاه معلمان ریاضی نسبت به تقلب‌های احتمالی در امتحان‌های مجازی در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹، پرسش‌نامه‌ای طراحی شد که در آن، نظرات معلمان نسبت به عملکرد خود در ارتباط با برگزاری آزمون و روش ارزشیابی و کنترل تقلب، گردآوری شد. این پرسش‌نامه به طور الکترونیکی تهیه و لینک آن در شبکه‌های اجتماعی مربوط به معلمان ریاضی به اشتراک گذاشته شد و بیش از ۸۰ معلم ریاضی، به آن پاسخ دادند. اولین مرحله تحلیل داده‌ها نشان داد که از نظر ۸۸% معلمان ریاضی، پاسخ‌های داده شده توسط دانش‌آموزان به سؤال‌های امتحانی، مشابه هم بوده و ۵۷% آنان، ابراز کردند که پاسخ‌های دانش‌آموزان، یکسان بودند. معلمان بر این باور بودند که این همپوشانی، با تغییر نوع سؤال‌های امتحانی از محاسباتی یا استدلالی به تحلیلی که مبتنی بر نوع تفکر، استدلال و استنباط فردی دانش‌آموزان است، به کمتر از ۹%رسید. نکته قابل توجه دیگر این بود که نزدیک به نیمی از معلمان پس از برگزاری آزمون به صورت مجازی، کاری جدی برای شناسایی موارد تقلب و رسیدگی به آن‌ها انجام ندادند، زیرا به آزمونِ پایانی وزن کم‌تری داده بودند و طبق ارزشیابی‌های تکوینی و شناخت مستمر خود، نمره‌های پایانی را ثبت کرده بودند. این کارِ باعث شده بود تا نسبت به احتمال تقلب در امتحان پایانی که ماهیت تراکمی دارد، دغدغه زیادی نداشته باشند و به دانش‌آموزان اعتماد کنند و تنها به بررسی موارد مشکوک بپردازند. افزون بر این‌ها، ۶۰% معلمان معتقد بودند که نمره‌های ریاضی در آزمون‌های آنلاین و مجازی، نسبت به آزمون‌های حضوری، افزایش داشته است که این یافته، با نتایج تحقیق تومال و رحمتی[۴] که در دانشگاه کَمِلوپ در استان بریتیش کلمبیا درکانادا و در دوره همه‌گیری انجام شد (۲۰۲۱)، هم‌سو بود. نکته دیگر این که اکثر پاسخ‌دهندگان (حدود ۸۰%)، افزایش استقلال و اختیارات معلمان را در ارزشیابی‌ها، مهم‌ترین عامل در ایجاد تغییر دیدگاه نسبت به تقلب و پیشگیری از آن دانستند. آنان بر این باور بودند که به شرط داشتن آزادی عمل، می‌توانند روش‌های سنجش را متناسب با اهداف و رویکردشان به تدریس، طراحی کنند و در نتیجه، به سطحی عمیق‌تر از شناخت چگونگیِ یادگیری ریاضی دانش‌آموزان خود برسند و بتوانند تدریس خود را بهبود بخشند. در آن صورت، نیازی به استفاده از تقلب نخواهد بود. در حقیقت، با تغییر دیدگاه نسبت به ارزشیابی از رقابت و رتبه‌بندی صِرف به شناخت و ارتقای یادگیری دانش‌آموزان، زمینه برای تقلب از بین خواهد رفت.

[۴] GDPR Regulation: Protection Data General The

۵. نتیجه‌گیری

تجزیه و تحلیل مقدماتی داده‌ها نشان داد که با وجود تمایل شدید معلمان ریاضی و نظام‌های آموزشی در ایران و جهان در آموزش عمومی و آموزش دانشگاهی، همچنین با وجود اِعمال انواع روش‌های نظارتی و سخت‌گیرانه، چیزی که در آموزش سنتی/حضوری از آن به عنوان تقلب یاد می‌شود، در فضای مجازی تغییر ماهیت داده است. در واقع، هیچ کدام از روش‌های «تقلب‌یاب» با هر درجه از دقت، قادر نیستند از انجام «تقلب» جلوگیری کنند. واقعیت این است که بررسی پاسخ‌های معلمان ریاضی و تجربه ارزشیابی‌های آنلاین و مجازی، نشان داد که کنترل عوامل درونی یا بیرونی و استفاده از روش‌های سخت‌گیرانه، نمی‌تواند معضل تقلب را حل کند و بیشتر، دانش‌آموزان و دانشجویان را به ابداع روش‌های پیچیده‌تر تقلب، سوق می‌دهد. جامعه آموزشی بدون تغییر دیدگاه، انتظار دارد که آموزش حضوری را با تمام موازین و جزییاتش، در فضای مجازی نیز اجرا کند. در صورتی که ماهیت آموزش مجازی با آموزش فیزیکی و چهره به چهره متفاوت است و در آن، مفهوم تقلب نیز دگرگون شده است. آموزش مجازی، موقتی نیست و به نوعی، صاحب خانه شده است. با این نگاه، لازم است که نظامهای آموزش عمومی و دانشگاهی، نسبت به آموزش مجازی و ویژگی‌هایش از زاویه‌ای نو بنگرند و باور کنند که یک تغییر پارادایمی رخ داده است که در آن، «تقلب» به معنای سنتی، جایگاهی ندارد.

مراجع

۱. ا. امید، ح. منتظری، راهکارهای کاهش تقلب در آزمون‌های مجازی، مجله دانشکده پزشکی اصفهان ۳۹(۱۴۰۰)، شماره ۶۱۵، ۱۴۴-۱۴۲.

۲. ا. علیوردی‌نیا، ص. صالح‌نژاد، بررسی عوامل موثر در اقدام به تقلب توسط دانشجویان، فصلنامه اخلاق در علوم و فناوری(۱۳۹۲)، شماره ۱.

3. Fisher, D., et al., *The Assessment Playbook for Distance and Blended Learning: Measuring Student Learning in Any Setting*. 2020: Corwin.

4. Tomal, J., et al., *The Impact of COVID-19 on Students' Marks: A Bayesian Hierarchical Modeling Approach*. Metron, 2021. 79(1): p. 57-91.

5. Li, M., et al., *Optimized collusion prevention for online exams during social distancing*. npj Science of Learning, 2021. 6(1).

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مقایسه روش تقلیل پایه و روش تفاضلات متناهی برای قیمت گذاری اختیار

مینا گنجعلی[۱] و علی صفدری وایقانی[۲*]

[۱] دانشکده علوم ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی

[۲]دانشکده علوم ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده. قیمت گذاری اختیارهایی که با واقعیت‌های بازار انطباق بهتری دارند با توسیع معادله بلک–شولز قابل بیان است که در اکثر مواقع محاسبه جواب تحلیلی برای آنها امکان‌پذیر نیست. در این مقاله ابتدا به معرفی روش تقلیل پایه برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی–انتگرالی، حاصل از مدلسازی قیمت گذاری اختیار می‌پردازیم. در این روش از توابع پایه بعنوان دنباله‌ای از جواب‌های معادله بلک–شولز با ازای ضریب‌های تلاطم متفاوت استفاده می‌شود. در ادامه روش تفاضلات متناهی را برای تقریب جواب معادله ایجاد شده ارایه می‌دهیم. نتایج عددی مبنی بر مدل انتشار کشش ثابت واریانس نشان می‌دهد که روش تقلیل پایه کارایی عددی و دقت بهتری نسبت به روش تفاضلات متناهی دارد.

واژه‌های کلیدی: تقلیل پایه، تفاضلات متناهی، قیمت گذاری اختیار، مدل کشش ثابت واریانس .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65M70, 91G80.

۱. مقدمه

روشهای بسیاری برای قیمت گذاری اختیارهای معامله وجود دارد و مسئله‌های قیمت گذاری می‌توانند برحسب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و یا یک معادله دیفرانسیل انتگرالی بیان گردد. یکی از روشهای عددی که برای حل مسائل مربوط به قیمت گذاری اختیارات مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تفاضلات متناهی است. این روش، معادله دیفرانسیل جزئی بلک شولز را به وسیله تقریب معادله دیفرانسیل در ناحیه جواب توسط یک دستگاه معادله جبری حل می‌کند. روش دیگری که برای حل مسائل مربوط به قیمت گذاری اختیارات مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تقلیل پایه است. در این روش از طرح‌های عددی متداول و مبتنی بر شبکه‌بندی بهره نخواهیم گرفت بلکه از خانواده‌ای از توابع پایه که از دنباله‌ای از جواب‌های معادله بلک شولز به ازای ضریب تلاطم متفاوت ایجاد شده است، استفاده می‌کنیم که به جواب معادله دیفرانسیل–انتگرالی همگراست. [۱] منظور از تقلیل پایه، تقلیل یک معادله دیفرانسیل–انتگرالی به یک معادله دیفرانسیلی می‌باشد. در ادامه پس از معرفی و ساخت توابع پایه، توابع پایه حاصل از مدل کشش ثابت واریانس را به دست خواهیم آورد و این روش را با روش تفاضلات متناهی مقایسه خواهیم کرد. از ویژگی‌های این روش می‌توان به نرخ همگرایی بالاتر و دقت بهتر و کاهش قابل توجه حجم محاسبات نسبت به روش تفاضلات متناهی اشاره کرد.

۲. مدل ساختاری

مدل‌های متداول مبتنی بر فرآیندهای قیمت دارایی برای قیمت گذاری اختیار به صورت معادله دیفرانسیل–انتگرالی همراه با تابع عایدی ϕ به صورت زیر قابل بیان است

$$\partial_t w + \ell w = f \quad , \quad w(T) = \phi. \tag{۱}$$

*سخنران. آدرس ایمیل: asafdari@atu.ac.ir

که ℓ یک عملگر دیفرانسیل-انتگرالی و به صورت مجموع $\ell^\sigma + \ell_J$ می‌باشد. جزئیات این عملگر از فرمول لوی خنچین و فرآیندهای لوی نمایی به صورت زیر قابل محاسبه است . [۲]

$$\ell^\sigma w(S,t) = -\frac{۱}{۲}\sigma^۲ S^۲ \partial_{SS} w(S,t) - (r - \frac{\sigma^۲}{۲}) S \partial_S w(S,t) + r w(S,t). \quad (۲)$$

$$\ell_J w(S,t) = -\int_{\mathbb{R}} [w(Se^z,t) - w(S,t) - S(e^z - ۱)\partial_S w(S,t)]\mathrm{J}(dz). \quad (۳)$$

متغیرهای زیر را معرفی می‌کنیم [۱]

$$\tau = T - t, \quad y = e^{(r-d)\tau}\frac{S}{K}, \quad x = lny \quad (i.e; S = Ke^{x-(r-d)\tau}).$$

با فرض اینکه C جوابی از معادله (۱) به ازای $f = ۰$ باشد؛ روابط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$v(y,\tau) = \frac{e^{r\tau}}{k} C(S,t) \quad (۴)$$

$$u(x,\tau) = v(e^x,\tau) = \frac{e^{r\tau}}{K} C(S,t). \quad (۵)$$

در اینصورت برای جواب معادله (۱) برحسب u و v خواهیم داشت:

$$\partial_\tau v + \ell^\sigma v + \ell_J v = ۰$$
$$\partial_\tau u + \ell^\sigma u + \ell_J u = ۰$$

با استفاده از تغییر متغیرهای بالا و محاسبه‌ی مشتقات زنجیره‌ای و جایگذاری آنها در روابط (۲) و (۳) خواهیم داشت: [۱]

$$\ell^\sigma v(y,\tau) = -\frac{۱}{۲}\sigma^۲ y^۲ \partial_{yy} v,$$
$$\ell_J v(y,\tau) = \int_{\mathbb{R}} [v(ye^z,\tau) - v(y,\tau) - y(e^z - ۱)\partial_y v(y,\tau)]\mathrm{J(z)}(dz).$$
$$\ell^\sigma u(x,\tau) = \frac{۱}{۲}\sigma^۲ \partial_x u - \frac{۱}{۲}\sigma^۲ \partial_{xx} u,$$
$$\ell_J u(x,\tau) = \int_{\mathbb{R}} [u(x+z) - u(x) - (e^z - ۱)\partial_x u]\mathrm{J(z)}(dz).$$

جواب تحلیلی معادله بلک شولز برای ساخت توابع پایه

فرم ساده معادله بلک شولز براساس متغیرهای معرفی شده با تابع $v(y,\tau)$ به صورت زیر قابل بیان است:

$$\partial_\tau v - \frac{۱}{۲}\sigma^۲ y^۲ \partial_{yy} v = ۰. \quad (۶)$$

همان‌طور که بیان کرده بودیم توابع پایه از دنباله جواب‌های معادله‌ی بلک شولز با ضریب‌های تلاطم مختلف ساخته می‌شوند، پس به حل تحلیلی معادله (۶) می‌پردازیم:

$$v = \frac{e^{r\tau}}{K} C(S,K,\sigma_i,t,T) = \frac{e^{r\tau}}{K}[SN(d_۱) - Ke^{-r\tau}N(d_۲)]. \quad (۷)$$

اکنون با جایگذاری $d_۱$ و $d_۲$ در رابطه فوق و با استفاده از متغیرهایی که معرفی کردیم و ساده‌سازی به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$v = yN(\frac{lny}{\sigma_i\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma_i\sqrt{\tau}}{۲}) - N(\frac{lny}{\sigma_i\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma_i\sqrt{\tau}}{۲}). \quad (۸)$$

در نهایت با استفاده از تعریف تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و متمم تابع خطا عبارت (۸) به صورت زیر قابل بیان است:

$$v = \frac{۱}{۲}(y[۱ - erf(\frac{-lny}{\sigma_i\sqrt{۲\tau}} - \frac{\sigma_i\sqrt{\tau}}{۲\sqrt{۲}})] - ۱ - erf(\frac{lny}{\sigma_i\sqrt{۲\tau}} - \frac{\sigma_i\sqrt{\tau}}{۲\sqrt{۲}})). \quad (۹)$$

اکنون با اعمال عملگر دیفرانسیلی روی تابع v و به کمک تابع چگالی احتمال دارایی‌ها تحت مدل بلک شولز رابطه (۹) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ell^{\sigma}v = -\frac{\sigma^{۲}(y,T)}{\sqrt{۲\pi}۲\sigma_i\sqrt{\tau}}e^{-\frac{۱}{۲}[\frac{ln^{۲}y}{\sigma_i^{۲}\tau} - lny + \frac{\sigma_i^{۲}\tau}{۴}]} = C_{\circ}\sigma^{۲}(y,T)\sqrt{y}e^{-\frac{ln^{۲}y}{۲\sigma_i^{۲}\tau}}. \quad (۱۰)$$

$$C_{\circ} = \frac{e^{-\frac{۱}{۸}\sigma_i^{۲}\tau}}{\sqrt{۲\pi}۲\sigma_i\sqrt{\tau}}. \quad (۱۱)$$

به صورت مشابه $u_{\sigma i}$ جواب تحلیلی معادله بلک شولز به ازای ضریب تلاطم σ_i می‌باشد.

مسئله قیمت گذاری تحت مدل کشش ثابت واریانس

ضریب تلاطم Σ را به صورت دلخواه انتخاب کرده و تابع π را که بیانگر خطا تقریب انجام گرفته می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi(x,\tau) = u(x,\tau) - u_{\Sigma}(x,\tau). \quad (۱۲)$$

در عبارت فوق u_{Σ} جواب تحلیلی معادله بلک شولز با جایگذاری Σ است. اگر فرم ساده معادله دیفراسیلی-انتگرالی (۱) را براساس تابع π بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$\partial_{\tau}\pi(x,\tau) + \ell^{\sigma}\pi(x,\tau) + \ell_J\pi(x,\tau) = f(x,\tau). \quad (۱۳)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه بالا، $f(x,\tau)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,\tau) = -\partial_{\tau}u_{\Sigma}(x,\tau) - \ell^{\sigma}u_{\Sigma}(x,\tau) - \ell_J u_{\Sigma}(x,\tau). \quad (۱۴)$$

اکنون $f(x,\tau)$ را تحت مدل کشش ثابت واریانس به دست می‌آوریم. تابع تلاطم σ در مدل کشش ثابت واریانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{CEV}(x,\tau) = \alpha(Ke^{x-(r-d)\tau})^{\beta} \quad \alpha > ۰ \quad , \quad \beta \leqslant ۰. \quad (۱۵)$$

پس $f(x,\tau)$ تحت مدل کشش ثابت واریانس با ضریب تلاطم σ_CEV به صورت زیر است:

$$f(x,\tau) = -\partial_{\tau}u_{\Sigma}(x,\tau) - \frac{۱}{۲}{\sigma_{CEV}}^{۲}\partial_x u_{\Sigma}(x,\tau) + \frac{۱}{۲}{\sigma_{CEV}}^{۲}\partial_{xx}u_{\Sigma}(x,\tau). \quad (۱۶)$$

در نیجه دنباله‌ای از توابع پایه را به صورت زیر معرفی می‌کنیم: [۱]

$$\omega_i(x) = \omega_i^S(x) = \ell^{\sigma_S}[u_{\sigma_i}](x,T), \quad \forall i = ۱,...,n \quad (۱۷)$$

$$\omega_{i+n}(x) = \omega_i^A(x) = \ell_A^{\sigma}[u_{\sigma_i}](x,T), \quad \forall i = ۱,...,n. \quad (۱۸)$$

در عبارت فوق $u_{\sigma i}$ جواب تحلیلی معادله معادله بلک شولز به ازای ضریب تلاطم σ_i می‌باشد و L^{σ_s} عملگر دیفرانسیلی مدل بلک شولز می‌باشد که بر روی تابع $u_{\sigma i}$ اعمال می‌شود. با این فرآیند توابع پایه حاصل از مدل کشش ثابت واریانس به صورت زیر است:

$$\omega_i(x) = \omega_i^{BS}(x) = \ell^{\sigma_{\circ}}[u_{\sigma_i}](x,T), \quad \forall i = ۱,...,n \quad (۱۹)$$

$$\omega_{i+n}(x) = \omega_i^{\sigma}(x) = \ell^{\sigma}[u_{\sigma_i}](x,T), \quad \forall i = ۱,...,n. \quad (۲۰)$$

روش تفاضلات متناهی

روش تفاضل متناهی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی براساس محاسبه و گسسته سازی معادله در نقاط گره‌ای است. در این روش، مشتق توابع با تفاضلات معادلات آنها تقریب زده می‌شود. با گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی این معادلات به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. متداولترین روشهای تفاضلات متناهی برا حل معادلات دیفرانسیل جزئی، روشهای صریح، ضمنی و کرانک نیکلسون می‌باشند. در ادامه به طور خلاصه این روش را برای تقریب جواب معادله حاصل بررسی می‌کنیم. معادله بلک شولز را در نظر بگیرید:

$$w_t(t,s_t)+rs_tw_{s_t}+\frac{\sigma^2 s_t^2}{2}w_{s_ts_t}=rw(t,s_t) \qquad (21)$$

معادله فوق را براساس زمان و قیمت دارایی گسسته می‌کنیم. (t,s_t) را به یک شبکه به اندازه کافی متراکم تقسیم می‌کنیم پس داریم Δt ، Δs_t سپس تعریف می‌کنیم یک آرایه $N+1$ بعدی با نقاط شبکه $t_0,t_1,...t_N$ را تعریف می‌کنیم:

$$t_{n+1}-t_n=\frac{T}{N}=\Delta t \quad , \quad S_{M+1}-S_M=\frac{S_{max}}{M}=\Delta_{st} \qquad (22)$$

پس در اینصورت یک ناحیه مستطیل شکل روی سطح (t,s_t) با طرفین $(0,S_{max})$ و$(0,T)$ ایجاد می‌گردد. مختصات شبکه (n,m) ما را قادر به محاسبه جواب در نقاط گسسته می‌کند. به عبارتی

$$w_{m,n}=w(n\Delta t,m\Delta s)=w(t_n,s_m)=w(t,s_t) \qquad (23)$$

با استفاده از تفاضلات مرکزی نسبت به دارایی پایه و براورد تفاضلات پسرو نسبت به زمان، روش صریح به دست می‌آید:

$$a_m^*w_{m-1,n}+b_m^*w_{m,n}+c_m^*w_{m+1,n}=w_{m,n-1} \quad n=N,N-1,...,0 \quad ,m=1,2,...,M-1 \qquad (24)$$

$$a_m^*=\frac{1}{2}\Delta t(\sigma^2m^2-rm) \quad b_m^*=1-\Delta t(\sigma^2m^2+rm) \quad c_m^*=\frac{1}{2}\Delta t(\sigma^2m^2+rm)$$

۳. نتیجه گیری

نتایج عددی حاصل از روش تقلیل پایه بیانگر آن است که با افزایش تعداد پایه‌ها خطا کمتر می‌شود و دقت مطلوب با نرخ همگرایی بالا امکان‌پذیر است. می‌شود که فقط تعداد متناهی پایه لازم است تا دقت مطلوب در محاسبه جواب تقریبی قیمت اختیار ایجاد گردد. در این مقاله روش تقلیل پایه برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی با مشتق‌های جزئی حاص از مدلسازی قیمت گذاری اختیار مورد بررسی قرار گرفت. در این روش برخلاف روش تفاضلات متناهی از روشهای عددی بهره نگرفتیم بلکه از خانواده‌ای از توابع پایه، که توسط دنباله‌ای از جواب‌های معادله بلک شولز به ازای ضریب‌های تلاطم متفاوت استفاده کردیم که به جواب مسئله مورد تحقیق همگرا شود. این روش از دقت بالاتر و حجم محاسبات کمتری نسبت به روش تفاضلات متناهی برخوردار است و کارایی عددی بهتری نسبت به روش تفاضلات متناهی دارد.

مراجع

1. R. Cont, N. Lantons, and O. Pironneau, *A reduced basis for option pricing*, SIAM Journal on Financial Mathematics (2011), 2(1), 287-316.
2. R. Cont, and E. Voltchkova, *A finit difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Levy models*, SIAM Journal on Numerical Analysis, (2005), 43(4), 1596-1626.
3. S. Fadugba, C. Nwozo, and T. Babalola, *The comparative study of finite difference method and monte carlo methof for pricing european option*, Mathematical Theory and Modeling, (2012), 1-13.
4. I. Vidic, *Numerical methods for option pricing*, politecnica de madrid, (2012), working paper.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

یک مدل رگرسیون بیزی کارا برای مدل‌بندی مشاهدات پاسخ مثبت چوله به راست

احسان مصداقی[۱*] ، افشین فلاح[۲] و رحمان فرنوش[۳]

[۱]گروه آمار، دانشگاه علوم تحقیقات تهران، تهران، ایران

[۲]گروه آمار، دانشگاه بین المللی امام خمینی، قزوین، ایران

[۳]گروه ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده. توزیع گاوسی وارون وزنی یکی از تعمیم‌های توزیع گاوسی وارون است که برخلاف ویژگی‌های مطلوب توزیعی و انعطاف‌پذیری قابل‌توجه، به دلیل مشکلات محاسباتی مربوط به برآورد پارامترهای آن تاکنون در حوزه مدلسازی مورد توجه قرار نگرفته است. این مقاله تحلیل رگرسیونی مشاهدات پاسخ چوله به راست با استفاده از توزیع گاوسی وارون وزنی را مورد توجه قرار داده و برای آن مدلی پیشنهاد می‌کند. نشان داده شده است که در چارچوب رهیافت بیزی، می‌توان با انتخاب توزیع‌های پیشین مناسب و تابع پیوند منطقی بر مشکلات محاسباتی مربوط به برآورد پارامترها غلبه و به مدلی کارا دست یافت. مدل پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی با برخی از شناخته‌شده‌ترین مدل‌های رقیب مورد مقایسه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل رگرسیونی، توزیع گاوسی وارون وزنی، رهیافت بیزی، الگوریتم گیبز.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62J12, 62F15.

۱. مقدمه

مدل‌بندی مشاهدات پاسخ چوله به راست به‌دلیل کاربردهای گوناگون این نوع داده‌ها همواره مورد توجه پژوهشگران حوزه‌های مختلف مانند علوم مالی و بیمه، تحلیل خطر، آبشناسی، قابلیت اعتماد و غیره بوده است. در این راستا توزیع‌های احتمالاتی متعددی به‌وسیله پژوهشگران مختلف پیشنهاد و مورد استفاده قرار گرفته‌اند که از جمله معروف‌ترین آنها می‌توان به خانواده‌های گاما، لگ‌نرمال و گاوسی وارون اشاره کرد. از میان این توزیع‌ها، توزیع گاوسی وارون به‌دلیل ویژگی‌های خاص توزیعی، انعطاف‌پذیری مناسب و ارتباط ویژه‌ایی که با توزیع گاوسی دارد، در این نوع مطالعات جایگاه برجسته‌ایی دارد. نگاهی به تعداد مقالات و شماره‌های ویژه‌ایی که مجلات معتبر علمی به این توزیع تخصیص داده‌اند به خوبی این ادعا را تایید می‌کند. برای ملاحظه جزییات بیشتر درباره اهمیت و جایگاه توزیع گاوسی وارون خواننده را به چیکارا و فولکس [۳] و سشادری [۴] ارجاع می‌دهیم. از سوی دیگر برخی پژوهشگران، با هدف فراهم آوردن انعطاف و تغییرپذیری بیشتر، تعمیم‌هایی را برای توزیع گاوسی وارون پیشنهاد داده‌اند. در این راستا جورجنسن و همکاران [۲] یک تعمیم سه پارامتری از توزیع گاوسی وارون به نام گاوسی وارون وزنی ارایه داده‌اند. گوپتا و کاندو [۱] نشان دادند که این توزیع برای مدل‌بندی داده‌های مثبت چوله به راست و به‌ویژه در مطالعات طول عمر و قابلیت اطمینان از ویژگی‌های منحصر به فرد و انعطاف‌پذیری قابل توجهی برخوردار بوده و برای سایر توزیع‌های مطرح در این زمینه رقیبی جدی محسوب می‌شود. برخلاف ویژگی‌های مطلوب و انعطاف‌پذیری قابل‌توجه توزیع گاوسی وارون وزنی، برآورد پارامترهای این توزیع موضوعی چالشی است. یافتن برآوردگرهای ماکسیمم

*سخنران. آدرس ایمیل: a.fallah@sci.ikiu.ac.ir

درستنمایی پارامترهای این توزیع هم‌ارز حل دستگاه معادلات غیر خطی سه بعدی است که جواب‌های آن به‌شدت به مقادیر اولیه وابستگی نشان می‌دهند. هنگامی که توزیع گاوسی وارون وزنی برای اهداف مدل‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد، این مشکلات محاسباتی به‌دلیل افزایش تعداد پارامترها و پیچیدگی ناشی از شکل توابع پیوند مورد استفاده در مدل‌سازی به‌صورت قابل‌توجهی افزایش می‌یابد. همین مشکلات محاسباتی موجب شده است که این توزیع برخلاف ویژگی‌های مطلوب، برخلاف توزیع گاوسی وارون در حوزه مدل‌سازی مورد توجه قرار نگرفته است. در این مقاله تحلیل رگرسیونی مشاهدات پاسخ مثبت چوله به راست با استفاده از توزیع گاوسی وارون وزنی مدنظر قرار گرفته و برای آن مدلی پیشنهاد شده است. نشان داده شده است که در چارچوب رهیافت بیزی، می‌توان با انتخاب توزیع‌های پیشین مناسب و تابع پیوند منطقی بر مشکلات محاسباتی مربوط به برآورد پارامترها غلبه و به مدلی کارا دست یافت. در بخش ۲ توزیع گاوسی وارون وزنی و برخی از مهمترین ویژگی‌های آن به اختصار شرح داده شده‌اند. مدل پیشنهادی در بخش ۳ ارائه شده است. در بخش چهار مدل پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۲. توزیع گاوسی وارون وزنی

متغیر تصادفی y دارای توزیع گاوسی وارون وزنی با پارامتر مکان μ، مقیاس λ و شکل δ است $y \sim WIG(\mu, \lambda, \delta)$، هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f_{WIG}(y|\mu,\lambda,\delta) = w(y;\delta,\mu) f_{IG}(y|\mu,\lambda), \tag{۱}$$

باشد، که در آن $w(y;\delta,\mu) = \frac{\delta+y}{\delta+\mu}$ و $f_{IG}(y|\mu,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi y^۳}} \exp(-\frac{\lambda(y-\mu)^۲}{۲y\mu^۲})$ چگالی توزیع گاوسی وارون را نشان می‌دهد. میانگین و واریانس این توزیع به‌ترتیب عبارتند از:

$$E(Y) = \mu + \frac{\mu^۳}{\lambda(\mu+\delta)}, \quad Var(Y) = \frac{\mu^۳}{\lambda} + \frac{\mu^۵}{\lambda(\mu+\delta)}(۳ - \frac{\mu}{\mu+\delta}),$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، برخلاف توزیع نرمال، میانگین و واریانس توزیع گاوسی وارون وزنی وابسته‌اند. تابع توزیع تجمعی این توزیع را می‌توان برحسب تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد به‌صورت

$$F_{WIG}(y|\mu,\delta,\lambda) = \Phi(\frac{\lambda^{\frac{۱}{۲}}(y-\mu)}{\mu y^{\frac{۱}{۲}}}) + (۱ - \frac{۲\mu}{\mu+\delta}) \exp(\frac{۲\lambda}{\mu}) \Phi(-\frac{\lambda^{\frac{۱}{۲}}(y-\mu)}{\mu y^{\frac{۱}{۲}}}), \tag{۲}$$

نوشت، این توزیع در حالت حدی $\delta \to \infty$ به توزیع گاوسی وارون (IG) و در حالت حدی $\delta \to ۰$ به توزیع گاوسی وارون معکوس (RIG) تبدیل می‌شود.

۳. مدل پیشنهادی

مدل رگرسیونی

$$y_i|\boldsymbol{x}_i \sim WIG(\mu(\boldsymbol{x}_i), \lambda, \delta), \quad \mu_i = \mu(\boldsymbol{x}_i) = \frac{۱}{\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}}; \quad i = ۱, \ldots, n, \tag{۳}$$

را در نظربگیرید، که در آن y_i متغیر پاسخ، $\boldsymbol{x}_i = (x_{i۱}, \ldots, x_{ip})'$ بردار متغیرهای تبیینی، $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۱, \ldots, \beta_p)$ بردار ضرایب رگرسیونی و $\mu(x_i)$ تابع پیوند مدل را نشان می‌دهد. تابع درستنمایی متناظر با این مدل به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\mu}, \lambda, \delta|\boldsymbol{y}) \propto \lambda^n \exp\{-\frac{\lambda}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \frac{(y_i-\mu_i)^۲}{y_i\mu_i^۲}\} \prod_{i=۱}^{n} (\frac{\delta+y_i}{\delta+\mu_i}). \tag{۴}$$

است. با فرض $\boldsymbol{Y} = diag(y_۱, \ldots, y_n)$ و $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_۱', \ldots, \boldsymbol{x}_n']' = [x_{ij}]_{n\times p}$ توابع درستنمایی متناظر با مدل پیشنهادی را می‌توان به‌ترتیب به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\beta}, \lambda, \delta|\boldsymbol{y}) \propto \lambda^n \exp\{-\frac{\lambda}{۲} Q(\boldsymbol{\beta})\} \prod_{i=۱}^{n} (\frac{\delta+y_i}{\delta+(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})^{-۱}}), \tag{۵}$$

بازنویسی نمود، که در آن $Q(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - ۱_n)'\boldsymbol{Y}^{-۱}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - ۱_n)$ یک نمایش درجه دوم برحسب β است.

بردار ضرایب رگرسیونی $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۱, \ldots, \beta_p)$ پارامتر اصلی مورد علاقه در تحلیل رگرسیونی است. به‌صورت نظری هر توزیع پیشین چندمتغیره بر مجموعه $\mathbb{R}^p$ را می‌توان به‌عنوان توزیع پیشین بردار $\boldsymbol{\beta}$ در نظر گرفت. به‌عنوان مثال، می‌توان از یک توزیع نرمال چندمتغیره با واریانس بزرگ یا یک توزیع یکنواخت چندمتغیره برای این منظور استفاده کرد. نکته مهمی که در اینجا می‌بایست مورد توجه قرار می‌گیرد، لزوم نامنفی بودن پارامتر مکان $\mu_i = ۱/\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ در توزیع گاوسی وارون وزنی است. از این رو، استفاده از توزیع‌های پیشین یاد شده ممکن است به مقادیر منفی غیر قابل پذیرش برای این پارامتر منجر شود. با در نظر گرفتن این ملاحظات، در این مقاله توزیع‌های پیشین

$$\tau_i|\lambda \sim Gamma(۲, \lambda), \quad \lambda \sim Gamma(c_۰, d_۰), \quad \delta \sim Gamma(e_۰, f_۰), \tag{۶}$$

برای پارامترهای مدل در نظر گرفته شده است، که در آن $\tau_i = \mu_i + \delta$ و اندیس صفر به ابرپارامترهای مدل که می‌بایست توسط تحلیل‌گر و براساس باورهای پیشین تعیین شوند، اشاره می‌کند. خانواده توزیع‌های گاما به‌اندازه کافی انعطاف‌پذیر است که بتوان انتظار داشت برخی از اعضای این خانواده بتواند باورهای پیشین تحلیل‌گر را درباره پارامترها تبیین نماید. با در نظر گرفتن توزیع های پیشین (۶) و تابع درستنمایی (۵)، توزیع پسین توام را می‌توان برحسب پارامترهای $(\boldsymbol{\mu}, \lambda, \delta)$ به‌صورت

$$\begin{aligned}\pi(\boldsymbol{\mu}, \lambda, \delta|\boldsymbol{y}) \propto \prod_{i=۱}^{n} \left((\delta + y_i)\lambda^{\frac{۱}{۲}} f_{IG}(y_i|\mu_i, \lambda) \right) \times \lambda^{۲n} \exp(-\lambda \sum_{i=۱}^{n}(\delta + \mu_i)) \\ \times \lambda^{c_۰ - ۱} \exp(-\lambda d_۰) \times \delta^{e_۰ - ۱} \exp(-f_۰\delta).\end{aligned} \tag{۷}$$

نوشت. با قرار دادن $\mu_i^{-۱} = \boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}$، توزیع پسین توام برحسب پارامترهای $(\boldsymbol{\mu}, \lambda, \delta)$ به‌صورت

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \lambda, \delta|\boldsymbol{y}) \propto \lambda^{\frac{۵}{۲}n + c_۰ - ۱} \exp\left(-\lambda(\frac{Q(\boldsymbol{\beta})}{۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}} + n\delta + d_۰)\right) \times \delta^{e_۰ - ۱} \exp(-f_۰\delta) \prod_{i=۱}^{n}(\delta + y_i). \tag{۸}$$

به‌دست می‌اید. همانگونه که مشاهده می‌شود پیچیدگی توزیع پسین مانع از بدست آوردن نمایش‌های بسته برای پارامترهای پسین مورد علاقه است. از این‌رو، از الگوریتم مونت کارلو زنجیر مارکفی برای نمونه‌گیری از توزیع پسین توام پارامترها و تقریب کمیت‌های پسینی مورد علاقه استفاده شده است. با انجام برخی محاسبات جبری که از آوردن جزییات آن‌ها چشم‌پوشی شده است، می‌توان نشان داد که توزیع پسین شرطی کامل متناظر با پارامترهای β، λ و δ به‌ترتیب عبارتند از

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|\delta, \lambda) \propto \exp(-\lambda(\frac{Q(\boldsymbol{\beta})}{۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\boldsymbol{x_i}'\boldsymbol{\beta}})), \tag{۹}$$

$$\lambda|\boldsymbol{\beta}, \delta \sim Gamma(\frac{۵}{۲}n + c_۰, \frac{Q(\boldsymbol{\beta})}{۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}} + n\delta + d_۰), \tag{۱۰}$$

$$\pi(\delta|\boldsymbol{\beta}, \lambda, \boldsymbol{y}) = \eta f_G(\delta|e_۰ + n, n\lambda + f_۰) + (۱ - \eta) f_G(\delta|e_۰ - ۱, n\lambda + f_۰), \tag{۱۱}$$

که در آن‌ها $\eta = \frac{c_۱}{c_۱ + c_۲}$ و

$$c_۱ = \frac{\Gamma(e_۰ + n)}{\Gamma(e_۰ + n) + (\prod_{i=۱}^{n} y_i)\Gamma(e_۰ - ۱)(n\lambda + f_۰)^{n+۱}}, \quad c_۲ = \frac{(\prod_{i=۱}^{n} y_i)\Gamma(e_۰ - ۱)}{\frac{\Gamma(e_۰ + n)}{(n\lambda + f_۰)^{n+۱}} + (\prod_{i=۱}^{n} y_i)\Gamma(e_۰ - ۱)}. \tag{۱۲}$$

اکنون می‌توان از این توزیع‌های پسین شرطی کامل در قالب یک الگوریتم گیبز برای نمونه‌گیری از توزیع پسین توام پارامترها و تقریب کمیت‌های پسینی مورد علاقه، استفاده کرد.

۴. مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی مدل پیشنهادی یک مطالعه شبیه‌سازی اجرا شده است. برای این منظور، یک مدل رگرسیونی به‌شکل

$$y_i|\boldsymbol{x}_i \sim WIG(\mu(\boldsymbol{x}_i), \lambda, \delta),\ \mu(\boldsymbol{x}_i) = \frac{۱}{x_{i۱}\beta_۱ + x_{i۲}\beta_۲}, \quad (۱۳)$$

در نظر گرفته شده است، که در آن $\boldsymbol{x_i} = (x_{i۱}, x_{i۲})$، $\lambda = ۲$ و $\delta = ۳$. مقادیر متغیرهای تبیینی از توزیع نرمال استاندارد شبیه‌سازی و مقادیر ضرایب رگرسیونی به‌صورت $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۱, \beta_۲)' = (۰/۱, ۰/۲)'$ لحاظ شده‌اند. سپس مشاهدات پاسخ از مدل (۱۳) و به ازای اندازه نمونه‌های ۲۵، ۵۰، ۷۵و ۱۰۰ شبیه‌سازی شده و از آنها برای ساخت یک نمونه مونت کارلو زنجیر مارکفی از توزیع پسین توام پارامترها استفاده شده است. مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطا ($RMSE =$ $\sqrt{\frac{۱}{R}\sum_{r=۱}^{R}(\hat{\theta}^{(r)} - \theta)^۲}$) و قدرمطلق اریبی نسبی ($ARB = |\frac{۱}{R}\sum_{r=۱}^{R}(\frac{\hat{\theta}^{(r)}}{\theta} - ۱)|$) برای برآوردگرهای ضرایب رگرسیونی مدل پیشنهادی به همراه مقادیر متناظر برای مدل‌های رقیب گاوسی‌وارون و لگ‌نرمال محاسبه و در جدول ۱ به‌ازای اندازه‌های نمونه‌های ۲۵و ۵۰ ارایه شده‌اند. همانگونه که ملاحظه می‌شود مدل پیشنهادی به‌صورت قابل ملاحظه‌ایی نسبت به مدل‌های رقیب کاراتراست.

جدول ۱. مقادیر جذرکمترین توان دوم خطا و قدرمطلق اریبی نسبی برای برآوردگرهای مختلف.

اندازه نمونه	پارامتر	معیار	متغیر پاسخ		
			WIG	IG	LN
۲۵	$\beta_۱$	ARB	۰/۲۳۲۰	۰/۲۹۸۰	۱/۹۴۷۳
		RMSE	۱/۶۱۰۳	۱/۸۱۹۶	۱/۹۴۷۶
	$\beta_۲$	ARB	۱/۱۶۸۶	۱/۱۹۲۲	۲/۹۲۷۱
		RMSE	۱/۵۱۶۷	۱/۵۹۷۳	۲/۹۲۷۳
۵۰	$\beta_۱$	ARB	۰/۷۸۶۹	۱/۰۲۸۰	۱/۵۲۳۳
		RMSE	۰/۸۲۰۸	۱/۰۳۳۰	۱/۵۳۲۰
	$\beta_۲$	ARB	۱/۸۰۰۰	۲/۲۵۰۱	۲/۵۷۱۳
		RMSE	۱/۸۴۰۲	۲/۳۳۹۱	۲/۵۷۸۱

۵. بحث و نتیجه‌گیری

تاکنون توزیع‌های احتمالاتی گوناگونی برای مدل‌بندی مشاهدات مثبت چوله به راست به کار گرفته شده‌اند. توزیع گاوسی وارون وزنی یکی از تعمیم‌های مهم توزیع گاوسی وارون است که به دلیل ویژگی‌های مطلوب از جایگاه ویژه‌ای در مطالعات مربوط به این نوع داده‌ها برخوردار است. هر چند برخی مشکلات محاسباتی در برآورد پارامترهای توزیع گاوسی وارون وزنی موجب شده است که این توزیع در مباحث مدل‌سازی کمتر مورد توجه قرار بگیرد، اما در چارچوب رهیافت بیزی، می‌توان با انتخاب توزیع‌های پیشین مناسب و تابع پیوند منطقی بر این مشکلات غلبه نمود. نتایج نشان می‌دهند که مدل بیزی تحلیل رگرسیونی مبتنی بر توزیع گاوسی وارون وزنی می‌تواند از معروف‌ترین مدل‌های رقیب در این حوزه کاراتر باشد. توزیع گاوسی وارون وزنی، از یک سو تعمیمی از توزیع گاوسی وارون و از سوی دیگر به واسطه همین توزیع، با توزیع نرمال در ارتباط است. به همین دلیل بسیاری از ویژگی‌های مطلوب هر دو توزیع را به ارث برده است.

مراجع

1. R. C. Gupta and D. Kundu, *Weighted inverse Gaussian–a versatile lifetime model* (2011), 2695–2708.
2. B. Jorgensen, V. Seshadri and G. A. Whitmore, *On the mixture of the inverse Gaussian distribution with its complementary reciprocal* (1991), 77–89.
3. R. S. Chhikara and J. L. Folks, *The inverse Gaussian distribution as a lifetime model* (1977) 461–468.
4. V. Seshadri, *The Inverse Gaussian Distribution: Statistical Theory and Applications*(1999), Springer, New York

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021

بررسی چین‌خوردگی محیطی و محوری استوانه الاستیک در حال رشد به کمک روش عددی کامپوند ماتریس

زکیه میراکبرزاده* ، مرتضی سنجرانی‌پور و نسرین عبدالعلیان[۱]
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا مسئله بافت لوله‌ای در حال رشد به استوانه سه‌بعدی ابرالاستیک تراکم‌ناپذیر از جنس نئوهاکین مدل‌سازی می‌شود که مرز خارجی این استوانه ثابت و مرز داخلی آن بدون کشش است؛ به این ترتیب مسئله مقدار ویژه شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی بدست می‌آید. با توجه به اهمیت چین‌خوردگی در بافت‌های زیستی، مقدار ویژه فاکتور رشد به کمک روش عددی کامپوند ماتریس محاسبه می‌شود و وابستگی بین چین‌خوردگی‌های محیطی و محوری ناشی از رشد به فاکتور رشد و ضخامت استوانه مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج عددی نشان می‌دهد که با کاهش ضخامت استوانه فاکتور رشد افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش فاکتور رشد، چین‌خوردگی‌های محیطی کاهش می‌یابد؛ اما وابستگی چین‌خوردگی‌های محوری به فاکتور رشد، روندی متفاوت برای استوانه‌های ضخیم و نازک دارند.
واژه‌های کلیدی: تراکم ناپذیر، چین‌خوردگی محیطی و محوری، روش کامپوند ماتریس، فاکتور رشد، مقدار ویژه.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 00A71, 92B05, 34B09.

۱. مقدمه

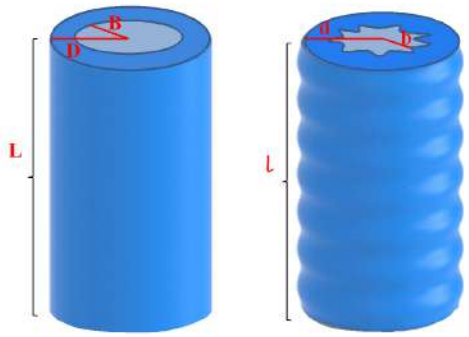
برای محاسبه مقادیر ویژه در مسائل مقدار ویژه، از روش‌های عددی و تحلیلی می‌توان استفاده نمود. روش عددی کامپوند ماتریس برای محاسبه مقادیر ویژه از دقت بسیار بالایی برخوردار است. برای حل مسائل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل معمولی به روش عددی کامپوند ماتریس، ابتدا ماتریس جوابی تعریف می‌گردد که شرایط اولیه خاصی را برآورده می‌سازد؛ سپس مقادیر ویژه به عنوان ریشه‌های همسازه‌های ماتریس جواب بدست می‌آیند. اگر این همسازه‌ها به طور مجزا با محاسبه مولفه‌هایش به روش پرتابی بدست آیند از دقت عددی آن کاسته می‌شود. برای جلوگیری از این مشکل، معادله دیفرانسیلی در نظر گرفته شده است که به وسیله متغیرهای کامپوند ماتریس که همسازه‌های ماتریس جواب هستند، برآورده می‌شوند؛ در این روش همسازه‌ها به طور مستقیم محاسبه می‌گردند. مولفان زیادی از روش عددی کامپوند ماتریس برای حل مسائل مقدار مرزی و مقدار ویژه استفاده کرده‌اند، از جمله: انجی و رد [۳] در سال ۱۹۸۵ روش عددی کامپوند ماتریس را برای حل مسائل مقدار مرزی و مقدار ویژه شامل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ناپایدار به‌کار برده‌اند. همچنین گابرنو و همکاران [۱]، این روش عددی را برای حل دستگاهی شامل n معادله تعمیم داده‌اند.

مدل‌سازی مسئله بافت لوله‌ای در حال رشد به استوانه ابرالاستیک تراکم‌ناپذیر از جنس نئوهاکین توسط جن و همکاران [۲] انجام شده است که مرز خارجی این استوانه ثابت و مرز داخلی آن بدون کشش است؛ در مقاله مذکور حالت دو بعدی مسئله درنظر گرفته شده است. از آنجاییکه چین‌خوردگی مخاطی یک مورفولوژی معمول در بسیاری از بافت‌های زیستی مانند مری، رگ‌های خونی، نای و دستگاه گوارش است، الگوهای چین‌خوردگی نقش فیزیولوژیکی مهمی در یک بافت بیولوژیکی سالم دارند و از لحاظ آسیب‌شناسی رشد غیرطبیعی در مخاط و بازسازی الگوهای چین‌خوردگی ممکن است در بیماری‌هایی مانند ادم و آسم تاثیرگذار باشد؛ بدین منظور وابستگی چین‌خوردگی‌ها و فاکتور رشد مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مقاله حالت سه بعدی این مسئله مقدار ویژه درنظر گرفته می‌شود و با مدل‌سازی این مسئله، یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل و شرایط

*سخنران. آدرس ایمیل: mirakbarzadeh.zakiye@gmail.com

مرزی بدست می‌آید. در ادامه کار به کمک روش عددی کامپوند ماتریس، مقادیر ویژه (فاکتور رشد) محاسبه می‌گردند و وابستگی چین‌خوردگی‌های محیطی و محوری به فاکتور رشد و ضخامت استوانه بررسی می‌شود.

۲. تعریف مسئله استوانه در حال رشد



شکل ۱. شکل هندسی مسئله.

پوسته استوانه‌ای ایرالاستیک همسانگرد تراکم‌ناپذیری در نظر گرفته شده است که فرم هندسی آن بر حسب مختصات قطبی استوانه‌ای (R, Θ, Z) در پیکربندی تغییرشکل نیافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B \leq R \leq D, \qquad ۰ \leq \Theta \leq ۲\,\pi, \qquad ۰ \leq Z \leq L,$$

که B و D به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی استوانه و L طول استوانه قبل از تغییرشکل هستند. در این مساله سه بعدی مرز خارجی استوانه ثابت و مرز داخلی آن بدون کشش در نظر گرفته می‌شود؛ فاکتور رشد ابتدا حالت پایه B_r را ایجاد می‌کند و زمانی که به یک مقدار بحرانی می‌رسد خمش اتفاق می‌افتد و حالت B_t ایجاد می‌گردد. B_r و B_t به ترتیب پیکربندی‌های مرجع و جاری در نظر گرفته شده است. بر این اساس استوانه تغییرشکل یافته بر حسب مختصات قطبی استوانه‌ای $(r,\ \theta, z)$ در پیکربندی جاری B_t بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$b \leq r \leq d, \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi, \qquad ۰ \leq z \leq l,$$

که b و d به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی استوانه و l طول استوانه تغییرشکل‌یافته هستند؛ با این فرض که شعاع خارجی استوانه ثابت است یعنی $d = D$. بدون از دست دادن کلیت مساله، D به عنوان مقیاس همه متغیرهای دارای بعد طول در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه استوانه در طول تغییرشکل ثابت باقی می‌ماند، تغییرشکل به صورت

$$r = r(R), \qquad \theta = \Theta, \qquad z = \lambda_z\, Z,$$

خواهیم داشت که $\lambda_z = \frac{l}{L}$ کشش محوری است. تانسور گرادیان این تغییرشکل به صورت $\boldsymbol{F} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ تعریف می‌شود که $\lambda_1 = \frac{dr}{dR}$، $\lambda_2 = \frac{r}{R}$ و $\lambda_3 = \lambda_z$ به ترتیب کشش‌های شعاعی، محیطی و محوری هستند؛ در این مقاله حالت خاص $\lambda_z = ۱$ درنظرگرفته شده‌است. تانسور گرادیان تغییرشکل را به صورت $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ می‌توان تجزیه کرد که $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ تانسور گرادیان تغییرشکل الاستیک و $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(\mathrm{g}, \mathrm{g}, \mathrm{g})$ تانسور رشد ایزوتروپ است، همچنین g فاکتور رشد در سه جهت و

$$\alpha_۱ = g^{-۱}\,\frac{dr}{dR}, \qquad \alpha_۲ = g^{-۱}\,\frac{r}{R}, \qquad \alpha_۳ = g^{-۱}\,\lambda_z,$$

هستند. از آنجاییکه استوانه الاستیک از ماده تراکم‌ناپذیر تشکیل شده است، تغییرشکل بدون تغییر حجم است و در نتیجه $\det\boldsymbol{A} = 1$ است. با توجه به این شرط تراکم‌ناپذیری روابط زیر را خواهیم داشت:

$$r^۲ = D^۲ + g^۳(R^۲ - D^۲), \qquad \alpha = \alpha_۲ = \frac{r\sqrt{g}}{\sqrt{r^۲ + D^۲(g^۳ - ۱)}}.$$

با توجه به اینکه استوانه الاستیک ترکیبی از ماده نئوهوکین تراکم‌ناپذیر است، تابع پتانسیل الاستیکی به صورت $W = \frac{\mu}{۲}\left(\alpha_۱^۲ + \alpha_۲^۲ + \alpha_۳^۲ - ۳\right)$ است که مدول برشی μ، بدون از دست دادن کلیت مسئله برابر یک فرض می‌شود. با مدل‌سازی این مسئله مقدار ویژه سه بعدی، دستگاه معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی به صورت زیر نتیجه می‌شود [۲]:

$$-m\,g^۲\left(g^۲\alpha(r)+\alpha^۵(r)-۲\,r\,g^۲\alpha'(r)\right)F(r)+g^۴r\left(\alpha(r)-۲\,r\,\alpha'(r)\right)G'(r)+g^۴r^۲\alpha(r)\,G''(r)$$

$$-\left(g^۴\alpha(r)+r^۲n^۲\alpha^۳(r)+g^۲m^۲\alpha^۵(r)-۲\,r\,g^۴\alpha'(r)\right)G(r)+m\,r\,g^۲\alpha^۳(r)\,K(r)=۰,$$

$$\left(g^۴\alpha(r)\,\left(۱+r^۲n^۲\right)-r^۲n^۲\alpha^۳(r)-g^۲\alpha^۵(r)\,\left(m^۲+r^۲n^۲\right)-۲\,r\,g^۴\left(r^۲n^۲-۱\right)\alpha'(r)\right)F(r)$$

$$-r\,\left(g^۴\alpha(r)+r^۲n^۲\alpha^۳(r)+g^۲m^۲\alpha^۵(r)+۲\,r\,g^۴\alpha'(r)\right)F'(r)+g^۴r^۳\alpha(r)\,F'''(r)$$

$$+۲\,g^۴r^۲\left(\alpha(r)-r\,\alpha'(r)\right)F''(r)+m\,r^۲g^۴\alpha(r)\,G''(r)-m\,r\,g^۴\left(\alpha(r)+۲\,r\,\alpha'(r)\right)G'(r)$$

$$+m\,\left(g^۴\alpha(r)-r^۲n^۲\alpha^۳(r)-g^۲m^۲\alpha^۵(r)+۲\,r\,g^۴\alpha'(r)\right)G(r)=۰,$$

$$\left(r^۲n^۲\alpha^۳(r)+g^۲\left(۱+m^۲\right)\alpha^۵(r)\right)F(r)+g^۲r\,\left(-۲\,g^۲\alpha(r)+\alpha^۵(r)+۴\,r\,g^۲\alpha'(r)\right)F'(r)$$

$$-g^۴r^۲\alpha(r)\,F''(r)+۲\,m\,g^۲\alpha^۵(r)G(r)+g^۲r^۲\alpha^۳(r)\,K'(r)=۰,$$

که شرایط مرزی در $r=b$ به صورت

$$r^۲F''(r)+r\,F'(r)+(n^۲r^۲+m^۲-۱)F(r)=۰,$$

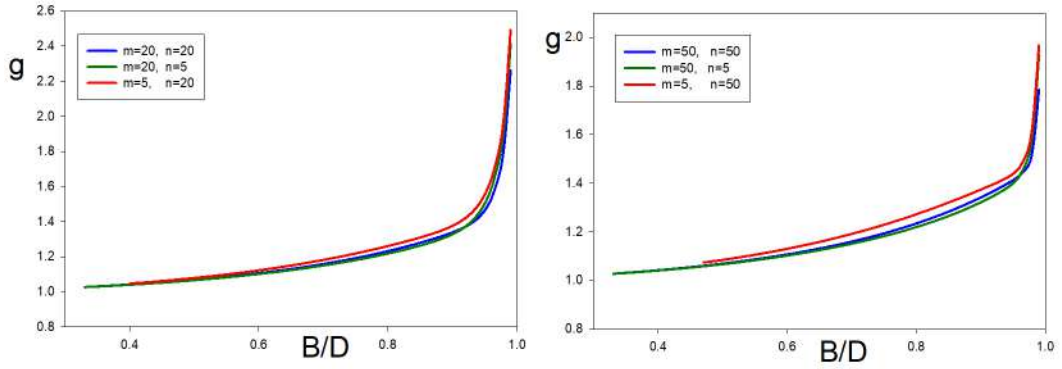
$$۲\,r\,g^۲F'(r)-r\,\alpha^۲(r)\,K(r)=۰,\qquad m\,F(r)+G(r)-r\,G'(r)=۰,$$

و شرایط مرزی در $r=d$ به صورت

$$r^۲F''(r)+r\,F'(r)+(n^۲r^۲+m^۲-۱)F(r)=۰,$$

$$m\,F(r)+G(r)-r\,G'(r)=۰,\qquad F(r)=۰,$$

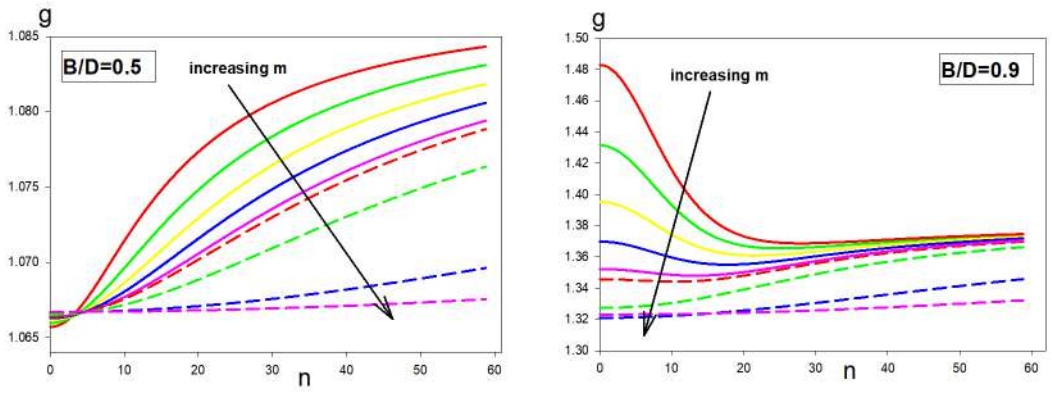
هستند؛ $F(r)$، $G(r)$ و $K(r)$ به ترتیب توابع جابه‌جایی نموی شعاعی، محیطی و محوری و m و n هم به ترتیب تعداد چین‌خوردگی محیطی و محوری هستند. در بخش بعد، مقدار ویژه این مسئله به کمک روش عددی کامپوند ماتریس [۳] محاسبه می‌شود.



شکل ۲. تغییرات فاکتور رشد g نسبت به ضخامت استوانه B/D برای m و n مختلف.

۳. نتایج روش عددی کامپوند ماتریس

با اعمال روش عدی کامپوند ماتریس بر روی دستگاه معادلات و شرایط مرزی بخش قبل، مقادیر ویژه فاکتور رشد بدست می‌آیند. شکل ۲ تغییرات فاکتور رشد (g) نسبت به ضخامت استوانه (B/D) را نمایش می‌دهد که نسبت به کاهش ضخامت روندی صعودی دارد؛ این تغییرات برای استوانه‌های دیواره نازک سریعتر است. نمودار تغییرات فاکتور رشد نسبت به چین‌خوردگی‌های محیطی و محوری در شکل ۳ نشان داده شده است. این شکل‌ها نشان می‌دهند که برای استوانه دیواره ضخیم $(B/D = ۰/۵)$، فاکتور رشد با چین‌خوردگی محیطی رابطه عکس و با چین‌خوردگی محوری رابطه مستقیم دارد؛ یعنی با افزایش فاکتور رشد، تعداد چین‌خوردگی محیطی کاهش و تعداد چین‌خوردگی محوری افزایش می‌یابند؛ همچنین وقتی چین خوردگی‌های محیطی بزرگ هستند $(m = ۱۰۰)$، با افزایش چین‌خوردگی‌های محوری فاکتور رشد تقریبا ثابت است. از شکل ۳ همچنین می‌توان نتیجه گرفت که در استوانه دیواره نازک $(B/D = ۰/۹)$، مشابه استوانه دیواره ضخیم با افزایش فاکتور رشد چین‌خوردگی محیطی کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود، برای $n < ۲۰$ با کاهش فاکتور رشد، چین‌خوردگی‌های محوری افزایش می‌یابد اما برای $n > ۲۰$ با افزایش چین‌خوردگی‌های محوری فاکتور رشد تقریبا ثابت است.



شکل ۳. نمودار تغییرات g نسبت به n برای $m = ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۲۰, ۵۰, ۱۰۰$ و $B/D = ۰/۵, ۰/۹$

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله استوانه سه‌بعدی ابرالاستیک تراکم‌ناپذیر در حال رشد از جنس نئوهاکین در نظر گرفته شده است که مرز خارجی استوانه ثابت و مرز داخلی آن بدون کشش است. نتایج روش عددی کامپوند ماتریس نشان می‌دهند که تغییرات فاکتور رشد نسبت به ضخامت استوانه روندی صعودی دارد و همچنین با افزایش فاکتور رشد، چین‌خوردگی‌های محیطی کاهش می‌یابد. علاوه‌براین وابستگی فاکتور رشد به چین‌خوردگی‌های محوری برای استوانه‌های دیواره ضخیم و نازک متفاوت است.

مراجع

1. V.V. Gubernov, H.S. Sidhu and G.N. Mercer, *Generalized Compound Matrix Method*, Appl. Math. Lett., 19 (2006), 458–463.
2. L. Jin, Y. Liu and Z. Cai, *Asymptotic solutions on the circumferential wrinkling of growing tubular tissues*, Int. J. Eng. Sci. 128 (2018), 31–43.
3. B.S. Ng and W.H. Reid, *The compound matrix method for ordinary differential systems*, J. Comput. Phys. 58 (1985), 209–228.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مدل رگرسیونی مبتنی بر توزیع چوله‌نرمال دو مدی

حسن میرزاوند[۱,*] ، دکتر مجید جعفری خالدی[۲]
گروه آمار، دانشگاه تربیت مدرس، ایران [۱، ۲]

چکیده. یک فرض اساسی در مدل رگرسیون خطی این است که عبارت خطای تصادفی از یک توزیع نرمال پیروی کند. با این حال، در پژوهش‌های آماری گاهی با داده‌هایی مواجه می‌شویم که توزیع آن‌ها چولگی و دو مدی را ارائه می‌دهند، و دیگر نمی‌توان از فرض توزیع نرمال برای تحلیل آنها استفاده کرد. در این حالت یک راه‌حل مناسب استفاده از توزیع‌های منعطفی است. که بتوانند چولگی و دو مدی بودن داده‌ها را در مدل بندی لحاظ کنند. تاکنون روشهای مختلفی ارائه شده که بر مبنای توسعه توزیع چوله‌نرمال، توزیع‌های دو مدی نامتقارن ایجاد شده‌اند. در این مقاله از این روشها برای ساخت و معرفی مدل رگرسیونی منعطف نسبت به مدل‌های رگرسیون مبتنی بر توزیع چوله‌نرمال استفاده شده و با استفاده از مثال شبیه سازی عملکرد آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نحوه کاربست آنها در یک مثال کاربردی مربوط به مجموعه داده‌های اسب دوانی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: چولگی، توزیع دو مدی، تقارن، توزیع‌های آمیخته، رگرسیون
.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: (۱ تا ۳ مورد) 18A32, 18F20, 39B42.

۱. مقدمه

برای بحث در مورد استنباط آماری برای پارامترهای مدل رگرسیونی نیاز به فرض توزیع مشخصی بر روی عبارت خطای تصادفی می‌باشد. نظریه سنتی تحلیل رگرسیون برپایه نرمال بودن توزیع مشاهدات بنا شده است، در اینصورت فرض می‌شود که عبارت خطای تصادفی مدل از توزیع نرمال پیروی می‌کند. این در حالی است که در بسیاری از کاربردها مشاهدات انحراف زیادی از توزیع نرمال دارند و مدلسازی برپایه فرض نرمال به برآوردهای غیرمنطقی از پارامترهای مدل منجر می‌شود. جایگزین کردن توزیع نرمال با توزیع‌های مناسبتری که قابلیت مدل‌بندی داده‌های نامتقارن را نیز داشته باشند، راهکاری است که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در سال‌های اخیر بکارگیری توزیع‌های چوله–متقارن به‌منظور مدل‌سازی داده‌هایی که توزیع آن‌ها چوله است، مورد توجه فراوان قرار گرفته است. در این میان می‌توان به توزیع چوله‌نرمال که توسط [۱] معرفی شد، اشاره کرد. در این زمینه، می‌توان به مطالعات [۲]، [۵] ، [۳] اشاره کرد، که از توزیع چوله‌نرمال برای برازش مدل رگرسیونی استفاده کرده‌اند.

تعریف ۱.۱ مدل رگرسیون خطی مبتنی بر توزیع چوله‌نرمال که با نماد $SN-LR$ نمایش داده می‌شود، و به صورت

$$Y_i = x_i^\top \beta + \epsilon_i, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

تعریف می‌شود، که در آن Y_i متغیر پاسخ، $x_i = (1, x_{i1}, \cdots, x_{ip})^\top$ بردار مقادیر متغیر مستقل با بعد $1 \times (p+1)$، $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_p)^\top$ بردار ضرایب رگرسیونی و خطای تصادفی $\epsilon_i \overset{iid}{\sim} SN(0, \sigma, \alpha)$. در بسیاری از کاربردهای عملی، توزیع‌های مشاهدات علاوه بر چوله بودن، دو مدی نیز هستند. این وضعیت زمانی پیش می‌آید که جامعه ناهمگن بوده و از

*سخنران. آدرس ایمیل: hassan.mirzavand@modares.ac.ir

زیر جوامعی با ویژگی‌های مختلف تشکیل شده است. در این حالت، می‌توان از مدل رگرسیونی چوله‌نرمال با متغیرهای پاسخ آمیخته به عنوان جایگزین مدل سنتی استفاده کرد. اما به دلیل بُعد زیاد پارامترها و همچنین مشکلات شناساناپذیری مبتلا به این مدلها استفاده از آنها را چالش برانگیز می‌سازد. حال سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چگونه مدل رگرسیون منعطفی معرفی کنیم که هم چولگی و دو مدی بودن را کنترل کند، و هم از مشکلات مبتلا به مدل‌های آمیخته رنج نبرد؟ در ادامه مقاله با استفاده از توزیع چوله‌نرمال دو مدی (BSN) [۱] به این سوال پاسخ داده می‌شود.

۲. مدل رگرسیون مبتنی بر توزیع BSN

تعریف ۱.۲. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی

$$f(x|\alpha,\delta)=2\frac{1+\delta x^2}{1+\delta}\phi(x)\Phi(\alpha x) \qquad x\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R},\delta\geq 0 \tag{2}$$

آنگاه X دارای توزیع چوله‌نرمال دو مدی با پارامترهای α و δ، که با نماد $X\sim BSN(\alpha,\delta)$ نشان داده می‌شود. که در آن α پارامتر چولگی و δ پارامتر کنترل کننده مد توزیع، که به ازای مقدار $\delta=0$ توزیع تک مدی است (برای اطلاعات بیشتر به [۴] مراجعه کنید).

تعریف ۲.۲. مدل رگرسیون خطی مبتنی بر توزیع BSN با نماد $BSN-LR$ نمایش داده می‌شود، و به صورت

$$Y_i=x_i^\top\beta+\epsilon_i, \qquad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

تعریف می‌شود، که در آن Y_i متغیر پاسخ، $x_i=(1,x_{i1},\cdots,x_{ip})^\top$ بردار مقادیر متغیر مستقل با بعد $1\times(p+1)$، $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_p)^\top$ بردار ضرایب رگرسیونی و خطای تصادفی $\epsilon_i\overset{iid}{\sim}BSN(0,\sigma,\alpha,\delta)$. در اینصورت با توجه به خواص توزیع BSN ، متغیر پاسخ $Y_i\overset{iid}{\sim}BSN(x_i^\top\beta,\sigma,\alpha,\delta)$ که در آن $\theta=(\beta^\top,\sigma,\alpha,\delta)$ بردار پارامترهای مدل است. لگاریتم تابع درستنمایی برای θ با توجه به نمونه مشاهده شده $Y_1,\cdots,Y_n$ بصورت

$$\begin{aligned}l(\theta)=\sum_{i=1}^n l_i(\theta)=&-3n\log(\sigma)-n\log(1+\delta)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(y_i-x_i^\top\beta)^2\\&+\sum_{i=1}^n\log\left(\sigma^2+\delta(y_i-x_i^\top\beta\right)+\sum_{i=1}^n\log\Phi\Big(\alpha\frac{y_i-x_i^\top\beta}{\sigma}\Big)\end{aligned}$$

بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت مدل رگرسیون خطی از حل معادلات

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\beta_j}=&\sum_{i=1}^n x_{ij}\Big(\frac{y_i-x_i^\top\beta}{\sigma^2}\Big)-2\delta x_{ij}\sum_{i=1}^n\frac{(y_i-x_i^\top\beta)}{\sigma^2+\delta(y_i-x_i^\top\beta)^2}\\&-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_{ij}\eta\Big(\alpha\frac{y_i-x_i^\top\beta}{\sigma}\Big)=0\\\frac{\partial l(\theta)}{\partial\sigma}=&-\frac{3n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n(y_i-x_i^\top\beta)^2+2\sigma\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sigma^2+\delta(y_i-x_i^\top\beta)^2}\\&-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(y_i-x_i^\top\beta)\eta\Big(\alpha\frac{y_i-x_i^\top\beta}{\sigma}\Big)=0\\\frac{\partial l(\theta)}{\partial\delta}=&-\frac{n}{1+\delta}+\sum_{i=1}^n\frac{(y_i-x_i^\top\beta)^2}{\sigma^2+\delta(y_i-x_i^\top\beta)^2}=0\end{aligned}$$

[۱] Bimodal Skew Normal Distribution

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i^\top \beta)\eta\Big(\alpha\frac{y_i - x_i^\top\beta}{\sigma}\Big) = 0$$

که در آن $\eta(a) = \phi(a)/\Phi(a)$، بنابراین برآوردگر ML از حل معادلات بالا بدست می‌آید، که باید بصورت عددی محاسبه شود.

۳. مطالعه شبیه سازی

در این بخش، شبیه سازی مختصری از مدل‌های رگرسیونی $BSN-LR$ ، برای بررسی رفتار برآوردگرها در نمونه‌های متناهی ارائه می‌شود. برای محاسبه برآوردگرهای MLE از تابع $optim$ موجود در نرم افزار R استفاده می‌شود. شبیه سازی از مدل رگرسیونی

$$Y_i = 2 + 5X_{1i} + 3X_{2i} + \epsilon_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

صورت می‌گیرد، که در آن خطای تصادفی دارای توزیع $\epsilon_i \sim BSN(0, 4, -0.5, 3)$ است. حجم نمونه‌ها ۱۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ است. همانطور که از جدول ۱ مشاهده می‌شود، براساس ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای MLE با افزایش حجم نمونه مقدار اریبی برآوردها کمتر می‌شود، مقدار خطای برآوردگرها و همچنین AIC مدل نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۱. خلاصه نتایج برازش مدل رگرسیونی $BSN-LR$

	$n=100$				$n=500$				$n=1000$			
			فاصله اطمینان ۹۵٪				فاصله اطمینان ۹۵٪				فاصله اطمینان ۹۵٪	
پارامترها	MLE	خطای برآورد	پایین	بالا	برآورد MLE	خطای برآورد	پایین	بالا	برآورد MLE	خطای برآورد	پایین	بالا
β_0	۱.۵۴۷۱	۰.۸۶۹۸	۰.۰۳۸۳	۳.۰۵۵۹	۲.۲۴۶۲	۰.۳۱۱۸	۱.۶۳۵۱	۲.۸۵۷۴	۲.۲۳۴۹	۰.۱۶۵۸	۱.۹۰۹۹	۲.۵۵۹۹
β_1	۴.۶۶۲۴	۰.۴۱۰۲	۳.۸۵۸۴	۵.۴۶۶۴	۵.۰۲۲۵	۰.۱۷۹۰	۴.۶۷۱۶	۵.۳۷۳۴	۵.۰۰۱۲	۰.۱۱۴۵	۴.۷۷۶۸	۵.۲۲۵۶
β_2	۲.۸۵۵۲	۰.۴۰۲۵	۲.۱۶۶۲	۳.۷۴۴۱	۲.۹۹۱۵	۰.۱۸۰۸	۲.۶۳۷۰	۳.۳۴۶۱	۳.۰۶۱۱	۰.۱۱۴۱	۲.۸۳۷۵	۳.۲۸۴۸
σ	۳.۰۱۹۰	۰.۳۳۶۸	۲.۴۵۸۷	۳.۶۷۹۲	۴.۱۸۱۳	۰.۱۴۳۱	۳.۹۰۰۷	۴.۴۶۱۹	۳.۹۰۷۸	۰.۰۸۲۰	۳.۷۴۶۹	۴.۰۶۸۷
δ	۱.۶۳۹۷	۰.۷۵۱۳	۰.۱۶۷۱	۳.۱۱۲۳	۳.۷۱۵۰	۰.۵۹۴۳	۱.۵۵۰۲	۳.۸۷۹۸	۳.۰۱۲۳	۰.۱۷۱۴	۲.۲۵۳۵	۳.۵۴۲۷
α	−۰.۴۱۳۲	۰.۱۵۹۸	−۰.۷۲۶۵	−۰.۱۰۰۱	−۰.۵۷۷۴	۰.۰۶۹۰	−۰.۷۱۲۷	−۰.۴۴۲۱	−۰.۵۰۰۵	۰.۰۳۰۷	−۰.۵۸۰۴	−۰.۴۲۰۷
AIC			−۵۹۹.۳۸۷۲				−۲۹۹۰.۱۷۴				−۵۹۲۵.۸۳۹	

۴. مثال کاربردی

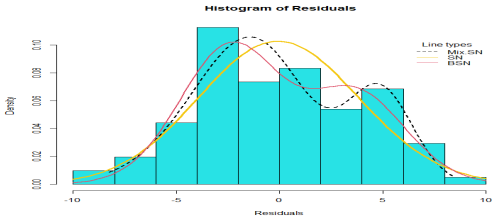
در این بخش به عنوان یک مثال انگیزشی، مجموعه داده‌ای که قبلاً توسط فوربز (۱۹۹۸) بوسیله یک مدل رگرسیون نرمال تجزیه و تحلیل شده است، در نظر گرفته می‌شود. مجموعه داده‌های اسب دوانی $(horses)$ مربوط به مزرعه عقاب در شهر بریزبن استرالیا، در تاریخ ۳۱ اوت ۱۹۹۸ است، شامل نتایج مربوط به هر اسب در ۸ مسابقه متوالی می‌باشد. داده‌ها شامل ۱۴ متغیر که هر کدام ۱۰۲ بار مشاهده شده است. در اینجا، متغیر پاسخ موقعیت پایان $(Position)$، تعداد اسبهای مسابقه $(Starters)$ و نسبت بردها در شروع قبلی $(Ratio)$ متغیرهای کمکی هستند. بنابراین، مدل رگرسیونی

$$Position_i = \beta_0 + \beta_1 Starters_i + \beta_2 Ratio_i + \epsilon_i$$

در نظر گرفته می‌شود. ابتدا، مدل رگرسیون خطی با دو متغیر مستقل به روش OLS با دستور lm به داده‌ها برازش داده می‌شود، در ادامه برای بررسی فرض نرمال بودن، باقیمانده‌های مدل محاسبه می‌شود. حال برای بررسی این فرض از آزمون کلموگروف اسمیرنوف بر روی باقیمانده‌های مدل استفاده می‌شود. با توجه به اینکه پی-مقدار مربوط به آزمون کولموگروف-اسمیرنوف برابر $3.904e^{-12}$ است و از سطح معنی داری ۰.۰۵ کمتر است، پس می‌توان نتیجه گرفت که فرض نرمال بودن باقیمانده‌های مدل برقرار نمی‌باشد. در ادامه هیستوگرام باقیمانده‌ها رسم می شود و توزیع‌های معرفی شده در این مقاله، بر روی آن برازش داده می‌شود. با توجه به شکل ۱، هیستوگرام باقیمانده‌ها تک مدی و متقارن نمی‌باشد، بنابراین می‌توان از توزیع‌های SN، BSN و آمیخته‌ای از توزیع چوله‌نرمالها، یعنی

$$Y_i|x_i \sim \sum_{j=1}^{2}\eta_j f_{SN}(y_i|x_i^\top\beta_j, \sigma_j^2, \alpha_j) \qquad i = 1\cdots n, j = 1, 2$$

استفاده کرد. لازم به ذکر هست که رگرسیون خطی مبتنی بر توزیع آمیخته را با نماد $Mix.SN-LR$ نمایش داده می‌شود. برای مدلسازی این داده‌ها استفاده کرد. در جدول ۲ خلاصه برازش مدل‌های رگرسیونی به داده‌ها و برآورد پارامترهای مدل آورده شده است. با توجه به اینکه مقدار AIC برای مدل رگرسیونی مبتنی بر توزیع BSN نسبت به مدلهای دیگر کمتر است، در نتیجه این مدل برای برازش به داده‌ها عملکرد مناسب‌تری می‌باشد.



شکل ۱. هیستوگرام باقیمانده‌ها همراه با برازش توابع چگالی توزیع‌های معرفی شده.

جدول ۲. خلاصه نتایج برازش مدل‌های رگرسیونی در نظر گرفته شده به داده‌ها.

$BSN-LR$		$SN-LR$		$Mix.SN-LR$		پارامترها
خطای برآورد	برآورد MLE	خطای برآورد	برآورد MLE	خطای برآورد	MLE	
۲٫۰۷	۵٫۶۰	۲۹۱۵۸	۰٫۶۲۸۸	۰٫۰۰۹	۲٫۰۴	β_0
۰٫۱۱	۰٫۳۰	۰٫۱۲۰۲	۰٫۵۶۴۰	۰٫۱۵	۰٫۵۰۴	β_1
۳٫۲۲	−۶٫۱۰	۳٫۸۱۳۰	−۸٫۰۲۶۵	۰٫۲۳	−۸٫۹۳	β_2
–	–	–	–	۳٫۹۳	۳٫۷۰	μ_1
–	–	–	–	۲٫۱۷	−۲٫۶۳	μ_2
۰٫۲۳	۲٫۸۲	۰٫۵۲۱۰	۳٫۹۱۴۷	۱٫۸۰	۶٫۵۲	σ_1
–	–	–	–	۲٫۳۴	۹٫۵۱	σ_2
۰٫۱۹	−۰٫۲۶	۰٫۸۱۳۵	۰٫۲۳۴۶	۶٫۰۷	۰٫۷۴	α_1
–	–	–	–	۱٫۱۲	−۱٫۳۲	α_2
۰٫۷۲	۱٫۴۳	–	–	–	–	δ
–	–	–	–	۱٫۲۰	۰٫۴۱	η
	۵۵۰٫۷۰۷۹		۵۵۶٫۳۷۷		۵۷۸٫۲۰۵	AIC

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی یک رویکرد مناسب برای حالتی که توزیع خطای تصادفی مدل‌های رگرسیونی خطی به طور همزمان چولگی و دومدی بودن را نشان می‌دهند، پرداخته شد. مدل جدید برای برطرف کردن این مشکلات معرفی می‌شود، که انگیزه اصلی برای در نظر گرفتن این مدل پرهیز از برازش مدل‌های آمیخته، به دلیل مشکلات شناساناپذیری، بُعد زیاد پارامترها و فقدان مدل پارامتریک مناسب برای زمانی که خطاهای مدل، چوله و دومدی می‌باشند. با استفاده از مطالعات شبیه سازی و مثال کاربردی، رفتار پارامترهای مدل رگرسیونی معرفی شده، و همچنین نحوه برازش اینگونه مدل به داده‌های اسب دوانی ($horses$) مورد مطالعه قرار گرفت.

مراجع

1. Azzalini A. (1985). A Class of Distributions which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**: 171–178.
2. Arellano-Valle, R. B., Castro, L. M., Genton, M. G., and Gómez, H. W. (2008). Bayesian Inference for Shape Mixtures of Skewed Distributions, with Application to Regression Analysis, *Bayesian Analysis*, **3**(3), 513-539.
3. Cancho, V. G., Lachos, V. H., and Ortega, E. M. M. (2010), A Nonlinear Regression Model with Skew-Normal Errors, *Statistical Papers*, **51**, 547
4. Elal-Olivero, D., Olivares-Pacheco, J. F., Venegas, O., Bolfarine, H., and Gomez, H. W. (2020). On Properties of the Bimodal Skew-Normal Distribution and an Application, *Mathematics*, **8**(5), 703.
5. Lachos, V., Ghosh, P. and Arellano–Valle, R. (2010). Likelihood Based Inference for Skew Normal/Independent Linear Mixed Model, *Statistica Sinica*, **20**, 303-322.

مقالات فارسی

بخش دوم: پوسترها

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

معرفی توزیع چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل گوسی

فرشته آراد[۱,*] ، ایوب شیخی[۲]
[۱,۲]بخش آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. توزیع داده‌های واقعی در کاربرد ممکن است چوله باشد اما در بیشتر مواقع این چولگی در نظر گرفته نمی‌شود و عملاً توزیع داده‌ها را نرمال در نظر می‌گیرند که باعث عدم دقت کافی در برازش مدل و برآوردهای آن می‌شود. یکی از انگیزه‌های اصلی استفاده از چگالی نرمال چوله بالا بردن این دقت است. از طرف دیگر در مسائل کاربردی فرض برآن می‌دارند که متغیرها مستقل از یکدیگرند اما همیشه اینگونه نیست و ممکن است بهم وابسته باشند که این وابستگی را بر پایه تابع مفصل می‌توان بیان کرد. در این پژوهش به معرفی توزیع نرمال چوله دو-متغیره هنگامی که متغیرهای Y، X_1 و X_2 از طریق یک مفصل با یکدیگر مرتبط باشند و متغیرهای X_1 وX_2 از هم مستقل باشند، پرداخته شده است. سپس با در نظر گرفتن مفصل گوسی، حالتی خاص از این توزیع را بدست می‌آوریم که توزیع نرمال چوله دو-متغیره (آزالینی و دالا-والی) را شامل می‌شود. نتایج شبیه‌سازی انجام شده نشان می‌دهد که استفاده از این توزیع، که آن را توزیع چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل می‌نامیم نسبت به توزیع نرمال چوله دو-متغیره زمانیکه که متغیرها از طریق تابع مفصل مرتبطند نتایج دقیق‌تری را حاصل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع مفصل، تابع مفصل بیضوی گاوسی، نرمال چوله دو-متغیره.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62H05, 62Hxx.

۱. مقدمه

در این بخش به تعریف مختصری از تابع توزیع نرمال چوله و تابع مفصل که در بخش‌های آتی به آن‌ها نیازمندیم می‌پردازیم.

۱.۱. **توزیع نرمال چوله.** تابع چگالی نرمال چوله اولین بار توسط آزالینی در سال ۱۹۸۵ معرفی شد. یک سال بعد او به معرفی کلاس پارامتری از چگالی‌ها پرداخت که فهرست بیشتری از چگالی‌ها از جمله نرمال چوله را در بر می‌گرفت. و پس از آن او در سال ۱۹۹۶ به کمک دالا-والی چگالی نرمال چوله را از یک متغیره به چند متغیره تعمیم داد. قبل از تعریف تابع چگالی نرمال چوله به ذکر یک لم می‌پردازیم که با استفاده از آن چگالی بودن این تابع نشان داده می‌شود.

لم ۱.۱. فرض کنید f یک تابع چگالی متقارن حول صفر و G یک تابع توزیع پیوسته مطلق باشد بطوری که G حول صفر متقارن باشد، آنگاه

$$۲G(\lambda y)f(y) \qquad (۱)$$

به ازای هر مقدار حقیقی λ یک تابع چگالی است [۱].

تعریف ۲.۱. فرض کنید φ و Φ به ترتیب توابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد باشند. متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال چوله با پارامتر $\lambda \in \mathbb{R}$ است اگر Z دارای چگالی زیر باشد:

$$\phi(z;\lambda) = ۲\phi(z)\Phi(\lambda z), \qquad z \in \mathbb{R}$$

که از نماد

$$Z \sim SN(\lambda)$$

*سخنران. آدرس ایمیل: fereshteh_arad@yahoo.com

برای نمایش آن استفاده می‌شود [۳].

تعریف ۳.۱. نرمال چوله دو-متغیره: گوییم متغیرهای تصادفی توام (Z_1, Z_2) دارای تابع چگالی دو-متغیره می‌باشند هرگاه:

$$f_2(z_1, z_2) = 2\varphi_2(z_1, z_2, w)\Phi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \quad (2)$$

که در آن φ_2 تابع چگالی نرمال دو متغیره، $N_2(0, 0, 1, 1, w)$ و Φ تابع توزیع نرمال استاندارد می‌باشد،

$$\alpha_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2 w}{\sqrt{(1-w^2)(1-w^2-\delta_1^2-\delta_2^2+2\delta_1\delta_2 w)}}$$

و

$$\alpha_2 = \frac{\delta_2 - \delta_1 w}{\sqrt{(1-w^2)(1-w^2-\delta_1^2-\delta_2^2+2\delta_1\delta_2 w)}}$$

که $w = corr(X_1, X_2)$، $\delta_1 = corr(Y, X_1)$، $\delta_2 = corr(Y, X_2)$ [۳].

ملاحظه ۴.۱. با استفاده از نتایج آزالینی و دالا-والی (۱۹۹۶)، می‌توان نتیجه گرفت که $\{\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{d}}{=} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | Y > \mu_y\}$ دارای همان چگالی رابطه (۲) است.

۲.۱. تابع مفصل. مطالعه مفصل‌ها و کاربرد آنها در آمار یک پدیده نوین محسوب می‌شود. واژه مفصل اولین بار توسط اسکلار (۱۹۵۹) [۴] برای توصیف توابعی استفاده شد که توابع توزیع تک بعدی آن‌ها را به هم متصل می‌کرد. بهترین معرفی برای تابع مفصل و خلاصه‌ای از ویژگی‌های این تابع‌ها را می‌توان در نلسن (۲۰۰۶) یافت [۵].

تعریف ۵.۱. بازه $I = [0, 1]$ در نظر بگیرید. تابع دو متغیره $C : I^2 \longrightarrow I$ را یک تابع مفصل گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند [۵]:

۱) $C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad \forall u, v \in I$,
۲) $C(u, 1) = u, C(1, v) = v \quad \forall u, v \in I$,
۳)برای هر مستطیل $J = [v_1, v_2] \times [u_1, u_2]$ که در آن $v_1 \leq v_2$ و $u_1 \leq u_2$ داشته باشیم:

$$V_C(J) = C(u_2, v_2) + C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) \geq 0,$$

قضیه زیر توسط اسکلار در سال ۱۹۵۹ ارائه شد و یک رابطه تحلیلی بین تابع توزیع توأم و توابع توزیع حاشیه‌ای از طریق تابع مفصل برقرار می‌کند [۵].

قضیه ۶.۱. اسکلار: اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم F و توابع توزیع حاشیه‌ای F_1 و F_2 باشند، آنگاه تابع مفصل C وجود دارد، به طوریکه:

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

اگر $F_1(x)$ و $F_2(y)$ پیوسته باشند، آنگاه تابع مفصل C در رابطه فوق یکتاست و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \quad \forall\, u, v \in I,$$

که در آن F_i^{-1} معکوس تابع F_i، $i = 1, 2$ است. مفصل‌ها با توزیع‌های با بعد بالاتر از دو مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این پژوهش از مفصل سه-متغیره گاوسی برای ساخت تابع چگالی مورد نظر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۷.۱. :تابع مفصل گاوسی سه-متغیره: فرض کنید ماتریس Σ متقارن، مثبت با $diag(\Sigma) = (1, 1, 1)^T$ و Φ_Σ توزیع نرمال چند متغیره استاندارد با ماتریس همبستگی Σ باشد. آنگاه مفصل گاوسی سه-متغیره به صورت زیر است:

$$C^{Ga}(u_1, u_2, u_3) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(u_3)) \quad (4)$$

که Φ^{-1} معکوس تابع توزیع تک متغیره نرمال استاندار است. همچنین u_1، u_2 و u_3 به ترتیب توابع توزیع متغیرهای X_1، X_2 و Y هستند.

۲. نتایج اصلی

در بخش قبل تابع چگالی چوله نرمال دو-متغیره، متغیر تصادفی شرطی $\{\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | Y > \mu_y\}$ را بیان کردیم .حال فرض کنید متغیر Y، X_1 و X_2 از طریق مفصل $C_{X_1,X_2,Y}$ مرتبط باشد و متغیرهای X_1 و X_2 مستقل از یکدیگر باشند. در اینصورت تابع توزیع $\mathbf{Z}$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \frac{\int_{-\infty}^{z_1}\int_{-\infty}^{z_2}\int_{\mu_y}^{\infty} f_{X_1,X_2,Y}(x_1,x_2,y)dydx_1dx_2}{\int_{\mu_y}^{\infty} f(y)dy} \\ &= m_{\mu_y}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{\mu_y}^{\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_Y(y)c(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),F_Y(y))dydx_1dx_2, \end{aligned}$$

که $m_{\mu_y} = (\int_{\mu_y} f(y)dy)^{-1}$ و تابع چگالی $\mathbf{Z}$ به صورت زیر است

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = m_{\mu_y}\int_{\mu_y}^{\infty} f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(z_2)f_Y(y)c(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),F_Y(y))dy, \tag{۵}$$

به طوریکه $c(.,.,.)$ تابع چگالی مفصل است.

قضیه ۱.۲. فرض کنید Y، X_1و X_2 با تابع توزیع‌های $F_Y(y)$، $F_{X_1}(x_1)$ و $F_{X_2}(x_2)$ و از طریق مفصل $C_{X_1,X_2,Y}$ مرتبط باشند. در این صورت تابع چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = m_{\mu_y}f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(z_2)(1 - D_{12}C_{X_1,X_2,Y}), \quad z_1,z_2 \in \mathbb{R} \tag{۶}$$

به طوریکه $D_{12}C_{X_1,X_2,Y} = \frac{\partial^2 C_{X_1,X_2,Y}}{\partial F_{X_1}(z_1)\partial F_{X_2}(z_2)}$.

اثبات.

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= m_{\mu_y}P(X_1 \le z_1, X_2 \le z_2, y > \mu_y) \\ &= m_{\mu_y}[P(X_1 \le z_1, X_2 \le z_2) - P(X_1 \le z_1, X_2 \le z_2, y \le \mu_y)] \\ &= m_{\mu_y}[F_{X_1,X_2}(z_1,z_2) - C_{X_1,X_2,Y}(F_{X_1}(z_1),F_{X_2}(z_2),F_Y(\mu_y))] \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه X_1 و X_2 مستقلند می‌توان چگالی $\mathbf{Z}$ را به صورت زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= m_{\mu_y}\big[f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(z_2) - \frac{\partial^2 C_{X_1,X_2,Y}}{\partial F_{X_1}(z_1)\partial F_{X_2}(z_2)}\frac{\partial F_{X_1}(z_1)}{\partial z_1}\frac{\partial F_{X_2}(z_2)}{\partial z_2}\big] \\ &= m_{\mu_y}\big[f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(z_2) - f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(z_2)D_{12}C_{X_1,X_2,Y}\big] \\ &= m_{\mu_y}f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(z_2)(1 - D_{12}C_{X_1,X_2,Y}), \end{aligned}$$

که همان رابطه (۶) است. □

نتیجه ۲.۲. فرض کنید متغیرهای Y، X_1و X_2 دارای توزیع نرمال استاندارد باشند و از طریق مفصل بیضوی گاوسی C^{Ga} مرتبط باشند. در این صورت تابع چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل برابر است با

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 2\varphi(z_1)\varphi(z_2)\Phi(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2), \quad z_1,z_2 \in \mathbb{R} \tag{۷}$$

نتیجه ۳.۲. فرض کنید متغیر Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشد و متغیرهای X_1 و X_2 به ترتیب دارای توزیع $F_{X_1}(x_1)$ و $F_{X_2}(x_2)$ باشند چنانچه متغیر Y، X_1 و X_2 از طریق مفصل بیضوی گاوسی C^{Ga} مرتبط باشند. در این صورت تابع چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل برابر است با

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = 2f_{X_1}(z_1)f_{X_2}(x_2)\Phi(\lambda_1\Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1)) + \lambda_2\Phi^{-1}(F_{X_2}(x_2))), \quad z_1,z_2 \in \mathbb{R} \tag{۸}$$

نتیجه ۴.۲. فرض کنید متغیر Y دارای توزیع $F_Y(y)$ باشد و متغیرهای X_1 و X_2 دارای توزیع نرمال استاندارد باشند بطوریکه متغیر Y، X_1 و X_2 از طریق مفصل بیضوی گاوسی C^{Ga} مرتبط باشد. آنگاه تابع چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل برابر است با

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = m_{\mu_y}\varphi(z_1)\varphi(z_2)\Phi(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - \frac{\Phi^{-1}(F_Y(\mu_y))}{\sqrt{1-\rho_{1y}^2-\rho_{2y}^2}}), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R} \tag{۹}$$

که در آن $\lambda_1 = \dfrac{\rho_{1y}}{\sqrt{1-\rho_{1y}^2-\rho_{2y}^2}}$، $\lambda_2 = \dfrac{\rho_{2y}}{\sqrt{1-\rho_{1y}^2-\rho_{2y}^2}}$ و ρ_{1y}، ρ_{2y} به ترتیب ضریب همبستگی متغیر Y با X_1 و ضریب همبستگی متغیر Y با X_2 می‌باشند.

۳. نتایج عددی

با استفاده از نرم افزار R داده‌های AIS را فراخوانی کردیم و به طور تصادفی ۳۰ داده را انتخاب کردیم و دیدیم که متغیر SSF دارای توزیع نمایی با میانگین ۷۹ باشد و متغیرهای Wt و Ht دارای توزیع نرمال باشند که به نرمال استاندارد تبدیل کردیم. همچنین متغیر Ht، Wt و SSF از طریق مفصل بیضوی گاوسی C^{Ga} با ماتریس همبستگی

$$\Sigma = \begin{bmatrix} ۱ & -۰/۲۸ & ۰/۲۶ \\ -۰/۲۸ & ۱ & ۰ \\ ۰/۲۶ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مرتبط باشند. همانطور که در جدول ۱ مشخص است چگالی چوله-دومتغیره بر مبنای مفصل دارای AIC و BIC کمتری نسبت به چگالی نرمال چوله دو-متغیره دارد. بنابراین می‌توان گفت در این مجموعه داده استفاده از چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل نتیجه بهتری به ارمغان می‌آورد.

جدول ۱. معیار AIC وBIC چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل و چگالی نرمال چوله دو-متغیره.

	چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل	چگالی نرمال چوله دو-متغیره
AIC	-۶۲	-۵۲
BIC	-۵۸	-۴۷

۴. نتیجه‌گیری

همانطور که بیان شد در بسیاری از مسائل کاربردی میزان چولگی داده‌ها نادیده گرفته می‌شود و در اکثراوقات متغیرها را مستقل از هم فرض می‌کنند. در این پژوهش به بررسی اینگونه مسائل پرداختیم که با توجه به مجموعه داده در نظر گرفته شده به این نتیجه دست یافتیم که استفاده از چگالی چوله دو-متغیره بر مبنای مفصل عملکرد دقیق‌تری نسبت به چگالی نرمال چوله دو-متغیره دارد. ایده‌های تحقیق از جنبه‌های مختلفی قابل گسترش است به عنوان نمونه می‌توان خواص این توزیع، گشتاورها و روش‌های برآورد پارامترهای آن را مورد بررسی قرار داد. در ادامه کار برآنیم تا شکل چند متغیره و کاربرد آن در داده‌های واقعی دیگر مورد مطالعه قرار دهیم.

مراجع

۱. ز. خدادادی، توزیع چند متغیره نرمال چوله، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شیراز، شیراز، ۱۳۷۷.

2. A. Azzalini, *A class of distribution which includes the normal ones*, Scand.J.Staist, 12 (1985), 171–178.
3. A. Azzalini and A. Dalla-Valle, *The multivariate skew-normal distribution*, Biometrika, 83 (1996), no. 4, 715–726.
4. A. Sklar, *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges*, Publications de l′Institut Statistique de l′Université de Paris, 8 (1959), 229–231.
5. R.B. Nelsen, *An introduction to copulas, Second Edition, Springer Series in Statistics*, Springer-Verlag, New York, 2006.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بررسی کیفیت نرخ همگرایی روش باقیمانده مینیمال تعمیم یافته کلی با شروع مجدد

علی ایرانمنش[۱،*] ، آزیتا تاج الدینی[۲]

[۱،۲]بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. روش باقیمانده مینیمال تعمیم یافته کلی با شروع مجدد (Gl-GMRES(m)) برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با سمت راست چندگانه استفاده می‌شود. این روش در چرخه‌های شروع مجدد خاصی دارای مشکلاتی از قبیل ایستایی یا کند شدن سرعت همگرایی می‌شود. در اینجا، نرخ همگرایی روش مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: نرخ همگرایی، تابع لیاپانوف، زاویه های متوالی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65F10.

---

۱. مقدمه

روش باقیمانده مینیمال تعمیم یافته کلی، یک روش تکراری مشهور برای حل دستگاه‌های معادلات خطی نامتقارن بزرگ با سمت راست چندگانه

$$AX = B, \tag{۱}$$

است، که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $X, B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. برای اینکه در این روش هزینه محاسباتی و شرایط ذخیره سازی محدود شود، از روش شروع مجدد استفاده می‌کنند. این بدین معنی است که روش بعد از یک تعداد ثابتی گام، مجدداً شروع می‌شود. روش حاصل باقیمانده مینیمال تعمیم یافته با شروع مجدد نامیده می‌شود و با Gl-GMRES(m) نشان داده می‌شود [۴]. زمانی که روش مجدداً شروع می‌شود، از جواب تقریبی حاصل به عنوان حدس اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود. این فرایند تکرار می‌شود تا نرم باقیمانده کوچک شود. در این مقاله، j اُمین چرخه شروع مجدد با اندیس بالایی و تعداد تکرارها با اندیس پایینی نشان داده شده اند، یعنی $X_k^{(j)}$ $(R_k^{(j)} = B - AX_k^{(j)})$ جواب تقریبی (باقیمانده‌ی تقریبی) بعد از چرخه ی j اُم در تکرار k اُم با $1 \le k \le m$ را نشان می‌دهد.

۲. پیشنیازها

در این بخش چند تعریف و نمادهایی که در سرتاسر مقاله مورد استفاده قرار گرفته اند، معرفی شده است.

تعریف ۱.۲. [۲] فرض کنید $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ و $Y \in \mathbb{R}^{n\times q}$. F- ضرب داخلی دو ماتریس X و Y با نماد $\langle X, Y\rangle_F$ نمایش داده می‌شود و به صورت $\langle X, Y\rangle_F = tr(X^TY)$, تعریف می‌گردد، که $tr(X^TY)$ رد ماتریس X^TY، یعنی مجموع درایه‌های روی قطر اصلی آن را نشان می‌دهد.

نرم ماتریسی وابسته به این ضرب داخلی، نرم فروبنیوس نامیده می‌شود و به صورت $\|X\|_F = \langle X, X\rangle_F^{\frac{1}{2}}$ است.

---

*علی ایرانمنش. آدرس ایمیل: alimin7.11@gmail.com

تعریف ۲.۲. مجموعه‌ی $\{X_1, \ldots, X_m\}$ از ماتریسها را نسبت به F-ضرب داخلی، متعامد یکه می‌گویند، اگر

$$\langle X_i, X_j\rangle_F = 0, \text{ برای} i, j = 1, 2, \ldots, m,\ i \neq j \text{ و } \|X_i\|_F = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

تعریف ۳.۲. فرض کنید $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ و $Y \in \mathbb{R}^{n\times q}$. کسینوس زاویه بین دو ماتریس X و Y به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\cos\angle(X, Y) = \frac{\langle X, Y\rangle_F}{\|X\|_F\|Y\|_F}.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنید $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ و $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times q}$. ضرب کرونکر این دو ماتریس به صورت $A \otimes B$ نمایش داده می‌شود و یک ماتریس از اندازه‌ی $n\,m \times p\,q$ است. مولفه‌ی (i, j) این ماتریس برابر است با:

$$(A \otimes B)_{i,j} = (a_{i,j}B).$$

۳. روش باقیمانده مینیمال تعمیم یافته با شروع مجدد

در این بخش به طور مختصر به توضیح روش باقیمانده مینیمال تعمیم یافته (Gl-GMRES(m)) پرداخته می‌شود. فرض کنید $X_m^{(j-1)}$ حدس اولیه چرخه‌ی jام باشد و $R_m^{(j-1)} = B - AX_m^{(j-1)}$ باقیمانده متناظر با آن باشد. به منظور به دست آوردن جواب تقریبی در پایان چرخه‌ی jاُم، باید دو شرط زیر برقرار باشند:

$$X_m^{(j)} \in X_m^{(j-1)} + \mathcal{K}_m(A, R_m^{(j-1)}), \tag{۲}$$

$$R_m^{(j)} \perp_F A\mathcal{K}_m(A, R_m^{(j-1)}), \tag{۳}$$

که $\mathcal{K}_m(A, R_m^{(j-1)}) = span\{R_m^{(j-1)}, AR_m^{(j-1)}, \cdots A^{m-1}R_m^{(j-1)}\}$.

برای حل دستگاه معادلات خطی (۱) به روش Gl-GMRES(m)، به یک پایه F-متعامد یکه برای زیر فضای کریلف $\mathcal{K}_m(A, R_m^{(j-1)})$ نیاز است، این پایه با استفاده از الگوریتم آرنولدی کلی [۴] بدست می‌آید. با توجه به فرآیند آرنولدی کلی رابطه‌ی $A\mathcal{V}_m^{(j)} = \mathcal{V}_{m+1}^{(j)}\left(\bar{H}_m^{(j)} \otimes I_p\right)$، و $\mathcal{V}_{m+1}^{(j)} = [\mathcal{V}_m^{(j)} \quad V_{m+1}^{(j)}] \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)p}$ برقرار است، که $\bar{H}_m^{(j)}$ یک ماتریس شبه بالا هسنبرگی است. طبق (۲)، جواب تقریبی می تواند به شکل $X_m^{(j)} = X_m^{(j-1)} + \mathcal{V}_m^{(j)}\left(y_m^{(j)} \otimes I_p\right)$ نوشته شود، که در آن $y_m^{(j)}$ جواب مسئله‌ی تقریب کمترین مربعات زیر است:

$$y_m^{(j)} = arg \min_{y^{(j)}\in\mathbb{R}^m} \left\|\|R_m^{(j-1)}\|_F e_1^{(m+1)} - \bar{H}_m y^{(j)}\right\|_2, \tag{۴}$$

که $e_1^{(m+1)}$ اولین ستون ماتریس همانی از اندازه‌ی $(m+1)\times(m+1)$ است. در حقیقت مسئله‌ی مینیم سازی (۴) با شرط F-متعامدسازی (۳) معادل است. توجه کنید اگر $X_m^{(j)}$ تقریب مناسبی برای جواب دستگاه معادلات خطی (۱) نباشد، با در نظر گرفتن این جواب به عنوان حدس اولیه چرخه‌ی بعد، روش مجدداً شروع می‌شود.

قبل از اینکه بخواهیم به بررسی کیفیت نرخ همگرایی روش Gl-GMRES(m) بپردازیم، دو نوع ایستایی را مطرح می‌کنیم.

- اولین نوع **ایستایی مقطعی** نام دارد، بدین معنی که نرم‌های باقیمانده در تعدادی محدود چرخه‌ی متوالی تقریبا ثابت می‌مانند، یعنی:

$$\|R_m^{(j)}\|_F \approx \|R_m^{(j-1)}\|_F, \text{ برای } j = k, \ldots, p,$$

که در آن k و p اعداد صحیح مثبت و متناهی هستند. در این نوع ایستایی یک وضعیت کلی تر می‌تواند رخ دهد، یعنی:

$$\|R_m^{(j)}\|_F < \|R_m^{(j-1)}\|_F, \text{ برای } j = 1, 2, \ldots, k,$$
$$\|R_m^{(j)}\|_F = \|R_m^{(j-1)}\|_F, \text{ برای } j = k+1, k+2, \ldots, p,$$

با $p \longrightarrow \infty$. برای مثال از این نوع ایستایی، نتایج عددی برای Gl-GMRES(30) در جدول ۱ آورده شده است.

- دومین نوع ایستایی، **ایستایی کامل** است و زمانی اتفاق می‌افتد که در تکرار های روش Gl-GMRES(m) نرم‌های باقیمانده، روند نزولی نداشته باشند.

۴. بررسی کیفیت نرخ همگرایی روش Gl-GMRES(m)

تعریف ۱.۴. فرض کنید $R_m^{(j-1)}$ و $R_m^{(j)}$ به ترتیب ماتریس‌های باقیمانده تولید شده در چرخه‌های $(j-1)$ اُم و j اُم روش Gl-GMRES(m) باشند. اگر بین نرمهای آنها رابطه‌ی $\|R_m^{(j)}\|_F = (1-\epsilon)\|R_m^{(j-1)}\|_F$ به ازای هر $0 < \epsilon \ll 1$ برقرار باشد، گوییم Gl-GMRES(m) در چرخه‌ی جاری با کاهش نرخ همگرایی روبرو شده است.

برای برقراری ارتباط بین مفهوم بالا و کیفیت همگرایی، یک تابع لیاپانوف [1] بر اساس ماتریس‌های باقیمانده معرفی می‌شود: [۱].

تعریف ۲.۴. تابع $V : \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}$ را تابع کاندیدای لیاپانوف روی زیر مجموعه $\mathcal{H}$ از $\mathbb{R}^{n\times p}$ گویند، هرگاه

۱) V روی $\mathcal{H}$ پیوسته باشد.

۲) بطور موضعی معین مثبت باشد، یعنی: $V(0) = 0$ و $V(R) > 0$ به ازای هر $R \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$، و $\mathcal{H}$ یک همسایگی حول $R = 0$ است. بعلاوه، اگر به ازای هر $R \in \mathcal{H}$، رشد آن یعنی $\Delta V(R)$ معین منفی باشد، آنگاه $V(R)$ را تابع کنترلی لیاپانوف گویند.

اهمیت تابع کنترلی لیاپانوف از این حقیقت ناشی می‌شود که Gl-GMRES(m) بطور مجانبی پایدار است، یعنی اگر به ازای هر دنباله از ماتریس های باقیمانده $R_m^{(j)}$ متناظر با جواب های تقریبی $X_m^{(j)}$ روش Gl-GMRES(m) داشته باشیم $\Delta V(R_m^{(j)}) < 0$، آنگاه $\lim_{j\to\infty} \|R_m^{(j)}\|_F \to 0$.

در اینجا مربع فروبنیوس نرم باقیمانده در چرخه‌ی جاری به عنوان تابع لیاپانوف در نظر گرفته شده است، بدین معنی که در چرخه‌ی j اُم، $V(R_m^{(j)}) := \|R_m^{(j)}\|_F^2$.

تعریف ۳.۴. فرض کنید $R_m^{(j-2)}$، $R_m^{(j-1)}$ و $R_m^{(j)}$ به ترتیب ماتریس های باقیمانده‌ی روش Gl-GMRES(m) در چرخه‌های $(j-2)$ اُم، $(j-1)$ اُم و j اُم باشند. به علاوه، فرض کنید $V(R_m^{(j)}) = \|R_m^{(j)}\|_F^2$ به عنوان تابع کنترلی لیاپانوف انتخاب شده باشد. افزایش موضعی $\Delta V(R_m^{(j)})$ در چرخه‌ی j اُم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta V(R_m^{(j)}) := \|R_m^{(j)}\|_F^2 - \|R_m^{(j-1)}\|_F^2. \tag{۵}$$

اکنون رفتار زاویه‌های بین دو ماتریس باقیمانده در دو چرخه‌ی متوالی برحسب تابع افزایش موضعی $\Delta V(R_m^{(j)})$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرض کنید ماتریس های باقیمانده در چرخه‌های $(j-1)$ اُم و j اُم، یعنی $R_m^{(j-1)}$ و $R_m^{(j)}$ داده شده‌اند. زاویه‌ی بین دو ماتریس باقیمانده در چرخه‌های متوالی به صورت $\alpha_m^{(j)} = \angle(R_m^{(j)}, R_m^{(j-1)})$ تعریف می‌شود. قبل از اینکه یک عبارت برای زاویه‌ی بین دو ماتریس باقیمانده در چرخه‌های متوالی به دست آوریم، به نکته‌ی زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned}\langle R_m^{(j)}, R_m^{(j-1)}\rangle_F &= \langle R_m^{(j)}, R_m^{(j)} + A\mathcal{V}_m^{(j)}\left(y_m^{(j)} \otimes I_p\right)\rangle_F, \\ &= \langle R_m^{(j)}, R_m^{(j)}\rangle + \langle R_m^{(j)}, A\mathcal{V}_m^{(j)}\left(y_m^{(j)} \otimes I_p\right)\rangle_F,\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن ستون های بلوکی $\mathcal{V}_m^{(j)}$ پایه‌ای برای زیر فضای کریلف $\mathcal{K}_m(A, R_m^{(j-1)})$ هستند.

از انجائیکه $R_m^{(j)} \perp_F A\mathcal{K}_m(A, R_m^{(j-1)})$ و با توجه به رابطه‌ی (۶)، داریم: $\langle R_m^{(j)}, R_m^{(j-1)}\rangle_F = \|R_m^{(j)}\|_F^2$.

با توجه به نکته‌ی بالا، نتیجه زیر برای بدست آوردن زاویه‌ی بین دو ماتریس باقیمانده در چرخه‌های متوالی ارائه می‌شود.

[1] Lyapunov

قضیه ۴.۴. فرض کنید $R_m^{(j-1)}$ و $R_m^{(j)}$ به ترتیب ماتریس های باقیمانده چرخه‌های $(j-1)$ اُم و j اُم باشند. زاویه‌ی $\alpha_m^{(j)} = \angle(R_m^{(j)}, R_m^{(j-1)})$ که به ترتیب زاویه‌ی متوالی نامیده می‌شوند، برحسب نرم های باقیمانده به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\cos(\alpha_m^{(j)}) = \frac{\|R_m^{(j)}\|_F}{\|R_m^{(j-1)}\|_F}. \tag{۷}$$

اکنون، فرمولی برای کاهش نرخ همگرایی و ایستایی بر حسب تابع کنترلی لیاپانوف و افزایش موضعی (۵) بدست می‌آید. معادله‌ی (۵) را بر $\|R_m^{(j-1)}\|_F^2$ تقسیم می‌کنیم، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta V(R_m^{(j)})}{\|R_m^{(j-1)}\|_F^2} = \frac{\|R_m^{(j)}\|_F^2}{\|R_m^{(j-1)}\|_F^2} - 1 = \cos^2(\alpha_m^{(j)}) - 1 = -\sin^2(\alpha_m^{(j)}). \tag{۸}$$

۱. اگر $\sin^2(\alpha_m^{(j)}) \approx 0$، آنگاه $\frac{\Delta V(R_m^{(j)})}{\|R_m^{(j-1)}\|_F^2} \approx 0$، در نتیجه $\frac{\|R_m^{(j)}\|_F}{\|R_m^{(j-1)}\|_F} \approx 1$ و $\|R_m^{(j)}\|_F \approx \|R_m^{(j-1)}\|_F$ (ایستایی موضعی نسبت به $\|R_m^{(j-1)}\|_F$ را نتیجه می‌دهد).

۲. اگر $\sin^2(\alpha_m^{(j)}) > 0$، بنابراین $\Delta V(R_m^{(j)}) < 0$، یعنی $\Delta V(R_m^{(j)})$ معین منفی است. درنتیجه الگوریتم در چرخه ی j اُم به طور موضعی همگرا است. علاوه بر این هرچه $\Delta V(R_m^{(j)})$ منفی‌تر باشد، همگرایی شتاب بیشتری می‌گیرد.

۳. اگر $\sin^2(\alpha_m^{(j)}) \approx 1$، آنگاه $\frac{\Delta V(R_m^{(j)})}{\|R_m^{(j-1)}\|_F^2} \approx -1$ و $\frac{\|R_m^{(j)}\|_F}{\|R_m^{(j-1)}\|_F} \approx 0$ (یک جواب مناسب حاصل می شود).

برای بررسی کیفیت نرخ همگرایی روش Gl-GMRES(m)، فرمولی به کمک تابع لیاپانوف و تابع افزایش موضعی ارائه شد که رابطه‌ای مستقیم با اندازه‌ی زاویه‌های متوالی دارد.

۵. نتایج عددی

در این بخش، یک مثال عددی برای ارزیابی رفتار همگرایی روش Gl-GMRES(m) آورده شده است.

مثال ۱.۵. در این مثال، ماتریس A از ماتریس‌های [۳] انتخاب شده است. حدس اولیه $X^{(0)} = 0_{n\times 10}$ می باشد و همچنین ماتریس سمت راست $B = A\,ones(n, 10)$ در نظر گرفته شده است. شرط توقف $\|R_m^{(j)}\|_F \leqslant 10^{-9}$ یا حداکثر تعداد چرخه‌ها ۱۰۰۰ اعمال شده است. همانگونه که در جدول ۱ مشاهده می‌کنید، هر چقدر میانه‌ی زاویه های میانی بزرگتر باشد همگرایی روش بیشتر تضمین می‌شود.

جدول ۱. تعداد چرخه‌ها (Cycles)، زمان اجرا (CPU)، نرم باقیمانده (Res) و میانه‌ی زاویه‌های متوالی (Median sequential angles) با $m = 30$ گزارش شده است. علامت † نشان می دهد روش واگرا است.

Problem	Cycles	CPU	Res	Median sequential angles
nnc261	†	†	†	0.64
sherman1	129	6.01	9.59e-10	27.32
young1c	33	3.05	9.04e-10	64.15

مراجع

1. A. Bhaya and E. Kaszkurewicz, *A control-theoretic approach to the design of zero finding numerical methods*, IEEE Transactions on Automatic Control, 52 (6) (2007), 1014–1026.
2. Datta B. N., Numerical Linear Algebra and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (2010).
3. T. A. Davis and Y. Hu, *The University of Florida sparse matrix collection*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 38 (1) (2011), 1–25.
4. K. Jbilou, A. Messaoudi and H. Sadok, *Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations*, Applied Numerical Mathematics, 31 (1999) 49–63.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

ساخت روش بلوکی هیبریدی براساس چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول

مرتضی بیشه نیاسر * ، سمیرا بنی‌مهدی دهکردی
دانشکده علوم ریاضی،دانشگاه کاشان،کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله سعی داریم با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، نوع خاصی از روش‌های بلوکی هیبریدی را به‌دست آوریم. نقاط بین‌گامی بر اساس نقاط چبیشف-گاوس-لوباتو معرفی می شوند. سازگاری، صفر پایداری و ناحیه پایداری روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج عددی بیانگر دقت و کارایی روش مورد نظر خواهد بود.
واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل معمولی، روش‌های بلوکی هیبریدی، سازگاری، صفر پایداری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65L05.

۱. مقدمه

معادله دیفرانسیل $y'(x) = f(x, y(x))$ با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که این معادله دارای جواب منحصر به فرد است. روش‌های عددی فراوانی برای تقریب جواب این رده از معادله‌ها در بازه (x_0, X) بیان شده که از مهم‌ترین آنها می‌توان به روش‌های رانگ-کوتا اشاره کرد. رده دیگری از روش‌های عددی که اخیراً مورد توجه قرار گرفته روش‌های بلوکی است که برای اولین بار در [۲] پیشنهاد شد. این روش‌ها توسط محققین و پژوهشگران برای تقریب معادلات مرتبه بالاتر، حتی با شرایط اولیه و مرزی متفاوت، بسط و گسترش یافته است. از جمله مزیت‌های این روش‌ها می‌توان به خود شروع‌گری آنها اشاره کرد و با هر بار تکرار، جواب را در بیش از یک نقطه تقریب می‌زند. در بسیاری از موارد برای حصول این روش از اعمال درونیابی و هم‌مکانی روی تقریب $y(x) \simeq \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ استفاده می‌کنند، ولی در این مقاله سعی می‌کنیم از چندجمله‌های چبیشف نوع اول در یافتن این روش استفاده کنیم و مواردی هم‌چون سازگاری، صفر پایداری و ناحیه مطلقاً پایداری را مورد بررسی قرار دهیم.

۲. ساخت روش بلوکی با استفاده از چبیشف

معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ با شرط اولیه $y(a) = y_0$ را در بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید. برای تقریب جواب به‌صورت گسسته در بازه مورد نظر، ابتدا با طول گام ثابت h بازه مورد نظر را به زیربازه‌های متساوی‌الفاصله تقسیم‌بندی می‌کنیم به طوری‌که $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$، y_s را به عنوان تقریب $y(x_s)$ در نظر می‌گیریم. برای تقریب جواب روی $[x_s, x_{s+1}]$ از تغییر متغیر $x = x_s + \frac{1+\alpha}{2}h$ که $\alpha \in [-1, 1]$ استفاده می‌کنیم، لذا $y(x) = y(x_s + \frac{1+\alpha}{2}h) = \tilde{y}(\alpha)$. با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول می‌توان تقریب زیر را برای $\tilde{y}(\alpha)$ به‌صورت زیر بیان کنیم [۱]:

$$\tilde{y}(\alpha) \simeq \sum_{k=0}^{m}{}'' a_k T_k(\alpha), \qquad (1)$$

*سخنران. آدرس ایمیل: mbisheh@kashanu.ac.ir

که علامت $''$ بدین معنی است که جمله اول و آخر در سری متناهی فوق دارای ضریب $\frac{1}{2}$ می‌باشند و

$$a_k = \frac{2}{m}\sum_{j=0}^{m}{}''\tilde{y}(\alpha_j)T_k(\alpha_j). \tag{2}$$

می‌توان α_j ها را به‌عنوان نقاط چبیشف-گاوس-لوباتو معرفی کرد:

$$\alpha_j = \cos(\theta_j),\ \theta_j = (m-j)\frac{\pi}{m},\ j = 0, 1, 2, \cdots, m.$$

لذا با توجه به α_j ها، می‌توان نقاط کمکی درون بازه‌ای را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$x_{s+k_j} = x_s + hk_j,\ k_j = \frac{1+\alpha_j}{2},\ j = 1, \cdots, m$$

که $x_s \leqslant x_{s+k_j} \leqslant x_{s+1}$. حال با توجه به شکل معادله دیفرانسیل:

$$f(x, y(x)) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{d\tilde{y}(\alpha)}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\tilde{y}(\alpha)}{d\alpha} \simeq \frac{2}{h}\sum_{k=0}^{m}{}''a_k T_k'(\alpha). \tag{3}$$

با محاسبه معادله فوق در نقاط α_j، دستگاه جبری

$$hf(x_s + hk_j, y(x_s + hk_j)) = 2\sum_{k=0}^{m}{}''a_k T_k'(\alpha_j),\ j = 1, \cdots, m. \tag{4}$$

حاصل می‌شود که $y(x_s + hk_j)$، مجهولات دستگاه فوق، همان جواب در نقاط بین بازه‌ای است. ما با انتخاب $m = 6$ و با فرض اینکه $f(\xi) = f(\xi, y(\xi))$ دستگاه جبری زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
hf(x_s + k_1h) &= (-4 - 2\sqrt{3})y(t_s) + 2\sqrt{3}y(t_s + k_1h) + (2 + 2\sqrt{3})y(t_s + k_2h) - \frac{4\sqrt{3}}{3}y(t_s + k_3h)\\
&\quad + (2\sqrt{3} - 2)y(t_s + k_4h) - \frac{2\sqrt{3}}{3}y(t_s + k_5h) + (4 - 2\sqrt{3})y(t_s + h),\\
hf(x_s + k_2h) &= 2y(t_s) + (-2 - 2\sqrt{3})y(t_s + k_1h) + \frac{2}{3}y(t_s + k_2h) + 4y(t_s + k_3h) - 2y(t_s + k_4h)\\
&\quad + (2\sqrt{3} - 2)y(t_s + k_5h) - \frac{2}{3}y(t_s + h),\\
hf(x_s + k_3h) &= -y(t_s) + \frac{4\sqrt{3}}{3}y(t_s + k_1h) - 4y(t_s + k_2h) + 4y(t_s + k_4h) - \frac{4\sqrt{3}}{3}y(t_s + k_5h)\\
&\quad + y(t_s + h),\\
hf(x_s + k_4h) &= \frac{2}{3}y(t_s) + (2 - 2\sqrt{3})y(t_s + k_1h) + 2y(t_s + k_2h) - 4y(t_s + k_3h) - \frac{2}{3}y(t_s + k_4h)\\
&\quad + (2 + 2\sqrt{3})y(t_s + k_5h) - 2y(t_s + h),\\
hf(x_s + k_5h) &= (-4 + 2\sqrt{3})y(t_s) + \frac{2\sqrt{3}}{3}y(t_s + k_1h) + (2 - 2\sqrt{3})y(t_s + k_2h) + \frac{4\sqrt{3}}{3}y(t_s + k_3h)\\
&\quad + (-2 - 2\sqrt{3})y(t_s + k_4h) - 2\sqrt{3}y(t_s + k_5h) + (4 + 2\sqrt{3})y(t_s + h),\\
hf(x_s + h) &= y(t_s) + (8\sqrt{3} - 16)y(t_s + k_1h) + \frac{8}{3}y(t_s + k_2h) - 4y(t_s + k_3h) + 8y(t_s + k_4h)\\
&\quad + (-8\sqrt{3} - 16)y(t_s + k_5h) + \frac{73}{3}y(t_s + h).
\end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق می‌توان جواب را علاوه بر نقاط بین‌گامی در x_{s+1} نیز به‌دست آورد. با تکرار همین فرآیند روی $[x_{s+1}, x_{s+2}]$ می‌توان جواب را در x_{s+2} تقریب زد و همین فرآیند را تا انتها تکرار کرد.

۳. مشخصه‌های روش

به‌منظور بررسی سازگاری روش کافی‌است عملگر تفاضل خطی را روی تک تک روابط دستگاه جبری بالا اعمال کنیم. پس از اعمال بسط تیلور و ساده‌سازی، داریم: $\mathcal{L}[y(x_n), h] = C_7 h^7 y^{(7)}(x_n) + \cdots$

که در آن $C_7 = (\frac{1}{172032}, -\frac{1}{172032}, \frac{1}{172032}, -\frac{1}{172032}, \frac{1}{172032}, -\frac{1}{86016})^T$. لذا روش پیشنهاد شده از مرتبه $P = 6$ می‌باشد. به‌منظور بررسی صفر پایداری روش، دستگاه جبری را در شکل ماتریسی زیر بیان می‌کنیم

$$AY_s = BY_{s-1} + hF_s. \tag{۵}$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 2\sqrt{3}-2 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 4-2\sqrt{3} \\ -2-2\sqrt{3} & \frac{2}{3} & 4 & -2 & 2\sqrt{3}-2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} & -4 & 0 & 4 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 1 \\ 2-2\sqrt{3} & 2 & -4 & -\frac{2}{3} & 2+2\sqrt{3} & -2 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & 2-2\sqrt{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} & -2-2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 4+2\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3}-16 & \frac{8}{3} & -4 & 8 & -8\sqrt{3}-16 & \frac{73}{3} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4+2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

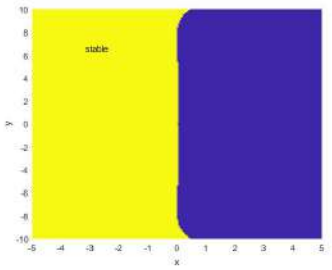
$$Y_s = (y(x_s + k_1 h), \cdots, y(x_s + k_5 h), y(x_s + h))^T,$$
$$Y_{s-1} = (y(x_{s-1} + k_1 h), \cdots, y(x_{s-1} + k_5 h), y(x_s))^T,$$
$$F_s = (f(x_s + k_1 h, y(x_s + k_1 h)), \cdots, f(x_s + k_5 h, y(x_s + k_5 h)), f(x_{s+1}, y(x_{s+1})))^T.$$

ماتریس A معکوس‌پذیر است لذا می‌توان معادله ۵ را به شکل $Y_s = A^{-1}BY_{s-1} + hA^{-1}F_s$، بازنویسی کرد. یک روش چندگامی ضمنی، صفر پایدار است اگر ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه نوع اول آن در شرط ریشه صدق کنند. چندجمله‌ای مشخصه نوع اول متناظر با روش فوق عبارت‌است از $\rho(z) = \det(zI - A^{-1}B) = z^5(z-1)$، که I ماتریس همانی 6×6 است. مشهود است که شرط ریشه برقرار است لذا روش صفر پایدار است و بنا به سازگاری آن روش همگرا است. به‌منظور بررسی ناحیه مطلقاً پایداری روش، کافی‌است روش را روی معادله $y' = \lambda y$، که $Re(\lambda) \leqslant 0$ اعمال کنیم. لذا رابطه $Y_s = (A - \hat{h}I)^{-1}BY_{s-1}$ حاصل خواهد شد که تمامی عناصر ماتریس $M = (A - \hat{h}I)^{-1}B$ به جز عناصر ستون آخرش، صفر خواهد بود.

مقادیر ویژه M عبارت‌است از $\left\{0, 0, 0, 0, 0, \frac{3z^5+140z^4+2688z^3+27648z^2+153600z+368640}{3z^6-73z^5+1036z^4-9600z^3+58368z^2-215040z+368640}\right\}$. ناحیه مطلقاً پایداری روش، نقاطی از صفحه مختلط است که به ازای آن رابطه $|\rho(M)| < 1$ برقرار باشد. این ناحیه را می‌توانید در شکل ۱ مشاهده نمایید. چون نیمه چپ صفحه مختلط در این ناحیه قرار دارد لذا روش A- پایدار است.

۴. نتایج عددی

در این قسمت روش بیان شده در این مقاله را بر روی چندین مسئله اعمال می‌کنیم. تمام محاسبات با نرم‌افزار Maple صورت گرفته است.



شکل ۱. ناحیه پایداری روش.

مثال ۱.۴. معادله ریکاتی $y' = ۱ + ۲y - y^۲$ با شرط $x \in [۰, ۴]$ را در نظر بگیرید. جواب تحلیلی معادله عبارت‌است از $y = ۱ + \sqrt{۲}\tanh[\sqrt{۲}x + \frac{۱}{۲}\log\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}]$. ماکزیمم خطای مطلق روش به ازای h های متفاوت را می‌توانید در جدول ۱، مشاهده کنید. می‌توان با عبارت $Co = \log_۲(\frac{E_h}{E_{\frac{h}{۲}}})$ به‌صورت محاسباتی، دقت و مرتبه را به‌دست آورد که E_h و $E_{\frac{h}{۲}}$، ماکزیمم خطای رخ داده شده با طول گام h و $\frac{h}{۲}$ می‌باشند. همانطورکه ملاحظه می‌کنید مرتبه محاسباتی Co نیز با مرتبه تئوری $P = ۶$ همخوانی دارد.

جدول ۱. ماکزیمم خطای رخ داده با طول گام h و $\frac{h}{۲}$، برای مثال ۱.۴.

	$\max\|y(x) - y_i\|$	Co
$h = ۰/۴$	۷/۵۷۸۰$e-۷$	
$h = ۰/۲$	۸/۳۵۵۴$e-۹$	۶/۵۰۲۰
$h = ۰/۱$	۱/۲۵۰۷$e-۱۰$	۶/۰۶۱۹
$h = ۰/۰۵$	۱/۹۶۱۹$e-۱۲$	۵/۹۹۴۳

مثال ۲.۴. مسئله مقدار اولیه سخت زیر را به همراه شرط اولیه متناظرش در نظر بگیرید [۳]:

$$\begin{cases} y' = -۱۰۰۰y + e^{-۲x}, \\ y(۰) = ۰, \qquad\qquad x \in [۰, ۱] \end{cases}$$

جواب تحلیلی این معادله عبارت‌است از $y(x) = \frac{۱}{۹۹۸}(e^{-۲x} - e^{-۱۰۰۰x})$. در جدول۲ می‌توانید بیشینه خطای حاصل شده به ازای طول گام‌های مختلف را مشاهده کنید.

جدول ۲. ماکزیمم خطای حاصل شده به ازای طول گام‌های مختلف برای مثال ۲.۴.

	$h = ۰/۱$	$h = ۰/۰۵$	$h = ۰/۰۲۵$	$h = ۰/۰۱۲۵$
$\max\|y(x) - y_i\|$	۴/۸۰۳۴$e-۶$	۴/۳۵۲۰$e-۶$	۱/۳۷۴۱$e-۶$	۲/۳۱۱۲$e-۷$

مراجع

1. C. W. Clenshaw, A.R. Curits, “A method for numerical integration on an automatic Computer”, Numer. Math, 2(1960), 197–205.
2. W. E. Milne, “Numerical Solution of differential equations”, John Wiley and Sons, 1953.
3. H. Ramos, “Development of a new Runge-Kutta method and its economical implementation”, Computational and Mathematical Methds, Vol(1) (2019), 1–11.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

فشرده‌سازی تصویر با استفاده از الگوریتم کدگذاری کوتاه کردن بلوک و نرمال‌سازی داده‌ها توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی

ساجده خیراندیش[۱،*] ، سید ابوالفضل شاهزاده‌فاضلی[۱]، سید مهدی کرباسی[۲] و اعظم صادقیان[۱]

[۱]بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران

[۲]بخش ریاضی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. یکی از کاربردهای فشرده‌سازی اطلاعات درتصویرهای دیجیتال، فشرده‌سازی تصویر است و هدف از فشرده‌سازی تصویر کاهش افزونگی محتویات تصویر است به‌گونه‌ای که ذخیره‌سازی و یا انتقال اطلاعات به شکل بهینه صورت گیرد. در تجزیه مقدار تکین یک ماتریس مقادیر تکین بزرگ و بردارهای تکین متناظر با آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و اطلاعات بیشتری از ماتریس را شامل می‌شود همچنین کدگذاری کوتاه کردن بلوک نیز نوعی روش فشرده‌سازی تصویر بااتلاف است که با بلوک‌بندی تصویر، تعداد سطوح خاکستری در هر بلوک را کاهش می‌دهد. این مقاله الگوریتمی را جهت فشرده‌سازی تصویر ارائه می‌دهد و داده‌ها نیز توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی نرمال می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که این الگوریتم می‌تواند برای تصویرهای رنگی و خاکستری مورد استفاده قرار گیرد؛ و در زمان کوتاه فشرده‌سازی تصویر بهتری را نتیجه دهد.

واژه‌های کلیدی: تجزیه مقدار تکین، کدگذاری کوتاه کردن بلوک، فشرده‌سازی تصویر بااتلاف .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 68W99.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، نظریه فشرده‌سازی داده‌ها به منظور حل مشکل پهنای‌باند اهمیت بیشتری پیدا کرده است. ایده اصلی فشرده‌سازی تصویر، کاهش افزونگی تصویر و انتقال داده‌ها به شکلی کارامد است. فشرده‌سازی تصویر باعث کاهش میزان استفاده از پهنای باند در سرورها می‌گردد؛ درنتیجه موجب صرفه‌جویی در وقت و هزینه می‌شود.

El Asnaoui [۲] فشرده‌سازی تصویر با استفاده از روش توانی تجزیه مقدار تکین بلوکی را پیشنهاد داده است که با یافتن یک رتبه مناسب برای ماتریس، تصویرها را به‌صورتی فشرده می‌کند که علاوه‌بر کیفیت بصری، فضای کمتری را در حافظه اشغال کند.

تکنیک ارائه شده توسط El Asnaoui و همکاران [۳] دو روش جدید را معرفی می‌کند. روش اول بهبود روش کدگذاری کوتاه کردن بلوک است که بر معایب کدگذاری کوتاه کردن بلوک کلاسیک غلبه می‌کند، و روش دوم نحوه به‌دست آوردن رتبه جدید از روش تجزیه مقدار تکین را توصیف می‌کند؛ که فشرده‌سازی تصویر بهتری را نتیجه می‌دهد [۴].

Doaa و Chadi [۱] کدگذاری کوتاه کردن بلوک (BTC) را پیشنهاد کردند، که یکی از ساده‌ترین و راحت‌ترین الگوریتم‌های فشرده‌سازی تصویر می‌باشد.

هدف اصلی در این مقاله فشرده‌سازی تصویر با استفاده از روش کدگذاری کوتاه کردن بلوک است که ابتدا مقادیر پیکسل‌های مربوط به تصویر توسط روش تجزیه مقدار تکین بلوکی نرمال‌سازی می‌شود تا تصویر کیفیت مناسبی داشته باشد.

*سخنران. آدرس ایمیل: sa.kherandish@gmail.com

۲. ابزار و روش‌ها

در این مقاله از کدگذاری کوتاه کردن بلوک و نرمال‌سازی داده‌ها با روش تجزیه مقدار تکین بلوکی، برای فشرده‌سازی تصویر استفاده می‌شود. الگوریتم مورد استفاده برای تجزیه مقدار تکین، روش تجزیه مقدار تکین بلوکی است که نسبت به الگوریتم تجزیه مقدار تکین رایج، خطای کمتر و همگرایی سریع‌تری دارد. با توجه به این‌که در این الگوریتم پیشنهادی، کیفیت تصویر مشخص می‌شود، لازم است، معیاری برای سنجش میزان کیفیت تصویر مشخص گردد.

۱.۲. تجزیه مقدار تکین بلوکی. ماتریس A با m سطر و n ستون و رتبه r را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $r \leq n \leq m$ باشد. در این‌صورت می‌توان A را به سه ماتریس V^T، $\sum$ و U تجزیه کرد به گونه‌ای که $A = U \sum V^T$ است و U و V ماتریس‌های متعامد هستند و $\sum$ نیز یک ماتریس قطری است که عناصر قطری آن همان مقادیر تکین ماتریس A هستند.
تصویر فشرده‌شده I_{comp} با استفاده از فرمول (۱) محاسبه می‌شود که K تعداد مقادیر تکین است که با افزایش مقدار تکین کیفیت تصویر نیز بیشتر می‌شود.

$$I_{comp} = U(:, ۱ : K) \times \sum(۱ : K, ۱ : K) \times \left(V(:, ۱ : K)^T\right) \quad (۱)$$

۲.۲. کدگذاری کوتاه کردن بلوک. کدگذاری کوتاه کردن بلوک، نوعی تکنیک فشرده‌سازی تصویر در مقیاس خاکستری و بااتلاف است؛ به‌طوری‌که تصویر اصلی را به بلوک‌هایی تقسیم می‌کند و سپس تعداد سطوح خاکستری در هر بلوک را کاهش می‌دهد درحالی که میانگین و انحراف معیار را حفظ می‌کند.

۳.۲. پارامتر مقایسه‌ای. برای محاسبه کیفیت و ارزیابی عملکرد الگوریتم از معیار $PSNR$ که در فرمول (۲) آورده شده؛ استفاده می‌شود. مقدار $PSNR$ زیاد نشان می‌دهد که تخریب بصری در تصویر فشرده شده کمتر است.
به عنوان مثال، یک تصویر با ۸ بیت در هر پیکسل شامل اعداد صحیح از ۰ تا ۲۵۵ است.

$$PSNR = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{(۲^B - ۱)^۲}{e_{MSE}} \quad (۲)$$

e_{MSE} برای دو تصویر I و J که در آن I تصویر اصلی و J تصویر فشرده‌شده است و m و n نیز تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس است، توسط فرمول (۳) تعریف می‌شود.

$$e_{MSE} = \frac{۱}{mn} \sum_{i=۰}^{m-۱} \sum_{j=۰}^{n-۱} [I(i,j) - J(i,j)]^۲ \quad (۳)$$

۳. نتایج اصلی

الگوریتم پیشنهادی برای فشرده‌سازی تصویر با استفاده از روش کدگذاری کوتاه کردن بلوک و نرمال‌سازی داده‌ها از طریق تجزیه مقدار تکین بلوکی به این صورت است که با توجه به تعداد مقدار تکین، تجزیه مقدار تکین بلوکی بر روی ماتریس اعمال می‌شود، سپس الگوریتم کدگذاری کوتاه کردن بلوک با توجه به ابعاد بلوک، بر روی ماتریس حاصل از مرحله قبل اجرا می‌شود.
ورودی‌های الگوریتم، ماتریس A مربوط به تصویر، تعداد مقادیر تکین K و ابعاد بلوک‌ها یعنی $B \times B$ می‌باشند و خروجی الگوریتم نیز، تصویر فشرده‌شده و کیفیت مربوط به آن یعنی $PSNR$ هستند.

الگوریتم ۱.۳. الگوریتم پیشنهادی برای فشرده‌سازی تصویر با استفاده از کدگذاری کوتاه کردن بلوک و نرمال‌سازی داده‌ها توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی.

۱. تجزیه مقدار تکین A را به‌دست آورید و در ماتریس‌های U و S و V قرار دهید.
۲. $U_r = U(:, ۱ : K)$ و $S_r = S(۱ : K, ۱ : K)$ و $V_r = V(:, ۱ : K)^T$
۳. $D_r = Ur \times Sr \times Vr$
۴. ماتریس D_r را به بلوک‌های $B \times B$ تقسیم کنید.
۵. میانگین هر بلوک را در متغیر $\bar{x}$ و انحراف معیار را در متغیر σ قرار دهید.
۶. پیکسل‌های بزرگ‌تر از میانگین را یک و بقیه را صفر قرار دهید.

۷. تعداد کل پیکس‌های یک بلوک را در متغیر m و تعداد یک‌های بلوک را در متغیر q قرار دهید.
۸. $a = \bar{x} - \sigma\sqrt{\frac{q}{m-q}}$ و $b = \bar{x} + \sigma\sqrt{\frac{m-q}{q}}$
۹. اعداد یک را با مقدار a و اعداد صفر را با مقدار b جایگزین کنید.
۱۰. تصویر فشرده‌شده را نمایش دهید.
۱۱. $PSNR$ مربوط به تصویر فشرده‌شده را محاسبه کنید.

۴. نتایج عددی

برای ارزیابی الگوریتم، از دو تصویر خاکستری و رنگی استفاده کرده‌ایم، سپس نتایج حاصل از اجرای الگوریتم بر روی هر تصویر را با توجه به کیفیت تصویر نشان می‌دهیم.

شکل ۱ نتایج حاصل از الگوریتم بر روی تصویر خاکستری را نشان می‌دهد. در شکل (الف) ۱، یک تصویر خاکستری به اندازه ۱۲۸۰در۹۶۰ پیکسل نشان داده شده است. در شکل (ب) ۱، تصویر فشرده شده بدون نرمال‌سازی و با بلوک‌های ۴ × ۴ نشان داده شده و در شکل (ج) ۱، تصویر فشرده شده با بلوک‌های ۴ × ۴ و مقدار تکین ۱۰۰ نشان داده شده است.

(الف)  (ب)  (ج) 

شکل ۱. Grayscale.jpg

در جدول ۱ کیفیت تصویر (الف) ۱ بدون نرمال‌سازی توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی آورده شده است و در جدول ۲ کیفیت تصویر با توجه به تعداد مقادیر تکین و ابعاد بلوک‌ها، برای شکل (الف) ۱ آورده شده است.

جدول ۱. کیفیت تصویر مربوط به شکل (الف) ۱ بدون نرمال‌سازی توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی.

ابعاد بلوک	کیفیت
۲ × ۲	۲۵.۸۳۹۶
۴ × ۴	۱۹.۰۷۰۶
۸ × ۸	۱۳.۳۸۰۶

جدول ۲. کیفیت تصویر مربوط به شکل (الف) ۱ با توجه به تعداد مقادیر تکین و ابعاد بلوک‌ها.

ابعاد بلوک	تعداد مقادیر تکین	کیفیت
۲ × ۲	۱۰۰	۲۵.۸۶۹۴
۲ × ۲	۲۰۰	۲۵.۸۷۳۵
۴ × ۴	۱۰۰	۱۹.۱۷۵۰
۴ × ۴	۲۰۰	۱۹.۰۹۶۰
۸ × ۸	۱۰۰	۱۳.۴۳۱۴
۸ × ۸	۲۰۰	۱۳.۳۹۷۲

شکل ۲ نتایج حاصل از الگوریتم بر روی تصویر رنگی را نشان می‌دهد. در شکل (الف) ۲، یک تصویر رنگی به اندازه ۱۰۲۴ در ۷۶۸ پیکسل نشان داده شده است. در شکل (ب) ۲، تصویر فشرده شده بدون نرمال‌سازی و با بلوک‌های ۴ × ۴ نشان داده شده و در شکل (ج) ۲، تصویر فشرده شده با بلوک‌های ۴ × ۴ و مقدار تکین ۱۰۰ نشان داده شده است.

در جدول ۳ کیفیت تصویر (الف) ۲ بدون نرمال‌سازی توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی آورده شده است و در جدول ۴ کیفیت تصویر با توجه به تعداد مقادیر تکین و ابعاد بلوک‌ها، برای شکل (الف) ۲ آورده شده است.


(الف)

(ب)

(ج)

شکل ۲. Chrysantheme.ipg

جدول ۳. کیفیت تصویر برای شکل (الف) ۲ بدون نرمال‌سازی توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی.

ابعاد بلوک	کیفیت
۲ × ۲	۲۶.۶۰۹۷
۴ × ۴	۱۸.۴۱۹۵
۸ × ۸	۱۱.۶۹۹۰

جدول ۴. کیفیت تصویر برای شکل (الف) ۲ با توجه به تعداد مقادیر تکین و ابعاد بلوک‌ها.

ابعاد بلوک	تعداد مقادیر تکین	کیفیت
۲ × ۲	۱۰۰	۲۸.۳۸۱۷
۲ × ۲	۲۰۰	۲۷.۰۶۳۳
۴ × ۴	۱۰۰	۱۹.۵۴۷۸
۴ × ۴	۲۰۰	۱۸.۷۹۵۶
۸ × ۸	۱۰۰	۱۲.۴۰۳۸
۸ × ۸	۲۰۰	۱۱.۹۱۸۸

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به نیاز سیستم‌ها به انتقال و ذخیره اطلاعات بدون افزونگی داده، از فشرده‌سازی اطلاعات استفاده می‌شود. در این مقاله برای فشرده‌سازی تصویرهای خاکستری و رنگی، الگوریتم پیشنهادی براساس کدگذاری کوتاه کردن بلوک و نرمال‌سازی توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که هرچه ابعاد بلوک کوچک‌تر باشد و نرمال‌سازی داده‌ها توسط تجزیه مقدار تکین بلوکی صورت گیرد، کیفیت تصویر حاصل بیشتر می‌شود.

مراجع

1. M. Doaa and A. F. Chadi, *Image compression using block truncation cod ing*, Cyber Journals: Multidisciplinary Journals in Science and Technology, Journal of Selected Areas in Telecommunications (JSAT), February Edition, 2011.
2. K. El Asnaoui, *Image compression based on block svd power method*, Journal of Intelli gent Systems, 29(1):1345–1359, 2019.
3. K. El Asnaoui and Y. Chaw ki. Youness, *Two new methods for image compression*, Interna tional Journal of Imaging and Robotics, 15(4):1–11, 2015.
4. K. El Asnaoui, M. Ouhda, B . Aksasse and M. Ouanan, *An ap plication of linear algebra to image compression*, In Seminar on Algebra and its Applications, pages 41–54, Springer, 2016.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر

آسیه درازهی[۱,*] ، مریم علی‌پور[۲] و سمانه صردی‌زید[۳]

[۱] دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

[۲] دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

[۳] دانشکده صنعت و معدن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش عددی برای حل دسته ای از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر ارائه شده است. لازم به ذکر است که دستگاه دینامیکی مسأله براساس مشتق کسری کاپوتو تعریف شده است. در روش پیشنهادی، با استفاده از چندجمله ای های لاگر، مسئله کنترل بهینه کسری تأخیری به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل شده که با حل دستگاه به دست آمده، جواب مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری به دست می آید. در پایان روش ارائه شده را بر روی یک مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری پیاده سازی می کنیم. تمامی محاسبات با نرم‌افزار متمتیکا انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه کسری تأخیری، چندجمله ای های لاگر، مشتق کسری.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 26A33, 34A08, 34K37. .

۱. مقدمه

در این مقاله، یک روش عددی برای حل یک دسته از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری به صورت زیر ارائه شده است:

$$\min\ J = \frac{1}{2}\int_0^1 [q(t)x^2(t) + r(t)u^2(t)]dt \tag{1}$$

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cx(t-\delta) + Eu(t-\eta),\ 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{2}$$

$$x(t) = x_0,\ t \in [-\eta, 0] \tag{3}$$

که درآن $r(t) \geqslant 0, q(t) \geqslant 0$ توابع پیوسته هستند. علاوه‌بر این، E، C، B و A نیز پیوسته اند و $\eta, \delta > 0$. همچنین، D_t^α نشان دهنده‌ی مشتق کسری است. روش پیشنهادی، براساس چندجمله‌ای‌های لاگر پایه ریزی شده است. با استفاده از ماتریس های عملیاتی انتگرال کسری و ماتریس تأخیری، شرایط لازم برای بهینگی مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری توسعه داده می شود. سپس با استفاده از پایه‌های چندجمله‌ای‌های لاگر، مسأله بهینه‌سازی داده شده به یک دستگاه از معادلات جبری ساده شده و با حل این دستگاه، جوابی از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری به‌دست می آید. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش تعداد پایه‌های مورد استفاده از این چندجمله‌ای‌ها، جواب تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به جواب مسأله اولیه همگرا می‌شود. به منظور اثبات صحت و کاربرد این روش، یک مثال ارائه گردیده است.

*سخنران. آدرس ایمیل: asiyehdorrazehi@gmail.com

۲. پیش نیازها

تعریف ۱.۲. (چندجمله‌ای‌های لاگر). برای عدد صحیح $n \geqslant ۱$ چندجمله‌ای‌های لاگر از مرتبه n را با $L_n(x)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می شود [۱]:

$$L_n(x) = \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^۲} x^۲.$$

بعلاوه، $L_۰(x) = ۱$، $L_۱(x) = -x + ۱$ و برای $n \geqslant ۱$ داریم:

$$L_{n+۱}(x) = \frac{۱ + ۲n - x}{n+۱} L_n(x)dx - \frac{n}{n+۱} L_{n-۱}(x).$$

چندجمله‌ای‌های لاگر در معادله دیفرانسیل

$$x\frac{d^۲y}{dx^۲} + (۱-x)\frac{dy}{dx} + ny = ۰,$$

صدق می کند و دارای تابع مولد زیر هستند:

$$\frac{\exp\left\{\frac{-xt}{۱-t}\right\}}{۱-t} = \sum_{n=۰}^{\infty} L_n(x)t^n, \ |t| < ۱.$$

تعریف ۲.۲. (مشتق کسری کاپوتو). فرض کنیم $n-۱ < \alpha < n$ و $f \in \mathbb{C}^n([a,b])$. در این‌صورت مشتق کسری چپ و راست کاپوتو از مرتبه α به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۳]:

$${}_a^c D_t^a f(t) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-۱} (\frac{d^n}{dt^n}) f(\tau) d\tau,$$

و

$${}_t^c D_b^a f(t) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-۱} (-۱)^n (\frac{d^n}{dt^n}) f(\tau) d\tau.$$

۳. روش پیشنهادی با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر

برای حل مسأله کنترل بهینه کسری (۱)-(۳) ابتدا توابع حالت و کنترل را با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned}
&x(t) = \sum_{i=۰}^{n} x_i L_i(t) = X^T L(t), x(t-\delta) = \sum_{i=۰}^{n} x_i L_i(t-\delta) = X^T C_\delta L(t), \\
&u(t) = \sum_{i=۰}^{n} u_i L_i(t) = U^T L(t), \ u(t-\eta) = \sum_{i=۰}^{n} u_i L_i(t-\eta) = U^T D_\eta L(t), \\
&x^۲(t) = X^T L(t) L^T(t) X, \qquad u^۲(t) = U^T U = U^T L(t) L^T(t) U.
\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن

$$D_\eta = \begin{bmatrix} \binom{۰}{۰}(-\eta)^۰ & \binom{۱}{۰}(-\eta)^۱ & \cdots & \binom{n}{۰}(-\eta)^n \\ ۰ & \binom{۱}{۱}(-\eta)^۰ & \cdots & \binom{n}{۱}(-\eta)^{n-۱} \\ ۰ & ۰ & \ddots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \binom{n}{n}(-\eta)^۰ \end{bmatrix}, C_\delta = \begin{bmatrix} \binom{۰}{۰}(-\delta)^۰ & \binom{۱}{۰}(-\delta)^۱ & \cdots & \binom{n}{۰}(-\delta)^n \\ ۰ & \binom{۱}{۱}(-\delta)^۰ & \cdots & \binom{n}{۱}(-\delta)^{n-۱} \\ ۰ & ۰ & \ddots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \binom{n}{n}(-\delta)^۰ \end{bmatrix}.$$

اکنون برای مشتق کسری $D^{\alpha}L(t)$ رابطه $D^{\alpha}L(t) = t^{-\alpha}L(t)S_{\alpha}$ به دست می آید که در آن

$$S_{\alpha} = \begin{bmatrix} ۰ & A_{۱,۱} & \cdots & \sum_{j=۱}^{n} \binom{j}{۰} A_{j,N} \\ ۰ & -A_{۱,۱} & \cdots & \sum_{j=۱}^{۱} \binom{j}{۱} A_{j,N} \\ ۰ & ۰ & \cdots & \sum_{j=۱}^{N} \binom{j}{۲} A_{j,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & (-۱)^{N}\binom{N}{N} A_{N,N} \end{bmatrix}, A_{k,i} = \begin{cases} (-۱)^{k} \dfrac{k!}{\Gamma(k+۱-\alpha)} \binom{i}{k}, & if\ i \geqslant k \geqslant [\alpha], \\ ۰, & ow. \end{cases}$$

با جایگذاری تقریب‌های (۴) در مسأله (۱)-(۳) خواهیم داشت:

$$\min\ J = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{۱} \big[q(t)\big(\sum_{i=۰}^{n} x_i L_i(t)\big)^{۲} + r(t)\big(\sum_{i=۰}^{n} u_i L_i(t)\big)^{۲}\big] dt, \tag{۵}$$

$$\sum_{i=۰}^{n} x_i t_i^{-\alpha} L_i(t) S_{\alpha} = A\sum_{i=۰}^{n} x_i L_i(t) + B\sum_{i=۰}^{n} u_i L_i(t) + C\sum_{i=۰}^{n} x_i C_{\delta} L(t) + E\sum_{i=۰}^{n} u_i D_{\eta} L(t),\ ۰ \leqslant \alpha \leqslant ۱, \tag{۶}$$

$$x(t) = x_{۰}, \qquad t \in [-\eta, ۰], \tag{۷}$$

که در آن:

$$\big(\sum_{i=۰}^{n} x_i L_i(t)\big)^{۲} = \big(X^T L(t)\big)^{۲} = X^T X L^{۲}(x),\ X(t) \approx X^T L(t) = X^T S_a \Lambda. \tag{۸}$$

تابع J را بر اساس ضرایب مجهول (۸) بازنویسی می‌کنیم. اکنون، به منظور حل مسأله بهینه‌سازی (۵)-(۷) خواهیم داشت:

$$\bar{J}[x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n, u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_n, L_{۱}, \cdots, L_n] = J[x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n, u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_n] + \sum_{i=۰}^{n} \{x_i D^{\alpha} L_i(t) - A x_i L_i(t) + B u_i L_i(t) + C x_i L_i(t-\delta) + E u_i L_i(t-\eta)\}\lambda_i.$$

شرط لازم برای اینکه (X^*, U^*, λ^*) اکسترمم $\bar{J}$ باشد این است که در شرایط زیر صدق کند:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial X_i} = ۰,\ \frac{\partial \bar{J}}{\partial U_i} = ۰,\ \frac{\partial \bar{J}}{\partial \lambda_i} = ۰,\ ۱ < i < n \tag{۹}$$

معادلات (۹) می‌تواند برای X_iها، U_i و λ_i با استفاده از روش‌های حل دستگاه‌های جبری مانند روش تکرار نیوتن حل گردد.

۴. نتایج عددی

مثال ۱.۴. مساله کنترل بهینه کسری تأخیری زیر را در نظر بگیرید [۲]:

$$\min\ J = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{۱} [x^{۲}(t) + \frac{۱}{۲} u^{۲}(t)] dt, \tag{۱۰}$$

$${}_{۰}^{c}D_t^{\alpha} x(t) = -x(t) + x(t - \frac{۱}{۳}) + u(t) - \frac{۱}{۲} u(t - \frac{۲}{۳}),\ ۰ \leqslant t \leqslant ۱,\ ۰ \leqslant \alpha \leqslant ۱, \tag{۱۱}$$

$$x(t) = ۱, \qquad t \in [-\frac{۱}{۳}, ۰], \tag{۱۲}$$
$$u(t) = ۰, \qquad t \in [-\frac{۲}{۳}, ۰].$$

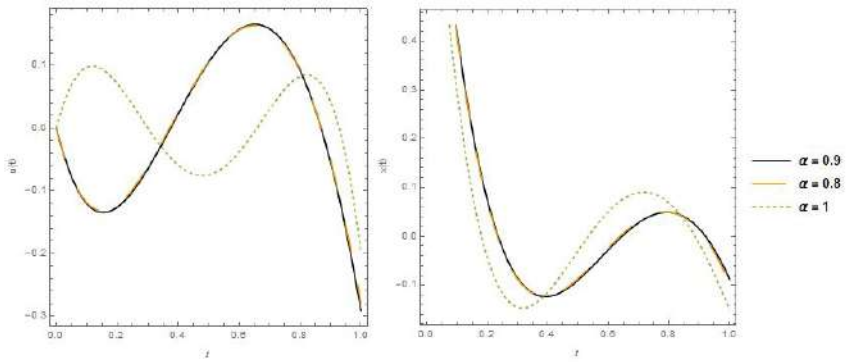
جدول۱ مقادیر محاسبه شده برای تابع هدف به ازای $\alpha = ۱$ و انتخاب‌های مختلف M نشان می دهد. در جدول ۲ مقادیر محاسبه شده برای خطای این تقریب به ازای $\alpha = ۱$ و انتخاب های مختلف M ارائه شده است. نمودارهای تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ برای انتخاب های مختلف α و $M = ۸$ در شکل ۱ نشان داده شده اند.

جدول ۱. مقادیر تابع هدف به ازای $\alpha = ۱$ و انتخاب‌های مختلفM

$M = ۸$	$M = ۶$	$M = ۴$	M
۰/۰۲۵۷۷۸۵	۰/۰۴۹۳۴۴۲	۰/۰۷۲۱۵۵۴	J

جدول ۲. مقادیر خطا به ازای $\alpha = ۱$ و انتخاب‌های مختلفM

$M = ۸$	$M = ۶$	$M = ۴$	M
$۱/۵۴۹۴۸ \times ۱۰^{-۲۵}$	$۵/۱۹۶۶۲ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۱/۸۷۶۴۷ \times ۱۰^{-۲۴}$	E



شکل ۱. نمودارهای تقریبی $x(t)$ و $u(t)$

۵. نتیجه‌گیری

اخیراً توابع متعامد و چندجمله‌ای‌ها در حل مسائل مختلف از جمله مسائل کنترل بهینه، کنترل بهینه کسری، تجزیه و تحلیل سیستم‌ها و... مورد توجه قرار گرفته اند. در این مقاله یک روش عددی جدید بر مبنای چندجمله ایهای لاگر ارائه شد. نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهند که این تقریب، یک روش مناسب برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری می‌باشد که با افزایش پایه‌های مورد استفاده از این چندجمله‌ای‌ها، جواب تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به جواب مسأله اولیه همگرا می شود.

مراجع

1. W.W. Bell, *Special functions for scientists and engineers*, Courier Corporation, 2004.
2. M. Dadkhah and M. H. Farahi, *Optimal control of time delay systems via hybrid of block-pulse functions and orthonormal Taylor series*, International Journal of Applied and Computational Mathematics.,2(1) (2016), 137-152.
3. K. S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, 1993.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021

تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه نهم بر اساس تکالیف ارائه شده در آن

عاطفه دلاوری[۱,*] ، مهدی ایزدی[۱] و ابراهیم ریحانی[۱]

[۱]بخش آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، تهران، ایران

چکیده. هدف این پژوهش، تحلیل محتوای کتاب ریاضی نهم بر اساس تکالیف ارائه شده در آن است. این تحقیق از نوع توصیفی پیمایشی است. جامعه آماری، کتاب ریاضی نهم بود که دو فصل اول آن، به عنوان نمونه در دسترس انتخاب شد. در این تحقیق، تکالیف بر اساس ۵ محور شامل محتوای ریاضی، فرآیند ریاضی، زمینه، بازبودن و عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج تحلیل حاکی از این است که بیشتر تکالیف از لحاظ محتوا در حیطه اعداد و عملیات و جبر و از لحاظ فرآیند، در حیطه اتصالات قرار دارند، یک چهارم سوالات از لحاظ پاسخ، باز هستند ولی علیرغم اهمیت تکالیف زمینه مدار و بازروش، کم توجهی کتاب را به این تکالیف شاهد بودیم، همچنین در حیطه عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز توجه بیشتر تکالیف، انجام یک محاسبه روتین بود. پیشنهاد این تحقیق، اصلاح کتاب ریاضی نهم بر اساس این نتایج است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل محتوا، کتاب ریاضی پایه نهم، تکلیف ریاضی، آموزش ریاضی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97U20, 97B70 .

۱. مقدمه

یکی از پرکاربردترین و مهم‌ترین رسانه‌هاي آموزشی در نظام‌هاي آموزشی کشورهاي مختلف جهان کتاب درسی است، کتاب‌هاي درسي در نظام‌هاي آموزشي متمرکزي همچون ایران که يك متن واحد، در سراسر کشور تدریس مي‌شود و اصلي‌ترین منبع آموزشي همه‌ي دانش‌آموزان و معلمان در هر پایه تحصيلي بوده و آموزش بر اساس محتوای آن تعیین و اجرا مي‌شود، نیاز به تحلیل محتوا دارد.

از طرفی تکالیف درسی یکی از ابزارهای آموزشی بسیار مناسب و بخش مهمی از فرایند یاددهی یادگیری است که برای یادگیری بهتر در اختیار معلمان قرار دارد، و معلم در صورت استفاده صحیح از آن می‌تواند اثر مفید آن را روی دانش‌آموزان خویش ملاحظه کند. تکالیف خوب و اثربخش اکثراً می‌توانند دانش‌آموزان را به رهاکردن و کنارگذاشتن روش‌های معمولی فکرکردن وادارند. منظور از تکلیف در این مقاله فعالیت‌هایی است که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود انجام دهند، که در آن‌ها ریاضیات نقش مهمی دارند [۳].

پژوهش حاضر با توجه به اهمیت محتوای کتاب های درسی ریاضی به طور مشخص در پایه نهم و نقش تکالیف ریاضی در این محتوا به تحلیل تکالیف کتاب ریاضي پایه نهم مي‌پردازد، تا به این پرسش پاسخ داده شود که تکالیف ارائه شده در کتاب درسی ریاضی نهم از منظر محتوای ریاضی، فرآیند ریاضی، زمینه، بازبودن و عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان به چه صورت است؟

تا به حال تحقیقات متعددی در خصوص تحلیل محتوا بر پایه اصول و استانداردهای NCTM[1]، زمینه و بازبودن در آموزش ریاضی کشورهای مختلف انجام شده است اما طبق بررسی محققین این مطالعه، تحقیقات اندکی در داخل کشور با هدف

*سخنران. آدرس ایمیل: Atefedelavari1997@gmail.com

[1]National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

تحلیل تکالیف کتاب درسی با بررسی چندین متغیر تکلیف انجام شده است. پوینتون و همکاران[۲] [۴] در پژوهش خود چارچوبی برای طبقه‌بندی تکالیف ریاضی بر اساس عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان مطرح کردند. بورخارت و سوان[۳] [۳] در مقاله خود تکالیف ریاضی را به چهار بعد، محتوای ریاضی، فرآیند ریاضی، نوع تکلیف و شرایط محیطی اجرا تقسیم‌بندی کردند. یئو [۶] در پژوهش خود تکالیف ریاضی را به چهار تکالیف رویه‌ای، حل مسئله، تحقیقاتی و کار واقعی تقسیم‌بندی کرد و چارچوبی برای باز بودن تکالیف ریاضی بر اساس پنج متغیر هدف، روش، پیچیدگی، پاسخ و تعمیم ارائه داد. شاو[۴] [۵] در پژوهش خود تکالیف را بر اساس زمینه به دو دسته سوالات ریاضی محض و مسائل ریاضی مرتبط با زندگی واقعی تقسیم کرد. ابراهیمی علویجه [۱] در تحقیق خود مسائل کتاب ریاضی پایه نهم را بر اساس میزان انطباق با مسائل دنیاي واقعي مورد بررسی قرار داده است، یافته‌های این پژوهش حاکی از توجه کم کتاب ریاضی نهم به مسائل زمینه‌مدار است.

تعاریف و چارچوب

شورای ملی معلمان ریاضی در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای[۵] برای تدوین استانداردها آن‌ها را به دو مقوله استانداردهای محتوایی و فرآیندی تقسیم کرده است. محتوای ریاضی: توصیف صریح و ضمنی محتواهایی که دانش‌آموزان باید یاد بگیرند تعریف شده است. محتوای ریاضی عبارتند از: ۱- اعداد و عملیات ۲- جبر ۳- هندسه ۴- اندازه‌گیری ۵-تحلیل داده‌ها و احتمال. فرآیندهای ریاضی: شیوه اکتساب و کاربرد دانش محتوایی تعریف شده‌اند. فرآیندهای ریاضی عبارتند از: ۱- حل مسئله ۲- استدلال و اثبات ۳- گفتمان ۴- اتصال ۵- بازنمایی.
زمینه: شاو [۵] در چارچوب خود تکالیف ریاضی را بر اساس زمینه مطابق جدول ۱ طبقه‌بندی کرد.

جدول ۱. تعاریف نظری چارچوب شاو [۵]

طبقه‌بندی	توصیف	
سوالات ریاضی محض	تکالیف بیان شده به زبان ریاضی و با مفاهیم انتزاعی هستند.	
مسائل ریاضی مرتبط با زندگی واقعی	مسائل موقعیت عملی (واقعی)	تکالیفی هستند که با زندگی واقعی پیوند یافته است، اما این پیوند محدود به ذکر یك شیء یا یك اتفاق از دنیای واقعی است.
	حل مسائل عملی (واقعی)	تکالیفی هستند که در آن‌ها، یك سؤال از دنیای واقعی با استفاده از دانش ریاضیاتی حل می‌شود.

باز بودن: یک تکلیف می‌تواند از جنبه‌های مختلف باز باشد و اینکه کدام جنبه باز باشد ممکن است بر انواع فرآیندهای تفکر لازم برای حل آن تاثیر بگذارد. یئو [۶] باز بودن را بر اساس ۵ متغیر تکلیف (پاسخ-هدف-روش-پیچیدگی-تعمیم) و بینگوبالی[۶] [۲] باز بودن را بر اساس دو متغیر تکلیف (پاسخ و روش) مورد بررسی قرار دادند. در جدول ۲ تعاریف نظری و عملیاتی باز بودن قابل رویت است.

[2]Pointon, Sangwin
[3]Burkhardt, Swan
[4]Shao
[5]Principles and Standards for School Mathematics
[6]Bingolbli

جدول ۲. تعاریف نظری و عملیاتی تکالیف از لحاظ باز بودن

تکلیف		تعریف نظری	تعریف عملیاتی
پاسخ	باز	تکالیفی که یافتن تمام پاسخ‌های صحیح آن امکان‌پذیر نباشد و بسته پاسخ نباشد، باز پاسخ هستند [۶].	تکالیفی که چندین پاسخ صحیح داشته باشند، باز پاسخ هستند.
	بسته	بکر و شیمادا (۱۹۹۷) تکالیفی که تنها یک پاسخ صحیح دارند، بسته پاسخ هستند. یک تکلیف در صورت مشخص بودن جواب دارای پاسخ بسته است [۶].	تکالیفی که تنها یک پاسخ صحیح داشته باشند، بسته پاسخ هستند.
روش	باز	تکالیفی که بسته روش نباشند و روش حل آن متنوع و با ابتکار و خلاقیت دانش‌آموز همراه باشد، باز روش هستند [۶].	تکالیفی که با چندین روش قابل حل باشند، تکالیف باز روش هستند.
	بسته	تکالیفی که فقط با یک روش یا روش های شناخته شده حل شوند، بسته روش هستند [۶].	تکالیفی که فقط با یک روش قابل حل باشند، بسته روش هستند.

نوع عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان: پوینتون و همکاران [۴] تکالیف را بر اساس نوع عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان به فراخوانی حقایق- انجام دادن یك محاسبه یا الگوریتم روتین- طبقه‌بندی برخی اشیاء ریاضی- تفسیر موقعیت یا پاسخ- اثبات، نشان دادن، توجیه کردن (استدلال کلی)- تعمیم یك مفهوم- ساخت یك مثال/نمونه- نقد یك استدلال نادرست تقسیم‌بندی کردند.

۲. نتایج عددی

فراوانی و درصد پنج متغیر تکلیف فصل ۱ و ۲ کتاب ریاضی نهم (شامل۹۴ تکلیف) بدست آمده و در جداول زیر قابل مشاهده است، تکالیف در این تحقیق شامل فعالیت، کادرکلاس و تمارین است. نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که گاهی برای حل یک تکلیف نیاز به استفاده از چند فرآیند ریاضی به صورت توامان می‌باشد و ممکن است چندین حیطه محتوایی وچندین عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز را در برگیرد، همچنین ممکن است یک تکلیف شامل هیچ حیطه محتوا و فرآیند نباشد.

محتوا	فراوانی	درصد فراوانی
اعداد و عملیات	۸۲	۸۷
جبر	۵۳	۵۶
هندسه	۱	۱
اندازه‌گیری	۲	۲
آمار و احتمال	۶	۶
مجموع	۱۴۴	۱۵۲

فرآیند	فراوانی	درصد فراوانی
حل مسئله	۵	۵
اثبات و استدلال	۱۳	۱۴
اتصالات	۵۰	۵۳
ارتباطات (گفتمان)	۱۰	۱۰
بازنمایی‌ها	۲۰	۲۱
مجموع	۹۸	۱۰۳

زمینه		فراوانی	درصد فراوانی
ریاضی محض		۸۸	۹۴
مرتبط با موقعیت واقعی	مسائل موقعیت واقعی	۳	۳
	حل مسائل واقعی	۳	۳
مجموع		۹۴	۱۰۰

عملکرد مورد انتظار از دانش آموزان	فراوانی	درصد فراوانی
فراخوانی حقایق	۱۶	۱۷
انجام یک محاسبه یا الگوریتم روتین	۶۹	۷۳
طبقه بندی برخی اشیاء ریاضی	۱	۱
تفسیر موقعیت یا پاسخ	۱۳	۱۴
اثبات، نشان دادن و توجیه کردن	۴	۴
تعمیم یک مفهوم	۱	۱
ساخت یک مثال	۱۰	۱۰
نقد استدلال نادرست	۲	۲
مجموع	۱۱۶	۱۲۲

باز بودن			فراوانی	درصد فراوانی
روش	بسته		۸۵	۹۰
	باز		۹	۱۰
پاسخ	بسته		۷۰	۷۴/۵
	باز	محدود	۶	۶/۵
		نامحدود	۱۸	۱۹
مجموع			۹۴	۱۰۰

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله، تکالیف ریاضی نهم از لحاظ پنج متغیر (محتوا- فرآیند- باز بودن- زمینه- عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز) مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که بیشتر تکالیف از لحاظ محتوا در حیطه اعداد و عملیات و جبر و از لحاظ فرآیند در حیطه اتصالات قرار دارد، یک چهارم تکالیف بازپاسخ بوده ولی شاهد کم توجهی کتاب به تکالیف بازروش و زمینه مدار بودیم، همچنین توجه بیشتر تکالیف در حیطه عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز، انجام یک محاسبه‌ی روتین بود.

مراجع

۱. م. ابراهیمی‌علویجه، ن. یافتیان، بررسی میزان انطباق کتاب درسی ریاضی پایه نهم با مسائل دنیای واقعی، فصلنامه تعلیم و تربیت، شماره ۳۵ (۱۳۹۸)، ۱۳۰-۱۰۷.

2. E. Bingolbali, *An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks*, International journal of mathematical education in science and technology 51, no. 5 (2020): 669-687.
3. H. Burkhardt, S. Malcolm, *Task design for systemic improvement: Principles and frameworks*, Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22 (2013).
4. A. Pointon, C. J. Sangwin, *An analysis of undergraduate core material in the light of hand-held computer algebra systems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 34, no. 5 (2003): 671-686.
5. Z. Shao, *Task Design in Mathematics Classrooms*, In The 21st Century Mathematics Education in China, pp. 223-237. Springer, Berlin, Heidelberg, 2018.
6. J. B. Yeo, *Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks*, International Journal of Science and Mathematics Education 15, no. 1 (2017): 175-191.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

فضاهاي برداري توپولوژيکی

هادي سعيدي[۱،*] ، محسن اميري بيدشکی[۲]
[۱]دانشکده علوم پايه، دانشگاه پيام نور، تهران، ايران
[۲]گروه رياضی، دانشگاه فرهنگيان، کرمان، ايران

چکيده. در اين مقاله به کمك تعريف مجموعه هاي نيم باز و نيم پيوسته در مفهوم لوين يك شكل كلي از فضاهاي برداري توپولوژيکی را بررسي ميكنيم. نشان مي دهيم كه هر فضاي برداري توپولوژيکی يك فضاي همگن تعميم يافته است. همچنين نشان مي دهيم هر زيرفضاي باز از يك فضاي برداري توپولوژيکی يك فضاي برداري توپولوژيکی است.
واژه‌های کلیدی: فضاي برداري توپولوژيکی، مجموعه هاي نيم باز، مجموعه هاي نيم بسته، نگاشت نيم پيوسته.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 54E18, 54H11.

۱. مقدمه

اگر يک مجموعه دارای ساختار جبری و توپولوژيکی باشد، آنگاه بررسی رابطه بين اين دو ساختار هميشه مي تواند جذاب باشد. فرض كنيد τ يك توپولوژي روي فضاي برداري X باشد، به طوري كه
الف) هر نقطه x يك مجموعه بسته باشد.
ب) اعمال فضاي برداري يعني جمع و ضرب اسكالر نسبت به τ پيوسته باشند.
در اين صورت گوييم X يك فضاي برداري توپولوژيك و τ يك توپولوژي برداري بر روي X است. بهتر است كه در اينجا توضيحاتي در مورد پيوسته بودن جمع و ضرب اسكالر در فضای برداری X ارائه كنيم. منظور از پيوسته بودن جمع، پيوسته بودن نگاشت $m : X \times X \longrightarrow X$ كه $m(x, y) = x + y$ ، هست به اين معني كه به ازاي هر همسايگي باز V شامل $x + y$ ، همسايگي هايي مانند V_x و V_y به ترتيب شامل x و y موجود باشد بطوريكه $V_x + V_y \subseteq V_{x+y}$.
به همين صورت پيوسته بودن ضرب اسكالر، پيوسته بودن نگاشت $M : F \times X \longrightarrow X$ كه $M(\lambda, x) = \lambda.x$ باشد. به اين معني كه به ازاي هر $\lambda \in F$ و $x \in X$ و هر همسايگي باز W شامل $\lambda.x$ ، همسايگي هايي باز مانند U و V به ترتيب شامل λ و x موجود باشند بطوريكه $U.V \subset W$.
اصولي كه به كمك آنها مي توان يك فضا را به فضاي برداري توپولوژيكي تبديل كرد توسط كلموگروف در ۱۹۳۴ و وان نيومن [۵] در ۱۹۳۵ بررسي و مطالعه شده است. ارتباط مابين اصول فضاي برداري توپولوژيكي، توسط وهوزن [۶] در ۱۹۳۸ و هايرز در ۱۹۳۹ مورد بحث و بررسی قرارگفته است. اما از جمله افرادي كه در دهه گذشته در اين زمينه مطالعات و تحقيقاتي داشته اند مي توان به چن [۲] اشاره كرد كه بر روي نقاط ثابت نگاشت هاي محدب روي فضاهاي برداري توپولوژيكي كار كرده است.
نتايج مورد تحقيق در اين مورد بسيار زياد است كه در سال هاي اخير توسط درنوفسكي [۳] ، آلسولامي و خان [۱] انجام شده است.

*سخنران. آدرس ايميل: hadihb2003@yahoo.com

۲. نتايج اصلى

تعريف ۱.۲. متمم يك مجموعه نيم باز را يك مجموعه نيم بسته گوييم. نيم بستار $A \subset X$ را به صورت $sCl(A)$ نشان مي دهيم كه برابر است با اشتراك تمام زيرمجموعه هاي نيم بسته X شامل A .
گوييم $x \in sCl(A)$ اگر و تنها اگر براى هر مجموعه نيم باز U شامل x داشته باشيم $U \cap A \neq \emptyset$.

تعريف ۲.۲. فرض كنيد (X, τ_X) و (Y, τ_Y) فضاى توپولوژيكى باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را گوييم :
الف) نيم پيوسته اگر براى هر مجموعه باز O در Y ، نگاشت معكوس $f^{-1}(O) \in SO(X)$.
ب) نيم باز اگر براي هر مجموعه باز A از X ، مجموعه $f(A)$ در Y نيم باز باشد.
ج) پيوسته اگر پيش تصوير هر مجموعه نيم باز، باز باشد.
د) پيش نيم باز اگر براي هر مجموعه نيم باز A از X ، مجموعه $f(A)$ در Y نيم باز باشد.

قضيه ۳.۲. فرض كنيد $(X_{(F)}, \tau)$ يك فضاي برداري توپولوژيكي باشد. فرض كنيد $T_x : X \longrightarrow X$ يك عملگر راست و $M_\lambda : X \longrightarrow X$ يک نگاشت ضرب باشند در اين صورت T_x و M_λ نيم پيوسته هستند.

قضيه ۴.۲. فرض كنيد $(X_{(F)}, \tau)$ يك فضاي برداري توپولوژيكي باشد. اگر $A \in \tau$ آنگاه
۱) براى هر $y \in X$ ، $A + y \in SO(X)$.
۲) براى هر $\lambda \in F \neq 0$ داريم $A \in SO(X)$.

قضيه ۵.۲. فرض كنيد $(X_{(F)}, \tau)$ يك فضاي برداري توپولوژيكي باشد. اگر $A \in \tau$ و B يک زيرمجموعه از X آنگاه $A + B \in SO(X)$.

تعريف ۶.۲. يک نگاشت دوسويى f از يک فضاى توپولوژيكى به روى خودش را هوميومورفيسم يا همسانريختى تعميم يافته گوييم اگر نيم پيوسته و نيم باز باشد.

تعريف ۷.۲. يک فضاى برداري توپولوژيكي $(X_{(F)}, \tau)$ را فضاى همگن تعميم يافته گوييم اگر براى هر $x, y \in X$ يک همسان ريختى تعميم يافته f از فضاى X به روى خودش وجود داشته باشد بطوريكه $f(x) = y$.

قضيه ۸.۲. فرض كنيد $(X_{(F)}, \tau)$ يك فضاي برداري توپولوژيكي باشد. براى هر $y \in X$ و $\lambda \in F$ كه $\lambda \neq 0$، عملگر راست (چپ) $T_y : x \longmapsto x + y$ و نگاشت ضرب $M_\lambda : x \longmapsto \lambda$ ، $x \in X$ همسان ريختى تعميم يافته به توى خودش هستند.

قضيه ۹.۲. هر فضاي برداري توپولوژيكي $(X_{(F)}, \tau)$ ، يک فضاى همگن تعميم يافته است.

قضيه ۱۰.۲. فرض كنيد $(X_{(F)}, \tau)$ يك فضاي برداري توپولوژيكي و S يک زيرفضا از X باشد. اگر S شامل يک مجموعه باز ناتهى باشد آنگاه S در (X, τ) نيم باز است.

قضيه ۱۱.۲. هر زير فضاى باز S از فضاي برداري توپولوژيكي $(X_{(F)}, \tau)$ ، نيز يک فضاي برداري توپولوژيكي است.

قضيه ۱۲.۲. در يک فضاي برداري توپولوژيكي، براى هر همسايگى باز U از e، يک همسايگى نيم باز V از e وجود دارد بطوريكه $V + V \subseteq U$.

قضيه ۱۳.۲. فرض كنيد A و B زيرمجموعه هايى از يک فضاي برداري توپولوژيكي $(X_{(F)}, \tau)$ باشند. آنگاه $sCl(A) + sCl(B) \subseteq Cl(A + B)$.

قضيه ۱۴.۲. فرض كنيد $f : X \longrightarrow Y$ يک همريختى (هوموموفيسم) از فضاهاى برداري توپولوژيكي باشد. اگر f در عضو همانى e از $(X_{(F)}, \tau)$ پيوسته باشد آنگاه f روى X نيم پيوسته است.

مراجع

1. s. M.Alsulami and L. A. Khan, *Weakly Almost Periodic Functions in Topological Vector Spaces*, Afr. Diaspora, J. Math. (N.S.), 15(2)(2013), 76-86.

2. Y. Q. Chen, *Fixed Points for Convex Continuous mapping in Topological Vector Space*, American Mathematical Society, Vol. 129 (2011) , 2157-2162.
3. L. Drewnowski, *Resolution of topological linear spaces and continuity of linear maps*, Anal. Appl. 335(2)(2007), 1177-1195.
4. N. Levine, *Semi open sets and semi continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, Vol. 70 (1963), 36-41
5. J. V. Neuman, *On complete topological spaces*, Transactions of American Mathematical Society, Vol. 37 (1995) 1-2.
6. J. V. Wehausen, *Transformations in Linear Topological Spaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 4 (1998), 157-169.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در فضاهای غیرقطعی

اسماء سلطانی[۱] *
[۱]بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. یکی از مباحث مهمی که در بازارهای سرمایه مطرح است، بحث انتخاب سبد سرمایه‌گذاری است. در سال ۲۰۰۷ تئوری عدم قطعیت به منظور استفاده از کمیت‌های نادقیق ارائه شد. هدف از این پژوهش تعیین مدل‌های سبد سرمایه‌گذاری در شرایط عدم قطعیت بر مبنای سطوح انتظار سرمایه‌گذاران در رابطه با ریسک و بازده است.

واژه‌های کلیدی: انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، تئوری عدم قطعیت، مدل میانگین-واریانس، مدل میانگین-نیم واریانس.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 91G80, 97M30.

۱. مقدمه

یک پدیده‌ی غیرقطعی را پدیده‌ای تعریف می‌کنیم که برآمدهای آن دقیقاً قابل پیش‌بینی نباشد، مانند قیمت سهام در آینده. تصمیم‌های واقعی در فضایی از ابهام اتخاذ می‌شوند. لیو (۲۰۰۷) به منظور مطالعه پدیده‌های غیرقطعی در سیستم انسانی، تئوری عدم قطعیت را براساس اصول نرمالیته، خود-دوگانگی، زیرجمعی و ضرب اندازه بنا نهاد. در این پژوهش از ایده مدل میانگین-واریانس مارکویتز پیروی خواهیم کرد و از تئوری عدم قطعیت برای انتخاب سبدهای سرمایه‌گذاری که بازده آن‌ها به طور عمده توسط برآورد کارشناسان داده شده، استفاده می‌کنیم. همچنین برای بازده اوراق‌بهادار نامتقارن از مدل میانگین-نیم واریانس استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱ ([۲]). فرض کنیم $(\Gamma, \mathcal{L})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازه غیرقطعی، به صورت $\mathcal{M} : \mathcal{L} \longrightarrow [۰, ۱]$ تابعی است به‌طوری‌که سه اصل زیر برقرار باشند:
اصل۱: (اصل نرمالیته) $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$ برای مجموعه جهانی Γ.
اصل۲: (اصل دوگان) $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۱$ برای هر پیشامد Λ.
اصل۳: (اصل زیرجمعی) برای هر دنباله‌ی شمارا از پیشامدهای $\{\Lambda_i\}$، داشته باشیم: $\mathcal{M}\{\bigcup_{i=۱}^{\infty} \Lambda_i\} \leq \sum_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}$

توجه کنید که در اینجا هر مجموعه $\Lambda \in \mathcal{L}$ را یک پیشامد می‌نامیم. اندازه‌ی غیرقطعی $\mathcal{M}\{\Lambda\}$ درجه اطمینان رخداد پیشامد Λرا تعیین می‌کند. سه‌تایی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را یک فضای غیرقطعی گوییم. فرض کنید $(\Gamma_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i)$ فضاهای غیرقطعی برای $i = ۱, ۲, ..., n$ باشند. اندازه‌ی غیرقطعی ضربی $\mathcal{M} = \mathcal{M}_۱ \wedge \mathcal{M}_۲ \wedge ... \wedge \mathcal{M}_n$ یک اندازه‌ی غیرقطعی روی σ-جبر ضربی $\mathcal{L}_۱ \times \mathcal{L}_۲ \times ... \times \mathcal{L}_n$ است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\mathcal{M}\{\prod_{i=۱}^{n} \Lambda_i\} = \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}_i\{\Lambda_i\} = \min_{i=۱,...,n} \mathcal{M}_i\{\Lambda_i\}, \quad \forall \prod_{i=۱}^{n} \Lambda_i \in \mathcal{L}_۱ \times \mathcal{L}_۲ \times ... \times \mathcal{L}_n.$$

*سخنران. آدرس ایمیل: asmasoltani72@gmail.com

تعریف ۲.۱ ([۳]). (متغیرهای غیرقطعی) اگر $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای غیرقطعی مفروض باشد، آنگاه تابع X از $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به مجموعه اعداد حقیقی را یک متغیر غیرقطعی نامیم، هرگاه $X^{-1}(B) = \{\gamma \in \Gamma | X(\gamma) \in B\} \in \mathcal{L}$ که B یک مجموعه‌ی بورل دلخواه از مجموعه اعداد حقیقی است.

تعریف ۳.۱ ([۳]). توزیع غیرقطعی $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [۰, ۱]$ از یک متغیر غیرقطعی ξ توسط رابطه‌ی $\Phi(t) = \mathcal{M}\{\xi \leq t\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۴.۱. (قضیه معکوس اندازه) فرض کنید X یک متغیر غیرقطعی با توزیع غیرقطعی Φ باشد. آنگاه

$$\mathcal{M}\{X \leq x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{X > x\} = ۱ - \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۵.۱ ([۱]). (بازده مورد انتظار) فرض کنید ξ یک متغیر غیرقطعی باشد، تحت این شرط که حداقل یکی از دو انتگرال زیر متناهی باشد، بازده مورد انتظار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq t\}dt - \int_{-\infty}^{۰} \mathcal{M}\{\xi \leq t\}dt.$$

تعریف ۶.۱ ([۱]). (واریانس) فرض کنید ξ یک متغیر غیرقطعی با بازده مورد انتظار متناهی e و توزیع Φ باشد. واریانس بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^{۲}] = ۲\int_{e}^{+\infty} (t - e)(۱ - \Phi(t) + \Phi(۲e - t))dt.$$

تعریف ۷.۱ ([۱]). (نیم‌واریانس) فرض کنید ξ یک متغیر غیرقطعی با بازده مورد انتظار متناهی e باشد. اگر متغیر غیرقطعی ξ دارای توزیع غیرقطعی پیوسته‌ی Φ باشد، نیم‌واریانس بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$SV[\xi] = E[[(\xi - e)^{-}]^{۲}] = \int_{-\infty}^{e} ۲(e - t)\Phi(t)dt.$$

۲. مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در فضاهای غیرقطعی

۱.۲. مدل میانگین-واریانس.

حالت اول. مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای بیشینه‌کردن بازده مورد انتظار و مقیدکردن واریانس سبد سرمایه‌گذاری:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[x_{۱}\xi_{۱} + x_{۲}\xi_{۲} + ... + x_{n}\xi_{n}] \\ s.t. \quad & V[x_{۱}\xi_{۱} + x_{۲}\xi_{۲} + ... + x_{n}\xi_{n}] \leq v_{۰}, \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_{i} = ۱, \\ & x_{i} \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n \end{aligned}$$

به‌طوری‌که E بازده مورد انتظار و V واریانس عملگر متغیرهای غیرقطعی را نشان می‌دهد. $v_{۰}$ ریسک (واریانس) سبد سرمایه‌گذاری است که سرمایه‌گذار مایل به تحمل آن است. x_{i}، نسبت سرمایه‌گذاری در ورقه بهادار i، ξ_{i} بازده غیرقطعی i-امین ورقه بهادار که $\xi_{i} = (p'_{i} + d_{i} - p_{i})/p_{i}$ به‌طوری‌که p'_{i} قیمت پایانی تخمین ورقه‌بهادار i-ام در زمان آینده، p_{i} قیمت پایانی ورقه‌بهادار i در حال حاضر و d_{i} سود سهام تخمین زده شده ورقه‌بهادار i در طی دوره می‌باشد.

حالت دوم. مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای کمینه‌کردن واریانس و مقیدکردن بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری:

$$\begin{aligned} \min \quad & V[x_{۱}\xi_{۱} + x_{۲}\xi_{۲} + ... + x_{n}\xi_{n}] \\ s.t. \quad & E[x_{۱}\xi_{۱} + x_{۲}\xi_{۲} + ... + x_{n}\xi_{n}] \geq r_{۰}, \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_{i} = ۱, \\ & x_{i} \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $r_۰$ بازده سبد سرمایه‌گذاری مطلوب سرمایه‌گذاران است.

۲.۲. مدل میانگین-نیم‌واریانس.

حالت اول. مدل بهینه‌سازی برای بیشینه‌کردن بازده مورد انتظار و مقیدکردن نیم‌واریانس [۱]:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + ... + x_n\xi_n] \\ s.t. \quad & SV[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + ... + x_n\xi_n] \leq v_۱, \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \\ & x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $v_۱$ ریسک سبد سرمایه‌گذاری است که سرمایه‌گذار مایل به تحمل آن است.

حالت دوم. مدل بهینه‌سازی برای کمینه‌کردن ریسک و مقیدکردن بازده مورد انتظار:

$$\begin{aligned} \min \quad & SV[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + ... + x_n\xi_n] \\ s.t. \quad & E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + ... + x_n\xi_n] \geq r_۱, \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \\ & x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $r_۱$ بازده سبد سرمایه‌گذاری مطلوب سرمایه‌گذاران است.

۳. حل مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در فضاهای غیرقطعی

از آن‌جا که مدل‌های غیرقطعی که در بالا بیان شد، پیچیده هستند و لذا نمی‌توان از روش‌های تحلیلی برای حل آن‌ها استفاده کرد در ادامه روش‌هایی برای محاسبه‌ی مقادیر بازده مورد انتظار، واریانس و نیم‌واریانس ارائه می‌دهیم.

۱.۳. بدست‌آوردن توزیع غیرقطعی معکوس مربوط به بازده سبد سرمایه‌گذاری. فرض کنید Φ_i توزیع غیرقطعی پیوسته مربوط به بازده غیرقطعی ξ_i و Ψ توزیع غیرقطعی مربوط به بازده سبد سرمایه‌گذاری یعنی $\sum_{i=۱}^{n} x_i\xi_i$ باشد. واضح است که Ψ نیز پیوسته است و چون x_iها نامنفی هستند، داریم:

$$\Psi^{-۱}(\alpha) = \sum_{i=۱}^{n} x_i\Phi_i^{-۱}(\alpha), \quad ۰ \leq \alpha \leq ۱.$$

۲.۳. محاسبه بازده مورد انتظار و واریانس توسط توزیع غیرقطعی معکوس. با توزیع غیرقطعی معکوس مربوط به بازده سبد سرمایه‌گذاری $(\Psi^{-۱})$، بازده مورد انتظار مربوط به بازده سبد سرمایه‌گذاری توسط رابطه‌ی

$$E[\sum_{i=۱}^{n} x_i\xi_i] = \Psi^{-۱}(۰/۵) = \sum_{i=۱}^{n} x_i\Phi_i^{-۱}(۰/۵).$$

محاسبه می‌شود. واریانس مربوط به بازده سبد سرمایه‌گذاری طبق تعریف ۶.۱ توسط رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$V[\sum_{i=۱}^{n} x_i\xi_i] = ۲\int_e^{+\infty} (t-e)(۱ - \Psi(t) + \Psi(۲e-t))dt = ۴\int_e^{+\infty} (t-e)(۱ - \Psi(t))dt.$$

مثال ۱.۳. فرض کنید بازده اوراق‌بهادار، متغیرهای غیرقطعی نرمال هستند و سرمایه‌گذار برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری ۶ ورقه‌بهادار جداگانه می‌خواهد. ده متخصص به طور مستقل داوری‌های خود را درباره بازده اوراق‌بهادار ارائه می‌دهند. در ابتدا توزیع بازده اوراق‌بهادار را به‌دست می‌آوریم که در جدول زیر ارائه شده‌اند:

جدول ۱. بازده غیرقطعی نرمال از ۶ ورقه‌بهادار(%)

ورقه i	بازده غیرقطعی	ورقه i	بازده غیرقطعی
۱	$\mathcal{N}(۳/۱, ۵/۸)$	۴	$\mathcal{N}(۵/۱, ۸/۴)$
۲	$\mathcal{N}(۳/۳, ۶/۱)$	۵	$\mathcal{N}(۴/۱, ۶/۵)$
۳	$\mathcal{N}(۴/۴, ۷/۳)$	۶	$\mathcal{N}(۶/۷, ۹/۸)$

اگر سرمایه‌گذار بخواهد مقدار واریانس (ریسک) را به حداقل برساند درحالی‌که حداقل بازده مورد انتظار کمتر از ۵٪ نباشد، آن‌گاه مدل میانگین-واریانس غیرقطعی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & V[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + ... + x_۶\xi_۶] \\ s.t. \quad & E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + ... + x_۶\xi_۶] \geq ۰/۰۵, \\ & x_۱ + x_۲ + ... + x_۶ = ۱, \\ & x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., ۶. \end{aligned}$$

طبق جدول ۱ مدل بالا را می‌توان به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & ۰/۰۵۸x_۱ + ۰/۰۶۱x_۲ + ۰/۰۷۳x_۳ + ۰/۰۸۴x_۴ + ۰/۰۶۵x_۵ + ۰/۰۹۸x_۶ \\ s.t. \quad & ۰/۰۳۱x_۱ + ۰/۰۳۳x_۲ + ۰/۰۴۴x_۳ + ۰/۰۵۱x_۴ + ۰/۰۴۱x_۵ + ۰/۰۶۷x_۶ \geq ۰/۰۵, \\ & x_۱ + x_۲ + ... + x_۶ = ۱, \\ & x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., ۶. \end{aligned}$$

توسط حل مدل بالا، سبد سرمایه‌گذاری بهینه در جدول ۲ ارائه شده است. مقدار واریانس سبد سرمایه‌گذاری انتخابی ۰/۰۰۵۸ است.

جدول ۲. تخصیص پول به ۶ ورقه‌بهادار با نرخ بازده غیرقطعی نرمال (%)

ورقه i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
نسبت سرمایه	۰	۰	۰	۰	۶۵/۳۸	۳۴/۶۲

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری مورد بحث قرار دادیم که در آن بازده اوراق‌بهادار به‌طور عمده با ارزیابی کارشناسان بیان می‌شود. و برای حل این مسأله سبد سرمایه‌گذاری در حالت عدم قطعیت دو مدل میانگین-واریانس و میانگین-نیم‌واریانس ارائه دادیم و با حل یک مثال نشان داده شد که این مدل‌ها برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در شرایط عدم قطعیت مناسب هستند.

مراجع

1. X. Huang, *Mean-Variance models for portfolio selection subject to experts' estimation*, Expert Systems with Applications (2012), 5887–5893.
2. B. Liu, *Uncertainty Theory, A Barnch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*, Berlin: Springer-Verlag, (2010).
3. B. Liu, *Uncertainty Theory*, Beijing: Uncertainty Theory Laboratory, (2015).

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

یک تعمیم ساختاری برای گروهها

نصرت اله شجره پورصلواتی[۱,*]

[۱]بخش ریاضی محض، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. در این مقاله، با محدود کردن عمل دوتایی روی یک مجموعه ناتهی مانند G، که دارای ویژگیهایی مشابه عمل دوتایی روی ساختار گروهها می باشد یک تعمیم ساختاری برای ساختار گروه معرفی شده است. این ساختار گروه جزئی نامیده شده و به طور طبیعی در چندین زمینه توپولوژیک رخ می دهد. دراین تعمیم، بعضی از خصوصیات و تعدادی از قضیه ها و نتیجه گیری های نظریه گروه ها مورد بررسی قرار گرفته و تعمیم داده شده است و نشان داده شده که بعضی از قضایای نظریه گروهها ممکن است برای گروههای جزیی برقرار نباشند.

واژه‌های کلیدی: ساختارتعمیم گروه، ساختار گروه، گروه جزیی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 20Nxx, 08A55, 37N20.

۱. مقدمه

فرض کنید G یک مجموعه ناتهی باشد. اگر P زیرمجموعه ای ناتهی از حاصلضرب دکارتی $G \times G$ باشد، تابع $*$ از P به G یعنی $* : P \longrightarrow G$ یک عمل دوتایی جزیی روی G نامیده می شود. وقتی که $P = G \times G$ باشد، آنگاه $*$ یک عمل دوتایی روی G است. بنابراین، وقتی یک عمل دوتایی جزیی داریم، ممکن است برای دو عنصر x و y از مجموعه G، $x * y$ یا $y * x$ یا هردو در G تعریف نشده باشند. برای راحتی در نوشتار، علامت $*$ را حذف می کنیم، یعنی بجای نوشتن $x * y$ می نویسیم: xy. عمل دوتایی جزیی، برای تحقیقات در مبانی مکانیک کوانتوم و مبانی نظریه احتمالات فازی، نقشی اساسی بازی می کند.

تعریف ۱.۱. [۱، ۲] فرض کنید G یک مجموعه ناتهی و $*$ یک عمل دوتایی جزیی روی G باشد اگر برای تمام عناصر $x, y, z \in G$ شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه G یک گروه جزئی نامیده می شود:
(۱): اگر $xy,\ yz,\ (xy)z,\ x(yz)$ تعریف شده باشند، آنگاه $x(yz) = (xy)z$
(۲): برای هر $x \in G$ ، عنصر $e \in G$ وجود دارد به طوری که xe و ex تعریف می شوند و $xe = ex = x$.
(۳): برای هر $x \in G$، عنصر $x' \in G$ وجود دارد طوری که xx' و $x'x$ تعریف می شوند و $xx' = x'x = e$.

در تعریف ۱.۱، شرط (۱) شرکت پذیری جزیی، تعریف نیم گروه جزیی را ارائه می دهد. شرط (۲) عنصر همانی است که منحصربه فرد هم هست. شرط (۳) وارون عنصر $x \in G$، عنصر $x' \in G$ ارائه شده که منحصر به فرد است و لذا آن را با نماد x^{-1} مشخص می کنیم.

مثال ۲.۱. فرض کنید G یک گروه و A زیرمجموعه ایی ناتهی از G باشد. در اینصورت مجموعه

$$\{e, a, a^{-1} \mid a \in A\}$$

با عمل القایی از گروه G یک گروه جزیی است که ممکن است گروه نباشد.

*سخنران. آدرس ایمیل: salavati@uk.ac.ir

مثال ۳.۱. هر گروه یک گروه جزیی هست. اما عکس آن درست نیست. فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد. مجموعه $\{-n, -n+۱, \ldots, ۰, ۱, \ldots, n-۱, n\}$ با عمل جمع معمولی اعداد صحیح، یک گروه جزیی است اما یک گروه نیست.

۲. نتایج اصلی

در این بخش تعدادی از تعاریف و قضایای نظریه گروهها را برای گروههای جزیی ارائه داده و درستی یا نادرستی آنها را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و S یک زیرمجموعه ناتهی از G باشد که با عمل جزیی روی G تشکیل یک گروه جزیی دهد در این صورت S را یک زیرگروه جزیی G نامند و از نماد $S \leq G$ استفاده می کنیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و S یک زیرمجموعه ناتهی از G باشد. دراینصورت S یک زیرگروه جزیی G است، اگر و تنها اگر، $e \in S$ و برای هر $s \in S$، وارون آن، $s^{-۱}$ در S باشد.

قضیه ۳.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی، x و y عناصری از G باشند. دراینصورت $(x^{-۱})^{-۱} = x$ و اگر ضربهای $xy,\ (xy)y^{-۱},\ y^{-۱}x^{-۱},\ (xy)y^{-۱}x^{-۱},\ x^{-۱}(xy),\ y^{-۱}x^{-۱}(xy)$ در G تعریف شده باشند، آنگاه $(xy)^{-۱} = y^{-۱}x^{-۱}$.

قضیه ۴.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و S، یک زیرگروه جزیی G باشد، مجموعه

$$C_G(S) := \{g \in G \mid gx = xg, \text{if } gx \text{ and } xg \text{ are defined } \forall x \in S\}$$

یک زیرگروه جزیی G است. آن را مرکز ساز زیرگروه جزیی S در G نامیده می شود.

ملاحظه ۵.۲. زیرگروه جزیی $C_G(G)$ را مرکزساز گروه جزیی G نامیده اند. درحالتی که $G = C_G(G)$، باشد، G را یک گروه جزیی آبلی نامیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی باشد و $\{S_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیرگروه جزیی های G باشند. آن گاه مجموعه های $\cup_{i\in I} S_i$ و $\cap_{i\in I} S_i$ زیرگروه جزیی هستند، که به ترتیب کوچکترین زیرگروه جزیی شامل هر عضو خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ و بزرگترین زیرگروه جزیی درون هر عضو خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ هستند.

قضیه ۷.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و A یک زیر مجموعه G باشد. مجموعه $A^{-۱} := \{a^{-۱} \mid a \in A\}$ را تعریف می کنیم، آن گاه مجموعه $A \cup A^{-۱} \cup \{e\} =< A >$ که در آن e عضو خنثای G است با عمل القایی G یک گروه جزیی است. $< A >$ را زیرگروه جزیی تولید شده مینیمال توسط A نامیده اند. اگر تمام ضربهای متناهی از عناصر A و $A^{-۱}$ را که در G قرار دارند در نظر بگیریم یک زیرگروه جزیی شامل A، حاصل می شود. این زیرگروه جزیی تولید شده ماکسیمال توسط A نامیده می شود و آن را با نماد $< A >^* \leq G$ نشان می دهیم. بعلاوه $\{e\} \leq < A > \leq < A >^*$.

ملاحظه ۸.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و x عنصری از G باشد. در اینصورت $< \{x\} >^*$ یک زیرگروه جزیی دوری G نامیده می شود. درحالتی که $G =< \{x\} >^*$، آنگاه G را یک گروه جزیی دوری نامیم. توجه کنید که ممکن است زیرگروه جزیی یک گروه جزیی دوری، دوری نباشد. به عنوان مثال، گروه جزیی مثال ۳.۱ دوری است و توسط $\{۱\}$ تولید می شود. اما برای $n > ۳$ زیرگروه جزیی $\{-۳, -۲, ۰, ۲, ۳\}$ دوری نیست.

قضیه ۹.۲. هر گروه جزیی دوری، یک گروه جزیی آبلی است. اما عکس آن درست نیست، یعنی، گروه های جزیی آبلی وجود دارند که دوری نیستند.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و x عنصری از G باشد. اگر عدد صحیح و مثبت، n، چنان باشد که برای عنصر $e \neq x$، $x^n = e$ تعریف شده باشد و n کوچکترین عدد مثبت باشد، n را مرتبه x ، با نماد $o(x)$ نشان داده می شود. در غیراینصورت مرتبه x نامتناهی تعریف می شود.

ملاحظه ۱۱.۲. قضیه لاگرانژ برای گروههای جزیی، ممکن است درست نباشد. ملاحظه می شود که اگر $۱ \neq k < n$، دو عدد طبیعی باشند که نسبت به هم اول باشند، آنگاه گروه جزیی $G = \{-n, -n+۱, \ldots, ۰, ۱, \ldots, n-۱, n\}$ با عمل جمع معمولی اعداد صحیح، دارای زیرگروه جزیی $S = \{-k, -k+۱, \ldots, ۰, ۱, \ldots, k-۱, k\}$ است که $card(S)$

نمی تواند $card(G)$ را عاد کند. همچنین ملاحظه می شود که $o(۱) = \infty \neq card(< \{۱\} >^*) = n$. بعبارت بهتر، ممکن است مرتبه عنصر یک گروه جزیی متناهی، عدد اصلی مجموعه زمینه گروه جزیی را نتواند بشمارد.

قضیه ۱۲.۲. هر زیرگروه جزیی را می توان درون یک گروه نشاند. بعبارت بهتر، اگر G یک گروه جزیی باشد، گروه H را می توان چنان ساخت که $G \leq H$، علاوه بر آن، اعداد اصلی G و H هر دو متناهی یا هر دو نامتناهی هستند.

مراجع

1. Z. Çiloğlu Şahin and Y. Çeven, *A Generalization of Groups: Partial Groups*, Emerging Applications of Differential Equations and Game Theory, (2020), 1–12. Doi: 10.4018/978-1-7998-0134-4.ch001
2. S. Jekel, *Partial Groups*, Technical Report, Northeastern University, (2015), 1–6. Doi: 10.13140/2.1.1409.3127

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مروری بر باورهای رایج درباره ریاضی

مصطفی شعبانی[۱،*] و نرگس یافتیان[۲]

[۱]گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

[۲]گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

چکیده. از آنجاکه باورها تاثیر و اهمیت بسزایی در یادگیری و آموزش ریاضیات دارند، تحقیقات متعددی نیز درباره این موضوع انجام شده‌است. بر اساس این پژوهش‌ها، باورهای فراگیران درباره ریاضی، بر روی عملکرد و پیشرفت آنها تاثیر مستقیم دارد. باورهایی مانند اینکه فراگیران تصور می‌کنند، ریاضیات شامل مجموعه‌ای از حقایق و فرمول‌هایی است که ارتباطی با دنیای واقعی ندارد و می‌بایست فقط آنها را بخاطر سپرد. همچنین فراگیران بر این باورند که برای حل مسائل ریاضی همیشه یک قاعده و روش مشخصی وجود دارد و هر مسئله ریاضی را باید حتما در زمان اندکی حل کرد و به پایان رساند. هدف پژوهش حاضر مروری بر این باورهای رایج فراگیران درباره ریاضی است که آگاهی نسبت به آنها می‌تواند کمک شایانی در بهبود فرآیند یادگیری و یاددهی ریاضی و عملکرد بهتر دانش‌آموزان و دانشجویان در ریاضی داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: آموزش ریاضی، باور، باور درباره ریاضی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 03B421.

۱. مقدمه

ریاضیات علمی است که حاصل فکر و بر اساس تجربیات روزمره ما در جهان برخاسته است و موضوعی چند وجهی، با مفاهیم به‌هم مرتبطی است که همه در زندگی روزمره خود با آن سروکار داریم، بطوریکه روش درست اندیشیدن، نظم فکری و عملی و همچنین توانایی حل مسائل روزمره را فراهم می‌کند. از این رو آموزش ریاضی را باید یکی از مسائل مهم و محوری آموزش و پرورش دانست که فرآیند یاددهی و یادگیری آن با مشکلات متعددی روبرو است و عوامل مختلفی وجود دارد که پیشرفت و عملکرد تحصیلی فراگیران را در این حوزه تحت تاثیر قرار می‌دهد. از جمله عواملی که بر فرآیند یاددهی و یادگیری فراگیران تاثیر می‌گذارد، باورهایی هستند که آنها در ذهن دارند. باورها نقش اساسی در یادگیری ریاضی دارند و حتی می‌توانند تأثیر نامطلوبی در چگونگی درک دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی داشته‌باشد [۱]. افراد مختلفی در زمینه باورها پژوهش کردند اما شونفلد، ریاضیدان و پژوهشگر نامی حوزه آموزش ریاضی، یکی از معروف‌ترین آنها هست که نظرات آن کماکان قابل توجه است. وی دانش و رفتار لازم برای انجام حل مسائل ریاضی را در چهار مرحله زیر بیان می‌کند که در ادامه به آنها پرداخته می‌شود [۵].

- منابع (دانش، حقایق و گزاره‌ها)
- رهیافت (راهبردهای حل مسئله مانند، مثال نقض و برهان خلف و غیره)
- کنترل (تحلیل، بازنگری، ارزیابی و فراشناخت)
- نظام باورها

شونفلد در پژوهش خود مشاهده کرد که در بسیاری از موارد فراگیران، دانش و استراتژی لازم در اختیارشان بود و می‌توانستند

*سخنران. آدرس ایمیل: Mostafashabani14@gmail.com

از آن در حل مسئله استفاده کنند اما این اتفاق نمی‌افتاد، نه بخاطر اینکه آنها منابع را فراموش کرده باشند یا کنترل لازم برای حل آن را نداشته باشند، بلکه به این دلیل که آنها دانش ریاضی خود را برای استفاده در حل مسئله مفید نمی‌دانستند و به‌تبع این باور، اطلاعات و منابع بازخوانی نمی‌شد و نتیجه مطلوب صورت نمی‌گرفت. به همین دلیل او از نظام باورها به عنوان "جهان بینی ریاضی" فرد یاد و آنها را مجموعه‌ای از ادارک، احساسات و دیدگاههای نه لزوماً آگاهانه از رفتار فرد تعریف می‌کند و همچنین روش‌هایی را شکل می‌دهد که شخص به وسیله آن، ایده‌پردازی می‌کند و درگیر فعالیت‌های ریاضی می‌شود. باورهای فراگیران نسبت به ریاضی، به طور آگاهانه یا ناآگاهانه بر همهٔ فعالیت‌های آنها تاثیر می‌گذارد. به عنوان مثال، باورهای منفی نسبت به ریاضی می‌توانند باعث کاهش انگیزه و اعتماد به نفس فراگیران شود. باورهای یادگیرندگان نسبت به ریاضیات، مفاهیمی ذهنی، ضمنی یا صریح هستند که فراگیران درباره آموزش ریاضی،درباره خودشان به عنوان یادگیرنده ریاضی و یا درباره بستر کلاس درس ریاضی، درست فرض می‌کنند و به آن اعتقاد دارند؛ این باورها با تعامل نزدیک با یکدیگر و با دانش قبلی فراگیران در یادگیری ریاضی و حل مسئله در کلاس درس، تعیین یا مشخص می‌شوند [۳].

۲. باورهای رایج در آموزش ریاضی

باورهای یادگیرندگان در رابطه با ریاضی موضوع مهمی در فرآیند آموزش ریاضی است. با توجه به مطالب ذکر شده در مقدمه، می‌توان دریافت که دانستن حقایق، الگوریتم‌ها و رویه‌های مناسب در ریاضیات تضمینی کافی برای موفقیت در حل مسئله نیست و عوامل دیگری نظیر باورهای یادگیرندگان، در آن دخیل هستند که عامل تعیین‌کننده‌ای در پیشرفت تحصیلی و عملکرد فراگیران محسوب می‌شوند [۶]. شونفلد به برخی از این باورهای نادرست اما رایج اشاره کرده است [۴]:

باور۱: ریاضیات، هیچ ارتباطی با تفکر در دنیای واقعی یا حل مسئله ندارد.
پیامد: در مسائلی از زندگی روزمره که نیازمند کشف است، ریاضیات مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.
باور۲: مسائل ریاضی اگر قابل حل باشند، همیشه در کمتر از ده دقیقه حل می‌شوند.
پیامد: اگر یادگیرندگان نتوانند مسئله‌ای را در کمتر از ده دقیقه حل کنند، آن را رها می‌کنند. به طور کلی در ریاضیات سرعت، عامل مهمی است و می‌بایست در انجام آن سریع بود. فراگیرانی که باور قوی به عدم توانایی حل مسائل ریاضی زمانبر داشته باشند، فرض می‌کنند که تمام مسائل ریاضیات را باید در مدت زمان کوتاهی به پایان برسانند و هنگامی که با مسائل چالش برانگیزی مواجه می‌شوند، کاملاً دلسرد شده و سراغ مسئله دیگری می‌روند.
باور۳: فقط نوابغ قادر به کشف و خلق ریاضیات هستند.
پیامد اول: یادگیرندگان عادی رویه‌ها را بدون توجه به ارزش آن می‌پذیرند و تلاشی برای فهمیدن دلیل آن نمی‌کنند. آنها تصور می‌کنند که فقط نوابغ قادر به کشف و حل مسائل ریاضی هستند و مابقی فقط بازتولیدکننده تفکرات آنها هستند.
پیامد دوم: اگر فراگیران عادی چیزی را در ریاضی فراموش کنند، اتفاق بدی است. زیرا آنها نبوغ ندارند و به تنهایی قادر به کشف و استباط و استدلال نخواهید بود.

علاوه بر باورهای ذکر شده، شونفلد در پژوهش جدیدتری به برخی دیگر از باورهای رایج فراگیران درباره ریاضی پرداخته است [۵]:

(۱) یادگیری ریاضیات اغلب حفظی است. به عنوان مثال، یادگیرندگان در دروسی مانند هندسه بر این باورند که اثبات‌ها را تنها باید حفظ کنند و حافظه نقش مهمی یادگیری ریاضی آنها دارد.

(۲) مسائل ریاضی فقط یک جواب درست دارد.

(۳) فقط یک راه‌حل صحیح برای حل هر مسئله ریاضی وجود دارد که معمولاً روشی است که معلم یا استاد اخیراً در کلاس نشان داده است.

(۴) ریاضیات یک فعالیت انفرادی است که توسط افراد به تنهایی انجام می‌شود.

(۵) ریاضیات شامل مجموعه‌ای از قواعد، حقایق، فرمول‌ها و روش‌هایی برای حل مسائل می‌باشد و تفکر ریاضی نیز شامل توانایی یادگیری، به یاد آوردن و به کار بردن این حقایق، قواعد، فرمول‌ها و رویه‌ها است.

(۶) همیشه یک قاعده و روش مشخصی برای حل مسائل ریاضی وجود دارد.

(۷) تدریس خوب در ریاضی شامل این است که فراگیران بدانند چگونه از قواعد و فرمول‌ها استفاده کنند. از طرفی دیگر، بعضی از آنها فکر می‌کنند که تدریس خوب شامل نشان دادن روش‌های مختلف برای حل یک مسئله است.

(۸) برخی از فراگیران، ریاضیات را به طور ذاتی برای دلایل باارزش(مانند دقیقتر فکر کردن و تقویت مهارت حل مسائل)، و عده‌ای نیز فقط به خاطر دلایل بیرونی مانند جلب توجه دیگران، فشارهای والدین و جامعه مطالعه می‌کنند.

(۹) از فراگیران عادی انتظار نمی‌توان داشت که مفاهیم ریاضی را درک کنند. از آنها انتظار می‌رود که مطالب را فقط به خاطر بسپارند و آموخته‌های خود را به صورت مکانیکی و بدون درک به کار گیرند.

(۱۰) فراگیرانی که کمتر از میزان توانایی خود در برخورد با ریاضی عمل می‌کنند، بیشتر تمایل دارند موفقیت‌های ریاضی خود را به شانس، و ناکامی‌های خود را به عدم توانایی نسبت دهند. همچنین کسانی که خود را در ریاضیات خوب می‌دانند، موفقیت‌های خود را به توانایی‌های خود نسبت می‌دهند.

۳. نتیجه

باورهای فراگیران درباره ریاضیات از عوامل پنهانی است که مستقیم بر عملکرد آنها تاثیر می‌گذارند. علاوه بر این، باورهای آنها نسبت به ریاضیات، به عنوان پیش‌بینی‌کننده پیشرفت ریاضی است [۶]. این باورها می‌تواند درباره ماهیت ریاضی، حل مسئله، روش تدریس و محیط یادگیری باشند. بسیاری از یادگیرندگان، باورهای درست و سالمی نسبت به ریاضیات ندارند و این موجب شده است که علاقه و نگرش آنها نسبت به ریاضی کاهش یافته و گاهی نیز تبدیل به تنفر می‌شود. همچنین این موضوع تبدیل به یک مسئله جهانی شده است و در اکثر مدارس و دانشگاه‌ها نیز دیده می‌شود [۲].

مراجع

1. A. Ayebo and A. Mrutu, *An exploration of calculus students' beliefs about mathematics,* Int. Electron. J. Math. Educ. 14 (2019), no. 2, 385–392.
2. D. G. McGregor, Exploring the impact of inquiry learning on students' beliefs and attitudes towards mathematics. (Ph.D.), The University of Queensland, St Lucia, 2016.
3. P. Op't Eynde, E De Corte, and L. Verschaffel, *Framing students' mathematics-related beliefs.* In Beliefs: A hidden variable in mathematics education? (pp. 13-37). Springer, Dordrecht, 2002.
4. A. H. Schoenfeld, *A framework for the analysis of mathematical behavior*, Mathematical problem solving (1985) 11-45.
5. A. H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint)* J. Education 196 (2016) no. 2, 1–38.
6. G. Wang, S. Zhang and J. Cai, Chinese High School Students' Mathematics-Related Beliefs and Their Perceived Mathematics Achievement: A Focus on Teachers' Praise. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(7), em1713, 2019.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بازگشت پوانکاره

سعید شعبانیان[۱,*]
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. بررسی مدارهای نقاط یک عمل اطلاعات خوبی را از رفتار آن به دست می‌دهد. پوانکاره نخستین کسی بود که رفتار مدار یک نقطه در عمل‌های اعداد صحیح را تشخیص داد و نشان داد که نقاط یک مجموعه اندازه‌پذیر، بی‌نهایت بار خود مجموعه را قطع می‌کند. این قضیه معروف به قضیه‌ی بازگشت است که در این تحقیق در ابتدا به اثبات آن در فضای حافظ اندازه احتمال می‌پردازیم و سپس آن را به فضایی دل‌خواه تعمیم خواهیم داد.
واژه‌های کلیدی: قضیه‌ی بازگشت، بازگشت پوانکاره، ارگودیک.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 22D40, 35Q51.

۱. مقدمه

در علم ارگودیک بررسی مدار نقاط، نقش تعیین کننده‌ای را در شناسایی رفتار سیستم دارد. این‌که نقطه‌ای در زمان‌های مختلف چه رفتاری دارد و آیا به مکان اولیه خود برمی‌گردد در سیستم دینامیکی اهمیت دارد و حتی می‌توان آن را از نخستین انگیزه‌های مطالعه‌ی علم ارگودیک دانست. از مهم‌ترین تحقیق‌های پیرامون رفتار مدار نقطه‌هایی از سیستم، تلاش‌های پوانکاره (Poincare) بود که منجر به اثبات قضیه‌ای معتبر شد. قضیه پوانکاره نشان می‌دهد که اکثر نقاط، مدارهای خود را قطع می‌کنند و به عبارتی به مکان اولیه خود برمی‌گردند. اشاره به این موضوع نیز جالب است که قضیه‌ی پوانکاره به منزله اصل لانه کبوتری برای نظریه ارگودیک است و همین نکته اهمیت موضوع را نشان می‌دهد.

۲. نتایج اصلی

در ابتدا سه تایی (X ، β ، μ) را فضای اندازه احتمال در نظر می‌گیریم. همچنین گروه Γ را، گروهی شمارا و نامتناهی فرض می‌کنیم. عمل گروه Γ روی X را با نماد $\Gamma \curvearrowright X$ نمایش می‌دهیم.
نخست گذری به قضیه پوانکاره در عمل‌های صحیح بر روی فضای اندازه احتمال داریم. نتایج این قضیه را می‌توان در [۳] ببینید.
تبدیل حافظ اندازه T مفروض است. عضو اندازه‌پذیر B از β را که $\mu(B) > 0$ داریم. مجموعه‌های

$$E_r = \{x \in B, \forall n \geq 1, T^{r_n}(x) \notin B\}, \qquad 1 \leq r \leq k$$

را تعریف می‌کنیم و خواصی برای آن‌ها مطرح می‌کنیم. برای راحتی کار با E_1 ادامه می‌دهیم.

$$E_1 = \{x \in B : \forall n \geq 1, T^n(x) \notin B\} = B \cap T^{-1}(X \setminus B) \cap T^{-2}(X \setminus B)...$$

حال اگر مجموعه‌های زیر را در نظر بگیریم:

$$T^{-1}(E_1) = T^{-1}(B) \cap T^{-2}(X \setminus B) \cap ...$$
$$T^{-2}(E_1) = T^{-2}(B) \cap T^{-3}(X \setminus B) \cap ...$$

*سخنران. آدرس ایمیل: saeedshaabanian@gmail.com Saeed.shaabanian@modares.ac.ir

به دنباله‌ی دو به دو مجزای $(T^{-i}E_1)_{i=1}^{\infty}$ می‌رسیم که $\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}E_1 \subseteq X$ و لذا $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}E_1) \leq \mu(X) = 1$.

نتیجه مطلوب این نامعادله نشان می‌دهد که $\mu(E_1) = 0$.

خواص فوق برای هر E_r برقرار است یعنی $\forall 1 \leq r \leq k : \mu(E_r) = 0$.

حال مجموعه زیر را به کمک E_rها می‌سازیم

$$\forall 1 \leq r \leq k : F_r = B \setminus E_r$$

چون $F_r \subseteq B$ لذا $F = \bigcap_{r=1}^{k} F_r \subseteq B$ و بنابراین $F \in \beta$. حال که F را تشکیل دادیم، دو شرط زیر را بررسی می‌کنیم:

(۱) $\mu(B) = \mu(F)$

$$\mu(F) = \mu(\bigcap_{r=1}^{k} F_r) = \mu(\bigcap_{r=1}^{k} B \setminus E_r) = \mu(B \setminus \bigcup_{r=1}^{k} E_r) = \mu(B) \setminus \mu(\bigcup_{r=1}^{k} E_r) = \mu(B)$$

(۲) نشان می‌دهیم برای هر $x \in F$ اعداد $m_1 < m_2 < ...$ وجود دارند به‌طوری‌که $T^{m_i}(x) \in B$

$$x \in F = \bigcap_{r=1}^{k} F_r \Longrightarrow \forall r, x \in F_r \Longrightarrow \forall r, x \in B \setminus E_r \Longrightarrow \forall r, x \notin E_r$$

یعنی

$$r = 1 : x \in E_1 \Longrightarrow \exists n_1 : T^{n_1}(x) \in B$$

$$...$$

$$r = k : x \in E_k \Longrightarrow \exists n_k : T^{n_k}(x) \in B$$

حال مجموعه $A = \{m_s : 1 \leq s \leq k\}$ را که مرتب شده دنباله (n_s) است به‌دست می‌آوریم و لذا

$$\forall x \in F, \exists m_1 < m_2 < ... : T^{m_i}(x) \in B$$

به عبارتی نشان دادیم که برای هر $x \in B$، تعداد نامتناهی $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $T^n(x) \in B$. در واقع تقریبا همه نقاط از B به خودش برمی‌گردند.

اکنون که قضیه‌ی پوانکاره در عمل‌های $\mathbb{Z}$ را درک کردیم، مشتاقیم تا فرم کلی‌تر آن (عمل هر گروه دلخواه) را بررسی کنیم. می‌توانید در [۲] نتایج برآمده از این قضیه را جستجو کنید.

فرض کنیم $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ عمل حافظ اندازه احتمال از گروه‌های نامتناهی و $A \subseteq X$ که $\mu(A) > 0$ باشد. قضیه پوانکاره می‌گوید تقریبا برای هر $x \in A$، مجموعه هر $s \in \Gamma$ که $sx \in A$ باشد، مجموعه‌ای نامتناهی است. اگر روند فرم اعداد صحیح قضیه پوانکاره را در نظر بگیریم، در اینجا هم به همان صورت ولی گسترده‌تر پیش خواهیم رفت.

به برهان خلف فرض می‌کنیم که $x \in A$ موجود باشد که مجموعه $F = \{s \in \Gamma : sx \in A\}$ متناهی باشد. این موضوع را به‌صورت دیگری بیان می‌کنیم. مجموعه متناهی $F \subseteq \Gamma$ موجود است که مجموعه $B := A \setminus U_{s \in \Gamma \setminus F} sA$ اندازه ناصفر داشته باشد. چون $\mu(B) > 0$ است لذا

$$\exists x \in A : x \notin \bigcup_{s \in \Gamma \setminus F} sA \Longrightarrow \exists x \in A : \forall s \in \Gamma \setminus F, x \notin sA$$

چون Γ گروهی نامتناهی است، پس زیرگروه نامتناهی $I \subseteq \Gamma$ را می‌توان ساخت که خاصیت زیر را داراست

$$\forall q, t \in I (q \neq t), q \notin tF$$

مخصوصا $q \notin F$ برای هر $q \in I$ که $q \neq e$. آنگاه مجموعه‌های tB را به‌ازای $t \in I$ تشکیل می‌دهیم:

$$tB = t(\{x \in A : \forall s \in \Gamma \setminus F, x \notin sA\}) = \{tx : x \in A, \forall s \in \Gamma \setminus F, x \notin sA\}$$

گردایه $(tB)_{t \in I}$ گردایه‌ای از اعضای دو به دو مجزا است زیرا:

$$\forall t, q \in I (t \neq q) : y \in tB \cap qB \Longrightarrow y \in tB, y \in qB \Longrightarrow y = tx, y = qx \Longrightarrow tx = qx \Longrightarrow q^{-1}tx = x$$

چون $x \in A$ لذا $q^{-1}tx \in A$ بنابراین $q^{-1}t \in F$ و لذا $t \in qF$ و این با انتخاب I تناقض دارد. پس

$$tB \cap qB = \varnothing, \forall t, q \in I(t \neq q)$$

چون F متناهی است لذا $\mu(B) < \infty$ ، از طرف دیگر به‌ازای مجموعه‌های دو به دو مجزای $(sB)_{s\in I}$ این اعضا دارای اندازه‌ای برابر با B هستند و این تناقض زیر را ایجاب می‌کند:

$$\mu(\bigcup_{s\in I} sB) \leqslant \sum_{s\in I} \mu(sB) \leqslant \mu(X) = 1$$

زیرا I نامتناهی است و $\sum_{s\in I} \mu(sB) = \infty$ بنابراین فرض خلف باطل است.

حال به بیان قضیه‌ی بازگشت در فضای اندازه دلخواه و نه لزوماً حافظ اندازه احتمال می‌پردازیم. توجه داشته باشید که فضای ما در اینجا دلخواه (σ-متناهی) ولی برای عمل، گروه اعداد صحیح مدنظر قرار گرفته است.

فضای $(X \text{ ، } \beta \text{ ، } m)$ را فضای اندازه σ-متناهی فرض می‌کنیم. در تبدیل معکوس‌پذیر T مجموعه $W \subset X$ را که در آن مجموعه‌های $\{T^{-n}W\}_{n=0}^{\infty}$ دو به دو مجزا می‌باشند را مجموعه‌های سرگردان T می‌گویند. گردایه همه مجموعه‌های سرگردان اندازه‌پذیر T را با $\mathcal{W}$ نمایش می‌دهند.

بخش تلف‌کننده از تبدیل معکوس‌پذیر T، اجتماع اندازه‌پذیر از گردایه مجموعه‌های سرگردان آن است و آن را به صورت $\mathcal{D}(T) := \cup\mathcal{W}(T)$ مشخص می‌کنیم. مجموعه‌ی $\mathcal{C}(T) := X \setminus \mathcal{D}(T)$ را بخش نگهدارنده تبدیل گویند و تبدیلی را نگهدارنده نام گذارند که $\mathcal{C}(T) = X$.

گزاره‌ای در مرجع [۱] اثبات شده است که در آن برای تبدیل حافظ اندازه از فضای σ-متناهی $(X \text{ ، } \beta \text{ ، } m)$ داریم:

اگر $f \in L^1(m)$ و $f \geq 0$ آنگاه $[\sum_{n=1}^{\infty} foT^n = \infty] \subseteq \mathcal{C}(T)$.

حال آماده‌ایم تا یکی از مهم‌ترین قضایای بازگشت را بیان کنیم. قضیه‌ای که تا بدین جا تمام توجه ما را به خود جلب نموده بود.

فرض کنید T تبدیلی حافظ اندازه روی فضای اندازه σ-متناهی $(X \text{ ، } \beta \text{ ، } m)$ باشد. اگر $A \in \beta$ وجود داشته باشد که $m(A) < \infty$ به‌طوری‌که $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)$، نشان می‌دهیم T تبدیلی نگهدارنده است و لذا به مطلوب خود خواهیم رسید.

به کمک فرض داریم:

$$X = T^{-k}X = \bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}A \qquad \forall k \geq 1$$

و این یعنی اگر تابع

$$\boldsymbol{\chi}_A oT^n = \begin{cases} 1 & x \in T^{-n}A \\ 0 & x \notin T^{-n}A \end{cases}$$

را در نظر بگیریم، داریم $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}_A oT^n = \infty$. یعنی روی کل X این اتفاق صورت می‌گیرد. بنابراین چون $\boldsymbol{\chi}_A \geq 1$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}_A oT^n = \infty$ ، پس طبق گزاره‌ی مطرح شده در بالا داریم:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}_A oT^n = \infty\right] \subseteq \mathcal{C}(T)$$

یعنی $X \subseteq \mathcal{C}(T)$ و چون $\mathcal{C}(T) \subseteq X$ لذا $X = \mathcal{C}(T)$ که نشان می‌دهد تبدیل T نگهدارنده است.

ما موفق شدیم که شرطی را برای بازگشتی بودن تبدیل دلخواه در فضای σ-متناهی بیابیم. اما این کار برای فضای نامتناهی نشدنی است. مثالی وجود دارد که آن را به راحتی نقض می‌کند، آیا آن را می‌توانید حدس بزنید؟

۳. نتیجه‌گیری

قضیه‌ی پوانکاره نه تنها فقط در فضای محدود اندازه احتمال بلکه در فضای بزرگ‌تری چون فضای σ -متناهی نیز برقرار است و نتایج وسیعی از این اتفاق به ثمر می‌نشیند.

تشکر و قدردانی

نهایت تشکر از استاد گرانقدر و فرهیخته، پروفسور سید مسعود امینی به واسطه راهنمایی‌های تاثیرگذار در این راه را دارم. سایه این استاد گرامی سالیان سال بر پیکره ریاضی ایران مستدام باد.

مراجع

1. Aaronson, J. , *An introduction to infinite ergodic theory*, American Mathematical Soc, 1997.
2. Kerr, D. and Li, H. , *Ergodic theory*, Springer Monographs in Mathematics Springer., 2016.
3. Walters, P, *An introduction to ergodic theory (Vol. 79)*., Springer Science & Business Media, 2000.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

یک روش محاسباتی جدید برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه بازه‌ای

طاهره شکوهی[1,*] ، سمانه صردی‌زید [2] و مهدی الله‌دادی [3]

[1]دانشکده ریاضی ، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

[2]دانشکده صنعت و معدن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

[3]دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش محاسباتی جدید برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه غیرخطی بازه‌ای بر پایه تفاضل هوکوهارای تعمیم یافته ارائه شده است. این روش به هامیلتون-ژاکوبی-بلمن معروف است که بر اساس اصل بهینگی به منظور تضمین شرایط لازم و کافی بهینگی بیان شده است. در انتها، روش ارائه شده را برای حل یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای به‌منظور ارزیابی عملکرد و اثربخشی چارچوب پیشنهادی ارائه شده به‌کار می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: مساله کنترل بهینه بازه‌ای، روش هامیلتون-ژاکوبی-بلمن، اصل بهینگی، تفاضل تعمیم یافته هوکوهارا .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 49Lxx, 49M05.

---

۱. مقدمه

هدف کلی این مقاله تضمین شرایط لازم و کافی بهینگی برای جواب‌های عددی مسائل کنترل بهینه بازه‌ای است. فرم کلی این مسائل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
(۱) \qquad & min\ J^{\pm}\left(u^{\pm}\right) = h^{\pm}\left(x^{\pm}\left(t_f\right), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} g^{\pm}\left(x^{\pm}\left(t\right), u^{\pm}\left(t\right), t\right) dt, \\
& x'^{\pm}(t) = a^{\pm}(x^{\pm}, u^{\pm}, t), \quad t \in [t_0, t_f], \\
& x^{\pm}\left(t_0\right) = {x_0}^{\pm}, \qquad x^{\pm}\left(t_f\right) = x_f^{\pm},
\end{aligned}
$$

که در آن $g^{\pm}, h^{\pm} \in \mathcal{K}$ توابع پیوسته بازه‌ای هستند و $\mathcal{K}$ مجموعه تمام بازه‌های فشرده ناتهی از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. $x^{\pm}(t)$ و $u^{\pm}(t)$ به ترتیب توابع بازه‌ای ازمتغیر حالت و متغیر کنترل برای $t \in [t_0, t_f]$ هستند و $h^{\pm}$ یک تابع بازه‌ای اسکالر است. هدف یافتن یک متغیر کنترلی $u^{*\pm}(t)$ است به گونه ای که تابع هزینه (۱) به حداقل برسد و محدودیت‌های مسئله برآورده شوند. همچنین، فرض می‌شود:

$$
(۲) \qquad f^{\pm}(x^{\pm}(t), x'^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) = a^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) \ominus_{gh} x'^{\pm}(t) = 0
$$

که در آن $\ominus_{gh}$ تفاضل هوکوهارای تعمیم یافته [1] است [۴]. از رابطه (۲) نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$
(۳) \qquad f^{+}(x^{\pm}(t), x'^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) \geq 0,
$$

*سخنران. آدرس ایمیل: toktam.shokohi64@gmail.com

[1]Generalized Hukuhara difference

$$f^{-}(x^{\pm}(t), x'^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) \leq 0.$$

حل مسائل کنترل بهینه بازه‌ای در سال‌های اخیر به یک موضوع جذاب تبدیل شده است و توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است [۲، ۳، ۵]. در این مقاله یک روش جدید بر پایه شرایط لازم و کافی بهینگی برای یافتن جواب‌های دقیق این مسائل پیشنهاد شده است. برای این منظور، ابتدا معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن[۲] بازه‌ای بیان می‌شود. سپس با یافتن جواب‌های این معادله، جواب مسئله کنترل بهینه بازه‌ای تعیین خواهد شد. به منظور اثبات صحت و کاربرد این روش نوین، یک مثال نیز ارائه شده است.

۲. معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای

در این بخش یک روش کارآمد برای به دست آوردن جواب‌های بهینه یک سیستم کنترلی حلقه بسته بازه‌ای، با استفاده از اصل بهینگی و معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای ارائه می‌شود. برای این منظور ابتدا تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

$$J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t\right) = \min_{\substack{u^{\pm}(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ h^{\pm}\left(x^{\pm}(t_f), t_f\right) + \int_t^{t_f} g^{\pm}\left(x^{\pm}(\tau), u^{\pm}(\tau), \tau\right) d\tau \right\}, \quad (۴)$$

که تابعی معیار (۱) را به ازای هر $x^{\pm}(t)$ قابل قبول و $t < t_f$ حداقل کند. با تقسیم بازه $[t, t_f[$ به دو زیربازه و با استفاده از اصل بهینگی [۱]، می‌توان مسئله (۴) را به فرم زیر نوشت:

$$J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t), t\right) = \min_{\substack{u^{\pm}(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t+\Delta t), t+\Delta t\right) + \int_t^{t+\Delta t} g^{\pm}\left(x^{\pm}(\tau), u^{\pm}(\tau), \tau\right) d\tau \right\}. \quad (۵)$$

با فرض این‌که بستار بازه‌ای ماتریس هسین[۳] $J^{*\pm}$ وجود دارد، می‌توان $J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t+\Delta t), t+\Delta t\right)$ را با استفاده از سری تیلور حول نقطه $\left(x^{\pm}(t), t\right)$ به‌صورت زیر بسط داد:

$$\begin{aligned} J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t), t\right) = min_{\substack{u^{\pm}(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \Big\{ & J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t), t\right) + \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}}\left(x^{\pm}(t+\Delta t) \ominus_{gh} x^{\pm}(t)\right) \\ & + \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t}\Delta t + o(\Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} g^{\pm}\left(x^{\pm}(\tau), u^{\pm}(\tau), \tau\right) d\tau \Big\}. \end{aligned} \quad (۶)$$

با ساده‌سازی عبارت فوق و با استفاده از رابطه (۲) و میل دادن Δt به سمت صفر، داریم:

$$0 \subseteq \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + min_{\substack{u^{\pm}(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}} a^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t\right) + g^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t\right) \right\}. \quad (۷)$$

به منظور یافتن شرایط حدی برای این معادله دیفرانسیل، $t = t_f$ قرار داده، از معادله (۴) مشخص است که

$$J^{*\pm}(x^{\pm}(t_f), t_f) = h^{\pm}(x^{\pm}(t_f), t_f)$$

که شرط لازم برای بهینگی می باشد. اکنون، تابع هامیلتونی بازه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), J^{*\pm}, t\right) = min_{\substack{u^{\pm}(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \{ \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}} a^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t\right) + g^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t\right) \}, \quad (۸)$$

که با استفاده از رابطه (۳)، معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + H^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), J^{*\pm}, t\right) \right)^{-} \leq 0, \\ \left(\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + H^{\pm}\left(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), J^{*\pm}, t\right) \right)^{+} \geq 0, \end{aligned} \quad (۹)$$

لذا با حل دو معادله فوق می توان قانون کنترلی چون $u^{*\pm}$ یافت که تابعی معیار $J^{\pm}$ را حداقل کند.

[2] Hamilton-Jacobi-Bellman equation
[3] Hessian Matrix

۳. نتایج عددی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده، یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای به فرم کلی (۱) را حل خواهیم کرد.

مثال ۱.۳. کنترل بازه‌ای پیدا کنید که تابعی بازه‌ای زیر را به حداقل برساند:

$$J^{*\pm}\left(x^{\pm}(t),t\right)=\frac{1}{2}x^{\pm 2}(1)+\int_0^1 u^{\pm 2}(t), \tag{۱۰}$$

با سیستم دینامیک بازه‌ای $x'^{\pm}=u^{\pm}(t)-(\alpha,3-2\alpha)x^{\pm}(t)$ و شرایط اولیه و نهایی $x^{\pm}(0)=1$ و $x^{\pm}(1)=0$.

می‌خواهیم روش مطرح شده در بخش قبل را برای حل این مسئله بکار ببریم. برای این منظور، ابتدا تابع هامیلتونی بازه‌ای برای این مسئله به شرح زیر تعیین می‌شود:

$$H^{\pm}\left(x^{\pm}(t),u^{\pm}(t),J^{*\pm},t\right)=\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}}\left(u^{\pm}(t)-rx^{\pm}(t)\right)+u^{\pm 2}, \tag{۱۱}$$

که $r=[\alpha,3-2\alpha]$. شرط لازم برای بهینگی تابع هامیلتونی بازه‌ای عبارت است از:

$$\frac{\partial H^{\pm}}{\partial u^{\pm}}=0\Longrightarrow\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}}+2u^{\pm}=0\Longrightarrow u^{*\pm}=-\frac{1}{2}\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}}. \tag{۱۲}$$

توجه شود که $\frac{\partial^2 H^{\pm}}{\partial u^{\pm 2}}=2>0$. بنابراین می توان معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t}+H^{\pm}\left(x^{\pm}(t),u^{*\pm}(t),J^{*\pm},t\right)=0. \tag{۱۳}$$

یک روش برای حل معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای، حدس زدن فرم کلی جواب است. با توجه به شرایط مرزی $J^{*\pm}(x^{\pm}(t_f),t_f)=\frac{1}{2}x^{\pm 2}(t)$، می‌توان حدس زد که فرم کلی جواب این معادله به‌صورت $J^{*\pm}=K^{\pm}x^{\pm 2}$ است که در آن $K^{\pm}(t)$ یک تابع اسکالر نامشخص از t می‌باشد. با این فرض داریم:

$$J_x^{*\pm}=2K^{\pm}(t)x^{\pm}(t).$$

از این‌رو، با استفاده از رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$u^{\pm}=-K^{\pm}x^{\pm}.$$

با جایگذاری این نتایج در رابطه (۱۳) داریم:

$$(K'^{\pm}-K^{\pm 2}-2rK^{\pm})=0. \tag{۱۴}$$

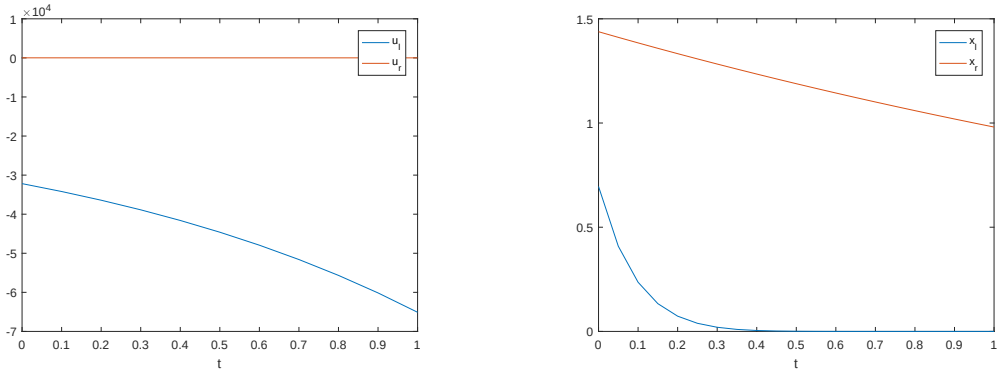
برای یافتن جواب‌های بهینه مسئله (۱۰)، لازم است تا معادله دیفرانسیل بازه‌ای (۱۴) حل شود. با حل این معادله دیفرانسیل بازه‌ای خواهیم داشت:

$$K^{\pm}(t)=\frac{2r}{2re^{2r(t-1)}-1}.$$

بنابراین جواب‌های بهینه مسئله (۱۰) عبارت می‌شوند از:

$$u^{*\pm}=\frac{-4r^2e^{rt}+2re^{r(2-r)}}{2re^{2r(1-t)-1}(2r-e^{(2r)})},\quad x^{*\pm}=\frac{2re^{rt}-e^{rt}}{2r-e^{2r}}. \tag{۱۵}$$

نمودارهای تقریبی متغیرهای وضعیت و کنترل بازه‌ای به‌ازای $\alpha=0.5$ در شکل ۱ رسم شده است. همچنین، جدول ۱ مقادیر تقریبی محاسبه شده برای $x^{*\pm}$ و $u^{*\pm}$ را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۱. نمودارهای تقریبی $x^{*\pm}$ و $u^{*\pm}$ به ازای $\alpha = 0.5$.

جدول ۱. جواب‌های تقریبی $x^{*\pm}$ و $u^{*\pm}$ در زمان‌های مختلف.

$(u^{\pm})$	$(x^{\pm})$	t
$[-3.2180, 0.0016]$	$[0.6953, 1.4381]$	0
$[-3.4195, 0.0015]$	$[0.2359, 1.3845]$	0.1
$[-3.6422, 0.0014]$	$[0.0732, 1.3329]$	0.2
$[-3.8884, 0.0013]$	$[0.0199, 1.2830]$	0.3
$[-4.4610, 0.0012]$	$[0.0044, 1.2350]$	0.4
$[-4.4610, 0.0012]$	$[0.0007, 1.1887]$	0.5
$[-4.7932, 0.0011]$	$[0.0000, 1.1441]$	0.6
$[-5.1604, 0.0011]$	$[0.0000, 1.1010]$	0.7
$[-5.5662, 0.0010]$	$[0.0000, 1.0594]$	0.8
$[-6.0146, 0.0009]$	$[0.0000, 1.0194]$	0.9
$[-6.5103, 0.0008]$	$[0.0000, 1.0000]$	1

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه بازه‌ای توسعه داده شد. در این مسئله که مورد بررسی قرار گرفت جوابی برای بدست آوردن حداقل تابع هزینه حدس زده می شود به طوریکه در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی ان صدق کند، که شرط لازم برای بهینه بودن می باشد. همچنین با استفاده از اصل بهینگی و یک روش مستقیم برای حدس جواب، می‌توان حل یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای را به یافتن جواب‌های یک معادله دیفرانسیل بازه‌ای کاهش داد، که شراط کافی بهینگی است. در نهایت از این روش برای حل یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای استفاده شده است که نتایج عددی آن جواب‌های بهینه را نشان می‌دهند.

مراجع

1. R.E. Bellman and S.E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1962.
2. B. Farhadinia, *Pontryagin's minimum principle for fuzzy optimal control problems*, Iranian journal of fuzzy system, 11 (2014), 27–43.
3. B. Farhadinia, *Necessary optimality conditions for fuzzy variational problems*, Information Science, 181 (2011), 1348–1357.
4. L. Stefanini and B. Bede, *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71(3-4) (2009), 1311–1328.
5. L. Stefanini, *A generalization of Hukuhara difference and division for interval-valued arithmetic*, fuzzy sets systems, 161 (2010), 1564–1584.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

ارائه یک روش بدون شبکه جهت بررسی عددی مدل انتشار همرفتی با مشتقات کسری زمانی توزیع شده دو بعدی

سید محمود ضابط‌زاده[۱] *

[۱]دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده. در این تحقیق یک تحلیل عددی برای بررسی مدل انتشار همرفتی با مشتقات کسری زمانی از مرتبه توزیعی دوبعدی ارائه خواهد شد. در ابتدا با استفاده از روش انتگرال گیری گاوس لژاندر، انتگرال بر حسب مرتبه مشتق‌گیری کسری موجود در معادله تقریب زده شده و یک معادله انتشار با مشتقات کسری چند گانه زمانی به‌دست می‌آید. سپس بدون گسسته سازی زمانی و با استفاده از روش بدون شبکه کانسای سراسری (زمانی- مکانی) جواب‌های عددی معادله در نقاط میدانی سه بعدی به یکباره به‌دست می‌آید. برای تقریب مشتقات کسری کاپوتوی موجود در معادله از روش تقریبی انتگرال گیری گاوس ژاکوبی استفاده می‌شود. نهایتا روش پیشنهادی توسط مثال عددی آزموده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله انتشار همرفتی با مشتقات کسری زمانی از مرتبه توزیعی، مشتق کسری کاپوتو، روش بدون شبکه کانسای سراسری، توابع پایه‌ای شعاعی، روش انتگرال گیری گاوس ژاکوبی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A08, 33F05.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر فرمول‌بندی بسیاری از فرآیندهای طبیعی غیرعادی و نامتعارف توسط حسابان کسری بسیار دقیق‌تر انجام پذیرفته و این امر باعث علاقه‌مندی روز افزون محققان به بررسی و گسترش مدل‌های با مشتقات کسری شده است. یک رده از این مدل‌ها که به تازگی بسیار مورد توجه قرار گرفته، مدل‌های با مشتقات کسری از مرتبه توزیعی می‌باشد. در این مقاله معادله انتشار همرفتی با مشتقات کسری زمانی از مرتبه توزیعی[۱] دوبعدی زیر [۱]:

$$\int_{0}^{1} \omega(\alpha)\, {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} v(x,y,t)\, d\alpha = \Delta v(x,y,t) - \mathbf{v}\,.\,\nabla v(x,y,t) + F(x,y,t)\,,\ (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^{2}\,,\ t\in(0,T], \tag{۱}$$

همراه با شرایط اولیه و مرزی دیریکله به‌صورت زیر:

$$\begin{aligned} v(x,y,0) &= \psi(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \\ v(x,y,t) &= g(x,y,t), \quad (x,y)\in\partial\Omega\,, \quad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{۲}$$

مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت. در این مدل ${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} v$ به مشتق کسری کاپوتو[۲] اشاره دارد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} v(x,y,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{\partial v(x,y,\tau)}{\partial\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1.$$

*سخنران. آدرس ایمیل: zabetzadeh@yahoo.com

[1] The distributed order time fractional advection–diffusion equation

[2] Caputo fractional derivative

از سوی دیگر داریم:

$$\forall \quad ۰ < \alpha < ۱, \quad \omega(\alpha) > ۰, \int_{۰}^{۱} \omega(\alpha)\, d\alpha > ۰.$$

از آنجایی که یافتن جواب تحلیلی برای مسئله بالا اغلب دشوار و یا غیرممکن است؛ به‌دست آوردن جواب عددی برای آن ضروری به نظر می‌رسد.
می‌دانیم که طبق روش انتگرال گیری عددی m نقطه‌ای گاوس لژاندر[۳]، می‌توان نوشت:

$$\int_{a}^{b} f(z)\, dz = \int_{-۱}^{۱} \psi(u)\, du \approx \sum_{k=۱}^{m} w_k \psi(u_k), \tag{۳}$$

که در آن، $z = \frac{۱}{۲}[(b-a)u + (b+a)]$، $\psi(u) = \frac{b-a}{۲} f(\frac{(b-a)u}{۲} + \frac{b+a}{۲})$ و همچنین u_k و w_k نقاط و ضرائب انتگرال گیری عددی می‌باشند. با استفاده از این تقریب برای انتگرال موجود در طرف راست (۱)،این معادله به‌صورت تقریبی به معادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{۱}{۲} \sum_{k=۱}^{m} w_k \mathbb{F}_k(x,y,t) = \Delta v(x,y,t) - \mathbf{v} \,.\, \bigtriangledown v(x,y,t) + F(x,y,t) \quad , (x,y) \in \Omega, t \in (۰, T], \tag{۴}$$

که در آن، $\mathbb{F}_k(x,y,t) = \omega(\frac{u_k+۱}{۲})\, {}_{۰}^{C}D_{t}^{\frac{u_k+۱}{۲}} v(x,y,t)$ می‌باشد.

۲. روش بدون شبکه کانسای زمانی - مکانی سراسری

روش‌کانسا[۴] یکی از معروفترین روش‌های بدون‌شبکه[۵] می‌باشد. دراین روش از توابع پایه‌ای شعاعی [۶]برای تقریب جواب استفاده می‌شود، لذا در اغلب موارد، این روش را روش‌هم‌محلی[۷] مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی نیز می‌نامند. این روش‌مبتنی بر فرم قوی معادلات حاکم بر مسئله و برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانسا ارائه شد و برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی مورد استفاده قرار گرفت [۲]. مزیت اصلی روش کانسا در دقت بالا و انعطاف پذیری آن در مواجهه با مسائل با دامنه‌های هندسی نامنظم می‌باشد. باید متذکر شد که تنها اطلاعات هندسی مورد نیاز در روش‌کانسا فاصله بین نقاط میدانی[۸] انتخاب شده در دامنه می‌باشد و لذا به راحتی می‌توان آن‌را برای مسائل با ابعاد بالا تعمیم داد. از سوی دیگر میرز و همکارانش در ۲۰۰۲ ایده نقاط زمانی - مکانی نامتقارن را برای روش کانسا پیشنهاد دادند [۴]. آن‌ها تابع درونیاب را روی دامنه تعمیم‌یافته $\Omega \times [۰, T]$ تعریف کردند. در اینجا این فرآیند را برای حل معادله (۴) (بدون گسسته سازی زمانی) به‌کار خواهیم گرفت. لذا، دامنه سه‌بعدی $\Omega_{new} = \Omega \times [۰, T]$ به‌عنوان دامنه جدید زمانی - مکانی در نظر گرفته می‌شود. اکنون یک مجموعه از نقاط پراکنده زمانی - مکانی $\{\mathbf{x}_i\}_{i=۱}^{N} = \{(x_i, y_i, t_i)\}_{i=۱}^{N} \in \overline{\Omega_{new}}$ را به‌عنوان دامنه گسسته شده مسئله یا مجموعه نقاط میدانی انتخاب می‌کنیم. همچنین فرض می‌شود مجموعه نقاط میدانی $\{\mathbf{x}_i\}_{i=۱}^{N}$ قابل تفکیک به سه مجموعه مجزا باشد، یکی $\chi_{t_۰} = \{(x_i, y_i, ۰) | (x_i, y_i) \in \Omega\}_{i=۰}^{N_{t_۰}}$ مجموعه نقاط اولیه، $\chi_I = \{\mathbf{x}_i\}_{i=۱}^{N_I}$ مجموعه نقاط درونی؛ به‌طوری‌که $N_I + N_B + N_{t_۰} = N$. اکنون تابع مجهول $v \in \Omega_{new}$ را به‌صورت ترکیب خطی از توابع $\chi_B = \{(x_i, y_i, t_i) | (x_i, y_i) \in \partial\Omega, ۰ < t_i \leq T\}_{i=۱}^{N_B}$ مجموعه نقاط مرزی و بقیه نقاط پایه‌ای شعاعی به‌مرکز نقاط میدانی می‌نویسیم:

$$v(\mathbf{x}) \approx \widehat{v}(\mathbf{x}) = \sum_{j=۱}^{N} c_j \varphi_j(\mathbf{x}), \tag{۵}$$

[3] Gauss Legendre quadrature
[4] Kansa's method
[5] Meshless methods
[6] Radial basis functions(RBFs)
[7] Callocation method
[8] Field points

که در آن، $c_j,\ j = ۱, ..., N$ ضرائب مجهول بوده و باید محاسبه شود و $\varphi_j(r)$ توابع پایه‌ای شعاعی سه‌بعدی بوده که در آن تنها متغیر آن r به‌صورت $r = \sqrt{(x-x_j)^۲ + (y-y_j)^۲ + \epsilon^۲(t-t_j)^۲}$ تعریف می‌شود. با قرار دادن ترکیب خطی (۵) در معادله (۴) و به ازای نقاط درونی $\mathbf{x}_i \in \chi_I,\ i = ۱, ..., N_I$ به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=۱}^{N}[\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{m} w_k \mathbb{G}_{k_j}(\mathbf{x}_i) - \Delta\varphi_j(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}\ .\ \bigtriangledown\varphi_j(\mathbf{x}_i)]c_j = F(\mathbf{x}_i) \quad , i = ۱, ..., N_I, \tag{۶}$$

که در آن، $\mathbb{G}_{k_j}(\mathbf{x}_i) = \omega(\frac{u_k+۱}{۲})\ {}_{\circ}^{C}D_t^{\frac{u_k+۱}{۲}}\varphi_j(\mathbf{x}_i)$ می‌باشد. لازم به‌ذکر است که برای به‌دست آوردن مشتق کسری کاپوتوی توابع پایه‌ای شعاعی (${}_{\circ}^{C}D_t^{\frac{u_k+۱}{۲}}\varphi_j(\mathbf{x}_i)$) می‌توانیم از تقریب انتگرال‌گیری گاوس ژاکوبی به‌صورت زیر استفاده کنیم:

تعریف ۱.۲. انتگرال گیری گاوس ژاکوبی[9]: برای محاسبه انتگرال $\int_{-۱}^{۱}(۱-z)^\alpha(۱+z)^\beta f(z)dz$ که در آن، تابع f به‌اندازه کافی هموار و نامنفرد بر $[-۱, ۱]$ می‌باشد، فرمول انتگرال‌گیری عددی گاوس ژاکوبی به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\int_{-۱}^{۱} w(z)f(z)dz \approx \sum_{k=۱}^{n} w_k.f(z_k), \tag{۷}$$

که در آن، z_kها ریشه‌های ساده چند جمله‌ای ژاکوبی $P_n^{(\alpha,\beta)}$ بوده و نیز:

$$w_k = ۲^{\alpha+\beta+۱}\frac{\Gamma(\alpha+n+۱)\Gamma(\beta+n+۱)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+۱)(۱-z_k^۲)[P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(z_k)]^۲}.$$

به‌علاوه، این روش انتگرال‌گیری برای چندجمله‌ای‌های تا درجه $۲n-۱$ دقیق است.

اکنون با توجه به تعریف مشتق کسری کاپوتوی مرتبه $۰ < \gamma < ۱$ ، برای تابع پایه‌ای شعاعی φ در فضای $\mathbb{R}^۳$ داریم:

$$\begin{aligned}({}_{\circ}^{C}D_t^\gamma\varphi)(x,y,t) &= \frac{۱}{\Gamma(۱-\gamma)}\int_{\circ}^{t}\frac{\varphi'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma}d\tau \\ &= \frac{۱}{\Gamma(۱-\gamma)}\int_{\circ}^{t}\eta^{-\gamma}\frac{\partial\varphi(\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲+\epsilon^۲(\tau-t_j)^۲})}{\partial\tau}]_{\tau=t-\eta}\,d\eta,\end{aligned}$$

که در آن $\eta = t-\tau$. حال با استفاده از تغییر متغیر $\eta = \frac{t}{۲}(۱+\xi)$ به‌دست می‌آوریم:

$$({}_{\circ}^{C}D_t^\gamma\varphi)(x,y,t) = \frac{(\frac{t}{۲})^{۱-\gamma}}{\Gamma(۱-\gamma)}\int_{-۱}^{۱}(۱+\xi)^{-\gamma}\frac{\partial\varphi(\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲+\epsilon^۲(\tau-t_j)^۲})}{\partial\tau}]_{\tau=t-\frac{t}{۲}(۱+\xi)}\,d\xi,$$

که انتگرال حاصل $\int_{-۱}^{۱}(۱+\xi)^{-\gamma}f(\xi)d\xi$) دارای ساختار انتگرال‌گیری گاوس ژاکوبی به‌ازای $\alpha = ۰$ و $\beta = -\gamma$ می‌باشد و به کمک تقریب انتگرال گاوس ژاکوبی قابل محاسبه است. یعنی داریم:

$$({}_{\circ}^{C}D_t^\gamma\varphi)(x,y,t) \approx \frac{(\frac{t}{۲})^{۱-\gamma}}{\Gamma(۱-\gamma)}\sum_{k=۱}^{n} w_k f(x,y,\xi_k), \tag{۸}$$

با توجه به این‌که:

$$f(x,y,\xi) = \frac{\partial\varphi(\sqrt{(x-x_j)^۲+(y-y_j)^۲+\epsilon^۲(\tau-t_j)^۲})}{\partial\tau}]_{\tau=t-\frac{t}{۲}(۱+\xi)}.$$

[9] **Gauss jacobi quadrature**

از سوی دیگر، برای اعمال شرایط اولیه و مرزی دیریکله مسئله، ترکیب خطی (۵) را نیز به‌ازای نقاط اولیه و مرزی در شرایط (۲) جایگزین می‌کنیم. بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(x_i, y_i, 0) = \psi(x_i, y_i), \quad i = 1, ..., N_{t_0},$$
$$\sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(x_i, y_i, t_i) = g(x_i, y_i, t_i), \quad i = 1, ..., N_B. \tag{۹}$$

با الحاق معادلات (۶) و (۹) یک دستگاه خطی مربعی $N \times N$ به‌دست می‌آید. کلیه جواب‌های تقریبی معادله با حل یک دستگاه خطی نتیجه خواهد شد.

۳. نتایج عددی

در این بخش با ارائه یک مثال، فرآیند پیشنهادی در بخش‌های قبل را می‌آزماییم. در اینجا از سه نوع تابع پایه‌ای شعاعی زیر استفاده می‌کنیم:

$$R_1(r) = (r^2 + c^2)^{2.5} \quad , \quad R_2(r) = e^{-c^2 r^2} \quad , \quad R_3(r) = r^4 \ln r$$

که توابع R_1، R_2 و R_3 به ترتیب، توابع چندربعی تعمیم یافته[10]، گاوسی[11] و اسپلاین صفحه نازک[12] نامیده می‌شوند. پارامتر c موجود در توابع R_1 و R_2 را پارامتر شکل[13] می‌نامند. این عدد حقیقی تأثیر به سزایی در دقت جواب‌های عددی به دست آمده داشته و انتخاب بهینه آن اهمیت زیادی دارد. در این تحقیق از روش آزمون و خطا[14] برای تعیین بهترین پارامتر شکل استفاده می‌کنیم. همچنین در محاسبه انتگرال‌های عددی به روش‌های گاوس لژاندر و گاوس ژاکوبی از $m = n = 7$ استفاده می‌شود. خطای جواب‌های عددی به‌دست آمده نیز توسط دو معیار خطای زیر سنجیده می‌شود:

$$\varepsilon_\infty = \|v(\mathbf{x}) - \widehat{v}(\mathbf{x})\|_\infty \quad , \quad RMSE = \frac{1}{\sqrt{N}} \|v(\mathbf{x}) - \widehat{v}(\mathbf{x})\|_2,$$

که در آن، $v(\mathbf{x})$ و $\widehat{v}(\mathbf{x})$ به‌ترتیب نشان‌دهنده جواب واقعی و جواب محاسباتی می‌باشند.

مثال ۱.۳. مسئله زیر را در نظر می‌گیریم [۳]:

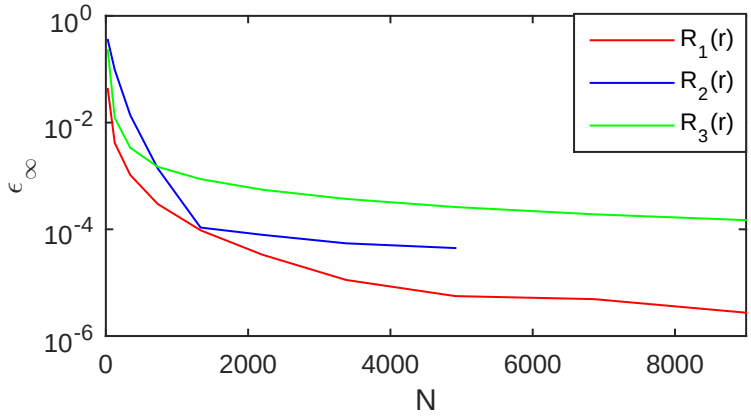
$$\int_0^1 \Gamma(3-\alpha)\, {}_0^C D_t^\alpha v(x,y,t)\, d\alpha = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + F(x,y,t), \ (x,y) \in [0,1]^2, \ 0 < t \le 1,$$

که در آن $F(x,y,t) = \frac{2(t^2 - t)}{\ln t} e^{x+y}$ بوده و جواب واقعی مسئله $v(x,y,t) = t^2 e^{x+y}$ می‌باشد. شرایط مرزی و اولیه نیز از جواب واقعی مسئله استخراج می‌شود. با اجرای فرآیند پیشنهادی در بخش‌های قبل، خطاهای محاسباتی و پایداری جواب‌های عددی در جدول و شکل زیر آورده شده است.

جدول ۱. خطاهای مطلق و نسبی جواب‌های محاسبه شده به‌ازای $N = 17^3$ و توابع مختلف RBFs .

$RMSE$	ε_∞	$RBFs$
1.1738×10^{-6}	5.6003×10^{-6}	$R_1(r)$
9.0875×10^{-6}	9.6400×10^{-5}	$R_2(r)$
6.9229×10^{-5}	2.6125×10^{-4}	$R_3(r)$

[10] Generalized MultiQuadrics(GMQ)
[11] Gaussian(G)
[12] Thin Plate Splines (TPS)
[13] Shape parameter
[14] Trial and Error



شکل ۱. تغییرات خطای مطلق محاسب با افزایش تعداد نقاط میدانی.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی عددی مدل انتشار همرفتی با مشتقات کسری زمانی از مرتبه توزیعی دوبعدی پرداخته شد. در ابتدا انتگرال موجود در طرف چپ معادله توسط تقریب انتگرال گاوس لژاندر جایگزین گردید. سپس بدون گسسته سازی زمانی و توسط روش بدون شبکه کانسای سراسری، متغیرهای زمانی و مکانی به یکباره گسسته سازی شد. به منظور محاسبه مشتق کسری کاپوتوی توابع پایه‌ای شعاعی نیز از روش انتگرال گیری عددی گاوس ژاکوبی استفاده شد. با ارائه یک مثال و انتخاب چند تابع پایه‌ای شعاعی، موفقیت آمیز بودن این طرح در مواجهه با مدل مورد نظر تأیید شد.

مراجع

1. Abbaszadeh, Mostafa, and Mehdi Dehghan. ”Meshless upwind local radial basis function-finite difference technique to simulate the time-fractional distributed-order advection–diffusion equation.” Engineering with computers (2019): 1-17.
2. Kansa. E.J. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics - I, Comput. Math. Applic., 19(8/9)(1990) 127–145.
3. Liu, Quanzhen, et al. ”An RBF based meshless method for the distributed order time fractional advection–diffusion equation.” Engineering Analysis with Boundary Elements 96 (2018): 55-63.
4. Myers .B. E , D. De. Iaca, D. Posa, L. De. Cesare, Space-Time Radial Basis functions, Computers and Mathematics with Applications 43, (2002), 539-549.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

سیستم های خطی متناوب همراه با ترایاها و وجود دورستگی روی کلاس های هموکلینیک

حمید غریب[۱]*

[۱]بخش ریاضی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا تعریف اولیه از سیستم های دینامیکی و تعاریف مرتبط و خواص آن را مطرح می کنیم و در ادامه سیستم های خطی را بیان کرده و همچنین در مورد رابطه بین کلاس های هموکلینیک با یک سیستم خطی تناوبی همراه با ترایا ها، بحث می کنیم و وجود تجزیه تسلطی یا اختلال روی کلاس های هموکلینیک را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: تجزیه تسلطی، کلاس های هموکلینیک، دیفیومورفیسم.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 37C29, 37D20, 37D30.

۱. مقدمه

سیستم های غیربدیهی همیشه می توانند در مفهوم هذلولوی به یک تعداد متناهی از مجموعه های ترایای جدا از هم، که هر کدام از آنها شامل یک زیر مجموعه چگال از نقاط متناوب هستند، تجزیه شوند (تجزیه طیفی) که به چنین مجموعه هایی، مجموعه های پایه می گویند. دینامیکاران جدید علاقه زیادی به پیدا کردن و خواندن مجموعه های غیر هذلولوی، برای جانشینی مفهومی از مجموعه های پایه هذلولوی دارند، که کلاس های هموکلینیک کاندیدای مناسبی برای جانشینی مجموعه های پایه هستند و این مجموعه ها همیشه پایدار هستند. همچنین سیستم های خطی خاصی را مطرح می کنیم که دارای بعضی از ساختارهای اضافی می باشند که مهمترین ساختار های اضافی که ما بیان خواهیم کرد مفهوم ترایا ها می باشد. این سیستم ها در موارد معینی پیوسته و در اغلب موارد تناوبی می باشند.

یکی از اتفاقات جالبی که روی کلاس های هموکلینیک رخ می دهد می توان به وجود دورستگی اشاره کرد و ما بحث بسیار غنی C^1-دورستگی را که منیه [۱] روی یک سیستم قائل است را بیان می کنیم. شاکله مطالب پایه ای مبحث C^1-دورستگی را مقاله ای از بوناتی [۲]، دیاز [۳] و پوژالس [۴] [۱] تشکیل می دهند. اما برای بیان این مباحث یک سری مقدمات لازم است که این مقدمات شامل تعاریف پایه ای توپولوژیک می باشد، که قبل از بیان گزاره اصلی این تعاریف مطرح خواهد شد. این مطالب برآمده از کتابی از برین [۵] و استاک [۶] [۲] و کتابی از پشین [۷] و بریرا [۸] می باشد.

*سخنران. آدرس ایمیل: hamidgharib.g@gmail.com

[۱] $Mane$
[۲] $Bonatti$
[۳] $Diaz$
[۴] $Pujals$
[۵] $Brin$
[۶] $Stuck$
[۷] $pesin$
[۸] $Barrira$

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید M و N دو منیفلد باشند، در این صورت نگاشت مشتق پذیر $f : M \to N$ را **دیفیومورفیسم** نامند هرگاه f یک تابع دوسویی و همچنین معکوس آن نیز مشتق پذیر باشد.

تعریف ۲.۲. فرض می‌کنیم Λ یک مجموعه بسته و f- پایا باشد، در این صورت تجزیه

$$T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_k$$

یک **تجزیه تسلطی** روی Λ نامیده می‌شود، هرگاه Df- پایا بوده و $l \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i < j$ و $x \in \Lambda$ داشته باشیم

$$\frac{\|Df^l(x)u\|}{\|Df^l(x)v\|} < \frac{1}{2}$$

هنگامی که $u \in E_i(x)$ و $v \in E_j(x)$ یکه باشند. در این صورت $E_i \prec_l E_j$ و می‌گوییم این تجزیه، l - تسلطی است. یا به طور معادل ثابت های $C > 0$ و $0 < \lambda < 1$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم

$$\frac{\|Df^n(x)u\|}{\|Df^n(x)v\|} < C\lambda^n.$$

تعریف ۳.۲. هر نقطه x متعلق به $W^s(p) \cap W^u(p)$ یک نقطه **هموکلینیک** نامیده می‌شود. چنانچه اشتراک فوق قاطع باشد، x را یک نقطه **هموکلینیک قاطع** و اگر اشتراک مماسی باشد، x را یک **مماس هموکلینیک** می‌گوییم.

تعریف ۴.۲. فرض می‌کنیم p یک نقطه متناوب هذلولوی برای f با دوره تناوب k باشد، در این صورت بستار نقاط هموکلینیک، **کلاس هموکلینیک** وابسته به p تعریف می‌شود، به عبارتی

$$H(p, f) = \overline{W^s(p) \cap W^u(p)}.$$

در حالت خاص هرگاه اشتراک فوق قاطع باشد، این کلاس را با $H_T(p, f)$ نمایش داده و آن را **کلاس هموکلینیک قاطع** وابسته به p می‌نامیم، به عبارتی

$$H_T(p, f) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}.$$

فرض کنید f یک دیفیومورفیسم و $\mathrm{d}f$ مشتق f باشد. بنا بر لم فرانک که در ادامه آن را بیان خواهیم کرد، برای هر اختلال A از مشتق $\mathrm{d}f$ در امتداد مدار های تعداد متناهی نقطه تناوبی، یک تناظر با دیفیومورفیسم g در C^1 - نزدیکی f وجود دارد، به طوری که در امتداد این مدار ها $\mathrm{d}g = A$. این لم به ما اجازه می دهد که اختلال هایی از مشتق $\mathrm{d}f$ را مطرح کنیم. به این ترتیب به یک مشتق مناسب در امتداد مدار های متناوب می رسیم.

قضیه ۵.۲. (لم فرانک[9])
فرض کنید E یک مجموعه متناهی و B یک ϵ- اختلال از $\mathrm{d}f$ در امتداد E باشد. در این صورت یک دیفیومورفیسم g در C^1- نزدیکی f وجود دارد به طوری که در خارج از یک همسایگی کوچک دلخواه از E بر f منطبق می باشد و در E نیز با f برابر است، همچنین $\mathrm{d}g$ در E بر B منطبق است.

لم ۶.۲. فرض کنید P یک نقطه زینی از اندیس k باشد. مشتق $\mathrm{d}f$ یک سیستم خطی تناوبی پیوسته را همراه با ترایا ها روی مجموعه Σ از نقاط زینی در $H(p, f)$ از اندیس k و به طور هموکلینیک در رابطه با P را نتیجه می دهد.

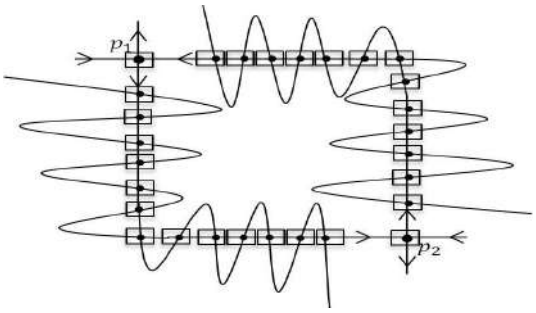
اثبات. فرض کنید $\epsilon > 0$ ثابت و $x_1, ..., x_n \in \Sigma$ یک خانواده متناهی باشد. زمانی که x_i ها به طور هموکلینیک با P در رابطه اند، یک زیرمجموعه هذلولوی ترایای فشرده K از $H(P, f)$ شامل همه x_i ها وجود دارد. بنابراین این مجموعه K به کمک افراز مارکوف با استفاده از مستطیل های به اندازه کافی کوچک پوشیده می شود. اکنون ما می توانیم برای $x \in K$، سیستم های متعامد یکه از مختص ها را در T_xM انتخاب کنیم، به طوری که هرگاه نقاط در مستطیل های یکسان قرار داشته باشند، پایه های متعامد یکه به طور پیوسته به x وابسته اند.

[9] ***Frank***

فرض کنید که (K, f, A) سیستمی از ماتریس ها باشد که با تعریف شدن روی K و نوشتن $\mathrm{d}f$ در این سیستم از مختص ها حاصل می شود. اکنون با استفاده از پیوستگی $\mathrm{d}f$ و در صورت لزوم با کمک تقسیم به جزء کردن مستطیل های افراز مارکوف، ما می توانیم فرض کنیم که برای هر x و y در مستطیل مشابه

$$\| A(x) - A(y) \| < \epsilon \quad , \quad \| A^{-1}(x) - A^{-1}(y) \| < \epsilon.$$

در واقع افراز مارکوف برای مجموعه های هذلولوی مانند نگاشت انتقال برای نعل اسب اسمیل [10] عمل می کند.
حال با در نظر گرفتن مشتق $\mathrm{d}f$ در امتداد هر مدار در K که از مستطیل شامل x_i به مستطیل شامل x_j می رود، ترایا ها از x_i به x_j به دست می آید (شکل ۱). □



شکل ۱. استفاده از مستطیل های افراز مارکوف برای دو نقطه هموکلینیک

لم ۷.۲. فرض کنید $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A)$ یک سیستم خطی متناوب همراه با ترایا ها باشد. $\epsilon > \epsilon_0 > 0$ را ثابت بگیرید و فرض کنید که یک ϵ_0- اختلال $\tilde{A}$ و $x \in \Sigma$ وجود دارد به طوری که $M_{\tilde{A}}(x)$ یک توسیع، (یعنی قدر مطلق همه مقادیر ویژه آن بزرگتر از یک باشند) یا یک انقباض (یعنی قدر مطلق همه مقادیر ویژه آن کوچکتر از یک باشند) باشد. آنگاه یک زیرمجموعه f- پایای چگال $\tilde{\Sigma}$ از Σ و یک ϵ- اختلال $\hat{A}$ از A وجود دارد به طوری که برای هر $y \in \tilde{\Sigma}$ نگاشت خطی $M_{\hat{A}}(x)$ یک توسیع، یا یک انقباض است.

اثبات. فرض کنید $\epsilon_1 = \epsilon - \epsilon_0$ و z نقطه ای در Σ باشد. چون سیستم روی Σ ترایا دارد پس بنا به تعریف، به ازای هر ϵ یک ϵ- ترایا وجود دارد. دو ϵ_1- ترایا

$$T_{x,z} \text{ (از } z \text{ به } x \text{)} \quad \text{و} \quad T_{z,x} \text{ (از } x \text{ به } z \text{)}$$

را در نظر می گیریم. در واقع در تعریف ϵ- ترایا ها ما کلمه $[W(\iota, a)]$ را با دو ϵ- ترایا، به صورت

$$T_{z,x} \circ [M_A(x)]^{\alpha_1} \circ T_{x,z} \circ [M_A(z)]^{\alpha_2}$$

در نظر می گیریم.
بنابرقسمت الف شرط یک تعریف ϵ- ترایا ها، برای یک ثابت $\delta > 0$، یک $n(z, \delta)$ موجود است به طوری که برای هر $n > 0$، $y_n \in \Sigma$ با $d(y_n, z) < \delta$ و یک ϵ_1- تغییر A' از A در امتداد مدار y_n وجود دارد به طوری که

$$M_{A'}(y_n) = T_{z,x} \circ [M_A(x)]^n \circ T_{x,z} \circ [M(z)]^{n(z,\delta)}.$$

حال $\tilde{M}_n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\tilde{M}_n = T_{z,x} \circ [M_{A'}(x)]^n \circ T_{x,z} \circ [M(z)]^{n(z,\delta)}.$$

چون $M_{A'}(x)$ یک توسیع یا یک انقباض است، ما می توانیم n را آنقدر بزرگ اختیار کنیم به طوری که $\tilde{M}_n$ یک توسیع یا یک انقباض مطابق با $M_{A'}(x)$ باشد. بنابراین $M_{A'}(x)$ نزدیک به $\tilde{M}_n$ است و با یک ϵ_1 اختلال $\hat{A}$ از A' درامتداد

[10] Smale

مدار y_n، تساوی $M_{\hat{A}}(x) = \hat{M}_n$ را داریم.
چون ما به پیوستگی $\hat{A}$ نیازی نداریم، می توانیم نقاط مفروض از این مدار را یک زیرمجموعه چگال از مدار اولیه در نظر بگیریم. بنابراین به پایان برهان می رسیم. □

گزاره ۸.۲. برای هر $K > 0$، $N > 0$ و $\epsilon > 0$، یک $l > 0$ وجود دارد به طوری که هر سیستم خطی متناوب پیوسته N- بعدی $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A)$ بوسیله K کراندار می گردد ($\| A \| < K$) که دارای ترایا هایی است و در یکی از دو مورد زیر صدق می کند

۱. A یک تجزیه l- تسلطی می پذیرد.
۲. یک ϵ- اختلال $\tilde{A}$ از A و یک نقطه $x \in \Sigma$ وجود دارند به طوری که $M_{\tilde{A}}(x)$ متجانس است.

برهان این گزاره که در [۳] آمده است، ابتدا نشان داد که اگر (Σ, f, F, A) یک سیستم خطی با ترایا ها باشد به طوری که هیچ زیر سیستم چگال از آن یک تجزیه l- تسلطی را نپذیرد، آنگاه ما می توانیم به کمک یک اختلال از A مقادیر ویژه مختلط به دست آوریم. در بخش دوم نشان داد که اگر به اندازه کافی مقادیر ویژه مختلط بدست آوریم، آنگاه می توانیم با یک اختلال در سیستم به یک سیستم متجانس برسیم.

گزاره ۹.۲. برای هر $K > 0$، $N > 0$ و $\epsilon > 0$، یک $l(\epsilon, K, N) \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر دیفیومورفیسم f تعریف شده روی یک منیفلد ریمانی N- بعدی M، که مشتق های $\mathrm{d}f$ و $\mathrm{d}f^{-1}$ هر دو با K کراندارند و هر نقطه زینی P از f با یک کلاس هموکلینیک غیر بدیهی $H(p, f)$، در یکی از دو حالت زیر صدق می کند

۱. کلاس هموکلینیک $H(p, f)$ یک تجزیه $l(\epsilon, K, N)$- تسلطی را می پذیرد،
۲. برای هر همسایگی U از $H(p, f)$ و $K \in \mathbb{N}$، یک g C^1 $-\epsilon$- نزدیک به f وجود دارد به طوری که k تا جاذب یا دافع تناوبی دارد که مدار های آنها در U مشمول است.

اثبات. دیفیومورفیسم f را طوری در نظر می گیریم که $\| \mathrm{d} \|$ و $\| \mathrm{d}^{-1} \|$ توسط K کراندار باشند و یک نقطه زینی متناوب P از f با یک کلاس هموکلینیک غیر بدیهی مفروض باشد. فرض کنید $\Sigma = H(p, f)$ ، $\mathcal{E} = TM|_\Sigma$ و $A = (f_*)|_\Sigma$.
در این صورت $(\Sigma, f, \mathcal{E}, A)$ یک سیستم خطی پیوسته است. مجموعه تمام نقاط زینی که به طور هموکلینیک با P در رابطه اند را با $\Sigma' \subset \Sigma$ نشان می دهیم (به ویژه نقاطی که تناوب مشابه با P دارند).
ملاحظه می کنید که Σ' یک زیرمجموعه چگال f- پایا از Σ است. بعلاوه، بنا بر لم ۶.۲، زیر سیستم القا شده توسط A روی Σ' ترایا ها را می پذیرد.
اگر A یک تجزیه l- تسلطی روی Σ' داشته باشد، آنگاه (بنا خاصیت توسیع روی بستار برای تجزیه تسلطی) آن تجزیه می تواند به یک تجزیه l - تسلطی روی Σ گسترش پیدا کند.
اکنون $l > 0$ ثابت در گزاره ۸.۲ و مطابق با K، $N = \dim(M)$ و $\epsilon/2$ را در نظر بگیرید. اگر A روی Σ' یک تجزیه l - تسلطی نداشته باشد، آنگاه با توجه به گزاره ۸.۲، یک $\epsilon/2$ - اختلال $\tilde{A}$ از A و یک نقطه $x \in \Sigma$ وجود دارند به طوری که $M_{\tilde{A}}(x)$ یک متجانس است.
ما فرض می کنیم که این تجانس (با یک اختلال کوچک دلخواه) یک توسیع، یا یک انقباض باشد. به دلخواه فرض می کنیم که یک توسیع باشد، چون سیستم ترایا ها را می پذیرد، بنا بر لم ۷.۲، یک زیرمجموعه چگال از Σ' از نقاط y وجود دارد که روی مدارشان ϵ- تغییر های $\hat{A}$ را می پذیرند به طوری که نگاشت خطی $M_{\hat{A}}(x)$ یک توسیع می باشد. حال ما می توانیم تعداد نقاط y را به دلخواه زیاد (اما متناهی) انتخاب کنیم و مجموعه این مدار های متناوب را با E نشان می دهیم.
اکنون با استفاده از لم فرانک، برهان گزاره کامل می شود. □

۳. نتیجه‌گیری

همانطور که در طبیعت وجود یک اختلال کوچک باعث پدیدار شدن نظریه آشوب می شود در سیستم های متناوب نیز وجود اختلال ها باعث ایجاد اتفاقات جالب و دورستگی می شوند. در اکثر اوقات اختلال ها زمانی رخ می دهند یا می توانیم ایجاد کنیم که فضای پایدار و ناپایدار با هم اشتراک مماسی داشته باشند.

مراجع

1. Bonatti, C., Diaz, J. and Pujals, E. (2003).“A C^1 - generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources.” *Annals of Mathematics.*, vol. 158, pp. 355-418.
2. Brin, M. Stuck, G. (2002). *Introduction to dynamical systems.* New York: Combridge University Press.
3. Bonatti, C., Diaz, J. and Viana, M. (2005). *Dynamics beyond uniform hyperbolicity.* Berlin: Speringer-Verlag.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

ابرعملگر کوانتومی دیراک روی ابرکره‌ی q-تغییر شکل یافته‌ی فازی

محمد محمودی[۱,*] ، مهدی لطفی زاده[۲]
[۱,۲]گروه فیزیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده. با استفاده از تعاریف ابرکره ی q-تغییر شکل یافته ی فازی و به کمک ابرجبر گینسپارگ-ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی، ابرعملگرهای دیراک و کایرالیتی q-تغییر شکل یافته ی فازی روی ابرکره ی $S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ معرفی خواهد شد. در آنجا نشان داده شده است که در حالت حدی، یک حد صحیح جابجایی زمانی که پارامتر ناجابجایی l به سمت بی نهایت و q به سمت یک میل کند، وجود دارد.

واژه های کلیدی: ابرکره ی q-تغییر شکل یافته ی فازی، ابرجبر گینسپارگ-ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی، ابرعملگرهای دیراک و کایرالیتی q-تغییر شکل یافته
طبقه بندی موضوعی:

۱. مقدمه

عملگرهای دیراک و کایرالیتی، دو عملگر خود الحاقی بسیار مهمی در رهیافت کن - لات[۱] برای هندسه ناجابجایی هستند. یک طیف سه تایی یکدار $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ شامل یک $*$ - جبر یکدار مختلط $\mathcal{A}$ ، $*$ - نمایش باوفا توسط عملگرهای کران دار روی یک فضای هیلبرت جداپذیر $\mathcal{H}$ و یک عملگر خودالحاق $D:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ (عملگر دیراک) با ویژگی های زیر است [۱]:

- حلال $\lambda\notin\mathbb{R},(D-\lambda)^{-1}$ ، عملگری فشرده روی $\mathcal{H}$ است.
- $\forall a\in\mathcal{A}$ ، جابجاگر $[D,\pi(a)]$ عملگری کران دار روی $\mathcal{H}$ است.

طیف سه گانه ی $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ زوج نامیده می شود اگر یک $\mathbb{Z}_۲$- مدرج شده ای از $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد؛ یعنی یک عملگری $\gamma:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ با چنین ویژگی هایی که: $\gamma=\gamma^*$ و $\gamma^۲=۱$ به طوری که: $\gamma D+D\gamma=۰$ و $\forall a\in\mathcal{A},\gamma a=a\gamma$؛ در غیراین صورت به این طیف سه گانه فرد گفته می شود. برای منیفلدهای با بعد فرد، عملگرهای کایرالیتی وجود ندارد و در این حالت عملگر دیراک فقط با ساختارهای دیفرانسیلی توصیف می شود. سه نوع از عملگرهای دیراک و کایرالیتی $S^۲$ فازی وجود دارد که عبارتند از: عملگر دیراک گینسپارگ - ویلسون D_{GW} [۲]، عملگر دیراک واتامورا- واتامورا[۲] D_{WW} [۶] و عملگر دیراک گروسه- کلمیک - پرس ناجر[۳] D_{GKP}[۴]. ابر کره فازی $S^{(۲|۲)}_F$ توسط نمایش های کاهش ناپذیر ابرجبرلی $uosp(۲|۱)$ توصیف شدنی است. بعد از سال های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ میلادی، ایده ی هندسه ی q-تغییر شکل یافته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت. از اولین کارها در این زمینه می توان به تاربندی هوپف q-تغییر شکل یافته در چارچوب توسیع هوپف-گالوا، عملگر دیراک q-تغییر شکل یافته روی کره ی پودلز کوانتومی[۵] و عملگر دیراک q-تغییر شکل یافته ی واتامورا-واتامورا D^q_{WW} [۳] اشاره کرد. همچنان که اشاره شد، از سه نوع عملگر دیراک مذکور، به جز D_{GW} در سال های قبل q-تغییر شکل یافته اند. و اما آنچه که در این مقاله صورت گرفته است،

*سخنران. آدرس ایمیل: fereshteh_arad@yahoo.com
[۱] $Connes-Lott$
[۲] $Watamura-Watamura$
[۳] $Grosse-Klimcik-Presnajder$

تعمیمی از ابرجبر گینسپارگ - ویلسون فازی به ابرجبر گینسپارگ-ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی و سپس ساختن ابرعملگرهای دیراک و کایرالیتی q-تغییر شکل یافته ی فازی متناظرش می باشد.

۲. ابرکره ی q-تغییر شکل یافته ی فازی

به منظور تعریف ابرکره ی کوانتومی فازی، نیاز است تا در ابتدا q-عدد برای n را تعریف کنیم:

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{۱}$$

برای ابرکره ی کوانتومی فازی $S^{(2|2)}_{q\mu}$، مولدهای جبر مختصاتی $A(S^{(2|2)}_{q\mu})$ آن را با $X_+, X_-, X_0, \Theta_+, \Theta_-$ نشان خواهیم داد که به صورت زیر تعریف می شوند و در روابط جابجایی داده شده صدق می کنند:

$$X_i = \frac{[2]_q L_i}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q}}, \Theta_\alpha = \frac{[2]_q L_\alpha}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q}}, \quad \mathbf{X}_+\mathbf{X}_- - \mathbf{X}_-\mathbf{X}_+ = \mu\mathbf{X}_0 - (q-q^{-1})X_0^2, \quad [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_\pm]_q = \pm\mu\mathbf{X}_\pm \tag{۲}$$

همچنین ابرکره ی کوانتومی فازی نیز با رابطه ی زیر تعریف خواهد شد:

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = \sum_{0,\pm} q^m X_{-m}X_m + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = X_0^2 + qX_-X_+ + q^{-1}X_+X_- + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = 1 \tag{۳}$$

$UOSp_q(2|1)$ تقارن این ابرکره ی کوانتومی $S^{(2|2)}_{q\mu}$ است که ابرجبر آن $U_q(uosp(2|1)) = uosp_q(2|1)$ یک جبر Z_2-مدرج یکدار و شرکت پذیر است که توسط عضو زوج L_0 و عضوهای فرد $L_\pm$ ایجاد می شود:

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [2L_0]_{q^{\frac{1}{2}}} \tag{۴}$$

$uosp_q(2|1)$ را می توان با اضافه کردن این ولوشن مدرج E به مجموعه ی مولدها مشخص کرد؛ در نتیجه ابرجبر کوانتومی $uosp_q(2|1)$ در روابط زیر صدق خواهند کرد:

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [2L_0]_{q^{\frac{1}{2}}}, \quad \{E, L_\pm\} = 0, \quad [E, L_0] = 0, \quad E^2 = 1 \tag{۵}$$

که این روابط با معرفی مولدهای جدید $K = q^{L_0}$ و $K^{-1} = q^{-L_0}$، تبدیل به روابط زیر می شوند:

$$KL_+K^{-1} = qL_+, \quad KL_-K^{-1} = q^{-1}L_-, \quad KK^{-1} = 1, \quad E^2 = 1,$$
$$[K, E] = 0, \quad [K^{-1}, E] = 0, \quad \{L_\pm, E\} = 0, \quad \{L_+, L_-\} = \frac{K - K^{-1}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{-1}{2}}} \tag{۶}$$

عملگر کازیمیر $C_{uosp_q(2|1)}$ که با همه ی مولدهای رابطه ی(۵) جابجا می شود و دارای ویژه مقدار $\frac{[2l]_q[2l+1]_q}{[2]_q^2}$ است که در حد $q \to 1$ به ویژه مقدار غیر تغییر شکل یافته ی خود، یعنی، $l(l+\frac{1}{2})$ تقلیل می یابد، دارای شکل زیر است:

$$C_{uosp_q(2|1)} = (L_+L_- - [L_0 - \frac{1}{2}]_q)E \tag{۷}$$

با معرفی نگاشت های هم ضرب $\Delta : uosp_q(2|1) \to uosp_q(2|1)\otimes uosp_q(2|1)$ و هم یکه ی $\epsilon : uosp_q(2|1) \to C$ و هم وارون $\sigma : uosp_q(2|1) \to uosp_q(2|1)$، ساختار جبر هوپف $uosp_q(2|1)$ توسط روابط زیر داده می شود:

$$\Delta(L_+) = L_+ \otimes KE + 1 \otimes L_+, \quad \Delta(L_-) = L_- \otimes E + K^{-1} \otimes L_-,$$
$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(E) = E \otimes E, \quad \epsilon(E) = 1, \quad \epsilon(K) = 1, \quad \epsilon(L_\pm) = 0,$$
$$\sigma(E) = E, \quad \sigma(K) = K^{-1}, \quad \sigma(L_+) = -L_+K^{-1}E, \quad \sigma(L_-) = -KL_-E \tag{۸}$$

در ابرکره ی کوانتومی فازی $S^{(2|2)}_{q\mu}$ دو پارامتر حقیقی متفاوت q و μ داریم. در نتیجه حالت های حدی متفاوت زیر را خواهیم داشت:

- اولین حد($q \longrightarrow 1$ سپس $\mu \longrightarrow 0$): $S^{(2|2)}_{q\mu} \longrightarrow S^{(2|2)}_{\mu} \longrightarrow S^{(2|2)}$

- دومین حد($\mu \longrightarrow ۰$ سپس $q \longrightarrow ۱$): $S^{(۲|۲)}_{q\mu} \longrightarrow S^{(۲|۲)}_{q} \longrightarrow S^{(۲|۲)}$
- سومین حد(به طور همزمان $\mu \longrightarrow ۰$ و $q \longrightarrow ۱$): $S^{(۲|۲)}_{q\mu} \longrightarrow S^{(۲|۲)}$

که در آن μ_q به صورت زیر تعریف می شود که در حد $q \longrightarrow ۱$ به مقدار غیر تبدیل یافته ی متناظرش از $\frac{۱}{\mu^۲} = C_{uosp(۲|۱)} = l(l+\frac{۱}{۲})$، یعنی، $\frac{۱}{\sqrt{l(l+\frac{۱}{۲})}}$ تقلیل می یابد:

$$\mu_q \equiv \frac{[۲]_q}{\sqrt{[۲l]_q[۲l+۱]}} \tag{۹}$$

در سومین حد، رابطه ی (۳)، تبدیل به رابطه ی آشنای ابرکره ی $S^{(۲|۲)}$ می شود:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x_i x_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = ۱ \tag{۱۰}$$

همچنین نسخه ی q-تغییر شکل یافته ی ماتریس های پاولی $\sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۰$ جبر $su(۲)$ نیز به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\sigma^q_۱ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\sigma_۱ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\begin{pmatrix} ۰ & i \\ i & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \sigma^q_۲ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\sigma_۲ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \sigma^q_۰ = \begin{pmatrix} q & ۰ \\ ۰ & -q^{-۱} \end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

نسخه ی ابر این ماتریس ها نیز به قرار زیر تعریف می شوند، که در آن $\tau_۱ = (۱,۰)^t$ و $\varepsilon = i\sigma^q_۲, \tau_۲ = (۰,۱)^t$ است:

$$\Sigma^q_i = \frac{۱}{[۲]_q}\begin{pmatrix} \sigma^q_i & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \Sigma^q_\alpha = \frac{۱}{[۲]_q}\begin{pmatrix} ۰ & \tau_\alpha \\ -(\varepsilon\tau_\alpha)^t & ۰ \end{pmatrix} \tag{۱۲}$$

۳. ساخت مدول

ابرکلاف هوپف کوانتومی، یک $U_q(۱)$-کلاف بر روی ابرکره ی کوانتومی $S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ است که کره ی استاندارد پودلز $S^۲_q$ به عنوان بادی آن و ابرمنیفلد کوانتومی $S^{(۳|۲)}_{q\mu}$ نقش منیفلد کل آن را دارد. کره ی $S^۲_q$ یک فضای کوانتومی همگن $SU_q(۲)$است. جبرهای مختصاتی مربوط به این ابرکلاف هوپف کوانتومی را با $A(S^{(۳|۲)}_{q\mu})$ برای فضای کل $S^{(۳|۲)}_{q\mu}$، $A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$ برای فضای پایه ی $S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ و $A(U_q(۱))$ برای تار $U_q(۱)$ نشان خواهیم داد. در نتیجه جبر شمول $A(S^{(۳|۲)}_{q\mu}) \hookrightarrow A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$ یک توسیع هوپف-گالوا است که به عنوان یک ابرکلاف هوپف کوانتومی می باشد و طبیعتا یک نسخه ی جبری از اولین ابرتاربندی هوپف کوانتومی $S^{(۳|۲)}_{q\mu} \xrightarrow{U_q(۱)} S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ است؛ کلاف وابسته ی کوانتومی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$E^{(n)}_q := \{x \in A(S^{(۳|۲)}_{q\mu}) : \ k\cdot x = q^{\frac{n}{۲}}x, \ k \in A(U_q(۱))\} \tag{۱۳}$$

به وضوح، هر $E^{(n)}_q$ یک $A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$-دو-مدول است که معادل است با تصویر در یک مدول آزاد $(A(S^{(۲|۲)}_{q\mu}))^{۲n+۱}$ از یک عملگر کوانتومی خودالحاقی $P^{(n)}_q$ در $Mat_{۲n+۱}(A(S^{(۲|۲)}_{q\mu}))$ به ازای هر $n \geqslant ۰$. در اینجا $E^{(n)}_q$ را با $A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$-مدول چپ مقاطع $(A(S^{(۲|۲)}_{q\mu}))^{۲n+۱}P^{(n)}_q$ یکی خواهیم گرفت.

۴. ابرتصویرگرهای q-تغییر شکل یافته ی ابر $A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$- مدول تصویری اسپین $\frac{۱}{۲}$

طبق قضیه ی سر-سوآن در هندسه ی ناجابجایی، مطالعه ی ابرتاربندی اصلی $S^{(۳|۲)}_{q\mu} \xrightarrow{U_q(۱)} S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ با مطالعه ی $A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$-مدول تصویری ناجابجایی با تولید متناهی این مقاطع جایگزین می شود. لذا برای ساختن ابرمدول های q-تغییر شکل یافته ی راست و چپ تصویری، باید ابرتصویرگرهای q-تغییر شکل یافته ی فازی این مدول ها را ساخت. ابرتصویرگرهای

q-تغییر شکل یافته برای مدول چپ تصویری می شود:($(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{X}=\sum_{m=0,\pm}(q)^m\Sigma_{-m}X_m+\varepsilon_{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\Theta_\beta$)

$$P^L_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}=\frac{1}{[2]_q}\left\{1\pm\frac{(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{X}+\frac{\mu_q}{[2]_q})}{\sqrt{\frac{\mu_q^2}{[2]_q^2}+1}}\right\},\quad P^L_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}=\frac{1}{[2]_q}[1\pm\frac{[2]_q\mathbf{\Sigma}^q\cdot\mathbf{L}^L+1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q+1}}]\tag{۱۴}$$

که جفت شدگی چپ ابرتکانه ی زاویه ای با ابراسپین $\frac{1}{2}$ را با مقادیر بیشینه و کمینه ی $l\pm\frac{1}{2}$ نشان می دهد. به راحتی می توان نشان داد که:

$$P^L_{[l+\frac{1}{2}]_q}+P^L_{[l-\frac{1}{2}]_q}=\frac{2}{[2]_q}\tag{۱۵}$$

اینها ابرتصویرگرهای $A(S^{(2|2)}_{q\mu})$-مدول چپ تصویری ما هستند؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$(A(S^{(2|2)}_{q\mu}))^2=(A(S^{(2|2)}_{q\mu}))^2P^L_{[l+\frac{1}{2}]_q}\oplus(A(S^{(2|2)}_{q\mu}))^2P^L_{[l-\frac{1}{2}]_q},\quad \Gamma^L_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}=[2]_qP^L_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}-1=\pm\frac{[2]_q\mathbf{\Sigma}^q\cdot\mathbf{L}^L+1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q+1}}\tag{۱۶}$$

ابرتکانه ی زاویه ای راست و ابراسپین $\frac{1}{2}$ نیز با هم، با مقادیر بیشینه و کمینه ی $l\pm\frac{1}{2}$ جفت شدگی خواهند داشت که ابرتصویرگرهای q-تغییر شکل یافته ی راست متناظرشان $P^R_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}$، به صورت زیر با تغییر (L^L_i,L^L_α) به $(-L^R_i,-L^R_\alpha)$ در (۱۴) بدست می آیند:

$$P^R_{[l\pm1/2]_q}=\frac{1}{[2]_q}[1\mp\frac{[2]_q\mathbf{\Sigma}^q\cdot\mathbf{L}^R-1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q+1}}]\tag{۱۷}$$

اینها نیز ابرتصویرگرهای q-تغییر شکل یافته ی $A(S^{(2|2)}_{q\mu})$-مدول راست تصویری ما هستند؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$(A(S^{(2|2)}_{q\mu}))^2=(A(S^{(2|2)}_{q\mu}))^2P^R_{[l+\frac{1}{2}]_q}\oplus(A(S^{(2|2)}_{q\mu}))^2P^R_{[l-\frac{1}{2}]_q},\quad \Gamma^R_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}=[2]_qP^R_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}-1=\mp\frac{[2]_q\mathbf{\Sigma}^q\cdot\mathbf{L}^L-1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q+1}}\tag{۱۸}$$

۵. ابرجبر گینسپارگ- ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی و ابرعملگرهای دیراک و کایرالیتی q-تغییر شکل یافته ی فازی اسپین $\frac{1}{2}$

ابرجبر گینسپارگ- ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی $\mathcal{A}_{q\mu}$ یک ‡- جبر روی C_L است که توسط دو ابر ‡- ناوردای این ولوشن $\Gamma_{q\mu}$ و $\Gamma'_{q\mu}$ بدست می آیند:

$$\mathcal{A}_{q\mu}=\langle\Gamma^{q\mu},\Gamma'^{q\mu}:\quad(\Gamma^{q\mu})^2=(\Gamma'^{q\mu})^2=I,\quad(\Gamma^{q\mu})^\ddagger=\Gamma^{q\mu},\quad(\Gamma'^{q\mu})^\ddagger=\Gamma'^{q\mu}\rangle\tag{۱۹}$$

هر نمایشی از (۱۹) یک ابرجبرگینسپارگ- ویلسون q-تغییر شکل یافته را محقق می سازد. دو عضو زیر را که توسط مولدهای $\Gamma_{q\mu}$ و $\Gamma'_{q\mu}$ ابرجبر گینسپارگ- ویلسون q-تغییر شکل یافته ی $\mathcal{A}_{q\mu}$ ساخته می شوند، در نظر می گیریم:

$$\Gamma^1_{q\mu}=\frac{1}{[2]_q}(\Gamma_{q\mu}+\Gamma'_{q\mu})\,,\qquad(\Gamma^1_{q\mu})^\ddagger=\Gamma^1_{q\mu},\quad\Gamma^2_{q\mu}=\frac{1}{[2]_q}(\Gamma_{q\mu}-\Gamma'_{q\mu})\,,\qquad(\Gamma^2_{q\mu})^\ddagger=\Gamma^2_{q\mu}\tag{۲۰}$$

بدین ترتیب $\Gamma^1_{q\mu}$ و $\Gamma^2_{q\mu}$ با هم پادجابجا می شوند:

$$\{\Gamma^1_{q\mu},\Gamma^2_{q\mu}\}=0\tag{۲۱}$$

با برابر گرفتن $\Gamma^L_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}$ و $\Gamma^R_{[l\pm\frac{1}{2}]_q}$ با $\Gamma_{q\mu}$ و $\Gamma'_{q\mu}$ خواهیم داشت:

$$\Gamma^\pm_1=\pm\frac{\mathbf{\Sigma}^q\cdot\mathcal{L}^q+1}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q+1}},\qquad\Gamma^\pm_2=\pm\frac{\mathbf{\Sigma}^q\cdot(\mathbf{L}^L+\mathbf{L}^R)}{\sqrt{[2l]_q[2l+1]_q+1}}\tag{۲۲}$$

حال می توان ابرعملگر دیراک q-تغییر شکل یافته ی فازی روی ابرکره ی q-تغییر شکل یافته ی فازی $S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$D^{\pm}_{q\mu} = \sqrt{[۲l]_q[۲l+۱]_q + ۱}\Gamma^{\pm}_{۱q\mu} = \pm(\mathbf{\Sigma}^q \cdot \mathcal{L}^q + ۱) = \pm(\sum_{m=۰,\pm}(q)^m \Sigma^q_{-m}\mathcal{L}^q_m + \varepsilon_{\alpha\beta}\Sigma^q_\alpha \mathcal{L}^q_\beta + ۱) \quad (۲۳)$$

در حالت حدی (۲۳) به ابرعملگر دیراک روی ابرکره ی $S^{(۲|۲)}$ تبدیل می شود:

$$\lim_{l\to\infty, q\to ۱} D^{\pm}_{q\mu} = \pm\mathbf{\Sigma}\cdot\mathcal{L} \pm ۱ = \pm(\Sigma_i\mathcal{L}_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\mathcal{L}_\beta + ۱) \quad (۲۴)$$

که در آن $\mathcal{L}_i$ و $\mathcal{L}_\alpha$ ابرعملگرهای تکانه ی زاویه ای روی ابرکره ی $S^{(۲|۲)}$ هستند:

$$\mathcal{L}_i = -i\varepsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{۱}{۲}\theta_\alpha(\sigma_i)_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}, \quad \mathcal{L}_\alpha = \frac{۱}{۲}x_i(\varepsilon\sigma_i)_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} - \frac{۱}{۲}\theta_\beta(\sigma_i)_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (۲۵)$$

همچنین می توان ابرعملگر کایرالیتی q-تغییر شکل یافته روی $S^{(۲|۲)}_{q\mu}$ را به صورت $\gamma^{\pm}_{q\mu} = \Gamma^{\pm}_{۲q\mu}$ تعریف کرد که در حالت حدی می شود:

$$\lim_{l\to\infty, q\to ۱} \gamma^{\pm}_{q\mu} = \pm\Sigma\cdot x = \pm(\Sigma_i x_i + \varepsilon_{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\theta_\beta) \quad (۲۶)$$

و به راحتی می توان نتیجه ی زیر را که از ابرعملگرهای دیراک و کایرالیتی روی ابرکره ی $S^{(۲|۲)}$ انتظار داشتیم، دید:

$$\lim_{l\to\infty, q\to ۱} \{D^{\pm}_{q\mu}, \gamma^{\pm}_{q\mu}\} = ۰ \quad (۲۷)$$

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از ابرتصویرگرهای q-تغییر شکل یافته و ابر $A(S^{(۲|۲)}_{q\mu})$-مدول تصویری با تولید متناهی، مولدهای ابرجبر گینسپارگ- ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی ساخته شدند و از روی آن، ابرعملگرهای دیراک و کایرالیتی q-تغییر شکل یافته ی فازی معرفی و ساخته شدند. نکته ی قابل توجه در مورد این ابرعملگر دیراک q-تغییر شکل یافته ی ساخته شده، این است که، حد جابجایی صحیحی برای آن وجود دارد.

مراجع

1. A. Connes, *Noncommutative geometry* (Academeic Press, New york, 1994).
2. A. P. Balachandran and Pramod Padmanabhan, *Spin j Dirac operators on the fuzzy 2-sphere, JHEP* **09** (2009) 120.
3. A. Pinzul and A. Stern, *Dirac operator on the quantum sphere, Phys. Lett. B* 512 (2001) 217.
4. H. Grosse and P. Preˇsnajder, *The Dirac operator on the fuzzy sphere*, Lett. Math. Phys. 33 (1995) 171.
5. P. Podle´s, *Quantum spheres, Lett. Math. Phys.* 14 (1987) 193.
6. U. Carow-Watamura and S. Watamura, *Chirality and Dirac operator on noncommutative sphere, Commun. Math. Phys.* **183** (1997) 365.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

کارایی الگوی تدریس معادلات دیفرانسیل بر اساس نقشه مفهومی بر رویکردهای یادگیری دانشجومعلمان

مرجان معیری[۱،*] و آسیه ابراهیم زاده[۲]
[۱]استادیار، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران
[۲]استادیار، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

چکیده. یکی از راهبردهای یاددهی- یادگیری که بر جنبه های شناختی و غیرشناختی فراگیران تأثیر مثبت داشته ویادگیری معنی دار را تسهیل میکند، نقشه مفهومی است. هدف از انجام این تحقیق تعیین میزان تاثیر نقشه مفهومی در درس معادلات دیفرانسیل بر رویکردهای یادگیری دانشجو معلمان می باشد. این یک مطالعه نیمه تجربی است که در آن ۵۳ دانشجوی آموزش ریاضی به صورت تصادفی به دو گروه آزمایش(۲۸ نفر) وکنترل(۲۵ نفر) تقسیم شدند. به دانشجویان گروه آزمایش آموزش داده شد که برای یادگیری معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نقشه مفهومی استفاده نمایند. دانشجویان گروه کنترل به روش سنتی آموزش داده شدند. قبل و بعد از مداخله، رویکردهای یادگیری با استفاده از پرسشنامه فرایند مطالعه اندازه گیری شد. داده ها با آزمون تی زوجی در نرم افزارSPSS V.۱۶ تجزیه و تحلیل شد. نتایج پیش آزمون نشان داد بین دو گروه از نظر میانگین نمره رویکرد یادگیری تفاوت آماری وجود ندارد($p > ۰/۰۵$).میانگین نمره رویکرد عمیق در گروه آزمایش پس از استفاده از نقشه مفهومی نسبت به پیش آزمون به طور معناداری افزایش یافت(p=۰/۰۳).مقایسه نمرات پس آزمون در گروه های آزمایش و کنترل نشان داد که رویکرد عمیق در گروه آزمایش به طور معناداری بیش از گروه کنترل می باشد(p=۰/۰۲). یادگیری سطحی تفاوت آماری نداشت. استفاده از نقشه مفهومی به عنوان یک مداخله فراشناختی می تواند موجب افزایش یادگیری عمیق و معنادار در دانشجومعلمان رشته آموزش ریاضی گردد.

واژه‌های کلیدی: نقشه مفهومی، رویکرد یادگیری، معادلات دیفرانسیل، دانشجو معلم .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97C70.

۱. مقدمه و اهمیت تحقیق

در چند دهه اخیر تحولات عظیمی در زمینه فرایند یاددهی–یادگیری به وجود آمده است. واقعیت امراین است که یادگیری مسئله بسیار پیچید ه ای است و یادگیرندگان به تناسب آنچه دریافت میکنند وعوامل مؤثر بر این دریافتها، پیوسته فهم درونی خود را از نحوه عملکردشان تغییر میدهند. آنچه آ نها یاد می گیرند، تابعی است از عوامل پیچیده، مانند رو شهای آموزشی، محتوا، آمادگی، انگیزش،شرایط محیطی و ابزارهای قابل دسترس و ... که نباید آ نها را فراموش کرد [۱]پژوهشها حکایت از آن دارند که راهبردهای یاددهی - یادگیری به طور مثبت با پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در ارتباط هستند. یکی از راهبردهای یاددهی - یادگیری مؤثر درآموزش، نقشه مفهومی است [۲] .

تحقیقات وسیعي در خصوص رویکردهاي یادگیري در دنیا صورت گرفته است [۶]. رویکردهاي یادگیري، فعالیت هاي ذهني اي هستند که فراگیران در هنگام مطالعه به کار مي برند تا بتوانند به طور مؤثرتري دردریافت، سازمان دهي، یا به خاطر آوردن اطلاعات از آ نها استفاده نمایند [۱۰]. منابع گسترده اي در مورد رویکرد هاي یادگیري دردسترس است . بر اساس این متون دو رویکرداساسي براي یادگیري در آموزش عالي وجود دارد؛ رویکرد عمیق و رویکرد سطحي .رویکرد عمیق با هدف درك واقعي مطالب به کار مي رود و باعث یادگیري معنادار و طولاني مدت مي شود . در مقابل، رویکرد سطحي به حفظ مطالب به کمك راهبرد یادگیري طوطي وارمي پردازد و به درك معناي مطالب نمي انجامد .انگیره اصلي در این رویکرد،

*آدرس ایمیل سخنران : Matheducation408@gmail.com

ترس از شکست است رویکردهاي یادگیري یکي از عوامل مؤثر در عملکرد تحصیلي و موفقیت تحصیلي فراگیران مي باشد. مطالعات زیادي نشان داده است که موفقیت تحصیلي در فراگیراني که ازیادگیري عمیق استفاده مي کنند بیشتر است. لذا چنانچه عاملي باعث یادگیري عمیق گردد مي توان انتظار داشت که موفقیت تحصیلي افزایش خواهد یافت [۷]. رویکردهاي یادگیري ،تحت تأثیر عوامل مختلفي قرار دارد . یکي ازعوامل مؤثر بر رویکردهاي یادگیري، شیو ه هاي تدریس و رو ش هاي آموزشي مي باشد [۶]. اکثر مطالعات صورت گرفته درخصوص تأثیر نقشه مفهومي، نمرات یا پیشرفت تحصیلي یادگیرندگان را ملاك عمل قرار داده اند. در تعدادي دیگر از مطالعات تأثیرآن بر تفکر انتقادي بررسي شده است، اما تأثیرنقشه مفهومي بر رویکردهاي یادگیري به صورت محدود مورد مطالعه قرار گرفته است. لذا این پژوهش با هدف تعیین میزان تأثیر نقشه مفهومي بر رویکردهاي یادگیري دانشجومعلمان در درس معادلات دیفرانسیل انجام شده است.

۲. نقشه مفهومی

نقشه مفهومی نقشه مفهومی یکی از رویکردهای آموزشی نوین است که ریشه در نظریه سازنده گرایی دارد. جوزف نواک اولین فردی بود که در سال ۱۹۷۰ از نقشه مفهومی برای یادگیری استفاده کرد. نقشه مفهومی شبکهای دوبعدی است که از مفاهیم مرتبط با یک موضوع و جملات ارتباطی تشکیل میشود. بازنمایی تجسمی روابط معنی دار میان مفاهیم است. نقشه مفهومی ابزارهای گرافیکی برای سازماندهی و نمایش دانش هستند و معمولاً مفاهیم در داخل دایره یا مستطیل قرار داده میشوند و روابط میان مفاهیم به وسیله یک خطوط ارتباطی نشان داده میشوند، همچنین کلمات روی خطوط به عنوان کلمات پیوندی یا عبارات پیوندی رابطه بین دو مفهوم را مشخص میکنند. خطهای ارتباطی میان هسته ها ممکن است نشان دهنده روابطی مانند مترادف بودن، مشخص سازی سلسله مراتبی و ترکیب بندی)نشانگر بخشها و اجزای تشکیل دهنده مفهوم(باشند. مفاهیم به صورت سلسله مراتبی مرتب میشوند؛ یعنی مطالب کلی در رأس هرم قرار میگیرند و درپایین هرم مطالب جزئی قرار داده میشود. دو مفهوم که با یک عبارت روی آن به هم متصل میشوند گزاره نامیده میشود [۹]. برای ترسیم نقشه مفهومی، فراگیر باید ابتدا درباره موضوع مورد نظر اطلاعات کافی به دست آور د و سپس با استفاده از اطلاعات کسب شده، نقشه مفهومی را رسم کند. شکل نقشه های مفهومی نیزمعمولاً هرمی و از بالا به پایین است و این شکل شباهت زیادی به ساخت شناختی انسان دارد که در آن مفاهیم از بالا به پایین)از سطح انتزاع بالا به سطح انتزاع پایین(در زیر هم قرار می گیرند [۳].

۳. طرح پژوهش

این مطالعه نیمه تجربی در مهرماه ۱۳۹۹ انجام گرفته است. جامعه پژوهش شامل دانشجو معلمان رشته آموزش ریاضی پردیس های شهید بهشتی و فاطمه الزهرا هرمزگان ، ورودی مهر۱۳۹۸ (۵۳ نفر) می باشند که در ترم سوم (مهر۹۹) در حال گذراندن درس معادلات دیفرانسیل بودند. دانشجویان پردیس شهید بهشتی شامل ۲۸ نفر در گروه آزمایش و دانشجویان پردیس فاطمه الزهرا شامل ۲۵ نفر در گروه کنترل قرار گرفتند. دانشجویان گروه آزمایش در طی ۴ جلسه درباره معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (معادلات تفکیک پذیر،همگن، کامل و خطی مرتبه اول) با استفاده از نقشه مفهومی آموزش دریافت نمودند. دانشجویان گروه کنترل طی ۴ جلسه درباره معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (معادلات تفکیک پذیر،همگن، کامل و خطی مرتبه اول) با روش مرسوم آموزش دیدند. دانشجویان گروه آزمایش، قبل از شروع در یک کارگاه آموزشی مجازی به مدت ۴ ساعت شرکت کرده و بدین وسیله با نحوه تهیه نقشه مفهومی آشنا شدند. در پایان کارگاه از دانشجویان خواسته شد که یک نقشه مفهومی در مورد هرموضوعی از معادلات دیفرانسیل که خودشان ترجیح می دهند، تهیه نمایند و سپس با راهنمایی استاد کارگاه، اشکالات آنان برطرف شد. یک جزوه آموزشی به همراه یک نقشه مفهومی که با استفاده از منابع معتبر تهیه شده بود در اختیار دانشجویان قرار گرفت.

۴. ابزار جمع آوری داده ها

ابزار جمع آوری داده ها پرسشنامه دو قسمتی فرایند مطالعه بود. پرسشنامه فرایند مطالعه دارای ۲۰ سوال بر اساس مقیاس ۵ درجه ای لیکرت(نمره ۱ به معنی"هرگز یا به ندرت"، نمره ۲ به معنی" گاهی اوقات"، نمره ۳ به معنی"نیمی از مواقع"، نمره ۴ به معنی"بیشتر اوقات" و نمره ۵ به معنی"همیشه" می باشد که رویکرد یادگیری فرد را در هنگام مطالعه و یادگیری

اندازه گیری می کند(ونه رویکرد یادگیری دانشجویان در هنگام تدریس). فرم دو قسمتی این پرسشنامه رویکرد یادگیری سطحی و عمقی را مشخص می کند. هر یک از این مقیاس ها دارای ۱۰ سوال می باشد. کسب نمره بالا در رویکرد عمیق به این معنی است که فرد دارای انگیزه درونی برای یادگیری بوده و از راهبردهای مناسب برای یادگیری معنادار استفاده می کند. در حالی که گرفتن نمره بالا در رویکرد سطحی نشان دهنده این است که فرد دارای انگیزه بیرونی می باشد و از راهبردهای متناسب با آن مانند حفظ کردن استفاده می کند. این پرسشنامه در ایران به کمک روش های ارزیابی پایایی و تحلیل عامل تاییدی مورد بررسی و تایید قرار گرفته است. ضریب پایایی پرسشنامه با روش آلفای کرونباخ برای رویکرد یادگیری عمیق و سطحی به ترتیب ۷۹/۰ و ۸۳/۰ می باشد. به منظور رعایت اصول اخلاقي به دانشجویان تأکید گردید که یافته ها فقط در جهت اهداف پژوهش مورد استفاده قرار خواهد گرفت. رویکردهاي دانشجویان در هنگام مطالعه در دو گروه آزمایش و کنترل در دو مرحله پیش آزمون و پس آزمون اندازه گيري شد . با توجه به طرح مطالعه مقایسه رویکردهاي یادگیري دانشجویان در دو گروه دردو مرحله پیش آ زمون و پس آزمون صورت گرفت و از آن جا که در مرحله پیش آزمون دوگروه اختلاف معناداري از نظر رویکردهاي یادگیري نداشتند، مقایسه دو گروه در پس آزمون ملا ك پاسخ گویي به هدف اصلي قرارگرفت. پس از جمع آوري پرسشنامه ، نمرات مربوط به هر مقیاس به صورت مجزا جمع بندي شده و پس از کدگذاري، و ورود به رایانه، اطلاعات با استفاده از برنامه SPSS ۱۶ .v آمار توصیفي و تحلیلي مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت . به منظور مقایسه میانگین نمرات پیش و پس آزمون از آزمون آماري تي زوجي استفاده شد. در این مطالعه کمترP از ۰۵/۰معنادار در نظر گرفته شده است.

۵. یافته ها

در مجموع ۵۳ دانشجو معلم رشته آموزش ریاضی در این پژوهش شرکت کردند. ۲۸ دانشجو در گروه آزمایش و ۲۵ نفر در گروه کنترل قرار گرفتند. بین میانگین نمرات پیش آزمون در گروه های آزمایش و کنترل(از نظر رویکردهای یادگیری سطحی و عمیق) اختلاف معناداری مشاهده نشد. همچنین رویکرد یادگیری عمیق در گروه آزمایش (۵/۹۹±۲۸/۳۳) نسبت به گروه کنترل (۶/۹۴±۲۴/۹۹) به طور معناداری بیشتر می باشد.این در حالی است که رویکرد یادگیری سطحی در گروه آزمایش (۵/۳۷±۲۷/۷۲) و گروه کنترل (۵/۹۱±۲۷/۱۷) اختلاف معناداری نداشته است. همچنین رویکردهای یادگیری قبل و بعد از مطالعه در دو گروه مقایسه شده است. رویکرد یادگیری عمیق در گروه آزمایش به طور معناداری افزایش یافته در حالی که بین رویکرد عمیق در گروه کنترل و همچنین رویکرد سطحی در گرو ه های آزمایش و کنترل اختلافی دیده نمی شود.

۶. نتیجه گیری

نتایج پژوهش نشان داد که نمرات رویکردعمیق در گروه آزمایش پس از استفاده از نقشه مفهومي به طور معناداري نسبت به پیش آزمون افزایش یافته است. این بدین معني است که استفاده از نقشه مفهومي در معادلات دیفرانسیل دانشجو معلمان مي تواند باعث افزایش یادگیري عمیق شود. همچنین نمره رویکرد عمیق دانشجویان در مطالعات ، کیمبر و همکاران [۸] ، مارتین و زیگرس [۱۰] نیز با استفاده از سایر راهبردهاي(شناختي و فراشناختي (مانند آموزش نحوه یادگیري و روش هاي شناختي افزایش یافته است. هر چند در مطالعه حاضر کاهش نمره رویکرد سطحي در گروه آزمایش معنادار نبوده اما در مقایسه با مطالعه آگوست بریدی که در آن رویکرد سطحي در گروه آزمایش افزایش داشته است[۵]، کاملاً متفاوت مي باشد. نتایج پژوهش حاضر نشان میدهد در روش نقشه مفهومی، هنگامی که دانشجویان روی یک موضوع متمرکز میشود، متوجه میشوند که ارتبا طهای زیادی بین مفاهیم وجود دارد؛ به طوری که در انتخاب این مفاهیم و بیان روابط بین آنها دچار چالش ذهنی میشوند و این امر خود به یادگیری بیشتر و عمیق تر منجر می شود. این نتیجه با نتایج به دست آمده از پژوهش اکینسنیا و ویلیامز [۴] همخوانی دارد. همچنین به نظر میرسد عوامل سازما ن دهنده نقشه مفهومی باعث میشود که روش نقشه مفهومی بر روش سخنرانی برتری داشته باشد؛ زیرا نقشه مفهومی همچون راهبردی سازماندهی این امکان را به یادگیرنده میدهد که اندیشه های اصلی و فرعی را به طور مختصر وبا استفاده از کلمات و عبارات مهم به دنبال هم بنویسد و این راهبرد سازماندهی، متن را به طرح یا نقشه تبدیل می کند.

مراجع

۱. ه .فردانش و ع.ا. شیخی فینی. درآمدی بر سازنده گرایی در روانشناسی و علوم تربیتی، فصلنامه علمی-پژوهشی علوم انسانی دانشگاه الزهرا(س) ،۱۲(۱۳۸۱). شماره ۴۲. ص ۱۲۵-۱۴۲.

۲. ج.مصرآبادي، د. حسيني نسب،ا. فتحي آذر، وم. مقدم. اثربخشی راهبرد یاددهی- یادگیری نقشه مفهومی بر بازده های شناختی- عاطفی در یادگیری درس زیست شناسی، فصلنامه پژوهش های نوین روانشناختی،۲(۱۳۸۶)، شماره ۸.ص۱۰۵-۱۲۸.

۳. ا. رحمانی، ع.ر. محجل اقدم، ا. فتحی آذر و ف. عبدالله زاده. مقایسه تاثیر آموزش برمبنای نقشه مفهومی با روش تلفیقی بر یادگیری درس فرایند پرستاری دانشجویان پرستاری دانشگاه علوم پزشکی تبریز. مجله ایرانی آموزش در علوم پزشکی،۷ (۱۳۸۶)، شماره۱. ص ۴۱-۴۹.

4. C.AKinsanya, and M. Williams. *Mapping for Meaningful Learning. Nurse Education Today*, 24 (2004) ,no. 1, 41-46.

5. M.M. August-Brady. The effect of a metacognitive intervention on approach to and self-regulation of learning in baccalaureate nursing students. Journal of Nursing Education . 44(2005), no.7, 297-304

6. A . Diseth. *Personality and approaches to learning as predictors of academic achievement. European Journal of Personality.* 17(2002), no. 2, 143-155.

7. A. Duff, E. Boyle, K. Dunleavy and J. Ferguson. *The relationship between personality, approach to learning and academic performance.* Personality and Individual Differences. 36(2004), no. 8, 1907-1920.

8. D. Kember, M. Charlesworth, H. Davies , J. Mckay and V.Stott. *Evaluating the effectiveness of educational innovations: Using the study process questionnaire to show that meaningful learning occurs.* Studies in Educational Evaluation. 23(1997),no. 2, 141-157.

9. J. D.Novak and, A. J. Cañas. The theory underlying concept maps and how to construct them, Technical Report IHMC CmapTools, Florida Institute for Human and Machine Cognition ,2006.

10. P. Zeegers and L. Martin. *A learning-to-learn program in a first-year chemistry class.* Higher Education Research and Development. 20(2001),no. 1, 35-52

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

راهکارهایی برای اشتغال پذیری و مهارت افزایی دانشجویان ریاضی و آمار

احسان موحدنیا[۱*] ، محمد صالحی ویسی [۲]
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان، ایران
[۲]بخش ریاضی، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان، ایران

چکیده. مطابق با آمار رسمی منتشر شده حدود ۳۰ درصد فارغ التحصیلان رشته علوم کامپیوتر و ۲۰ درصد فارغ التحصیلان رشته ریاضی و آمار بیکار هستند. در این مقاله ابتدا به بررسی وضعیت دقیق اشتغال فارغ التحصیلان رشته ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در کشور می پردازیم. سپس با ارائه یک تجربه، راهکارهایی برای اشتغال پذیری و مهارت افزایی دانشجویان این رشته ها را مطرح می کنیم.

۱. مقدمه

کارآفرینی با توجه به اینکه به توان خلاقیت انسان ها بر می گردد از منبعی مهم و پایان ناپذیر نشات می گیرد. سازمانهای پیشرو امروزه توانسته‌اند با به خدمت گرفتن تعداد اندکی از افراد خلاق و کارآفرین و با اجرای طرح های کارآفرینانه بر رقبای خود فائق آیند. در این مسیر آنها موقعیتی را فراهم می آورند تا همه کارکنان روحیه کارآفرینی پیدا کرده و بتوانند به راحتی به صورت فردی یا گروهی فعالیت های کارآفرینانه خود را به اجرا درآورند، در حقیقت کارآفرینی ترویج نوآوری است [۱].

کارآفرینی سازمانی برای دانشگاه ها، می تواند با نوآوری و خلاقیت به توسعه و ارتقای فردی و سازمانی اعضای آن کمک کند. موضوع بسیار مهم در شرایط کنونی و آینده جامعه ایران کاهش تعداد دانشجو و موضوع رقابت دانشگاه ها برای جذب دانشجو است که باید مبتنی بر یک مزیت رقابتی خاص باشد. بدیهی است یکی از فاکتورهای مهم و تعیین کننده در اثربخشی سازمان دانشگاه، تربیت فارغ التحصیلان و کارایی آنها هم در بعد درونی و هم در بعد بیرونی است. این عامل می تواند ضمن حفظ بقای دانشگاه، به اشتغال پذیری فارغ التحصیلان آن نیز کمک کند. اگر مولفه ها و اجزای درونی دانشگاه اعم از کارمند، ساختار سازمانی، تجهیزات، فرآیندها و اعضای هیئت علمی کارایی لازم را برای عرضه این مزیت رقابتی داشته باشند و همچنین دانشجویان آن ویژگی های لازم فردی و روحیه کارآفرینی از قبیل خلاقیت، عزت نفس و انگیزه پیشرفت، منبع کنترل درونی، آینده‌نگری و خطرپذیری را داشته باشند، امکان کارایی بیرونی و اثربخشی مطلوب قابل تصور است. بنابراین دانشگاه ها باید برای ارائه مزیت رقابتی خود برنامه جامع در حوزه کارآفرینی و اشتغال پذیری –به عنوان دو شاخصه اصلی مورد انتظار در کارایی مطلوب– داشته و بر اساس آن گام بردارند.

از سال ۸۴ سیر افزایش فزاینده ی پذیرش دانشجو در کشور آغاز شد به گونه ای که در سال ۸۴ تعداد ۴۴ موسسه ی آموزش عالی غیرانتفاعی در کشور وجود داشت که این تعداد تا سال ۹۲ به ۳۴۰ موسسه ی آموزش عالی رسید. در سال هشتادوچهار تعداد مراکز دانشگاهی و مؤسسات آموزشی وابسته به وزارت علوم ۱۳۰۰ مرکز بوده است که این تعداد در سال ۹۲ با افزایش تقریباً دو برابری به ۲۵۰۴ مرکز افزایش پیدا می کند [۲].

*سخنران. آدرس ایمیل: movahednia@bkatu.ac.ir

طبق داده‌های مرکز آمار ایران، حدود ۴۰ درصد بیکاران کشور را فارغ التحصیلان دانشگاه تشکیل می‌دهند که جمعیت یک میلیون نفری را شامل می‌شود؛ دلایل مهم آن عدم مهارت آموزی و رشد افسارگسیخته و بی‌برنامه مراکز دانشگاهی بدون نیازسنجی جذب از سوی بازار کار است. [۳] موضوع بیکاری فارغ التحصیلان در رشته هایی مانند ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر جدی تر بنظر می رسد. مطابق با آمار رسمی منتشر شده حدود ۳۰ درصد فارغ التحصیلان رشته علوم کامپیوتر و ۲۰ درصد فارغ التحصیلان رشته ریاضی و آمار بیکار هستند [۴].

برای حل بخشی از مشکلات فارغ التحصیلان دانشگاهی کشور، طرح هایی نظیر مشوق های کارفرمایی در نظر گرفته شد. مطابق این طرح هر واحد تولیدی که اقدام به جذب فارغ التحصیلان کند تا ۲ سال از پرداخت سهم حق بیمه سهم کارفرمایی معاف است. این طرح و طرح های مشابه یک مشکل اساسی دارند و آن هم نداشتن مهارت فارغ التحصیلان است. به عبارتی سیستم آموزشی کشور به نحوی تنظیم و تنسیق شده است که دانشجویان امکان کسب مهارت های ضروری رشته و تخصص خود را ندارند. تا همین چند وقت پیش نظام آموزش عالی کشور هیچ ماموریت و وظیفه ای برای مهارت افزایی دانشجویان برای دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی تعریف نکرده بود ولی چند سالی است بدرستی تغییراتی در حوزه ماموریت دانشگاه ها و نیل به هدف دانشگاه کارآفرین و جامعه محور ایجاد شده است.

متاسفانه سیستم آموزش عالی کشور یک سیستم مدرک گرا است. کم نیستند افراد و گروه‌هایی که به صرف اخذ مدرک از موسسات از آنها تحت‌عنوان کارشناس یا کارشناس ارشد یاد می‌شود اما در واقع امر، داشته‌های علمی و نظری آنها صرفاً به مجموعه‌ای از اطلاعات و داده‌ها گره‌خورده که در بُعد عملیاتی و مهارتی کاربرد چندانی ندارد. در سیستم آموزشی فعلی دانشجویان همچنان دروس معمول رشته خود را می گذرانند و مدرک دانشگاهی اخذ می کنند ولی حداقل مهارت لازم برای افزایش اشتغال پذیری خود را ندارند. از همین رو فقدان مهارت مهمترین دلیل برای بیکاری فارغ التحصیلان دانشگاهی است. حل این معضل مستلزم برنامه ریزی و به کارگیری برنامه های خاص است. توسعه کارآفرینی در دانشگاه ها و ایجاد اشتغال و درآمدزایی برای دانش آموختگان دانشگاهی، می تواند راهگشای این معضل باشد. خوشبختانه برخی دانشگاه ها با درک این ضرورت فعالیت هایی در این زمینه داشته اند ولی بررسی ها نشان دهنده روند کند نهادینه سازی کارآفرینی در دانشگاه ها است [۵].

به نظر می رسد تسریع در روند نهادینه سازی فرآیند کارآفرینی در دانشگاه ها ضمن حل بخشی از معضل بیکاری دانش آموختگان دانشگاهی، به خلق ایده های جدیدتر از سوی صاحب نظران دانشگاهی برای شروع یک فرآیند کارآفرینی کمک شایانی نماید. نهادینه سازی کارآفرینی در دانشگاه ها در راستای ایجاد شغل، خلق ثروت، افزایش سطح رفاه مردم و در نهایت پیشرفت عمومی کشور ایران عمل می نماید. برخی دانشگاه های کشور با درک صحیح از وضعیت پیش روی آموزش عالی و با توسل به آیین نامه ها و بخشنامه های وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برنامه هایی برای توسعه مهارت و اشتغال پذیری دانشجویان تدوین کرده اند. دانشگاه صنعتی شریف، دانشگاه تهران، علم و صنعت، علامه طباطبایی، حکیم سبزواری، رفسنجان و دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان از جمله دانشگاه های پیشرو در حوزه کارآفرینی و مهارت افزایی دانشجویان هستند.

۲. وضعیت بیکاری فارغ التحصیلان رشته های ریاضی و آمار

نرخ بیکاری فارغ التحصیلان رشته های ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر به نسبت سایر رشته ها بالاست. بنا بر آمار اعلام شده از سوی مرکز آمار ایران نرخ بیکاری فارغ التحصیلان رشته علوم کامپیوتر ۴.۳۰ درصد، رشته ریاضی و آمار حدودا ۲۰ درصد است. متاسفانه نرخ بیکاری فارغ التحصیلان دوره های کارشناسی ارشد و دکترای تخصصی رشته های ریاضی و آمار نیز وضعیت جالبی ندارد. از ۵۲ هزار و ۱۶۹ نفر بیکار فوق لیسانس و دکترای حرفه‌ای، ۱۱ هزار و ۸۸۶ نفر در رشته‌های علوم اجتماعی، بازرگانی و حقوق تحصیل کرده‌اند و ۱۲ هزار و ۳۵۳ نفر نیز دارای مدرک رشته‌های مهندسی، تولید و ساخت هستند. ۹۶۰۷ نفر در رشته علوم، ریاضی و کامپیوتر و ۶۷۸۱ نفر نیز در رشته علوم انسانی و هنر بوده‌اند. سهم سایر رشته‌ها از موارد یاد شده کمتر بوده است. همان طور که اشاره شد یکی از دلایل اصلی بیکاری فارغ التحصیلان دانشگاهی نداشتن مهارت تخصصی است. این موضوع برای دانشجویان ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر جدی تر بنظر می رسد [۲].

ماهیت آنچه به عنوان ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر در دانشگاه ها و مراکز آموزش عالی کشور تدریس می شود، عموما زمخت و غیرقابل انعطاف است و متاسفانه سنخیتی با نیاز جامعه ندارد. فارغ التحصیلان این رشته ها اولا به دلیل ماهیت دروس و ثانیا به علت فقدان توجه برنامه ریزان به گنجاندن دوره های مهارتی در سرفصل دروس -حتی بصورت اختیاری- در حالی فارغ التحصیل می شوند که حداقل های لازم برای آمادگی اشتغال بعد از دانش آموختگی را ندارند.

۳. نتایج اصلی

دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان که از سوی صندوق رفاه دانشجویان به عنوان پایلوت دانشگاه کارآفرین سطح چهار معرفی شده است، رویکرد جدیدی در حوزه زیست بوم فناوری خلق کرده است. این دانشگاه با بهره گیری از ظرفیت های موجود بویژه آیین نامه های مرتبط با کارآفرینی ابلاغی از سوی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، اسناد بالادستی و پتانسیل سازمان فنی و حرفه ای اقدام به راه اندازی مرکز جوار دانشگاهی در قالب برنامه جامع کارآفرینی کرده است. در این مرکز برای دانشجویان رشته های مختلف دوره های مهارتی برگزار می شود. دانشجویان در حین تحصیل دوره های فنی و حرفه ای مرتبط را می گذرانند و مدرک قابل ترجمه فنی و حرفه ای دریافت می کنند. پس از گذراندن دوره مهارتی، دانشگاه از دانشجویان علاقمند حمایت می کند تا کسب و کاری را بصورت پایلوت در دانشگاه اجرا کنند. مزیت این کار این است که دانشجو شروع یک کسب و کار -که مهمترین رکن آن است - را با حمایت و بدون واهمه از شکست طی می کند. پس از اتمام طرح دانشجویانی که ایده نو و جدیدی داشته باشند با مرکز رشد دانشگاه مرتبط می شوند و نهایت کار می تواند به تاسیس یک شرکت دانش بنیان منجر شود. هم اکنون که سه سال از اجرای این طرح می گذرد بیش از ۱۰ واحد فناور، شرکت دانش بنیان و RDE در مرکز رشد دانشگاه فعال هستند. در حوزه ریاضیات دوره های خاص و جالبی برای دانشجویان در مرکز جوار دانشگاهی دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان برگزار شده است که می تواند تجربه موفقی از تلفیق دانش و مهارت باشد. با برنامه ریزی صورت گرفته دوره های نظیر بیمه، بانکداری، اپلیکیشن سازی، حسابداری شهرداری ها، حسابداری پتروشیمی، حسابداری پالایشگاه ها، مدیریت مالی، بازار فارکس و ارزهای دیجیتال، دیجیتال مارکتینگ و ... تنظیم شده که مورد استقبال دانشجویان قرار گرفته است.

مطمئنا تدوین دوره های مهارتی خاص برای دانشجویان رشته ریاضی و آمار با هدف اشتغال فوری بعد از فارغ التحصیلی زمانی کارآمد خواهد بود که اولا دوره های باکیفیت و متمایز از دوره های مدرک گرا برگزار شود ثانیا دانشجویان اهمیت موضوع را درک کرده باشند و علاقه و تمایل قوی به شرکت در دوره های مهارتی تدوین شده را داشته باشند. این مهم علاوه بر لزوم جذابیت دوره ها نیازمند همکاری اعضای محترم هیئت علمی دانشگاه هاست که خود این موضوع به باز تعریف وظایف اعضای هیئت علمی و ماموریت دانشگاه ها مرتبط است. معتقدیم که گنجاندن دوره های مهارتی در سیلابس درسی رشته های ریاضی و آمار امکان پذیر است و با استقبال مواجه خواهد شد بویژه آنکه اگر الگویی دانشجویی موفق در این حوزه تربیت شود. این مسئله می تواند باعث افزایش علاقه در بین دانشجویان جهت گذراندن دوره های مذکور شود. همچنین اعضای هیئت علمی نیز در قالب وظایف محوله موضوع ماده ۴ آیین نامه ارتقا مرتبه می توانند نقش پر رنگ تری در ترغیب دانشجویان در دوره ها داشته باشند. تقویت مهارت دانشجویان ریاضی می تواند در تصمیم کارفرمایان در بخش های دولتی و غیر دولتی جهت استفاده از دانشجویان ریاضی به عنوان کارمند یا شاغل موثر باشد. با یادگیری مهارت های بنیادین و بدیع دانشجویان ریاضی می توانند خود در برخی زمینه های کارآفرین باشند.

۴. نتیجه‌گیری

در صورت موفقیت در توانمندسازی فارغ التحصیلان رشته های ریاضی و آمار ضمن کمک به اشتغال و کارآفرینی دانش آموختگان می توان نیروی مورد نیاز و تخصصی شرکت ها و ارگان ها را تامین کرد. ذکر این نکته ضروری است که دانشجویان مهارت های هدفمندی را در حین تحصیل فرا می گیرند. این مهارت ها می تواند به گونه ای باشد که نیاز کارفرمایان را به برگزاری دوره مجدد آموزش به نو استخدامان رفع نماید. اضافه بر آن دانش آموختگان مهار با حمایت موسسات می تواند ایده خود را حوزه های مرتبط با مهارت فراگرفته به منصه ظهور برسانند و فعالیت کارآفرینانه خود را شروع کنند.

مراجع

1. Schnellenbach, J. *Public Entrepreneurship and the Economics of Reform*, Journal of Institutional Economics, 3:183-202 (2007).

۲. سالنامه آماری کشور دسترسی در ۱۵/۱۰/۱۳۹۵ از وبگاه http://salnameh.sci.org.ir/AllUser/DirectoryTreeComplete.aspx

۳. مرکز آمار ایران (۱۳۹۵)- داده ها و اطلاعات آماری- https://www.amar.org.ir

۴. روزنامه خراسان (۱۳۹۷)- کدام-رشته-های-دانشگاهی-نرخ-بیکاری-بالایی-دارند-جدول/۶۶۲۵۵۶۰/yjc.news/fa/news

۵. ع. درویشیان، م. س. تسلیمی و ر. حکیم زاده، طراحی مدل مهارت‌های اشتغال پذیری دانش‌آموختگان آموزش عالی کشور نمونه موردی: بنگاه‌های کوچک و متوسط استان تهران، دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی، دوره ۱۰، شماره ۱۹(۱۳۹۸).

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته

سمیه نعمتی[۱] و زهرا رضائی کلانسرا[۱,*]

[۱]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

چکیده. در این مقاله، با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته به حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی می‌پردازیم که مشتق کسری در آن از نوع کاپوتو در نظر گرفته می‌شود. ابتدا، به معرفی توابع کلاهی تعمیم یافته و ماتریس‌های عملیاتی متناظر با این توابع می‌پردازیم. سپس، برای حل مسأله مورد نظر، توابع موجود در آن با استفاده از توابع پایه‌ای تقریب زده می‌شوند. با به‌کارگیری خواص توابع کلاهی تعمیم یافته دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی حاصل می‌شود که با حل آن ضرایب مجهول تعیین می‌شود. با جای گذاری مقادیر حاصل، تقریبی از جواب مسأله به‌دست می‌آید. در پایان، با ارایه یک مثال کارآیی و دقت روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی، توابع کلاهی تعمیم یافته، ماتریس‌های عملیاتی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34K37, 26A33, 65N35.

۱. مقدمه

امروزه، مبحث معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل کاربردهای گسترده در بسیاری از زمینه‌های علمی یکی از موضوعات داغ در ریاضیات کاربردی است. در این میان، موضوع معادلات دیفرانسیل تأخیری توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. با توجه به اهمیت مدل‌های تأخیری کسری، بسیاری از پژوهشگران به معرفی و بررسی الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری پرداختند. برای نمونه، می‌توان به مراجع [۲–۴] مراجعه نمود.

در این کار، معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی به شکل زیر را در نظر می‌گیریم [۴]:

$$(۱)\qquad \begin{cases} D_C^{\alpha} y(x) = f\left(x, y(x), y'(x), y(x-\tau), y'(x-\tau)\right), & ۰ \le x \le \mathcal{L},\ ۱ < \alpha \le ۲, \\ y(x) = y_۰(x), & -\tau \le x \le ۰, \\ y'(x) = y_۱(x), & -\tau \le x \le ۰, \end{cases}$$

که در آن، f یک تابع غیرخطی برحسب متغیرهای آن و $y_۱(x), y_۰(x) \in C^۲[-\tau, ۰]$ توابعی معلوم هستند. $\tau > ۰$ ثابت تأخیر و $y(x)$ تابعی مجهول می‌باشد. ساختار این مقاله به شرح زیر است:
در بخش ۲ مقدماتی از حساب کسری و خواص توابع کلاهی تعمیم یافته بیان می‌شود. بخش ۳ به ارایه یک تکنیک عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی به شکل (۱) اختصاص می‌یابد. برای نشان دادن کارآیی و دقت روش، مثالی در بخش ۴ در نظر گرفته می‌شود. در آخر، در بخش ۵ به بیان نتایج می‌پردازیم.

*سخنران. آدرس ایمیل: z.rezaeik@stu.umz.ac.ir

۲. مفاهیم اساسی

تعریف ۱.۲. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل I^{α} از مرتبه $\alpha \geq 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$I^{\alpha}y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} y(s)ds, & \alpha > 0, \\ y(x), & \alpha = 0, \end{cases}$$

که در آن $\Gamma(.)$ تابع گامای اویلر است.

تعریف ۲.۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ به شکل زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$D_C^{\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-s)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(s)ds, \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

برای $n-1 < \alpha \leq n$، $n \in \mathbb{N}$، عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو در خاصیت زیر صدق می‌کنند [۵]:

$$I^{\alpha}(D_C^{\alpha}y(x)) = y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}, \quad x > 0. \tag{۲}$$

تعریف ۳.۲ (توابع کلاهی تعمیم یافته). با در نظر گرفتن بازه $[0, \mathcal{L}]$ و تقسیم آن به n زیر بازه $[ih, (i+1)h]$، برای $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ با طول گام h که $h = \frac{\mathcal{L}}{n}$، توابع کلاهی تعمیم یافته $\{\psi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۵]:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{h-x}{h}, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت،} \end{cases} \quad \psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-(i-1)h}{h}, & (i-1)h \leq x \leq ih, \\ \frac{(i+1)h-x}{h}, & ih \leq x \leq (i+1)h, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت،} \end{cases} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-(\mathcal{L}-h)}{h}, & \mathcal{L}-h \leq x \leq \mathcal{L}, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

یک تابع دلخواه $y(x) \in L^2[0, \mathcal{L}]$ را می‌توان با استفاده از توابع کلاهی تعمیم یافته به‌صورت زیر تقریب زد،

$$y(x) \simeq y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\psi_i(x) = A^T\psi(x), \tag{۳}$$

که در آن

$$\psi(x) = [\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots, \psi_n(x)]^T, \tag{۴}$$

$$A = [a_0, a_1, \cdots, a_n]^T, \tag{۵}$$

به‌طوری‌که $a_i = y(ih)$.

قضیه ۴.۲. [۵] اگر $y(x) \in C^2([0, \mathcal{L}])$ و $y_n(x)$ تقریب آن با استفاده از $n+1$ تابع کلاهی تعمیم یافته باشد، آن‌گاه $|y(x) - y_n(x)| = O(h^2)$.

تعریف ۵.۲ (ماتریس عملیاتی انتگرال کسری). فرض کنید $\psi(x)$ بردار توابع کلاهی تعمیم یافته در (۴) و $\alpha > 0$ باشد، آن‌گاه

$$I^{\alpha}\psi(x) \simeq P^{\alpha}\psi(x), \tag{۶}$$

به‌طوری‌که P^{α} ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α با ابعاد $(n+1) \times (n+1)$ است که در [۵] معرفی شده است.

اگر تابع y توسط توابع کلاهی تعمیم یافته به‌صورت معادله (۳) تقریب زده شود، آنگاه می‌توان $I^\alpha y(x)$ را با استفاده از (۶) به شکل $I^\alpha y(x) \simeq I^\alpha y_n(x) = A^T P^\alpha \psi(x)$ تقریب زد.

تعریف ۶.۲ (ماتریس عملیاتی تأخیر). فرض کنید $\psi(x)$ بردار توابع کلاهی تعمیم یافته در (۴) و $\tau > 0$ باشد، آنگاه

$$\psi(x-\tau) \simeq R_\tau \psi(x), \tag{۷}$$

که در آن R_τ ماتریس عملیاتی تأخیر نامیده می‌شود و یک ماتریس از مرتبه $(n+1)\times(n+1)$ است. این ماتریس با شیوه‌ای مشابه با روش بیان شده در [۱] حاصل می‌شود.

اگر تابع y توسط توابع کلاهی تعمیم یافته به‌صورت معادله (۳) تقریب زده شود، آنگاه می‌توان $y(x-\tau)$ را با استفاده از (۷) به‌صورت $y(x-\tau) \simeq A^T R_\tau \psi(x)$ تقریب زد.

۳. روش عددی

به‌منظور یافتن جواب عددی، $D^\alpha_C y(x)$ را با استفاده از توابع پایه‌ای به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$D^\alpha_C y(x) \simeq A^T \psi(x), \tag{۸}$$

که در آن A بردار ضرایب مجهول به‌صورت (۵) می‌باشد. حال با اعمال انتگرال‌گیری از مرتبه α روی معادله (۸) و با استفاده از (۲)، (۶) و شرایط اولیه داده شده در (۱) نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y(x) \simeq I^\alpha(A^T\psi(x)) + xy'(0) + y(0) = (A^T P^\alpha + Y_1^T + Y_2^T)\psi(x) = X_1^T\psi(x). \tag{۹}$$

در (۹) از تقریب‌های $xy_1(0) \simeq Y_1^T\psi(x)$ و $y_0(0) \simeq Y_2^T\psi(x)$ استفاده شده است. همچنین $X_1 = (A^T P^\alpha + Y_1^T + Y_2^T)^T = [X_{1,0}, X_{1,1}, \cdots, X_{1,n}]^T$.
از (۸) و (۶) به‌دست می‌آوریم:

$$y'(x) \simeq I^{\alpha-1}(D^\alpha_C y(x)) + y'(0) = (A^T P^{\alpha-1} + Y_3^T)\psi(x) = X_2^T\psi(x), \tag{۱۰}$$

که در آن $y_1(0) \simeq Y_3^T\psi(x)$ و $X_2 = (A^T P^{\alpha-1} + Y_3^T)^T = [X_{2,0}, X_{2,1}, \cdots, X_{2,n}]^T$.
علاوه بر آن، با جای گذاری $(x-\tau)$ به‌جای x در (۹)، (۱۰) و با استفاده از (۷) داریم:

$$y(x-\tau) \simeq (A^T P^\alpha + Y_1^T + Y_2^T)R_\tau\psi(x) = X_3^T\psi(x), \tag{۱۱}$$

$$y'(x-\tau) \simeq (A^T P^{\alpha-1} + Y_3^T)R_\tau\psi(x) = X_4^T\psi(x), \tag{۱۲}$$

به‌طوری‌که $X_3 = R_\tau^T X_1 = [X_{3,0}, X_{3,1}, \cdots, X_{3,n}]^T$ و $X_4 = R_\tau^T X_2 = [X_{4,0}, X_{4,1}, \cdots, X_{4,n}]^T$.
در آخر، با جای گذاری (۸)-(۱۲) در معادله (۱) معادله $A^T\psi(x) = F\psi(x)$ به‌دست می‌آید، که در آن F به‌صورت زیر است:

$$F = [f(0, X_{1,0}, X_{2,0}, X_{3,0}, X_{4,0}), f(h, X_{1,1}, X_{2,1}, X_{3,1}, X_{4,1}), \cdots, f(\mathcal{L}, X_{1,n}, X_{2,n}, X_{3,n}, X_{4,n})],$$

در نتیجه، دستگاه $A^T - F = 0$ حاصل می‌شود. با حل این دستگاه، تقریبی از تابع $y(x)$ که در معادله (۱) داده شده است، به‌دست می‌آید.

۴. مثال عددی

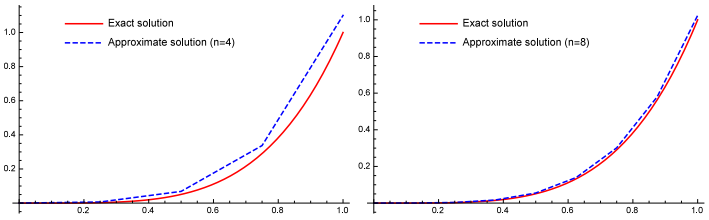
در این‌جا، با ارایه یک مثال به بررسی کارآیی روش حاضر می‌پردازیم. نمادهای $e_n = \max_{0\le i\le n} |y(ih) - y_n(ih)|$ و $\varepsilon_n = \log_2 \frac{e_n}{e_{2n}}$، به‌ترتیب، برای نشان دادن خطا و مرتبه همگرایی روش معرفی می‌شوند.
معادله دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم [۴]:

$$\begin{cases} D_C^{1.5} y(x) = (x+1)y(x) + \frac{x-1}{2} y(x)y(x-0.1) + g(x), & x \in [0,1], \\ y(x) = 0, \quad y'(x) = 0, & -0.1 \le x \le 0. \end{cases}$$

تابع $g(x)$ طوری انتخاب می‌شود که جواب دقیق این مثال $x^{4.3}$ باشد. خطا و مرتبه همگرایی به‌ازای مقادیر مختلف n در جدول ۱ نشان داده می‌شود. همچنین، نمودار جواب دقیق به‌همراه جواب تقریبی برای $n = 4,8$ در شکل ۱ نمایش داده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش مقدار n جواب تقریبی به جواب دقیق همگراست. به‌علاوه، می‌توان مشاهده کرد که مرتبه همگرایی روش $O(h^2)$ است.

جدول ۱. خطا و مرتبه همگرایی به‌ازای مقادیر مختلف n.

n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶
e_n	$۴٫۶۴ \times ۱۰^{-۱}$	$۱٫۰۰ \times ۱۰^{-۱}$	$۲٫۴۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۹۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۴۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۷۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۹٫۲۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
ε_n	۲٫۲۱	۲٫۰۵	۲٫۰۲	۲٫۰۰	۲٫۰۰	۲٫۰۰	۲٫۰۱	–



شکل ۱. نمودار جواب دقیق به‌همراه جواب تقریبی با $n = 4$ (سمت چپ) و $n = 8$ (سمت راست).

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی بر اساس توابع کلاهی تعمیم یافته برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی ارایه شده است. با استفاده از خواص توابع پایه‌ای، مسأله مورد نظر به حل دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود که به پیچیدگی محاسبات کمی نیاز دارد. با حل دستگاه حاصل، تقریبی از جواب مسأله به‌دست می‌آید. با اعمال روش پیشنهادی روی یک مثال، دقت و کارآیی روش نشان داده شد.

مراجع

۱. س. نعمتی و ی. اردوخانی، حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته، پژوهش‌های ریاضی ۴ (۱۳۹۷)، شماره ۲، ۲۵۸–۲۴۱.

2. V.G. Pimenov and A.S. Hendy, *BDF-type shifted Chebyshev approximation scheme for fractional functional differential equations with delay and its error analysis*, Appl. Numer. Math., 118 (2017), 266–276.
3. U. Saeed, M. ur Rehman and M.A. Iqbal, *Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations*, Appl. Math. Comput., 264 (2015), 431–442.
4. L. Shi, Z. Chen, X. Ding and Q. Ma, *A new stable collocation method for solving a class of nonlinear fractional delay differential equations*, Numer. Algorithms, 85 (2020), no. 4, 1123–1153.
5. M.P. Tripathi, V.K. Baranwal, R.K. Pandey and O.P. Singh, *A new numerical algorithm to solve fractional differential equations based on operational matrix of generalized hat functions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 18 (2013), no. 6, 1327–1340.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

بررسی انتروپی تعمیم یافته فرآیند قدم زدن تصادفی روی گرافها

زهره نیکوروش *
گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

چکیده. **در این مقاله، انتروپی تعمیم یافته برای فرآیندهای تصادفی که توسط حرکت دونده‌ای روی یک گراف ایجاد می‌شود بررسی شده است. این انتروپی تعمیم یافته از حذف یکی از اصول چهارگانه انتروپی شانون-خینچین به دست می آید. برای مشخص کردن این نوع انتروپی، تعداد مسیرهای متناهی مختلفی را که دو گره را در یک گراف متناهی البعد به هم متصل می‌کند، به صورت مجانبی بررسی خواهیم کرد.**
واژه‌های کلیدی: انتروپی تعمیم یافته، اصول چهارگانه انتروپی شانون-خینچین، قدم زدن تصادفی، قضیه پرون-فروبنیوس.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60J10, 94A17.

۱. مقدمه

در سالهای اخیر علاقه به مطالعه شبکه‌های پیچیده کاربردی در زمینه‌های مختلف از جمله فیزیک آماری و فیزیک ریاضی افزایش پیدا کرده و مولفه‌های مختلفی برای توصیف خصوصیات ساختاری گرافها پیشنهاد شده‌است [۱]، [۳]. مطالعه شبکه‌ها و گرافها بدین جهت اهمیت دارد که امروزه گرافها در بسیاری از زمینه‌های فیزیک از جمله در مسائل مرتبط با مدل‌های پاتس، آیزینگ و ...، در حل انتگرال‌های فاینمن در نظریه میدان اختلال، در تئوری اطلاعات کوانتومی مانند کدهای تصحیح خطای کوانتومی یا آرایش ذرات مکانیکی کوانتومی متقابل (شبکه‌های چرخشی) و در بسیاری از زمینه‌های دیگر [۴]. در میان انواع مختلف گرافها، مفهوم انتروپی نقش ویژه ای ایفا کرده است. دهمر و موشوویتز [۲] برای مدت طولانی در زمینه‌های مختلف از اقدامات انتروپی برای گرافها استفاده کرده اند.

قبل از بیان اصل مطالب چند مفهوم را در بحث گرافها بیان می‌کنیم. گراف ساده $G(V,E)$ با $|V|=n$ گره و $|E|=m$ یال را در نظر بگیرید. تعداد مسیرها به طول k از گره p به گره q (از گره‌های v_1 تا v_k که لزوما v_i ها مجزا نیستند و v_i و v_{i+1} به کمک یک یال به هم متصل شده‌اند) را می‌توان توسط $[A^k]_{pq}$ به دست آورد که A ماتریس مجاورت گراف است. درجه گره p را که نشان دهنده تعداد یالهای متصل به p است با p_n نشان می‌دهیم.

به منظور تعریف انتروپی یک گراف بر اساس قدم زدن روی آن، ما یک دونده تصادفی را در نظر می‌گیریم که با استفاده از یال‌های گراف از یک گره به گره دیگر حرکت می‌کند که البته تصادفی بودن حرکت دو حالت خواهد داشت. حالت اول، در هر مرحله یک انتخاب تصادفی جهت جدید برای دونده وجود دارد، در حالی که در حالت دوم، پس از انتخاب جهت حرکت، تغییر جهت برای تعداد محدودی از مراحل بعدی امکان پذیر نخواهد بود. می‌توان گفت هدف اصلی این مقاله به دست آوردن انتروپی برای این دو نوع حرکت است. نوع اول یک فرآیند مارکفی ایجاد می‌کند در حالی که حرکت ویژه تعریف شده در نوع دوم باعث ایجاد یک فرآیند غیر مارکفی می‌شود، که در این حالت به دست آوردن انتروپی آن به سادگی امکان پذیر نیست. ما در این مقاله سعی کردیم به کمک انتروپی تعمیم یافته، که انتروپی‌های شناخته شده مثل شانون و تسالیس (البته غیر انتروپی رنی) حالت‌های خاص آن هستند، انتروپی یک فرآیند غیر مارکفی را به دست آوریم.

*سخنران. آدرس ایمیل: nikooravesh@birjandut.ac.ir

این مقاله مشتمل بر ۴ بخش است. در بخش دوم به تعریف و بررسی انتروپی تعمیم یافته می‌پردازیم. در بخش سوم که بخش اصلی این مقاله محسوب می‌شود، انتروپی دو فرآیند تصادفی تعریف شده خاص، را به دست می‌آوریم و در بخش چهارم در یک مثال دو فرآیند را شبیه سازی می‌کنیم.

۲. بررسی انتروپی تعمیم یافته

با در نظر گرفتن چهار اصل شانون–خینچین ثابت شده که انتروپی به صورت منحصر بفرد از رابطه زیر به دست می آید.

$$S = -\sum_i p_i \log p_i \tag{۱}$$

ولی در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، ممکن است یکی از این چهار اصل نقض شود. به عنوان مثال، برای سیستم‌های غیر ارگودیک، اصطلاحاً اصل جدا پذیری (اصل ۴ شانون – خینچین) معتبر نیست. در [۵] بیان شده با تعریف دو پارامتر (c,d) می‌توان کلاس‌های هم ارزی انتروپی‌ها را به طور منحصر به فرد تعریف کند، به این معنی که اگر پارامترهای آنها (c,d) با هم منطبق باشند، دو انتروپی در حد ترمودینامیکی برابر هستند. هر سیستم قابل قبول متعلق به یکی از این کلاسها است. از نظر نمادها (c,d) ، هانل و تورنر [۵] ،نشان دادند که همه انتروپی‌های تعمیم یافته به شکل زیر هستند

$$S_{c,d} \propto \sum_{i=1}^{W} \Gamma(d+1, 1-c\log p_i), \tag{۲}$$

که

$$\Gamma(\mu,t) = \int_t^\infty y^{\mu-1}e^{-y}dy = \int_0^{exp(-t)} (-\ln x)^{\mu-1}dx, \tag{۳}$$

۱.۲. تعیین مقدار پارامترهای انتروپی های تعمیم یافته. با قرار دادن N به عنوان حجم فضای حالت یک فرآیند تصادفی، می‌توان تعداد پیکربندی‌های سیستم (ریز وضعیت‌ها) را به صورت تابع $W(N)$ از آن در نظر گرفت. هانل و تورنر [۶] نشان دادند برای محاسبه پارامترهای (c,d) می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$\frac{1}{1-c} = \lim_{N\to\infty} N\frac{W'(N)}{W(N)}, \tag{۴}$$

$$d = \lim_{N\to\infty} \log W(N)\left(\frac{W(N)}{NW'(N)} + c - 1\right). \tag{۵}$$

۳. انواع قدم زدن تصادفی در گرافها(بخش اصلی)

در این بخش دو حالت قدم زدن تصادفی را در گرافها ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. **حالت اول:** اکنون بحث خود را بر قدم زدن تصادفی در گرافهای ساده بدون جهت با یالهای هم وزن، متمرکز می‌کنیم. گراف G را یک قسمتی با حداقل یک حلقه به طول فرد در نظر بگیرید. برای این گراف می‌توان عدد صحیح و مثبت k را چنان پیدا کرد به طوری که همه درایه‌های A^k مثبت شوند. در این صورت تعداد مسیرهایی به طول N یعنی $W(N)$ از گره p به گره q توسط $[A^N]_{pq}$ به دست می‌آید. برای ادامه بحث، لازم است از نمایش طیفی ماتریس‌ها و قضیه پرون–فروبنیوس استفاده کنیم. با استفاده از این قضیه خواهیم داشت

$$\mathbf{A}^N = \lambda_1^N(r_1^t l_1) + |\lambda_2|^N(r_2^t l_2) \Rightarrow \mathbf{A}^N = \lambda_1^N(r_1^t l_1) + o(|\lambda_2|^N). \tag{۶}$$

که λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A هستند به ظوریکه $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_m|$ و r_i و l_i به ترتیب بردارهای ویژه راست و چپ λ_i را نشان می دهند.
حال می‌توانیم قرار دهیم

$$|\lambda_2|^N(r_2^t l_2) = o(|\lambda_2|^N), \quad \lambda_1^N(r_1^t l_1) = o(\lambda_1^N), \tag{۷}$$

بنابراین

$$\mathbf{A}^N = \lambda_1^N (r_1^t l_1)(1 + o(\frac{|\lambda_2|^N}{\lambda_1^N})). \tag{۸}$$

حال از آنجا که تعداد مسیرهایی به طول N از گره p به گره q توسط $[A^N]_{pq}$ به دست می‌آید می‌توانیم قرار دهیم $W(N) \sim \lambda_1^N (r_1^t l_1)_{pq}(1 + o(\rho))$ که $\rho = (\frac{|\lambda_2|^N}{\lambda_1^N}) < 1$.

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-c} &= \lim_{N\to\infty} N \log \lambda_1 = \infty \Rightarrow c = 1, \\ d &= \lim_{N\to\infty} [N \log \lambda_1 + \log(r_1^t l_1)_{pq}(1 + o(\rho))](\frac{1}{N \log \lambda_1} + c - 1) = 1. \end{aligned} \tag{۹}$$

یعنی $(c, d) = (1, 1)$ و انتروپی این فرآیند همان انتروپی شانون است.

حالت دوم: گراف ساده بدون جهت با یالهای هم وزن G، را در نظر بگیرید. در این حالت دونده بعد از انتخاب تصادفی گره بعدی به تعداد خاصی مرحله در جای خود درجا زده و انتخابی برای حرکت به گره بعدی ندارد. بعد از گذراندن زمان لازم برای ماندن در وضعیت فعلی دونده می‌تواند گرهی غیر از گره فعلی انتخاب و حرکت کند. β را عددی حقیقی در بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید. در این نوع ویژه‌ی حرکت، دونده اگر در مرحله Nام حرکت خود روی یالها باشد، باید بعد از انتخاب تصادفی گره بعدی به عنوان مقصد به تعداد $[N^\beta]_+$ مرحله در همان مکان باقی بماند. توجه کنید که منظور از $[x]_+$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از x می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت بعد از چند مرحله درجا زدن در یک گره انتخاب بعدی در مرحله $N + [N^\beta]_+$ خواهد بود. واضح است در این نوع حرکت تعداد تصمیم گیریهای موثر متناظر با $[N^\beta]_+$ رشد می‌کند. پس تعداد مسیرهای متفاوت متناظر خواهد بود با $\mathbf{A}^{N^{1-\beta}}$. بنابراین

$$W(N) \sim \lambda_1^{N^{1-\beta}} (r_1^t l_1)_{pq}(1 + o(\rho)), \tag{۱۰}$$

که $\rho = (\frac{|\lambda_2|^{N^{1-\beta}}}{\lambda_1^{N^{1-\beta}}}) < 1$. برای این نوع حرکت خواهیم داشت

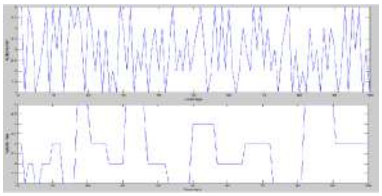
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-c} &= \lim_{N\to\infty} (1-\beta) N^{1-\beta} \log \lambda_1 = \infty \Rightarrow c = 1, \\ d &= \lim_{N\to\infty} [N^{1-\beta} \log \lambda_1 + (1-\beta) \log(r_1^t l_1)_{pq}(1 + o(\rho))] \\ &\quad \times (\frac{1}{(1-\beta) N^{1-\beta} \log \lambda_1} + c - 1) = \frac{1}{(1-\beta)}. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

۴. مثال عددی

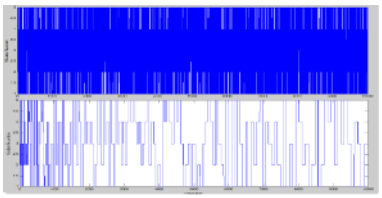
برای گراف کامل با ۵ راس، دو حالت حرکت دونده و انتخابهای تصادفی او در نرم افزار متلب شبیه سازی شده و خروجی آنها به صورت نمودار در شکلهای زیر به ترتیب برای ۱۰۰ گام و ۱۰۰۰۰ گام حرکت نمایش داده شده است. همانطور که انتروپی این دو نوع حرکت دونده که دو فرآیند تصادفی مختلف ایجاد می‌کنند متفاوت است، می‌توان دید که نمودارها نیز این مساله را تایید می‌کنند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله رابطه بین حجم فضای حالت یک فرآیند تصادفی و انتروپی تعمیم یافته آن مورد مطالعه قرارگرفت. اگر حجم فضای حالت به عنوان تابعی از اندازه سیستم داده شود، می‌توان انتروپی تعمیم یافته فرآیند را با محاسبه پارامترهای (cd) تعیین کرد. ما در یک مثال خاص نشان دادیم که چگونه سیستم‌های آماری انتروپی‌های تعمیم یافته خود را تعیین می‌کنند. در حالت اول، دونده، گره بعدی را برای جابجایی، از مجموعه گره‌های ممکن، در هر مرحله از زمان به طور یکنواخت انتخاب می‌کند. در حالت دوم، دونده، یک گره جدید برای حرکت انتخاب می‌کند و برای تعداد مشخصی مرحله در مکان جدید خود



شکل ۱. مسیر حرکت دونده روی گراف کامل در ۱۰۰ گام، بالا (حالت اول) پایین (حالت دوم)



شکل ۲. مسیر حرکت دونده روی گراف کامل در ۱۰۰۰۰ گام، بالا (حالت اول) پایین (حالت دوم)

باقی می‌ماند، به این معنی که پس از چندین مرحله، دونده به یک گره دیگر می‌رود. در حالت اول که نوع خاصی از زنجیرهای مارکوف نشان داده شده، ما انتروپی تعمیم یافته آن را همانند انتروپی شانون بدست آوردیم. در حالی که در حالت دوم که فرایند غیر مارکوفی مورد بررسی قرار گرفت، انتروپی تعمیم یافته آن محاسبه شد که انتروپی شانون نبود.

مراجع

1. F. Da, L. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso and P. R. Villas Boas, *Characterization of complex networks: A survey of measurements.* Adv. Phys. 56, (2007), 167-242.
2. M. Dehmer and A. A. Mowshowitz, *A history of graph entropy measures.* Inform. Sci. 181, (2011), 57-78.
3. E. Estrada, *The Structure of Complex Networks. Theory and Applications*, Oxford University Press, 2011.
4. C. Godsil, S. Kirkland, S. Severini and J. Smith, *Number-Theoretic Nature of Communication in Quantum Spin Systems.* Phys. Rev. Lett. 109, (2012), 50502.
5. R. Hanel and S. Thurner, *A comprehensive classification of complex statistical systems and an axiomatic derivation of their entropy and distribution functions.* Europhys. Lett. 93, (2011), 20006.
6. R. Hanel and S. Thurner, *When do generalized entropies apply? How phase space volume determines entropy.* Europhys. Lett. 96, (2011), 50003.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مساله معکوس اشتورم–لیوویل معین چپ با یک نقطه برگردان

رضا اکبری[۱،*] ، محمد شهریاری[۲]
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران ، ایران
[۲]بخش ریاضی، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

چکیده. معادله اشتورم–لیوویل با تابع وزن نامعینr با یک نقطه برگردان رادر نظر می گیریم. مساله معکوس را در شرایطی که تابع وزن دارای یک نقطه برگردان باشد را بررسی می کنیم.
واژه‌های کلیدی: معادلات اشتورم–لیوویل، نقطه برگردان ، مساله عکس طیفی..
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34B24 .

۱. مقدمه

نظریه اشتورم–لیوویل را از دو دیدگاه می توان مورد مطالعه قرار داد. دیدگاه اول مطالعه خواص جواب مساله مقدار مرزی $L = L(q(x), \alpha, \beta, r)$ با

$$\begin{aligned} &y'' + qy = \lambda ry \\ &y(a)\cos(\alpha) + y'(a)\sin(\alpha) = 0 \\ &y(b)\cos(\beta) + y'(a)\sin(\beta) = 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

است که به نظریه اشتورم–لیوویل موسوم است و دیدگاه دیگر موسوم به مساله معکوس نظریه اشتورم–لیوویل است که در آن با معلوم بودن خواص طیف متناظر به مساله مقدار اولیه، وجود و منحصربفرد بودن تابع پتانسیلq بررسی می شود. مقالات زیادی از این نوع مساله ها نه تنها برای حالتی که r یک تغییر علامت دارد، نوشته شده حتی برای r نامعین نیز تحقیقات و پژوهش های زیادی انجام یافته است. کار ما توسعه نتایج [۳] و [۴] در حالتی که r دارای یک نقطه برگردان در بازه $[a, b]$ است $(a < 0 < b)$. بدون اینکه به کلیت مساله خللی وارد شود نقطه برگردان را نقطه صفر، تابع $r(x)$ را در $[a, 0)$ منفی و در $(0, b]$ مثبت در نظر می گیریم. فرض کنید $r(x)$تابع مثبت به طور مطلق پیوسته در $(0, b]$ و تابع منفی به طور مطلق پیوسته در $[a, 0)$ باشد بعلاوه فرض کنید q و $\tilde{q}$ توابع با مقدار حقیقی و متعلق به $L^1[a, b]$ باشند به طوری که:

$$ly = -y'' + qy, \quad \tilde{l}y = -y'' + \tilde{q}y, \quad Ry = ry$$

$(A; \alpha; \beta)$ را یک مساله ی مقدار ویژه به صورت

$$Ay = \lambda Ry, \quad 0 \neq y \in D(A)$$

*سخنران. آدرس ایمیل: r9reza@yahoo.com

در نظر می گیریم، که در آن A یک عملگر مثبت با رابطه ی $Ay = Ly$ است و دامنه ی آن عبارت است از:

$$D(A) = \left\{ y : y, y' \in AC[a,b], ly \in L^{۲}[a,b] \quad , \quad y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = ۰ \right.$$
$$\left. , \quad y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = ۰ \right\}$$

AC ؛ یعنی، به طور مطلق پیوسته و $\alpha, \beta \in [۰, \pi)$. عملگر $(\tilde{A}; \alpha; \beta)$ ، $\tilde{A}$ ، $D(\tilde{A})$ با یک روش مشابه با تعویض نقش l با $\tilde{l}$ به دست می آید. برای λ هایی که طیف (۱) نباشد، فرض می کنیم $S_\lambda = (A - \lambda R)^{-۱} R|_D$ و $\tilde{S_\lambda}$ رابه طور مشابه با جایگذاری $\tilde{A}$ به جای A تعریف می کنیم.

لم ۱.۱. عملگر $S_۰$ خودالحاقی است و برای λ یی که در طیف (۱) نباشد، S_λ در D یک عملگر کامل است.

قضیه ۲.۱. صفرهای تابع تحلیلی $\psi(\lambda)$ که همان مقادیر ویژه $(A; \alpha; \beta)$ هستند ساده وحقیقی اند، و دارای مکرری یک می باشد.

مساله دوم $(A; \alpha; \gamma)$ را طوری در نظر می گیریم که در آن به جای شرط مرزی دوم (۱) ، از شرط مرزی

$$y(b)\cos(\gamma) + y'(b)\sin(\gamma) = ۰$$

استفاده شود.

لم ۳.۱. اگر $(A; \alpha; \gamma)$ و $(\tilde{A}; \alpha; \gamma)$ دارای مقادیر ویژه مشابه باشند، آنگاه $\tilde{\phi} = \phi$. ($\tilde{\phi}$ ، ϕ به ترتیب توابع مشخصه $(A; \alpha; \gamma)$ و $(\tilde{A}; \alpha; \gamma)$ می باشند) .

قضیه ۴.۱. اگر $(A; \alpha; \gamma)$ و $(\tilde{A}; \alpha; \gamma)$ دارای مقادیر ویژه مشابه و به اضافه $\Lambda = \{n \in N | \lambda_n = \tilde{\lambda}_n\}$ و λ_n ، $\tilde{\lambda_n}$ به ترتیب مقادیر ویژه $(A; \alpha; \gamma)$ و $(\tilde{A}; \alpha; \gamma)$ باشند، آنگاه برای هر $n \in \Lambda$ ، $k_n = \tilde{k_n}$.

۲. بسطهای همگرای یکنواخت

این قسمت به قضیه ۱.۲ که وابسته به $\frac{G}{\Psi}$ هسته $(\lambda R - A)^{-۱}$ و برای $\frac{K}{\Psi}$ هسته عملگر تبدیل T ، که در بخش ۴ تعریف خواهد شد اختصاص دارد. بسط این سریها در اثبات نتایج بدست آمده در زیر دنباله ها نقش اساسی دارد در اثبات قضیه ۱.۲ روشی را بکار می بندیم که مشابه روش بکار برده شده در [۳] است که در آن G تابع گرین معادله دیفرانسیل و Ψ تابع ویژه متناظر معادله دیفرانسیل (۱) است.

قضیه ۱.۲. فرض کنید

$$G(x;y;\lambda) = \begin{cases} v(x,\lambda)w(y,\lambda) & a \le y < x \le b \\ v(y,\lambda)w(x,\lambda) & a \le x < y \le b \end{cases} \quad (۲)$$

$$K(x;y;\lambda) = \begin{cases} \tilde{v}(x,\lambda)w(y,\lambda) & a \le y < x \le b \\ v(y,\lambda)\tilde{w}(x,\lambda) & a \le x < y \le b \end{cases} \quad (۳)$$

آنگاه برای $\lambda \neq \lambda_n$
خواهیم داشت:

$$\frac{G(x;y;\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{j \in Z^\circ} \frac{k_j w_j(x) w_j(y)}{(\lambda - \lambda_j)\psi'(\lambda_j)} \quad (۴)$$

$$\frac{K(x;y;\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{j \in Z^\circ} \frac{K(x;y;\lambda_j)}{(\lambda - \lambda_j)\psi'(\lambda_j)} \quad (۵)$$

به طوری که جمع های بالا همگرای یکنواخت به ازای $(x,y)\in[a,b]^2$ هستند به اضافه

$$\frac{[\tilde{v}w-\tilde{w}v](x;\lambda)}{\psi(\lambda}=\sum_{j\in Z^\circ}\frac{(\tilde{v}-k_j\tilde{w})(x;\lambda_j)w_j(x)}{(\lambda-\lambda_j)\psi'(\lambda_j)} \tag{۶}$$

نیز بطور یکنواخت همگرا در $x\in[a,b]$ است.

اثبات. برای اثبات قضیه ابتدا شکل مجانبی مقادیر ویژه و توابع ویزه را برای حالت مورد نظر بدست آورده که در آن مقادیر ویژه به صورت زیر خواهند بود:

$$\sqrt{\lambda_n}=\begin{cases}\frac{(n-\frac{1}{4})\pi}{\int_\circ^b\sqrt{r(t)}}+O(\frac{1}{n}) & ,\quad \sin\beta\neq\circ\\ \frac{(n-\frac{3}{4})\pi}{\int_\circ^b\sqrt{r(t)}}+O(\frac{1}{n}) & ,\quad \sin\beta=\circ\end{cases} \tag{۷}$$

$$\sqrt{\lambda_n}=\begin{cases}-\frac{(n-\frac{1}{4})\pi}{\int_a^\circ\sqrt{-r(t)}}+O(\frac{1}{n}) & ,\quad \sin\alpha\neq\circ\\ -\frac{(n-\frac{3}{4})\pi}{\int_a^\circ\sqrt{-r(t)}}+O(\frac{1}{n}) & ,\quad \sin\alpha=\circ\end{cases} \tag{۸}$$

و برای $|n|\to\infty$ داریم:

$$\int_a^b rw_n^2=\mu(n,\alpha,\beta)[1+O(\frac{1}{n})] \tag{۹}$$

که در آن علامت $\mu(n,\alpha,\beta)$ مثبت و مستقل از q است. حال برای $n\in N$ فرض کنیم

$$\Gamma_n=\Gamma_n^{-1}\bigcup\Gamma_n^\circ\bigcup\Gamma_n^1 \tag{۱۰}$$

که در آن

$$\Gamma_n^\circ=\{(\theta_1(n)+i\zeta)^2:\quad \zeta\in[-\theta_2(n),\theta_2(n)]\} \tag{۱۱}$$

$$\Gamma_n^1=\{(\zeta-i\theta_2(n))^2:\quad \zeta\in[\circ,\theta_1(n)]\} \tag{۱۲}$$

$$\Gamma_n^\circ=\{(-\zeta+i\theta_2(n))^2:\quad \zeta\in[-\theta_1(n),\circ]\} \tag{۱۳}$$

که در آن $\theta_1(n)$ ، $\theta_2(n)$ حالت حدی روابط ۷ و ۸ است، همچنین $k=\arctan\sqrt{|\frac{r(\circ^-)}{r(\circ^+)}|}$ و $k\in(\circ,\frac{\pi}{2})$. با استفاده روابط ۱۰ − ۱۳ کرانی برای روابط ۴ − ۶ بدست می آوریم که در اثبات قضایای اصلی مورد استفاده قرارمی گیرد. □

۳. عملگر تبدیل

درکل این بخش فرض می کنیم $k_n=\tilde{k_n}$ و $\lambda_n=\tilde{\lambda_n}$ برای تمام $n\in\Lambda$. فرض کنیم $H=D-\{w_n:n\in\Lambda_\circ\}$ و $\tilde{H}=D-\{\tilde{w}_n:n\in\Lambda_\circ\}$. تبدیل $T:H\to\tilde{H}$ را به صورت $Tw_n=\tilde{w}_n$ برای هر $n\in\Lambda$ تعریف می کنیم.

لم ۱.۳. عملگر $T:H\to\tilde{H}$ کراندار است.

لم ۲.۳. در فضای H ، برای $\lambda\neq\lambda_n$ به ازای هر $n\in\Lambda$ رابطه $TS_\lambda=\tilde{S}_\lambda T$ برقرار است.

قضیه ۳.۳. برای $f\in H$ داریم:

$$Tf(x)=f(x)-\sum_{\Lambda_\circ}\tilde{y_n}\int_a^x w_nf(r)dr$$

که در آن

$$\tilde{y_n}=\frac{\tilde{u}_n-k_n\tilde{z}_n}{\psi'(\lambda)}$$

۴. نتایج اصلی

قضیه اصلی ما مربوط به نتایج [۳] ، [۲] و [۱] است در حالتی که r نامعین است.

قضیه ۱.۴ فرض کنید λ_n مقادیر ویژه $(A;\alpha;\beta)$ باشد و $\tilde{\lambda_n}$ را به طور مشابه مقادیر ویژه $(\tilde{A};\alpha;\beta)$ باشد، فرض کنیم γ در شرط $\sin(\beta-\gamma)\neq 0$ صدق کند و $(A;\alpha;\beta)$ و $(\tilde{A};\alpha;\beta)$ دارای طیف مشابه باشند، فرض کنیم $\Lambda_0 \subseteq Z^\circ$ یک مجموعه متناهی و $\Lambda = Z^\circ - \Lambda_0$ و برای هر $n\in\Lambda$ ، $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$. در اینصورت تقریبا همه جا خواهیم داشت:

$$q = \tilde{q} + \sum_{\Lambda_0}[2r(\tilde{y}_n w_n)' + \tilde{y}_n' w_n r']$$

که در آن $\tilde{y}_n$ و w_n به ترتیب جواب مناسب از $\tilde{L}\tilde{y} = \lambda_n r\tilde{y}$ و $Ly = \lambda_n ry$ است.

قضیه ۲.۴ فرض کنید λ_n و w_n مقادیر ویژه از $(A;\alpha;\beta)$ باشند، که w_n نرمال شده با $w_n = \sin\alpha$ و $w_n' = \cos\alpha$ ، فرض کنید $\rho_n = \|w_n\|$ باشد و به طور مشابه $\tilde{\rho}_n$ و $\tilde{\lambda}_n$ را نیز با تغییر A با $\tilde{A}$ بدست می آوریم، فرض کنیم $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ و $\rho_n = \tilde{\rho}_n$ برای هر $n\in Z^\circ$ آنگاه:

$$q = \tilde{q}$$

مراجع

1. P.A.Binding, P.J.Browne and B.A.Watson, *A Inverse spectral problems for left-definite Sturm-Lioville equation with indefinite weight*,J.Math.Anal.Appl.271(2002)383-408
2. I.M.Gelfand, B.M.Levitan, *On the determination of a diffrenial equation from its spectral function*, Amer. Math.Soc.Transl.Ser, 21 (1955), 2530-304.
3. H.Hochstadt, *On inverse problems associated with Sturm-Liouville problem*, J.Differential Equation, 17 (1975), 220-235.
4. M.Sahriari, *Inverse Sturm-Lioville problems with transmission and spectral parameter boundary conditions* , Comput.Methods Differ. Equ. 2(3).2014, 123-139

پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

ارزش‌گذاری اختیار معامله بر اساس یک روش ترکیبی

محدثه شریفی‌زاده * و محمد ایزدی

بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

هدف این مقاله، ارائه یک روشی ترکیبی کارآمد برای یافتن جواب‌های تقریبی معادله دیفرانسیل جزئی بلک–شولز است، که برای ارزش‌گذاری قیمت اختیار معامله خرید و فروش اروپایی در بازاهای مالی استفاده می‌شود. ابتدا، گسسته سازی زمانی براساس روش سری تیلور انجام می‌شود و سپس از روش هم‌محلی بر پایه چندجمله‌ای‌های بسل برای تقریب متغیر مکانی استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله بلک–شولز، توابع بسل، نقاط هم‌محلی، بسط تیلور

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 41A10، 65M70، 91G99

۱ مقدمه

ارزش گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین مسائل در مشتقات مالی است، که بطور گسترده در پوشش ریسک در بازارهای مالی استفاده می‌شوند. از این رو تجار می‌توانند استراتژی‌ها و پرتفوهای خود را با استفاده از اختیار معامله‌ها تنظیم کنند. یک قرار داد اختیار معامله فروش به شما این اختیار را می‌دهد که در زمان مشخص T و با قیمت سررسید E دارایی تحت مالکیت خود را بفروشید. از طرفی قرار داد اختیار معامله خرید به شما این اختیار را می‌دهد که دارایی مورد نظرتان را در زمان مشخص T و با قیمت سررسید E خریداری کنید. بلک و شولز یک مدل برای ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله اروپایی بدست آوردند. در مدل بلک–شولز ارزش اختیار معامله اروپایی از حل معادله جزئی زیر بدست می‌آید [۱]

$$\frac{\partial V}{\partial t'} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{۱}{۲}\sigma^۲S^۲\frac{\partial^۲ V}{\partial S^۲} - rV = ۰, \qquad (۱)$$

بطوریکه که S ارزش جاری سهم در زمان t'، r نرخ بهره بدون ریسک و σ نوسانات تحت دارایی پایه هستند. فرض کنید E قیمت سررسید دارایی باشد. تابع باز پرداخت اختیار معامله خرید اروپایی $V(S,T) = \max(S-E, ۰)$ است و شرایط مرزی اختیار معامله‌ی خرید اروپایی به صورت زیربیان می‌شوند

$$V(۰,t') = ۰, \quad V(S,t') \sim S - Ee^{-r(T-t')}, \quad \text{وقتی} \quad S \longrightarrow \infty.$$

برای راحتی و با استفاده از جانشینی $t = T - t'$ معادله (۱) به فرم زیر درمی‌آید

$$V_t - \frac{۱}{۲}\sigma^۲S^۲\,V_{SS} - rS\,V_S + rV = ۰. \qquad (۲)$$

با استفاده از بازه $[۰, S_{\max}]$ در مسایل عملی، شرایط اولیه و مرزی مدل بلک–شولز برای اختیار معامله خرید اروپایی برای $t \in [۰,T],\ S \in [۰, S_{\max}]$ به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$V(S,۰) = \max(S-E,۰), \quad V(۰,t) = ۰, \quad V(S_{\max},t) = S_{\max} - Ee^{-rt}. \qquad (۳)$$

* سخنران. آدرس ایمیل: email@email.com

۲ گسسته‌سازی متغیر زمان

هدف اصلی این مقاله ارائه‌ی یک روش تقریبی جدید برای معادله (۱) است. با توجه به این واقعیت که معادله بلک–شولز یک معادله وابسته به زمان است، لذا توسعه یک الگوریتم مناسب و دارای مرتبه دقت بالا برای پیشروی در زمان حائز اهمیت است. برای این منظور، روش تیلور با دقت مرتبه دوم استفاده می‌شود. برای گسسته سازی معادله بلک–شولز در زمان، نخست بازه $[۰, T]$ را به N زیر بازه مساوی با نقاط شبکه‌ای $t_n = n\Delta t$ برای $n = ۰, ۱, \ldots, N$ ، تقسیم‌بندی می‌کنیم. در اینجا $t_۰ = ۰$ و $t_N = T$ و هر گام زمانی برابر با $\Delta t = t_n - t_{n-۱}$ است. برای دست‌یابی به یک تقریب مرتبه دو در زمان، با بکارگیری روش بسط تیلور رابطه زیر برای V_t^n نتیجه می‌شود

$$V_t^n = \frac{V^{n+۱} - V^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{۲} V_{tt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^۲). \tag{۴}$$

با مشتق‌گیری از معادله بلک–شولز (۱) نسبت به زمان و جانشینی $t = t^n$ داریم

$$V_{tt}^n = \frac{۱}{۲}\sigma^۲ S^۲ (V_t^n)_{SS} + rS(V_t^n)_S - rV_t^n. \tag{۵}$$

اکنون، با جایگذاری رابطه‌ی تفاضلی $V_t^n = (V^{n+۱} - V^n)/\Delta t$ در معادله‌ی (۵)، به معادله تفاضلی زیر می‌رسیم

$$\Delta t\, V_{tt}^n = \frac{۱}{۲}\sigma^۲ S^۲ (V_{SS}^{n+۱} - V_{SS}^n) + rS(V_S^{n+۱} - V_S^n) - r(V^{n+۱} - V^n). \tag{۶}$$

در نهایت، با قرار دادن عبارت قبل در سمت راست رابطه‌ی (۴) و جایگذاری V_t^n از معادله بلک–شولز (۱) در سمت چپ رابطه‌ی (۴) و سپس مرتب کردن جملات حاصل، معادله گسسته‌سازی زمان زیر برای معادله بلک–شولز بدست می‌آید

$$\underbrace{۲(r\Delta t + ۲)}_{K_{۰,n}(S)} V^{n+۱} - \underbrace{۲rS\Delta t}_{K_{۱,n}(S)} V_S^{n+۱} - \underbrace{\sigma^۲ S^۲ \Delta t}_{K_{۲,n}(S)} V_{SS}^{n+۱} = \underbrace{(۴ - ۲r\Delta t)V^n + (۲rS\Delta t)V_S^n + (\sigma^۲ S^۲ \Delta t)V_{SS}^n}_{f_n(S)}, \tag{۷}$$

برای $n = ۰, ۱, \ldots$. همچنین بنابر (۳) شرایط اولیه و مرزی برای معادله مرتبه دوم (۷) به فرم زیر درمی‌آیند

$$V^{۰}(S) = \max(S - E, ۰), \quad V^{n+۱}(۰) = ۰, \quad V_{max}^{n+۱} := V^{n+۱}(S_{\max}) = S_{\max} - Ee^{-rt_{n+۱}}. \tag{۸}$$

۳ روش هم‌محلی تیلور–بسل

در ادامه و در هر مرحله‌ی زمانی، برای بدست آوردن تقریبی از جواب معادله (۷) نسبت به متغیر مکانی از توابع جدید بسل در رابطه با نقاط هم‌محلی استفاده می‌کنیم. در حقیقت چندجمله‌ای‌های بسل مرتبه m به فرم زیر تعریف می‌شوند [۲]

$$\mathbb{B}_m(S) = \sum_{k=۰}^{m} \frac{۱}{۲^k\, k!} \frac{(m+k)!}{(m-k)!} S^k = \sum_{k=۰}^{m} b_{m,k}\, S^k, \quad m = ۰, ۱, \cdots. \tag{۹}$$

مزیت اصلی این چند جمله‌ای‌ها می‌توان به این صورت بیان کرد که همه‌ی ضرایب این چندجمله‌ای‌ها اعداد مثبت هستند. اگر فرض کنیم تقریب جواب V^n از معادله (۹) در گام زمانی t_n برابر با تابع معلوم $\mathcal{V}_{n,M}(S)$ باشد، جواب تقریبی $\mathcal{V}_{n+۱,M}(S)$ را برای گام زمانی بعدی $t_{n+۱}$، $n = ۰, ۱, \cdots, N$ به شکل زیر درنظر گرفته می‌شود

$$\mathcal{V}_{n+۱,M}(S) = \sum_{m=۰}^{M} a_m^n \mathbb{B}_m(S), \quad S \in [۰, S_{\max}], \tag{۱۰}$$

که در آن ضرایب مجهول a_m^n برای $m = ۰, ۱, \cdots, M$ بایستی تعیین شوند. می‌توان سری متناهی (۱۰) را به فرم ماتریسی به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\mathcal{V}_{n+۱,M}(S) = \boldsymbol{B}_M(S)\, \boldsymbol{A}_M^n, \tag{۱۱}$$

به‌طوریکه بردارهای نامعلوم $\mathbf{A}_M^n$ و $\mathbf{B}_M(S)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{A}_M^n = \begin{bmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_M^n \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{B}_M(S) = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_0(S) & \mathbb{B}_1(S) & \cdots & \mathbb{B}_M(S) \end{bmatrix}.$$

علاوه بر این ما می‌توانیم $\boldsymbol{B}_M(S)$ را در نمایش ماتریسی به شرح زیر بنویسیم

$$\mathbf{B}_M(S) = \mathbf{X}_M(S)\mathbf{D}^T, \quad \mathbf{X}_M(S) = \begin{bmatrix} 1 & S & S^2 & \cdots & S^M \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

و ماتریس پایین مثلثی $\boldsymbol{D} = (b_{m,k})_{m,k=0}^M$ از اندازه $(M+1)\times(M+1)$ با درایه‌های تعریف شده در رابطه (۹) است. از طرف دیگر می‌توان با یک محاسبه ساده رابطه‌ی بین $\boldsymbol{X}_M(S)$ و مشتق اول آن را بدست آورد که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{d}{dS}\mathbf{X}_M(S) = \mathbf{X}_M(S)\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & M \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)}. \tag{۱۳}$$

در ادامه، بایستی مجهولات V^{n+1}، V_S^{n+1} و V_{SS}^{n+1} در (۷) را به فرم‌های ماتریسی نمایش دهیم و سپس از نقاط هم‌محلی برای پیدا کردن ضرایب مجهول استفاده نمود. در ادامه با ترکیب روابط (۱۱) و (۱۲) داریم

$$\mathcal{V}_{n+1,N}(S) = \mathbf{X}_N(S)\mathbf{D}^T\mathbf{A}_M^n \tag{۱۴}$$

برای یافتن یک جواب تقریبی به فرم (۱۴) برای معادله‌ی (۷) از نقاط هم‌محلی $S_i = S_{\max}\frac{1-r_i}{2}$ استفاده می‌شود که در آن $r_i := \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2M+2})$ برای $i = 0, 1, \ldots, M$ ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف مرتبه M روی $(-1, 1)$ هستند. با استفاده از این نقاط و جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۱۴) داریم:

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{Y}\mathbf{D}^T\mathbf{A}_M^n, \quad \mathbf{V}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{n+1,M}(S_0) \\ \mathcal{V}_{n+1,M}(S_1) \\ \vdots \\ \mathcal{V}_{n+1,M}(S_M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_M(S_0) \\ \mathbf{X}_M(S_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_M(S_M) \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

با کمک روابط (۱۴) و (۱۳) می‌توان مشتقات موجود در رابطه‌ی (۷) را به فرم ماتریسی به صورت زیر نمایش داد

$$V_S^{n+1} \approx \mathcal{V}_{n+1,M}^{(1)}(S) = \mathbf{X}_M(S)\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{D}^T\mathbf{A}_M^n, \; V_{SS}^{n+1} \approx \mathcal{V}_{n+1,M}^{(2)}(S) = \mathbf{X}_M(S)(\boldsymbol{Q}^T)^2\boldsymbol{D}^T\mathbf{A}_M^n. \tag{۱۶}$$

به‌طور مشابه، با استفاده از نقاط هم‌محلی، مشتقات اول و دوم در (۱۶) می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$\dot{\mathbf{V}}_{n+1} = \mathbf{Y}\boldsymbol{Q}^T\mathbf{D}^T\boldsymbol{A}_M^n, \quad \ddot{\mathbf{V}}_{n+1} = \mathbf{Y}(\boldsymbol{Q}^T)^2\mathbf{D}^T\boldsymbol{A}_M^n, \tag{۱۷}$$

به‌طوریکه $\dot{\mathbf{V}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{n+1,M}^{(1)}(S_0) & \mathcal{V}_{n+1,M}^{(1)}(S_1) & \ldots & \mathcal{V}_{n+1,M}^{(1)}(S_M) \end{bmatrix}^T$ و

$$\ddot{\mathbf{V}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{n+1,M}^{(2)}(S_0) & \mathcal{V}_{n+1,M}^{(2)}(S_1) & \ldots & \mathcal{V}_{n+1,M}^{(2)}(S_M) \end{bmatrix}^T.$$

با استفاده از تقریب‌های $\mathcal{V}_{n+1,N}(S), \mathcal{V}_{n+1,N}^{(1)}(S), \mathcal{V}_{n+1,N}^{(2)}(S)$ و سپس با جایگذاری نقاط هم‌محلی در (۷) داریم

$$\mathbf{K}_{2,n}\ddot{\mathbf{V}}_{n+1} + \mathbf{K}_{1,n}\dot{\mathbf{V}}_{n+1} + \mathbf{K}_{0,n}\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{F}_n, \tag{۱۸}$$

که در آن $\mathbf{K}_{j,n}$ ماتریس‌های قطری با درایه‌های قطر اصلی به فرم $\begin{bmatrix} K_{j,n}(S_0) & K_{j,n}(S_1) & \dots & K_{j,n}(S_M) \end{bmatrix}^T$ برای $j = 0, 1, 2$ و بردار $\mathbf{F}_n$ به صورت $\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} f_n(S_0) & f_n(S_1) & \dots & f_n(S_M) \end{bmatrix}^T$ تعریف می‌شوند. با جانشینی روابط (۱۵) و (۱۷) در معادله (۱۸) به معادلات ماتریسی اساسی زیر می‌رسیم

$$\underbrace{\left\{\mathbf{K}_{2,n}\mathbf{Y}(\boldsymbol{Q}^T)^2 + \mathbf{K}_{1,n}\mathbf{Y}\boldsymbol{Q}^T + \mathbf{K}_{0,n}\mathbf{Y}\right\}}_{\boldsymbol{W}_n} \mathbf{D}^T\mathbf{A}_M^n = \mathbf{F}_n, \quad \text{یا} \quad [\boldsymbol{W}_n; \mathbf{F}_n] \tag{۱۹}$$

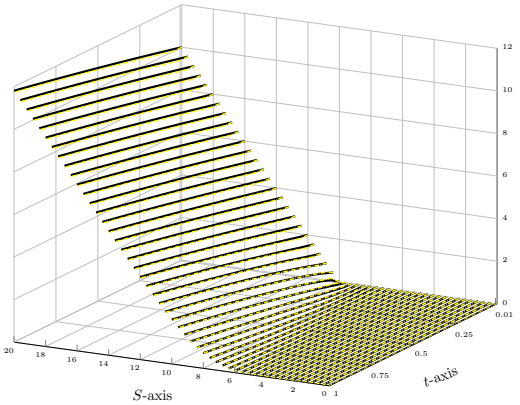
اکنون بایستی شرایط مرزی (۸) را به فرم ماتریسی تبدیل کنیم و سپس وارد دستگاه فوق نماییم. بر اساس نمایش (۱۴) این شرایط می‌توانند به صورت ماتریسی زیر بیان شوند

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{W}}_{n,0}\,\boldsymbol{A}_M^n = 0, & \bar{\mathbf{W}}_{n,0} := \mathbf{X}_M(0)\boldsymbol{D}^T = \begin{bmatrix} \bar{w}_{0,0} & \bar{w}_{0,1} & \cdots & \bar{w}_{0,M} \end{bmatrix}. \\ \bar{\mathbf{W}}_{n,m}\,\boldsymbol{A}_M^n = V_{max}^{n+1}, & \bar{\mathbf{W}}_{n,m} := \mathbf{X}_M(S_{max})\boldsymbol{D}^T = \begin{bmatrix} \bar{w}_{m,0} & \bar{w}_{m,1} & \cdots & \bar{w}_{m,M} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

در نهایت، بجای سطر اول و اخر ماتریس افزوده $[\mathbf{W}_n; \mathbf{F}_n]$ ماتریس‌های سطری $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_{n,0}; 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_{n,S}; V_{max}^{n+1} \end{bmatrix}$ قرار می‌دهیم. بنابراین دستگاه ماتریس اساسی تغییر یافته $\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{W}}_n; \bar{\boldsymbol{F}}_n \end{bmatrix}$ بدست می‌آید. با حل این دستگاه معادلات خطی، ضرایب بسل مجهول در (۱۰) نتیجه می‌شوند.

۴ نتایج عددی

در معادله بلک–شولز برای قرارداد اختیار معامله‌ی خرید اروپایی، پارامترهای $E = 10, r = 0.02, \sigma = 0.25$ و $S_{max} = 20$ در نظر بگیرید. با فرضیات $M = 15, N = 20$ و $T = 1$، نمودار جواب‌های تقریبی به همراه جواب‌های دقیق متناظر در شکل ۱ به نمایش گذاشته شده‌اند.



شکل ۱: مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی معادله بلک–شولز در زمان‌های مختلف با روش پیشنهادی

۵ نتیجه‌گیری

یک روش ترکیبی جدید مبتنی بر بسط تیلور و روش هم‌محلی برای حل معادله بلک–شولز ارائه شد. اساس روش بصورت ریاضی بیان شد و کارایی آن با یک مثال عددی مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

[1] R. Doostaki and M.M. Hosseini, Option pricing by the Legendre wavelets method, Comput. Econ. (2021) https://doi.org/10.1007/s10614-021-10100-1.

[2] M. Izadi and C. Cattani, *Generalized Bessel polynomial for multi-order fractional differential equations*, Symmetry 12 (2020), no. 8, 1260.

[3] M. Izadi, *Numerical approximation of Hunter-Saxton equation by an efficient accurate approach on long time domains*, U.P.B. Sci. Bull., Series A 83 (2021), no. 1, 291–300.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد در بهینه سازی حجم جعبه

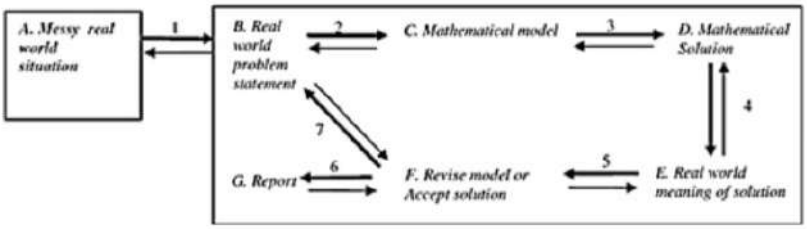
کاظم عبداله پور*

بخش آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنرِکرمان، کرمان، ایران

چکیده. هدف اصلی این مطالعه، استفاده از ظرفیت رویکرد کاربرد و مدل‌سازی در آموزش ریاضی دانشگاهی است. بدین منظور، از یک فعالیت مدل سازی به نام جعبه کیک استفاده شد. برای نشان دادن، مدل‌سازی ریاضی از یک چرخه استفاده شد. این چرخه دوبار طی شد، که در مرحله اول آن مفهوم انتگرال و نمودار تابع و در مرحله دوم، مفهوم آزمون مشتق اول و دوم برای تابع یک متغیره استفاده شد. تکرار چرخه مدل‌سازی سبب شد، تا ابعاد بزرگترین جعبه بدست آید و سپس با استفاده از آن جعبه ساخته شود. به طور کلی این مطالعه، نشان داد رویکرد کاربرد و مدل‌سازی ظرفیت خوبی برای به کارگیری مفاهیم ریاضی در حل مسائل دنیای واقعی دارد.
واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی ریاضی، حجم، جعبه کیک، مشتق و انتگرال.

۱. مقدمه

امروزه، از انجایی که ریاضی در دنیای واقعی کاربرد دارد، در همین راستا نیاز به ابزاری داریم تا بتوان با استفاده از آن بین دنیای واقعی و دنیای ریاضی ارتباط برقرار کرد و بتوان از دانش ریاضی در حل مسائل دنیای واقعی استفاده نمود.از طرف دیگر، مدل‌سازی ریاضی یک فرآیند رفت و برگشتی، بین دنیای واقعی و دنیای ریاضی است. محققان حوزه مدل‌سازی و کابرد، برای نشان دادن این فرایند از چرخه استفاده می‌کنند. استیل من و همکاران (۲۰۰۷) [۳] از چرخه ۷ مرحله‌ای زیر برای نشان دادن فرایند مدل‌سازی استفاده کردند که در شکل زیر نشان داده شده است:



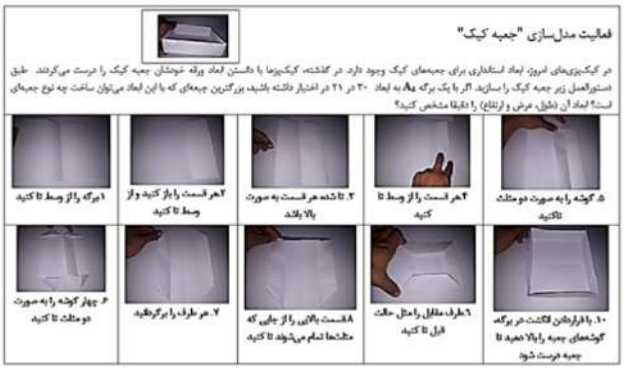
شکل ۱. چرخه مدل‌سازی استیل‌من و همکاران (۲۰۰۷) [۱]

با توجه به نمایش مدل سازی ریاضی به صورت یک چرخه، این مطالعه در پی آن است: چگونه رویکرد«مدل‌سازی و کاربرد» در آموزش ریاضی دانشگاهی می‌تواند حجم جعبه کیک را بهینه کند؟

*سخنران. آدرس ایمیل: k_a_abdollahi@yahoo.com

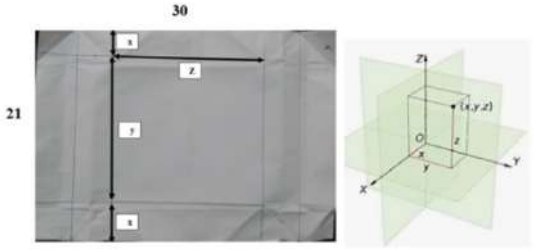
۲. نتایج اصلی

با توجه به هدف این مطالعه، برای نشان دادن ظرفیت مدل‌سازی در آموزش ریاضی دانشگاهی، از یک فعالیت مدل‌سازی زیر استفاده شد که اطلاعات ان در شکل ۲ آمده است:



شکل ۲. فعالیت مدل‌سازی جعبه کیک کریرا و بایوا (۲۰۱۱) [۳]

برای حل این فعالیت مدل‌سازی، بایستی فرایند شکل ۱ طی شود. در مرحله یک، مسئله واقعی که درون این فعالیت وجود دارد بیان می شود، که در این فعالیت، با توجه به جعبه‌ای که با الگوی شکل ۲ ساخته می‌شود، بزرگترین جعبه چه نوع جعبه‌ای است؟ بعد از بیان این مسئله واقعی، مسئله ریاضی این مسئله به این صورت بیان می‌شود، ماکزیمم حجم جعبه‌ای با الگوی شکل ۲، چه جعبه‌ای است (مرحله دوم). برای حل مسئله ریاضی، مدل ریاضی به این صورت در می آوریم: جعبه ساخته شده را روی محور سه بعدی قرار می‌دهیم و صفحه گسترده آن را ترسیم می‌کنیم که درشکل زیر آمده است:



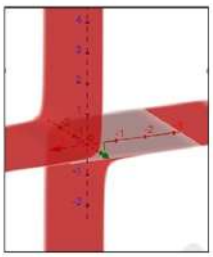
شکل ۳. مدل ریاضی برای حل مسئله

برای به دست آوردن عرض جعبه، با توجه به صفحه گسترده شکل، می‌توان نتیجه گرفت که بین ارتفاع x و عرض y این رابطه برقرار است: $y + ۲x = ۲۱$با توجه رابطه حجم با استفاده از انتگرال سه گانه، رابطه (۱) زیر را داریم:

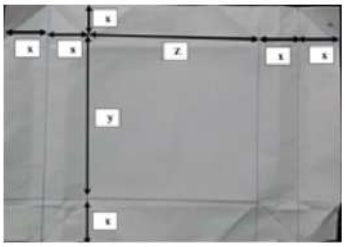
$$\circ \leq y \leq ۲۱ - ۲x, V = \int_{\circ}^{x} \int_{\circ}^{۲۱-۲x} \int_{\circ}^{z} dsdydt = z\left(۲۱x - ۲x^{۲}\right)$$

برای به دست آوردن، از نمودار استفاده می کنیم. نمودار رابطه (۱) که با استفاده از نرم افزار جئوجبرا در شکل ۴ رسم شده است:

شکل ۴ نشان می دهد رابطه (۱) که برای حجم به دست آمده است مقدار ماکزیمم ندارد. بنابراین، این جواب در دنیای واقعی حاکی از این است، بزرگترین جعبه با این روش وجود ندارد. بنابراین، این مدل پذیرفتنی نیست و طبق چرخه شکل ۱، چرخه مدل‌سازی بایستی دوباره طی شود. در چرخه شماره ۲، به بیان مسئله دنیای واقعی یعنی بزرگترین جعبه رجوع می‌شود، در مرحله بعد، مدل ریاضی چرخه شماره ۱ که در شکل ۳ آمد ،مورد بازبینی قرار می‌گیرد که در این بازبینی، به رابطه



شکل ۴. رسم نمودار رابطه یک با استفاده از نرم افزار جئوجبرا



شکل ۵. مدل ریاضی بازبینی شده

بین طول جعبه یعنی z و ارتفاع جعبه یعنی x پی برده می‌شود، که مدل بازبینی شده به صورت زیر در می‌آید:
همان‌طور که در صفحه گسترده مدل ریاضی بازبینی شده، مشاهده می‌شود علاوه براینکه بین ارتفاع و عرض جعبه رابطه $y + ۲x = ۲۱$ برقرارست، بین طول جعبه که Z می‌باشد با ارتفاع، رابطه $z + ۴x = ۳۰ z = ۳۰ - ۴x$ ، برقرار است.
از این، رو رابطه (۱)به صورت:

$$V(x) = \int_{۰}^{x} \int_{۰}^{۲۱-۲x} \int_{۰}^{۳۰-۴x} dzdydt = ۸x^{۳} - ۱۴۴x^{۲} + ۶۳۰x$$

با توجه به اینکه حجم در رابطه (۲) یک متغیره است، براساس قضایای آزمون مشتق اول و دوم کتاب استوارات (۲۰۰۹، ص. ۲۷۴)، [۲] ماکزیمم با استفاده از رابطه‌های زیر تعیین می‌شود:

$$V = ۸x^{۳} - ۱۴۴x^{۲} + ۶۳۰x,$$

$$V' = ۲۴x^{۲} - ۲۸۸x + ۶۳۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad x_{۱} = ۲/۸, x_{۲} = ۹/۱$$

$$V'' = ۴۸x - ۲۸۸ \quad \Rightarrow \quad V''(۲/۸) < ۰$$

با توجه به آزمون مشتق دوم رابطه (۵)، بیشترین حجم، در ارتفاعی به طول ۸/۲ رخ می‌دهد که مقدار آن به صورت زیر است:

$$V(۲/۸) = ۸(۲/۸)^{۳} - ۱۴۴(۲/۸)^{۲} + ۶۳۰(۲/۸) = ۸۱۰/۶۵۶$$

۳. نتیجه‌گیری

این مطالعه نشان داد می‌توان با استفاده از مدل‌سازی ریاضی ظرفیت جدید در آموزش ریاضی دانشگاهی ایجاد نمود که نمونه آن به تصویر کشیدن مفهوم انتگرال و مشتق در بهینه‌سازی یک فعالیت دنیای واقعی این مطالعه بود.

مراجع

1. G, Stillman, P., Galbraith, J., Brown, & I, Edwards, I *A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), Mathematics: Essential research, essential practice, 2, 688–697. Adelaide: MERGA, 2007.*
2. J, Stewart *Calculus: Concepts and contexts. Cengage Learning,2009.*
3. S. Carreira.A.,M, Baioa *"Students' Modelling Routes in the Context of Object Manipulation and Experimentation in Mathematics". In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.)", Trends in teaching and learning of mathematical modeling: ICTMA 14, New York: Springer, pp. 211-220, 2011.*

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مدل‌سازی مالی توسط فرآیندهای لِوی

محمد فرحناکی[۱*]
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه پیام نور روانسر، ایران

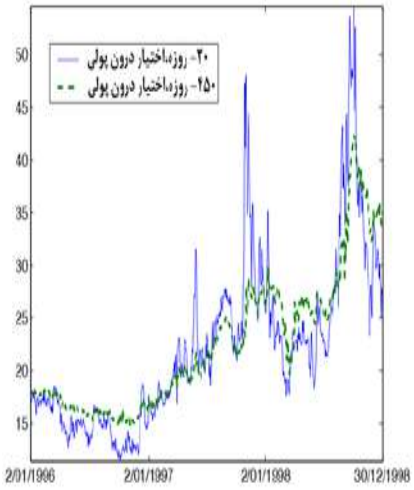
چکیده. در این مقاله مدل‌سازی های مالی به روش پول لِوی دانشمند فرانسوی ارائه می‌شود. شناخته شده‌ترین نمونه فرآیند لِوی، فرآیندهای حرکتی براونی و فرآیندهای پواسون هستند. به جز حرکت براونی با رانش، سایر فرآیندهای لِوی مسیرهای ناپیوسته دارند.فرآیندهای لِوی دسته‌ای از فرآیندهای تصادفی با مسیرهای ناپیوسته است که در عین حال به اندازه کافی ساده برای مطالعه و به اندازه کافی کامل برای کاربردها است، یا حداقل به عنوان عناصر سازنده مدل‌های واقع بینانه تر مورد استفاده قرار می‌گیرد.مدل‌های برجسته لِوی با اجازه دادن به جهش قیمت سهام با حفظ استقلال و ثبات بازده، مجموعه کلاسیک بلک شولز را تعمیم می‌دهند. شاید مهمترین نتیجه تئوری فرآیندهای لِوی این باشد که اندازه‌گیری پرش از یک فرآیند لِوی کلی نیز یک اندازه‌گیری تصادفی پواسون است .
واژه‌های کلیدی: فرآیندهای لِوی، مدل بلک–شولز، فرآیند پواسن ، تلاطم ضمنی، پوشش ریسک.

۱. مقدمه

مدل‌های برجسته لِوی با اجازه دادن به جهش قیمت سهام با حفظ استقلال و ثبات بازده، مجموعه کلاسیک بلک–شولز را تعمیم می‌دهند. دلایل کافی برای معرفی جهش در مدل سازی مالی وجود دارد. اول از همه، قیمت دارایی جهش می‌کند، و برخی از خطرات را نمی‌توان به راحتی در مدل‌های مسیر مداوم کنترل کرد. دوم، پدیده کاملاً مستند منحنی لبخند (منحنی به شکل لبخند) نوسان(تلاطم) ضمنی در بازارهای اختیار نشان می‌دهد که بازده خنثی ریسک غیر گوسی و خم کشیده است. گرچه منحنی لبخند را می‌توان در مدلی با مسیرهای پیوسته توضیح داد، اما این واقعیت که برای سررسید کوتاه بسیار بارزتر می‌شود، نمایانگر وجود پرش است. در مدل های مسیر پیوسته، قانون بازده برای سررسیدهای کوتاه تر به قانون گاوس نزدیک تر می‌شود، در حالی که در واقعیت و در مدل های دارای جهش، با کوتاه تر شدن افق، بازده ها کمتر از گوسی می‌شوند. سرانجام، این نتیجه حاصل می‌شودکه فرآیندهای پرش با بازارهای مالی مطابقت دارند، در حالی که تمام مدل‌های مسیر پیوسته با تعداد کمی‌از دارایی های اضافی کامل یا قابل تکمیل هستند. این ناکاملی اساسی، امکان انجام یک تحلیل دقیق از خطای پوشش ریسک و یافتن راه هایی برای بهبود عملکرد پوشش ریسک با استفاده از ابزارهای اضافی مانند اختیار های نقد شوندگی اروپایی را فراهم می‌کند.

برای پیش زمینه در مورد مدل‌های نمایی لوی، خواننده ممکن است به کتاب های درسی مانند [۶، ۵] برای دیدگاه مالی بیشتر یا [۳، ۱] برای دیدگاه ریاضی تر مراجعه کند.

*سخنران. آدرس ایمیل: Farahnakei@gmail.com



شکل ۱. نوسانات ضمنی اختیار های پول در اروپا روی شاخص CAC۴۰

همانطور که مشاهده کردیم، در یک مدل نمایی لوی نوسان ضمنی یک اختیار که در پول است و دارای سررسید ثابت است، نباید به زمان یا قیمت سهام بستگی داشته باشد. شکل ۱ نشان می‌دهد که در واقعیت اینگونه نیست: هر دو نمودار توابع تصادفی به سرعت در حال تغییر هستند. این آزمون ساده نشان می‌دهد که بازارهای واقعی خاصیت "پول چسبنده" ندارند: ورود اطلاعات جدید می‌تواند شکل لبخند(منحنی به شکل لبخند) را تغییر دهد. بنابراین مدل‌های نمایی لوی "به اندازه کافی تصادفی" نیستند تا بتوانند تکامل زمان لبخند(منحنی به شکل لبخند) را حساب کنند. بعلاوه، مدل های مبتنی بر فرآیندهای افزودنی، یعنی فرآیندهای ناهمگن در زمان با افزایش های مستقل، اگرچه در کالیبراسیون ساختار اصطلاحات ناپایدار اعمال شده برای یک تاریخ معین عملکرد خوبی دارند [۴]، اما به احتمال زیاد زمان را توصیف نمی‌کنند. تکامل لبخند(منحنی به شکل لبخند) به درستی از آنجا که در این مدل ها شکل آینده لبخند(منحنی به شکل لبخند) هنوز یک عملکرد قطعی شکل فعلی آن است [۲]. برای توصیف تکامل زمانی لبخند به روشی ثابت، ممکن است لازم باشد عوامل تصادفی اضافی (به عنوان مثال نوسانات تصادفی) معرفی شود. چندین مدل ترکیبی از جهش و نوسانات تصادفی در ادبیات ظاهر شد. در مدل بیتس(تخفیف)، یکی از مشهورترین نمونه های کلاس، یک مولفه پرش مستقل به مدل نوسانات تصادفی هستون اضافه می‌شود:

$$dX_t = \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t^X + dZ_t, \qquad S_t = S_\circ e^(X_t),$$
$$dV_t = \xi(\eta - V_t)dt + \theta\sqrt{V_t} dW_t^V, \quad d < W^V, W^X >_t = \rho dt,$$

مراجع

1. M. Abramowitz, I. Stegun, eds., Handbook of Mathematical Functions, Dover: New York, 1968.
2. J.P. Ansel, C. Stricker, Lois de martingale, densites et d´ecomposition de Föllmer-Schweizer, Annales de ÍInstitut Henri Poincaŕe, 28, pp. 375–392.
3. D. Appelbaum, Ĺevy Processes and Stochastic Calculus, Cambridge Unviersity Press, 2004.
4. D. Appelbaum, Martingale-valued measures, Ornstein-Uhlenbeck processes with jumps and operator self-decomposability in Hilbert space, in In Memoriam Paul-Andŕe Meyer, Seminaire de Probabilites XXXIX, Springer, 2006, pp. 171–196.
5. D. Belomestny, M. Reiss, Spectral calibration of exponential Ĺevy models, Finance and Stochastics, 10 (2006), pp. 449–474.
6. D. S. Bates, Testing option pricing models, in Statistical Methods in Finance, vol. 14 of Handbook of Statistics, North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 567–611.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

حل عددی معادله انتگرال حاصل از مدل‌بندی شبکه عصبی با استفاده از درونیابی گرانیگاهی

رقیه کتانی *
[۱]بخش ریاضی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده. در این مقاله از یک روش شبه طیفی بر پایه درونیابی گرانیگاهی برای حل عددی معادله انتگرال- دیفرانسیل فردهلم حاصل از مدل‌بندی شبکه عصبی استفاده خواهیم نمود. با استفاده از درونیاب کسری گرانیگاهی، مشتقات آن و قاعده انتگرال‌گیری هرمیت، مدل شبکه عصبی مورد نظر به دستگاه معادلات جبری تبدیل خواهد شد.
واژه‌های کلیدی: انتگرال‌گیری هرمیت، درونیابی گرانیگاهی، شبکه عصبی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65R10. 65R20 .

۱. مقدمه

فرض کنید f تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی بازه I از اعداد حقیقی باشد و $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$، $n+1$ نقطه مجزا از این بازه باشند، در این صورت چندجمله‌ای منحصر بفرد p_n از درجه حداکثر n وجود دارد طوری که برای $0 \le i \le n$، $p_n(x_i) = f(x_i)$. از طرف دیگر مثال رونگه حکایت از آن دارد که برای n های بزرگ ممکن است p_n تقریب خوبی برای f نباشد، به عبارت دیگر درونیاب تابع رونگه در شبکه نقاط یکنواخت $x_i = -5 + \frac{10}{n}i$ (وقتی $n \to \infty$) واگراست. در مواردی که انتخاب نقاط درونیاب اختیاری است می‌توان با انتخاب شبکه نقاطی که تراکم آنها در ابتدا و انتهای بازه کمتر است، مانند نقاط چبیشف بر این مشکل فایق آمد، اما در مواردی که نقاط درونیاب از پیش تعیین شده باشند، می‌توان از سایر روشهای درونیاب، مانند اسپلاین و کسری بهره برد. به هر حال توابع کسری می‌توانند تقریبهای بهتری از چندجمله‌ای‌ها بدست دهند، در حقیقت برای توابع تحلیلی، درونیاب چندجمله‌ای و کسری همگرایی نمایی دارند. اما برای درونیاب کلاسیک کسری امکان وقوع قطب در بازه درونیابی وجود دارد. براي حل این مشکل، برات و میتلمن [۱] درونیاب کسری فاقد قطب با درجه بیش‌تر از n را پیشنهاد دادند، در واقع چنین درونیابی را می‌توان در فرم گرانیگاهی

$$r(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_i}{x - x_i} f(x_i) / \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_i}{x - x_i},$$

نمایش داد، وزن‌های ω_i طوری انتخاب می‌شوند که درونیاب $r(x)$ فاقد قطب و دارای خاصیت بهترین تقریب باشد. در [۲] توابع وزن بصورت

$$\omega_i = (-1)^i \delta_i, \quad \delta_i = \begin{cases} 1/2 & i = 0 \ or \ i = n, \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

تعریف و ثابت شده است که در این صورت درونیاب متناظر خوش وضع است و دارای قطب نخواهد بود. در صورتی که گره‌های درونیاب به صورت $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ مرتب شوند، مرتبه همگرایی درونیاب برای $h = \max_i \{x_{i+1} - x_i\}$ برابر $O(h^2)$ خواهد بود. البته می‌توان توابع وزن را به صورت $\omega_i = (-1)^i$ در نظر گرفت که در این صورت مرتبه همگرایی

*سخنران. آدرس ایمیل: katani@yu.ac.ir

$O(h)$ است. هم‌چنین با استفاده از خانواده‌اي از درونیاب‌هاي گرانیگاهي مي‌توان درونیابی ارایه نمود که مرتبه تقریب بالا و به طور اختیاری انتخاب شود. براي این منظور در ابتدا پارامتر صحیح $d \in \{0, 1, ..., n\}$ را انتخاب می‌کنیم طوري که n, d اعداد صحیح نامنفي و $n \geq d$ باشد. براي $i = 0, 1, ..., n-d$، p_i یک چندجمله‌اي منحصربفرد از درجه کمتر یا مساوي d است که f را در $d+1$ نقطه $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+d}$ درونیابي مي‌کند. به این ترتیب تابع کسري

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)},$$

داده‌هاي مورد نظر را درونیابي مي‌کند که در آن

$$\lambda_i(x) = \frac{(-1)^i}{(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_{i+d})}.$$

مرتبه همگرایی درونیاب بالا براي $h = \max_i\{x_{i+1} - x_i\}$ برابر $O(h^{d+1})$ خواهد بود [۴]. درونیاب کسري $r(x)$ را مي‌توان به فرم گرانیگاهي زیر نوشت

$$r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{x-x_k} f(x_k)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{x-x_k}} = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(\beta)}(x) f(x_k) \qquad (1)$$

که در آن

$$l_k^{(\beta)}(x) = \frac{\frac{\beta_k}{x-x_k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{x-x_k}} \qquad (2)$$

و

$$\beta_k = \sum_{i \in J_k} (-1)^i \prod_{j=i, j\neq k}^{i+d} \frac{1}{x_k - x_j}, \qquad J_k = \{k \in \{0, 1, ..., n-d : j-d \leq k \leq j\}.$$

۲. مشتق‌گیري از درونیاب کسري گرانیگاهي

رابطه (۲) را مي‌توان به صورت

$$l_k^{(\beta)}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{x-x_k}(x-x_i) = \beta_k \frac{x-x_i}{x-x_k}, \qquad (3)$$

نوشت. با تعریف

$$s(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{x-x_k}(x-x_i),$$

و مشتق‌گیری از رابطه (۳) نتیجه می‌شود

$$l_k^{(\beta)'}(x) s(x) + l_k^{(\beta)}(x) s'(x) = \beta_k \left(\frac{x-x_i}{x-x_k}\right)'.$$

به این ترتیب می‌توان فرمول‌های عمومی برای $l_k^{(\beta)'}(x)$ را از روابط بالا بدست آورد:

$$l_k^{(\beta)'}(x_i) = \begin{cases} \frac{\frac{\beta_k}{\beta_i}}{x_i - x_k} & for\ \text{k}\neq i \\ \sum_{k=0, k\neq i}^{n} l_k^{(\beta)'}(x_i) & for\ \text{k=i} \end{cases} \quad (۴)$$

بنابراین مشتق مرتبه اول درونیاب گرانیگاهی کسری در نقاط گره‌ای به صورت زیر حاصل می‌شود

$$r'(x_i) = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(\beta)'}(x_i) f_k = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{\beta_k}{\beta_i}}{x_i - x_k} f_k & for\ \text{k}\neq i \\ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0, j\neq k}^{n} l_j^{(\beta)'}(x_i) f_k & for\ \text{k=i.} \end{cases}$$

به این ترتیب ماتریس مشتق $D^{(1)}$ به صورت $D_{ij}^{(1)} := l_j^{(\beta)'}(x_i)$ تعریف می‌شود و لذا فرم ماتریسی مشتق $r(x)$ به صورت $r' = rD$ می‌باشد.

۳. بیان مساله

مسئله مقدار اولیه

$$\begin{aligned} \partial_t \theta(x,t) &= f(\theta(x,t),t) + \int_{-1}^{1} K(x-y)\partial_t \theta(y,t)dy, \\ \theta(x,0) &= g(x), \qquad -\infty \le x \le \infty; t \ge 0, \end{aligned} \quad (۵)$$

را در نظر بگیرید که یک معادله انتگرال-دیفرانسیل از نوع کانولوشن است و f تابع هموار معلوم و g یک تابع اولیه است. مساله (۵) یک مساله آنالوگ پیوسته از یک مدل گسسته خطوط انتقال در شبکه های عصبی است که زاویه $\theta(x,t)$ نشان دهنده‌ی پیام مغز در زمان t و مکان x است. این پیام وابسته به مکانیسم بدن و سیستم دفاعی بدن، در افراد مختلف متفاوت است. انتگرال کانولوشن ظاهر شده متناظر با تأثیر نرون‌های مجاور است و تابع f عوامل بیرون و اثرات بالقوه آنها را نشان میدهد. این مساله را می‌توانیم برای هسته، بصورت

$$K(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{s}{\sigma})^2}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (۶)$$

حل کنیم، که در آن $\sigma > 0$ است. (۶) را هسته‌ی گاوسی گویند. این هسته اخیرا در مسائل کاربردی بسیاری در نظر گرفته شده است. به عنوان نمونه به مدل بندی بیماری‌های واگیردار می‌توان اشاره نمود [۶]. این هسته را تابع نامنفی انتگرال‌پذیر نرمال شده روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم طوری که $\int_{-1}^{1} K(s)ds = 1$ [۵].

۴. روش عددی

نقاط t_i را در بازه‌ی $[a,b]$ با طول گام h به صورت $t_i = a + ih$، $i = 0, 1, ..., n$ در نظر می‌گیریم که در آن $h = \frac{b-a}{n}$ می‌باشد. وقتی $\tilde{\theta}(x,t) = \theta(\frac{\sigma}{x}, t)$ باشد، مساله (۵) دارای هسته $K(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2}$ برای $s \ge 0$ خواهد بود، لذا بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم که $\sigma = 1$ است. حال تقریب

$$\theta(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j(x) l_j^{(\beta)}(t), \quad (۷)$$

را بعنوان جوابی برای مساله (۵) در نظر بگیرید که در آن برای عدد صحیح ثابت $0 \leq d \leq n$، پایه‌های کسری گرانیگاهی $l_j^{(\beta)}$ بصورت

$$l_j^{(\beta)}(t) = \frac{\frac{\beta_j}{t-t_j}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\beta_j}{t-t_j}}, \tag{۸}$$

و وزنهای β_j بصورت

$$\beta_j = \sum_{i \in J_j} (-1)^i \prod_{k=i, k\neq j}^{i+d} \frac{1}{t_j - t_k}, \qquad J_j = \{i \in \{0, 1, ..., n-d : j-d \leq i \leq j\}.$$

تعریف می‌شوند. با جایگذاری تقریب (۷) در مساله (۵) و با استفاده از روش هم محلی در $t = t_i$ داریم

$$\sum_{j=0}^{n} \theta_j(x) l_j^{(\beta)\prime}(t_i) = f(\sum_{j=0}^{n} \theta_j(x) l_j^{(\beta)}(t_i), t_i) + \mu \sum_{j=0}^{n} l_j^{(\beta)\prime}(t_i) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\theta_j(y)dy, \tag{۹}$$

در رابطه بالا برای سادگی $\theta_j(x) = \theta(x, t_j)$ را در نظر گرفته‌ایم. مقادیر $l_j^{(\beta)'}(t_i)$ را می‌توان از رابطه (۴) جایگذاری نمود. در ادامه با گسسته‌سازي نسبت به متغیر مکان در ریشه‌هاي چندجمله‌اي هرمیت درجه M (η_k) و تقریب انتگرال با استفاده از قاعده گاوس-هرمیت رابطه بالا به یک دستگاه معادلات جبري تبدیل خواهد شد که با حل این دستگاه مقادیر تابع مجهول در نقاط (η_k, t_i) حاصل خواهد شد که در آن η_k ریشه‌هاي چندجمله‌اي هرمیت است.
براي تقریب انتگرال با استفاده از قاعده گاوس-هرمیت، M نقطه‌اي داریم

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\theta_j(y)dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\eta_k - y)^2} \theta_j(y)dy \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{M} w_m (e^{\eta_m^2 - \eta_k^2} + e^{\eta_k^2 + 2\eta_k\eta_m} + 1)\theta_j(\eta_m)\end{aligned}$$

که در آن η_m و w_m به ترتیب ریشه‌ها و وزنهاي قاعده گاوس-هرمیت هستند که با استفاده از روش مقادیر ویژه ماتریسهاي سه قطري قابل محاسبه هستند [۳].

مراجع

1. J.P. Berrut, H. D. Mittelmann, Lebesgue constant minimizing linear rational interpolation of continuous functions over the interval, Comput. Math. App. 33(6) (1997) 77–86.
2. J.-P. Berrut, Rational functions for guaranteed and experimentally well–conditioned global interpolation, Comput. Math. Appl. 15 (1988) 1–16.
3. P.J. Davis, P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration, second ed., Academic Press, New York, 1984.
4. Floater, M.S., Hormann, K. Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation. Numer. Math. 107, 315–331 (2007).
5. Z. Jackiewicz, M. Rahman, B.D. Welfert, Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling h−$neuralnetworks$, $Appl.Math.Comput$.195(2008)523536.
6. J. Medlock, M. Kat, Spreding disease, integro-differentiaal equations old and new, Math. Biosci. 184 (2003) 201-222.

پنجاه و دومین
کنفرانس ریاضی ایران
52nd Annual Iranian Mathematics Conference
Faculty of Mathematics and Computer
Shahid Bahonar University of Kerman
Kerman, Iran
30 August - 02 September 2021
دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
۸ تا ۱۱ شهریور ۱۴۰۰

مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در محیط فازی

اسماء سلطانی[۱،*] و محمدحسین دریایی[۲]

[۱]بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲]بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. با توجه به پیچیدگی و غیرقابل پیش‌بینی بودن بازارهای مالی، ارائه یک تخمین دقیق از ریسک و بازده مورد انتظار کار بسیار مشکلی است. در دنیای امروزی یکی از چالش‌های موجود سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها، عدم اطمینان نسبت به آینده است. رویکرد سنتی در مدل‌کردن این عدم اطمینان، درنظرگرفتن بازده دارایی‌ها به‌صورت یک متغیر تصادفی است. اما این رویکرد باعث تحمیل‌شدن فرضیات غیرواقعی در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه می‌شود. اما می‌توان با استفاده از منطق فازی، این عدم اطمینان را به‌شکل ساده‌تر و کاراتری مدل کرد.

واژه‌های کلیدی: انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، بازده مورد انتظار، ریسک، منطق فازی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 91G80, 97M30.

۱. مقدمه

به دلیل کارایی منطق فازی برای لحاظکردن نظرات کارشناسی و عدم اطمینان موجود در بازارهای مالی، استفاده از این منطق می‌تواند یکی از راه حل‌های مفید برای مدل‌کردن بازده دارایی‌ها در مسأله سبد سرمایه‌گذاری باشد. نظریه مجموعه‌های فازی تعمیمی است از نظریه مجموعه‌های معمولی که برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پرفسور لطفی عسگرزاده ارائه گردید. فازی تابع‌های هدف سبب انعطاف‌پذیر شدن مقادیر مطلوب هر یک از اهداف شده و آن‌ها را از وضعیت قطعی خارج می‌کند [۴].

تعریف ۱.۱ ([۱، ۴]). (مجموعه فازی) فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. هر زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از X توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1]$ مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$ مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ در بازه $[0, 1]$ میزان عضویت x در $\tilde{A}$ نشان می‌دهد: $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$. عددی که این تابع به هر عضو ارزش‌دهی می‌نماید درجه عضویت آن عضو در آن مجموعه را مشخص می‌سازد. اگر درجه عضویت یک عضو اکیداً بین صفر و یک باشد، این عدد بیانگر درجه عضویت تدریجی است.

زمانی که یک مسأله برنامه‌ریزی تحت شرایط نادقیق غیر احتمالی باشد، برنامه‌ریزی فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بلمن و زاده (۱۹۷۰) موضوع برنامه‌ریزی فازی را برای اولین بار مطرح کردند [۲].

۲. مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری فازی

یک مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری دو هدفه بر مبنای چارچوب مدل میانگین-واریانس مارکویتز در نظر گرفته می‌شود. این مدل به‌صورت همزمان به دنبال بیشینه‌کردن بازده سبد سرمایه‌گذاری $(f_1(x))$ و کمینه‌کردن ریسک سبد سرمایه‌گذاری $(f_2(x))$ به‌صورت مسأله‌ی زیر مدل‌سازی می‌شود در این مدل $r_i = E[R_i]$ بازده مورد انتظار دارایی iام و

*سخنران. آدرس ایمیل: asmasoltani72@gmail.com

$\sigma_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$ کوواریانس بین بازده‌های دارایی‌های i-ام و j-ام است:

$$
\begin{aligned}
(p۱) \quad \max \quad & f_۱(x) = \sum_{i=۱}^{n} r_i x_i \\
\min \quad & f_۲(x) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\
s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \\
& x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n.
\end{aligned}
$$

تعریف ۱.۲ ([۱، ۳]). (تابع عضویت) تابع عضویت به‌ترتیب برای بازده مورد انتظار $(\mu_{f_۱(x)})$ و ریسک $(\mu_{f_۲(x)})$ سبد سرمایه‌گذاری به‌شکل زیر تعریف می‌شود که به‌ترتیب $f_۱^L$ و $f_۲^L$ به عنوان کمترین سطح مورد نظر و $f_۱^R$ و $f_۲^R$ به عنوان بیشترین سطح مورد نظر برای بازده و ریسک سبد سرمایه‌گذاری است:

$$
\mu_{f_۱(x)} = \begin{cases} ۱, & f_۱(x) \geq f_۱^R \\ \frac{f_۱(x) - f_۱^L}{f_۱^R - f_۱^L}, & f_۱^L < f_۱(x) < f_۱^R \\ ۰, & f_۱(x) \leq f_۱^L \end{cases}, \quad \mu_{f_۲(x)} = \begin{cases} ۱, & f_۲(x) \leq f_۲^L \\ \frac{f_۲^R - f_۲(x)}{f_۲^R - f_۲^L}, & f_۲^L < f_۲(x) < f_۲^R \\ ۰, & f_۲(x) \geq f_۲^R \end{cases}
$$

بر اساس رویکرد بیشینه‌سازی بلمن-لطفی‌زاده و با استفاده از توابع عضویت عنوان شده، مدل بهینه‌سازی دو هدفه فازی برای مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به‌شکل مسأله‌ی زیر است که در این مسأله λ متغیر کمکی و نشان‌دهنده درجه عضویت است:

$$
\begin{aligned}
(p۲) \quad \max \quad & \lambda \\
s.t. \quad & \lambda \leq \mu_{f_۱(x)}, \\
& \lambda \leq \mu_{f_۲(x)}, \\
& \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \\
& x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n, \\
& ۰ \leq \lambda \leq ۱.
\end{aligned}
$$

۳. رویکرد فازی

برای حل مسأله‌ی $(p۲)$ در ابتدا مدل ریاضی $(p۱)$ را ایجاد می‌کنیم و در گام بعد این مدل را به عنوان یک مسأله تک هدفه براساس توابع هدف ریسک و بازده حل می‌کنیم و برای هر یک از مدل‌ها به‌ترتیب به جواب بهینه $x^۱$ و $x^۲$ می‌رسیم اگر $x^۱ = x^۲ = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$، جواب ترجیحی کارا حاصل شده است و حل متوقف می‌شود در غیر این‌صورت در گام بعد توابع هدف را در جواب‌های به‌دست آمده به‌صورت $f_۱^R = f_۱(x^۱)$، $f_۱^L = f_۱(x^۲)$، $f_۲^L = f_۲(x^۲)$، $f_۲^R = f_۲(x^۱)$ ارزیابی کرده و بیشترین و کمترین سطوح مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. در مرحله بعد توابع عضویت را برای بازده و ریسک تعریف کرده و مدل ریاضی $(p۲)$ را توسعه داده و حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده را به سرمایه‌گذار ارائه می‌دهیم و اگر سرمایه‌گذار آن را پذیرفت، متوقف می‌شویم، در غیر این صورت، توابع هدف را دوباره ارزیابی می‌کنیم.

مثال ۱.۳. سهام ۵ شرکت صنایع غذایی در بورس اوراق‌بهادار تهران را در نظر بگیرید که جدول ۱ اطلاعات مربوط به بازده مورد انتظار و جدول ۲ اطلاعات مربوط به واریانس و کوواریانس بین ۵ دارایی مورد نظر را نشان می‌دهد.

جدول ۱. داده‌های ورودی دارایی‌ها مربوط به بازده مورد انتظار

سهم	وبشهر	غدام	غسالم	غشصفا	غشان
بازده	۰٫۰۰۲۰۹	۰٫۰۰۱۴۰	۰٫۰۰۹۴۳	۰٫۰۰۹۳۴	۰٫۰۰۶۷۱

جدول ۲. داده‌های ورودی مربوط به واریانس و کوواریانس بین دارایی‌ها

سهم	وبشهر	غدام	غسالم	غشصفا	غشان
وبشهر	۰٫۰۰۳	۰٫۰۰۱۰۹	۰٫۰۰۰۰۹	۰٫۰۰۰۷۷	۰٫۰۰۱۴۶
غدام	۰٫۰۰۱۰۹	۰٫۰۰۷۵۶	−۰٫۰۰۰۲۱	−۰٫۰۰۱۴۸	۰٫۰۰۱۰۸
غسالم	۰٫۰۰۰۰۹	−۰٫۰۰۰۲۱	۰٫۰۰۷۲	۰٫۰۰۰۰۴	−۰٫۰۰۰۰۴
غشصفا	۰٫۰۰۰۷۷	−۰٫۰۰۱۴۸	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۰۰۳۱۹	۰٫۰۰۱۹۳
غشان	۰٫۰۰۱۴۶	۰٫۰۰۱۰۸	−۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۰۰۱۹۳	۰٫۰۰۴۳۱

در ابتدا در گام اول مدل $(p۱)$ را به‌شکل زیر فرموله می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_۱(x) = ۰٫۰۰۲۰۹x_۱ + ۰٫۰۰۱۴۰x_۲ + ۰٫۰۰۹۴۳x_۳ + ۰٫۰۰۹۳۴x_۴ + ۰٫۰۰۶۷۱x_۵ \\
\min \quad & f_۲(x) = ۰٫۰۰۳x_۱x_۱ + ۰٫۰۰۷۵۶x_۲x_۲ + ۰٫۰۰۷۰۲x_۳x_۳ + ۰٫۰۰۳۱۹x_۴x_۴ + ۰٫۰۰۴۱۳x_۵x_۵ + \\
& \quad ۰٫۰۰۲۱۸x_۱x_۲ + ۰٫۰۰۰۱۸x_۱x_۳ + \ldots + ۰٫۰۰۳۸۶x_۴x_۵ \\
s.t. \quad & x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱, \\
& x_i \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, ۵.
\end{aligned}
$$

حال در گام دوم مسأله‌ی $(p۱)$ را به‌عنوان یک مسأله‌ی تک هدفه براساس توابع هدف ریسک و بازده حل می‌کنیم. برای مسأله‌ی تک هدفه با تابع هدف ماکزیمم‌سازی بازده، جواب به‌دست آمده $x^۱$ در جدول ۳ و برای تابع هدف مینیمم‌سازی ریسک، جواب به‌دست آمده $x^۲$ در جدول ۴ نشان داده شده است:

جدول ۳. نسبت‌های سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری حاصل مدل تک هدفه ماکزیمم‌سازی بازده

سهم	وبشهر	غدام	غسالم	غشصفا	غشان
نسبت $x^۱$	۰	۰	۰٫۹۹۹۵	۰٫۰۰۰۵	۰

جدول ۴. نسبت‌های سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری حاصل از مدل تک هدفه مینیمم‌سازی ریسک

سهم	وبشهر	غدام	غسالم	غشصفا	غشان
نسبت $x^۲$	۰٫۲۰۲۷	۰٫۲۱۲۲	۰٫۱۶۸۹	۰٫۴۱۵۵	۰٫۰۰۰۷

در اینجا $x^۱ \neq x^۲$، بنابراین در گام سوم، مقادیر توابع هدف در هر دو پاسخ به‌دست آمده را ارزیابی می‌کنیم، که در جدول زیر نشان داده شده است:

جدول ۵. مقادیر تابع هدف برای ریسک و بازده در جواب‌های به‌دست آمده

$x^۱$	$x^۲$	
۰٫۰۰۹۴	۰٫۰۰۶۲	بازده $f_۱(x)$
۰٫۰۰۷	۰٫۰۰۱۲	ریسک $f_۲(x)$

بنابراین، بیشترین و کمترین سطح مورد نظر برای هر دو تابع هدف به‌دست می‌آید. در گام بعد، توابع عضویت برای ریسک و بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری به‌ترتیب به‌صورت $\mu_{f_1}(x)$ و $\mu_{f_2}(x)$ به‌دست می‌آیند:

$$\mu_{f_1}(x)=\begin{cases}1, & f_1(x)\geq ۰/۰۰۹۴\\ \frac{f_1(x)-۰/۰۰۶۲}{۰/۰۰۹۴-۰/۰۰۶۲}, & ۰/۰۰۶۲<f_1(x)<۰/۰۰۹۴\\ ۰, & f_1(x)\leq ۰/۰۰۶۲\end{cases},\quad \mu_{f_2}(x)=\begin{cases}1, & f_2(x)\leq ۰/۰۰۱۲\\ \frac{۰/۰۰۷-f_2(x)}{۰/۰۰۷-۰/۰۰۱۲}, & ۰/۰۰۱۲<f_2(x)<۰/۰۰۷\\ ۰, & f_2(x)\geq ۰/۰۰۷\end{cases}$$

و در گام آخر مدل $(p۲)$ را به‌شکل زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\max\quad & \lambda\\ s.t.\quad & \\ & ۰/۰۰۲۰۹x_1+۰/۰۰۱۴۰x_2+۰/۰۰۹۴۳x_3+۰/۰۰۹۳۴x_4+۰/۰۰۶۷۱x_5-۰/۰۰۳۲\lambda\geq ۰/۰۰۶۲\\ & ۰/۰۰۳x_1x_1+۰/۰۰۷۵۶x_2x_2+۰/۰۰۷۰۲x_3x_3+۰/۰۰۳۱۹x_4x_4+۰/۰۰۴۱۳x_5x_5+\\ & ۰/۰۰۲۱۸x_1x_2+۰/۰۰۰۱۸x_1x_3+\ldots+۰/۰۰۳۸۶x_4x_5+۰/۰۰۵۸\lambda\leq ۰/۰۰۷\\ & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\ & x_i\geq ۰,\qquad i=1,2,\ldots,5\\ & ۰\leq\lambda\leq 1\end{aligned}$$

نتایج محاسباتی حاصل از حل مسأله بالا در جدول ۶ و نسبت‌های سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری حاصل، در جدول ۷ نشان داده شده است:

جدول ۶. خلاصه نتایج انتخاب سبد سرمایه‌گذاری

λ	بازده $f_1(x)$	ریسک $f_2(x)$
۰/۸۷۴۲	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۱۹

جدول ۷. نسبت‌های سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری حاصل

سهم	وبشهر	غدام	غسالم	غشصفا	غشان
نسبت سرمایه گذاری	۰	۰/۰۴۶۵	۰/۲۹۳۷	۰/۶۵۹۸	۰

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل دو هدفه انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در محیط فازی مورد بحث قرار گرفت. برای به‌دست آوردن جواب مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری دو هدفه فازی، از رویکرد فازی تعاملی استفاده شد. گفتنی است که رویکرد تعاملی حل مسأله دارای دو مزیت عمده است، اول اینکه این رویکرد جست‌وجوی مستقیمی را از طریق به‌هنگام‌کردن حدود پایین و بالای توابع هدف تنظیم می‌کند و مزیت دوم این است که اگر هر یک از سبدهای سرمایه‌گذاری به‌دست آمده مورد رضایت سرمایه‌گذار نباشد، سبد سرمایه‌گذاری دیگری از طریق به‌هنگام‌سازی حدود پایین و بالای هر دو تابع هدف می‌تواند ایجاد شود تا رضایت سرمایه‌گذار جلب شود.

مراجع

۱. س.ب. ابراهیمی، ا.س. جیرفتی و ن. محبی، *بهینه‌سازی فازی سبد سرمایه‌گذاری؛ مدل‌ها و کاربردها*، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، (۱۳۹۷).

2. R.E. Bellman, L.A. Zadeh, *Decision making in fuzzy environment*, Management Science, 17, (1970), 141–164.

3. P. Gupta, M.K. Mehlawat, M. Inuiguchi, S. Chandra, *Fuzzy portfolio Optimization*, Studies in Fuzziness ans Soft Computing, Springer, (2014).

4. L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Inform and Control, California, 8, (1985), 338–358.

نمایه نویسندگان

آذرگون، زهره*، ۱۱۳

آراد، فرشته*، ۲، ۱۵۶

آرمندنژاد، علی، ۱۳۲

آقابابایی بنی، غلامرضا*، ۹۹

آقامحمدی، علی، ۱۵

ابراهیم زاده، آسیه، ۲۱۶

ابراهیمی مود، سپهر، ۱۱

احمدپور، فاطمه*، ۱۱۷

احمدی، کامبیز*، ۶

اصغری ورزنه، زهرا*، ۹۵

افتخاری، مهدی، ۷۵

الله دادی، مهدی، ۱۹۷

الیاسی ، نیره*، ۱۰۹

امیرجمشیدی، آرتا*، ۳۷

امیری بیدشکی، محسن، ۱۸۰

اکبری‌لاکه، معصومه*، ۱۰۴

اکبری، رضا*، ۲۳۲

ایرانمنش، علی*، ۱۶۰

ایزدی، محمد، ۲۳۶

ایزدی، مهدی، ۳۳، ۱۷۶

بحرانی پور، فاطمه*، ۱۱

بنی طبا، نرجس سادات *، ۶۸

بنی مهدی دهکردی، سمیرا، ۱۹، ۱۶۴

بهرامن، کاوه، ۷۵

بهمنی، محمد*، ۱۵

بیشه نیاسر، مرتضی*، ۱۹، ۱۶۴

تاج الدینی، آزیتا، ۱۶۰

تاری، سمیه*، ۳۱

*سخنران

جعفری خالدی، مجید، ۱۵۱
حسینی مقدم ، مهدی، ۱۰۹
حسینی، سوده، ۹۵
حسینی، یگانه سادات*، ۳۳
حمیدی زاده، کاظم، ۹۹
خزاعی، زهره*، ۱۲۴
خیراندیش، ساجده*، ۱۶۸
دادگرفرد، مهدیه، ۳۷
دارا*، محمد، ۸۷
درازهی، آسیه*، ۱۷۲
دریایی، محمدحسین، ۲۳، ۲۵۰
دلاوری، عاطفه*، ۱۷۶
دهقان‌نژاد، اکبر، ۸۷
دیهیم، زهرا*، ۱۲۱
رجایی، علی*، ۴۱، ۴۵
رضائی کلانسرا، زهرا، ۲۲۴
رفیع پور، ابوالفضل، ۷۲، ۱۲۴
رنجبرنژاد اصفهانی، آرزو*، ۵۳
ریحانی، ابراهیم، ۳۳، ۱۷۶
سعیدی، هادی*، ۱۸۰
سلطانی، اسماء*، ۱۸۳، ۲۵۰
سلیمانی فرد، امید، ۱۲۱
سنجرانی‌پور، مرتضی، ۱۴۷
سیدی، میرحکیم‌الله*، ۱۲۸
شاحسینی، احسان، ۴۵
شاحسینی، احسان*، ۴۱
شاهزاده فاضلی، سید ابوالفضل، ۱۱۳
شجره پورصلواتی، نصرت اله*، ۱۸۷
شریف، حبیب*، ۴۹
شریفی‌زاده، محدثه*، ۲۳۶
شعبانی، مصطفی*، ۱۹۰
شعبانیان، سعید*، ۱۹۳
شهریاری، محمد، ۲۳۲
شکوهی، طاهره*، ۱۹۷
شیخی، ایوب، ۱۵۶
صادقیان، اعظم، ۱۶۸
صالحی ویسی، محمد، ۲۲۰
صردی زید، سمانه، ۱۷۲، ۱۹۷

صفدری وایقانی، علی، ۱۳۹
ضابطزاده، سید محمود، ۲۰۱
عباسی، الهام، ۱۱۳
عبدالعلیان، نسرین، ۱۴۷
عبداله پور، کاظم*، ۲۴۰
عرب عامری، مریم، ۸۳
عرب پور، علیرضا، ۲
علی پور، مریم، ۱۷۲
غریب، حمید*، ۲۰۶
فرحناکی، محمد*، ۲۴۴
فرشی، محمد، ۱۱
فرنوش، رحمان، ۱۴۳
فضلپر*، لیلا، ۱۳۲
فلاح، افشین، ۱۴۳
قاسمی، رضا*، ۶۲
قاسمی، محمدحسام*، ۱۳۵
قلندرزاده، شعبان، ۵۳
لطفی زاده، مهدی، ۲۱۱
محبتپناه، افسانه*، ۵۸
محمودی، محمد*، ۲۱۱
مددی، محسن، ۷۲
مشتاقیون، سید محمد، ۶۸
مصداقی*، احسان، ۱۴۳
معیری، مرجان*، ۲۱۶
ملکی، آرزو *، ۷۲
ممیوند، رضا، ۶۲
موحدنیا، احسان *، ۲۲۰
میراکبرزاده، زکیه*، ۱۴۷
میرزاوند،حسن*، ۱۵۱
میرمحسن ، پدرام، ۱۰۹
نصیری، حوریه*، ۷۵
نظامی، عطیه، ۷۹
نظری، علی محمد* ، ۷۹
نعمتی، سمیه، ۲۲۴
نیکوروش، زهره*، ۲۲۸
هوشمند خلیق، فرناز*، ۹۱
پردلی، حدیث*، ۲۳
پور موسی، رضا*، ۲۷

کامرانفر، هدی، ۶
کتانی، رقیه*، ۲۴۶
کثیری، عارفه، ۱۰۴
کرباسی، سید مهدی، ۱۶۸
گنجعلی، مینا*، ۱۳۹
گویا، زهرا، ۱۲۸، ۱۳۵
یادگاری ، آسیه*، ۸۳
یافتیان، نرگس، ۵۸، ۱۹۰