پاسخ مسائل ماهانه

محمّدرضا فعّال شیرکده

دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت مدرس

۱۴ تیر ۱۴۰۱

سوال ۱) سوال ۱) ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می کنیم.

لم : برای اعداد طبیعی m,n که $n > m > e$ (e پایه لگاریتم طبیعی) نامساوی زیر همواره برقرار است.

$$m^n > n^m$$

برهان : تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را در نظر بگیرید.داریم

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x)$ برای مقادیر بزرگتر از e منفی می شود و لذا تابع $f(x)$ در (e, ∞) نزولی می باشد یعنی اگر $n > m > e$ آنگاه خواهیم داشت $f(m) > f(n)$ و این یعنی

$$\frac{\ln n}{n} < \frac{\ln m}{m} \iff m \ln n < n \ln m \iff \ln n^m < \ln m^n \iff n^m < m^n$$

و به این ترتیب اثبات لم کامل می شود.

حال به مساله اصلی باز می گردیم.فرض کنید p یک عامل اول m باشد در این صورت با توجه به تساوی $n^{m^n} = m^{n^m}$می توان دید که $p \mid n^{m^n}$ و در نتیجه $p \mid n$ و این یعنی p عامل اول n هم می باشد، به شکل مشابه می توان نشان داد که هر عامل اول n عامل اول m هم هست و در نتیجه m,n عوامل اول یکسانی دارند. لذا طبق قضیه اساسی حساب می توان این دو عدد را یه شکل زیر نمایش داد

$$n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k}, m = {p_1}^{\beta_1} {p_2}^{\beta_2} \dots {p_k}^{\beta_k}$$

که α_i و β_i ($1 \leq i \leq k$) اعداد صحیح نامنفی هستند و $k \in \mathbb{N}$.اکنون مساله را به چند حالت تقسیم می کنیم و آن را حل می کنیم .

۱) اگر $n = ۱$ لذا با توجه به تساوی $n^{m^n} = m^{n^m}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $m = ۱$.

۲) اگر $n = ۲$ باشد با توجه به اینکه عوامل اول mو nیکسان بودند لذا m به صورت ۲^{α} که α عددی صحیح و نامنفی می باشد. با توجه به تساوی$n^{m^n} = m^{n^m}$ خواهیم داشت $(۲^{\alpha})^{۲^{۲^{\alpha}}} = ۲^{(۲^{\alpha})^{۲}}$ حال اگر $\alpha > ۱$ باشد می توان دید که $(۲^{\alpha})^{۲^{۲^{\alpha}}} > ۲^{(۲^{\alpha})^{۲}}$ و لذا $\alpha = ۰$ یا $\alpha = ۱$. میتوان دید که برای $\alpha = ۰$ هم تساوی برقرار نمی شود و بنابر این باید داشته باشیم $\alpha = ۱$ و این یعنی $m = ۲$. پس در این حالت هم $n = m = ۲$.

۳) اگر $n \geq ۳$. ابتدا توجه می کنیم در این حالت باید داشته باشیم $m \geq ۳$ ،زیرا در غیر این صورت $m = ۱$ یا $m = ۲$ که هرکدام از این حالت ها طبق مطالب یک و دو نمی توانند اتفاق بیافتند و با فرض $n \geq ۳$ در تناقض خواهند بود.
از تساوی $n^{m^n} = m^{n^m}$ می توان نتیجه گرفت که

$$p_۱{}^{\alpha_۱ m^n} p_۲{}^{\alpha_۲ m^n} \dots p_k{}^{\alpha_k m^n} = p_۱{}^{\beta_۱ n^m} p_۲{}^{\beta_۲ n^m} \dots p_k{}^{\beta_k n^m}$$

از برابر قرار دادن توان های عوامل اول یکسان در دو طرف تساوی می توان دید که

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{n^m}{m^n} \quad \forall ۱ \leq i \leq k \qquad \star$$

حال اگر فرض کنیم $n > m$ آنگاه بنابر لم مطرح شده در ابتدای جواب خواهیم داشت $m^n > n^m$ و با توجه به $\star$ می توان دید که

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{n^m}{m^n} < ۱ \Rightarrow \alpha_i < \beta_i \qquad \forall ۱ \leq i \leq k$$

و این هم یعنی $m \mid n$ و در نتیجه $n \leq m$ که با فرض ما یعنی $n > m$ در تناقض است.به طور مشابه حال $m > n$ هم رد می شود و در نتیجه باید داشته باشیم $n = m$ و این یعنی حکم ما در این حالت هم درست می باشد و در نتیجه در حالت کلی هم حکم اثبات شد.
■

سوال ۲)

لم : برای هر عدد طبیعی k رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k} x \mathrm{d}x = \frac{۲k-۱}{۲k} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k-۲} x \mathrm{d}x$$

برهان : از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم.با انتخاب $u = \sin^{۲k-۱} x$ و $\sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}v$ خواهیم داشت $-\cos x = v$ و $(۲k-۱)\sin^{۲k-۲} x \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k} x \mathrm{d}x &= (-\cos x \sin^{۲k-۱} x)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (-\cos x)((۲k-۱)\sin^{۲k-۲} x \cos x)\mathrm{d}x \\ &= ۰ + (۲k-۱)\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k-۲} x \cos^{۲} x \mathrm{d}x = (۲k-۱)\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k-۲} x(۱-\sin^{۲} x)\mathrm{d}x \\ &= (۲k-۱)\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k-۲} x \mathrm{d}x - (۲k-۱)\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k} x \mathrm{d}x\end{aligned}$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$(۲k)\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k} x \mathrm{d}x = (۲k-۱)\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k-۲} x \mathrm{d}x$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k} x \mathrm{d}x = \frac{۲k-۱}{۲k}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲k-۲} x \mathrm{d}x$$

و به این ترتیب برهان کامل می شود. ■

حال به حل مساله اصلی باز می گردیم. با استقرا روی k درستی حکم را ثابت می کنیم. برای $k = ۱$ (پایه استقرا) داریم

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۲\sin x)^{۲}\mathrm{d}x = \frac{۸}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\cos ۲x}{۲}\mathrm{d}x = \frac{۴}{\pi}(x - \frac{\sin ۲x}{۴})\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۴}{\pi}\frac{\pi}{۲} = ۲ = \binom{۲}{۱}$$

پس حکم برای $k = ۱$ برقرار است.حال فرض کنید حکم برای هر $k \geq ۱$ برقرار باشد

(فرض استقرا)، حال برای $k+۱$ درستی آن را اثبات می کنیم . خواهیم داشت

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x)^{۲(k+۱)}\mathrm{d}x \overset{\text{طبق لم}}{=} \frac{۲^{۲k+۳}}{\pi}\frac{۲(k+۱)-۱}{۲(k+۱)}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲k}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{۲(۲k+۱)}{(k+۱)}\left(\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x)^{۲k}\mathrm{d}x\right) \overset{\text{طبق فرض استقرا}}{=} \frac{۲(۲k+۱)}{(k+۱)}\binom{۲k}{k}$$

$$=\frac{۲(۲k+۱)}{(k+۱)}\frac{(۲k)!}{k!k!}=\frac{۲(k+۱)}{k+۱}\frac{(۲k+۱)}{(k+۱)}\frac{(۲k)!}{k!k!}=\binom{۲k+۲}{k+۱}=\binom{۲(k+۱)}{k+۱}$$

و به این ترتیب درستی حکم برای $k+۱$ هم اثبات شد و در نتیجه جکم برای تمام اعداد طبیعی درست است و برهان کامل می شود. ■

سوال ۳) برای اینکه ثابت کنیم صورت کسر $\frac{۱}{p-۱} + \cdots + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + ۱$ بر $p^۲$ برای $p > ۳$ بخش پذیر است این مجموع را به پیمانه ی $p^۲$ در نظر می گیریم.توجه کنید که با وجود اینکه اعداد ما در این جا به صورت کسر هستند این کار با معنی است . یعنی اگر می نویسیم $\frac{a}{b} \equiv x \pmod m$ این یعنی x ای وجود داشته باشد که $a \equiv bx \pmod m$ البته می دانیم اگر $\gcd(b, m) = ۱$ آنگاه چنین x ای موجود است و در این سوال هم دقیقا چنین شرایطی برقرار است.

طبق قضیه اویلر می دانیم که اگر a و n دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند در این صورت $a^{\phi(n)} \equiv ۱ \pmod n$ حال اگر n را برابر $p^۲$ و a هر کدام از اعداد $۱, ۲, \ldots, p-۱$ باشند آنگاه خواهیم داشت $\phi(p^۲) = p(p-۱)$ و در نتیجه برای هر $a \in \{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ داریم $a^{p(p-۱)} \equiv ۱ \pmod{p^۲}$. و با توجه به این هم نهشتی و مطالب بالا می توانیم نتیجه بگیریم که

$$\frac{۱}{a} \equiv a^{p(p-۱)-۱} \pmod{p^۲}$$

حال داریم

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{p-۱} = (۱ + \frac{۱}{p-۱}) + (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{p-۲}) + \cdots + (\frac{۱}{\frac{p-۱}{۲}} + \frac{۱}{\frac{p+۱}{۲}})$$

چون $p > ۳$ عددی اول است لذا حتما فرد است و در نتیجه $p-۱$ زوج است و می توانیم این $p-۱$ کسر را مطابق بالا به $\frac{p-۱}{۲}$ دسته تقسیم کنیم.

$$(۱ + \frac{۱}{p-۱}) + (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{p-۲}) + \cdots + (\frac{۱}{\frac{p-۱}{۲}} + \frac{۱}{\frac{p+۱}{۲}}) \equiv \sum_{k=۱}^{\frac{p-۱}{۲}} k^{p(p-۱)-۱} + (p-k)^{p(p-۱)-۱} \pmod{p^۲}$$

$\bigstar$

حال نشان می دهیم که عبارت سمت راست در هم نهشتی بالا همواره بر $p^۲$ بخش پذیر است.

$$k^{p(p-۱)-۱} + (p-k)^{p(p-۱)-۱} = k^{p(p-۱)-۱} + \sum_{i=۱}^{p(p-۱)-۱} \binom{p(p-۱)-۱}{i} p^i (-k)^{p(p-۱)-۱-i}$$

$$= k^{p(p-۱)-۱} + (-k)^{p(p-۱)-۱} + \binom{p(p-۱)-۱}{۱} p(-k)^{p(p-۱)-۲} + p^۲ c_k$$

$$= (p(p-۱)-۱)k^{p(p-۱)-۲}p + p^۲ c_k \qquad \bigstar\bigstar$$

در اینجا چون p عددی فرد می باشد در نتیجه $p(p-۱)-۱$ هم عددی فرد می شود و خواهیم داشت $(-k)^{p(p-۱)-۱} = -(k)^{p(p-۱)-۱}$ و از جملاتی که توان p درآنها بزرگتر یا مساوی دو بوده یک $p^۲$ فاکتور گرفته ایم و مجموع بقیه اعداد را c_k نامیده ایم.

حال طبق ★ و ★★ خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{p(p-1)-1}+(p-k)^{p(p-1)-1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(p(p-1)-1)k^{p(p-1)-2}p+p^2c_k$$
$$\equiv -p\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(k)^{p(p-1)-2} \pmod{p^2}$$

اگر ثابت کنیم که $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(k)^{p(p-1)-2}$ بر p بخش پذیر است آنگاه درستی حکم به اثبات می رسد.ما می آییم و ثابت می کنیم $2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{p(p-1)-2} \equiv 0 \pmod{p}$ و با توجه به اینکه $\gcd(2,p)=1$ از لم اقلیدس نتیجه می گیریم که

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{p(p-1)-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

داریم

$$2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{p(p-1)-2} \equiv 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(k)^{-2} \equiv$$
$$\equiv (1+\frac{1}{(p-1)^2})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(p-2)^2})+\cdots+(\frac{1}{(\frac{p-1}{2})^2}+\frac{1}{(\frac{p+1}{2})^2})$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2} \equiv \sum_{k=1}^{p-1}k^2 \pmod{p}$$

و چون

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لذا خواهیم داشت

$$2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{p(p-1)-2} \equiv \sum_{k=1}^{p-1}k^2 \equiv \frac{(p-1)(p)(2p-1)}{6} \equiv 0 \pmod{p}$$

و لذا درستی حکم ثابت می شود. در خط اول از این موضوع استفاده کردیم که برای هر $k\in\{1,2,\dots,p-1\}$ داریم

$$k^{p(p-1)-2} \equiv k^2 \pmod{p}$$

(از قضیه اویلر که در همان ابتدا نوشته ایم نتیجه می شود.) و در خط دوم هم از این نکته استفاده کردیم که

$$\frac{۱}{k} \equiv \frac{۱}{p-k} \qquad k \in \{۱, ۲, \dots, p-۱\}$$

و خط سوم هم از اینکه مجموعه $\{۱, ۲, \dots, p-۱\}$ تحت عمل ضرب بسته(ضرب به پیمانه p)است و تشکیل یک گروه می دهد و اعضای متمایز یک گروه وارون های متمایزی در خود گروه دارند نتیجه می شود (در واقع به نوعی نگاشت $a \leftarrow a^{-۱}$ یک نگاشت یک به یک و پوشا هست)

■

سوال ۴) پاسخ : تمام چند جمله ای های به شکل $ax+b$ که $a,b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

لم۱ : فرض کنید $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ یک تابع اکیدا یکنوا(صعودی یا نزولی) باشد در این صورت معادله $f(x) = 0$ حداکثر یک ریشه حقیقی دارد.

برهان: فرض کنید تابع $f(x)$ یک تابع اکیدا صعودی باشد(اثبات در حالت دیگر به شکل مشابه انجام می شود.)اگر $f(x) = 0$ ریشه نداشته باشد که برهان کامل است.در غیر این صورت از برهان خلف استفاده می کنیم فرض کنید $f(x) = 0$ حداقل دو ریشه x_1, x_2 داشته باشد نشان می دهیم این فرض به تناقض منجر می شود.چون تابع $f(x)$ اکیدا صعودی است لذا اگر $x_2 < x_1$ آنگاه $0 = f(x_2) < f(x_1) = 0$ که تناقض است.مشابها اگر $x_1 < x_2$ به تناقض می رسیم و لذا باید داشته باشیم $x_1 = x_2$ و لذا فرض ما مبنی بر اینکه $f(x) = 0$ بیش از دو ریشه داشته باشد به تناقض می انجامد و حداکثر می تواند یک ریشه داشته باشد و برهان کامل می شود. ■

لم ۲: فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله ای از درجه ی n با ریشه های حقیقی باشد در این صورت $p(x)$ برای مقادیر x قبل از کوچکترین ریشه اش و بعد از بزرگترین ریشه اش اکیدا یکنوا است(یعنی یا اکیدا صعودی است یا اکیدا نزولی).

برهان : چون تمام ریشه های $p(x) = 0$ اعدادی حقیقی هستند در این صورت طبق قضیه اساسی جبر می توان $p(x)$ را به شکل $p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ نمایش داد که $x_1, x_2, ..., x_n, a_n$ اعدادی حقیقی هستند و $a_n \neq 0$. حال داریم

$$p'(x) = a_n \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i)$$

اگر فرض کنیم x_1 و x_n به ترتیب کوچکترین و بزرگترین ریشه ی $p(x) = 0$ باشند در این صورت اگر $x < x_1$ باشد بسته به علامت a_n و زوجیت n ، یا اکیدا منفی خواهید بود یا اکیدا مثبت (اگر a_n منفی باشد و n فرد باشد $p'(x) < 0$ و $p(x)$ نزولی خواهد بود. اگر a_n منفی باشد و n زوج باشد $p'(x) > 0$ و در نتیجه $p(x)$ صعودی خواهد بود. دو حالت دیگر هم به همین شکل بررسی می شوند.) و لذا $p(x)$ در این بازه اکیدا نزولی یا اکیدا صعودی خواهد بود. اگر $x > x_n$ باشد هم با استدلالی مشابه (بسته به علامت a_n) یا اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی خواهد بود. ■

حال به حل مساله اصلی باز می گردیم. ابتدا نشان می دهیم تمام ریشه های $p(x)$ اعدادی حقیقی هستند.بابرهان خلف فرض کنید $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ریشه ی $p(x)$ باشد.در این صورت $p(z) = 0 \in \mathbb{R}$ که با فرض سوال در تناقض است.لذا تمام ریشه های $p(x)$ حقیقی هستند و لذا طبق قضیه اساسی جبر می توان $p(x)$ را به صورت

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$$

نمایش داد که $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ اعدادی حقیقی هستند و $a_n \neq 0$ ضریب x^n در چند جمله ای $p(x)$ می باشد.به راحتی با قرار دادن یک عدد حقیقی مانند k که برابر رییشه

های چند جمله ای $p(x)$ یعنی $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ نباشد می توان دید که a_n هم باید عددی حقیقی باشد(چون $p(k) \in \mathbb{R}$ $(k-\alpha_۱)(k-\alpha_۲)...(k-\alpha_n) \in \mathbb{R}$ $\neq ۰$ می توان دید که $a_n = \frac{p(k)}{(k-\alpha_۱)(k-\alpha_۲)...(k-\alpha_n)}$ حاصل تقسیم دو عدد حقیقی میباشد و بنابراین خود نیز عددی حقیقی می باشد.) بنابراین چند جمله ای ما یک چند جمله با ریشه های حقیقی و ضرایب حقیقی می باشد.

اگر درجه چند جمله ای $p(x)$ یعنی n برابر یک باشد آنگاه چند جمله ای ما به شکل $p(x) = ax + b$ خواهد بود که $a, b \in \mathbb{R}, a \neq ۰$ و به وضوح این چند جمله ای در همه ی خواسته های مساله صدق می کند و لذا یک جواب مساله می باشد.

حال ثابت می کنیم مساله جواب دیگری ندارد یعنی اگر $n \geq ۲$ باشد آنگاه می توان $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ پیدا کرد که $p(z) \in \mathbb{R}$ که این با فرض مساله ما در تناقض می باشد و مساله حل می شود.

برای این منظور ثابت می کنیم چند جمله ای $p(x) - k$ به ازای حداقل یک عدد حقیقی مانند k دارای ریشه ای مانند $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ است که

$$p(z) - k = ۰ \iff p(z) = k \in \mathbb{R}$$

که این با فرض مساله ما در تناقض می باشد و اثبات می شود که n باید کمتر از ۲ باشد و با توجه به اینکه چند جمله ای ثابت در شرایط مساله صدق نمی کند لذا تمام چند جمله ای های به فرم $p(x) = ax + b$ که $a, b \in \mathbb{R}, a \neq ۰$ جواب مساله ما خواهند بود و مساله حل می شود.

اگر $n = ۲$ باشد چند جمله ای ما به شکل $p(x) = ax^۲ + bx + c$ خواهد بود که می توان آن را به صورت زیر $p(x) = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + c - \frac{b^۲}{۴a}$ نوشت. اگر $a > ۰$ باشد آنگاه $c - \frac{b^۲}{۴a}$ مینیمم $p(x)$ می باشد حال اگر $k > ۰$ را به شکلی انتخاب کنیم که $k + c - \frac{b^۲}{۴a^۲} > ۰$ باشد آنگاه $p(x) + k = ۰$ هیچ ریشه ی حقیقی نخواهد داشت زیرا

$$p(x) + k > c - \frac{b^۲}{۴a^۲} + k > ۰$$

اگر $a < ۰$ باشد آنگاه $c - \frac{b^۲}{۴a^۲}$ ماکزیمم $p(x)$ می باشد حال اگر $k > ۰$ را به شکلی انتخاب کنیم که $k > c - \frac{b^۲}{۴a^۲}$ باشد آنگاه $p(x) - k = ۰$ هیچ ریشه ی حقیقی نخواهد داشت زیرا

$$p(x) - k < c - \frac{b^۲}{۴a^۲} - k < ۰$$

پس در هر دو حالت ثابت شد که به ازای $k \in \mathbb{R}$ مناسبی معادله $p(x) - k = ۰$ ریشه ای حقیقی ندارد و لذا $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ موجود است که $p(z) - k = ۰ \iff p(z) = k \in \mathbb{R}$ که با فرض مساله در تناقض است.

حال فرض کنید $n \geq ۳$ باشد. ثابت می کنیم این حالت هم امکان پذیر نمی باشد.

بدون کم شدن از کلیت کار فرض کنید $x_۱, x_n$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین ریشه های چند جمله ای $p(x)$ باشند. در این صورت چون $p(x)$ یک تابع پیوسته بر $[x_۱, x_n]$ که مجموعه ای فشرده می باشد لذا دارای ماکزیمم و مینیمم در این بازه می باشد فرض کنید که M ماکزیمم $p(x)$ در $[x_۱, x_n]$ باشد حال اگر عدد حقیقی k را بزرگتر از M انتخاب کنیم می توانیم ببینیم که چند جمله ای $p(x) - k$ در $[x_۱, x_n]$ ریشه ای ندارد (چون برای هر $x \in [x_۱, x_n]$ داریم

$$p(x) - k \leq M - k < ۰$$

) حال چون چند جمله های $p(x)$ و $p(x) - k$ دارای مشتق یکسانی هستند و لذا از نظر صعودی یا نزولی بودن رفتار یکسانی دارند و هر دو در (x_n, ∞) و $(-\infty, x_۱)$

طبق لم ۱۱اکیدا یکنوا هستند و لذا طبق لم ۲ می توان گفت $p(x) - k = ۰$ در این دو بازه در مجموع حداکثر ۲ ریشه حقیقی میتواند داشته باشد. با توجه به اینکه $p(x) - k$ یک چند جمله ای درجه $n \geq ۳$ است و باید n ریشه داشته باشد و با توجه به مطالب بالا می تواند حداکثر دو ریشه در اعداد حقیقی داشته باشد لذا باید عدد مختلطی مانند $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ موجود باشد که $p(z) - k = ۰$ و در نتیجه $p(z) = k \in \mathbb{R}$ که با فرض مساله در تناقض است و لذا اثبات کردیم که این حالت هم امکان پذیر نمی باشد پس در مجموع تنها جواب مساله ما $p(x) = ax + b$ که $a, b \in \mathbb{R}, a \neq ۰$ خواهد بود. ■