آزمون نوبت اول
چهل و چهارمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۱۴۰۱/۲/۱۹

انجمن ریاضی ایران

دانشگاه الزهرا

---

۱. فرض کنید A و B به ترتیب ماتریس‌های $m\times n$ و $n\times m$ با درایه‌های حقیقی باشند. اگر AB خودتوان و BA قطری باشد، نشان دهید BA نیز خودتوان است.
(ماتریس T را خودتوان گوییم هرگاه $T^{2}=T$.)

۲. نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ویژگی زیر وجود ندارد.
«برای هر دنباله همگرای $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی با جملات متمایز، دنباله $\{f(a_i)\}_{i=1}^{\infty}$ به هیچ عدد حقیقی همگرا نیست.»

۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ یک تابع چندجمله‌ای n متغیره با ضرایب حقیقی باشد به گونه‌ای که درجه‌ی هر متغیر در f حداکثر ۱ است. قرار دهید

$$Q=\{(x_1,\cdots,x_n)|\ x_1,\cdots,x_n\in[0,1]\}.$$

نشان دهید نقطه‌ای مانند b در $\mathbb{R}^{n}$ موجود است که هر کدام از درایه‌های آن ۰ یا ۱ هستند و به ازای هر $x=(x_1,\cdots,x_n)$ در Q داریم $|f(b)|\geq|f(x)|$.

۴. فرض کنید $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد به طوری که $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i<\infty$. می‌دانیم برای حداکثر تعداد شمارایی از زیرمجموعه‌های ناتهی اعداد طبیعی مثل A، $\sum_{i\in A} a_i$ عددی گنگ است. ثابت کنید اعضای این دنباله از جایی به بعد برابر صفر هستند.

۵. فرض کنید G یک گروه و T و C زیرگروه‌های آن باشند به طوری که $G=CT$. اگر T متناهی، C دوری نامتناهی و $T\neq \mathrm{N}_G(T)$، ثابت کنید $G/\mathrm{Z}(G)$ متناهی است.

۶. مجموعه‌ی Δ را متشکل از تمام نقاط به صورت (p_1,p_2,p_3) تعریف کنید که p_i ها اعداد حقیقی نامنفی باشند و $p_1+p_2+p_3=1$. فرض کنید v_1,v_2,v_3 سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند که در بین آنها، v_1 بیشترین طول اقلیدسی را دارد. اگر نقطه‌ی (p_1,p_2,p_3) به طور تصادفی با توزیع یکنواخت از Δ انتخاب شود، ثابت کنید به ازای هر عدد c در بازه‌ی $(0,\frac{1}{4})$ داریم $\mathbb{P}(\|p_1v_1+p_2v_2+p_3v_3\|\leq c\|v_1\|)\leq 4c$.
(منظور از $\mathbb{P}(A)$ احتمال رخ دادن پیشامد A و منظور از $\|w\|$ طول اقلیدسی بردار w است.)

موفق باشید