۷) در یک جمع، n نفر حاضر هستند. هر دو فرد در این جمع یا با هم دوست هستند یا دشمن. فرض کنید m بیشترین تعداد افراد حاضر در جمع باشد که دو به دو با هم دشمن هستند. هر فرد را متناظر یک نقطه در صفحه $\mathbb{R}^۲$ بگیرید. فرض کنید فاصله‌ی هر دو دوست حداکثر یک متر و فاصله هر دو دشمن، بیش از ۳ متر است. کمترین مقدار k را بدست آورید که بتوان همه‌ی این افراد را به k دسته افراز کرد طوری که اولا افراد متعلق به هر دسته با هم دوست باشند و ثانیا هر دو فردی که در یک دسته قرار ندارند با یکدیگر دشمن باشند.

پاسخ: جواب مساله m است. فرض کنید $X = \{p_۱, p_۲ \dots, p_n\}$ مجموعه‌ی n عضوی متشکل از افراد این جمع باشد. مجموعه‌ی $T = \{q_۱, \dots, q_m\}$ را مجموعه‌ای m عضوی از افرادی بگیرید که دو به دو دشمن هستند. فرض کنید $d(p,q)$ نشان دهنده‌ی فاصله‌ی دو شخص p و q باشد. برای هر i که $۱ \leq i \leq m$ زیرمجموعه‌ی X_i از X را به این شکل تعریف کنید

$$X_i = \{p \in X | \, d(p, q_i) \leq ۱\}.$$

چون T بزرگترین زیرمجموعه‌ی متشکل از افراد دو به دو با هم دشمن در X است پس هر عضو از X باید با حداقل یکی از اعضای T دوست باشد. پس $X = \cup_{i=۱}^{n} X_i$. همچنین می‌توان نشان داد برای هر $i \neq j$ داریم $X_i \cap X_j = \varnothing$. زیرا در غیر این صورت اگر p متعلق به $X_i \cap X_j$ باشد، آنگاه به کمک نامساوی مثلث داریم

$$۲ \geq d(q_i, p) + d(p, q_j) \geq d(q_i, q_j) > ۳$$

که تناقض است. اثبات دوست بودن افراد یک دسته نیز مشابه است. زیرا اگر $\{p, q\} \subseteq X_i$ و p و q دشمن باشند، آنگاه

$$۳ < d(p, q) \leq d(p, q_i) + d(q, q_i) \leq ۲$$

که تناقض است. حالا فرض کنید p و q در دو دسته متفاوت باشند. پس مثلاً $p \in X_i$ و $q \in X_j$ که $i \neq j$. ثابت می‌کنیم p و q دشمن هستند. اگر p و q دوست باشند، داریم $d(p,q) \leq ۱$ و به کمک نامساوی مثلث داریم

$$d(q_i, q_j) \leq d(p, q_i) + d(p, q) + d(q, q_j) \leq ۳$$

که با فرض دشمن بودن q_i و q_j در تناقض است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۸) فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه با اندیس متناهی از G باشد. اگر یک همریختی پوشا از G به گروه $(\mathbb{Z},+)$ وجود داشته باشد، ثابت کنید یک همریختی پوشا از H به $(\mathbb{Z},+)$ نیز وجود دارد.

پاسخ: فرض کنید $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ یک همریختی پوشا باشد. اگر $f(H) = \{\circ\}$ آنگاه $H \subseteq \mathrm{Ker(f)}$ و در نتیجه $[G : \mathrm{Ker(f)}] \leq [G : H] < \infty$ که با $G/\mathrm{Ker(f)} \cong \mathbb{Z}$ تناقض دارد. بنابراین $f(H)$ یک زیرگروه ناصفر از $\mathbb{Z}$ است. بنابراین به ازای یک عدد صحیح و نامنفی m داریم $f(H) = m\mathbb{Z}$. در نتیجه ضابطه‌ی $g(h) = \frac{f(h)}{m}$ یک همریختی پوشا از H به $\mathbb{Z}$ را مشخص می‌کند.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۹) فرض کنید تابع $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ روی هر بازه‌ی کراندار، انتگرال‌پذیر باشد و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1.$$

ثابت کنید برای هر $\alpha<1$،

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx=\infty.$$

پاسخ:

بنابر فرض، عدد صحیح k_0 وجود دارد که برای هر $x>2^{k_0}$ داریم $\frac{f(2x)}{f(x)}>2^{\alpha-1}$.

تعریف می‌کنیم

$$I_k=\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{f(x)}{x^\alpha}dx$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $x=2y$ داریم

$$I_{k+1}=2^{1-\alpha}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{f(2y)}{y^\alpha}dy$$

پس برای $k>k_0$،

$$I_{k+1}>2^{1-\alpha}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{2^{\alpha-1}f(y)}{y^\alpha}dy=I_k$$

پس دنباله‌ی I_k از جایی به بعد صعودی و مثبت است و در نتیجه $\sum I_k=\infty$.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۱۰) اعداد طبیعی t و k داده شده‌اند. فرض کنید $A_1, \ldots, A_{t+1}$ زیرمجموعه‌هایی متمایز و k-عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشند. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k-عضویِ $\{1, 2, \ldots, n\}$ است به طوری که هر عضو $\mathcal{F}$ حداکثر با $t-1$ تا از A_iها اشتراک ندارد. برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ، ثابت کنید

پاسخ: زیرمجموعه‌ی k-عضوی مانند B متعلق به $\mathcal{F}$ است هرگاه B با حداقل دو تا از A_iها اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه‌ی T را به شکل زیر تعریف کنید

$$T = \{x : x \in A_i \cap A_j \text{ for } 1 \leq i \neq j \leq t+1\}.$$

بدیهی است که $|T| \leq \frac{(t+1)k}{2}$. اگر B یک زیرمجموعه‌ی k-عضوی از $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد که $B \cap T \neq \varnothing$ آنگاه B در $\mathcal{F}$ قرار دارد. تعداد چنین Bهایی برابر است با

$$\binom{n}{k} - \binom{n-|T|}{k}.$$

حال ممکن است زیرمجموعه‌های k-عضوی مانند B' وجود داشته باشند که $B' \cap T = \varnothing$ اما برای $1 \leq i \neq j \leq t+1$ داشته باشیم $B' \cap A_i \neq \varnothing$ و $B' \cap A_j \neq \varnothing$. در نتیجه B' در $\mathcal{F}$ قرار دارد. تعداد چنین B'هایی حداکثر برابر است با

$$\sum_{i \neq j} |A_i \setminus T||A_j \setminus T| \binom{n-2}{k-2}.$$

دو حالت در نظر می‌گیریم

حالت اول. $|T| = \lfloor \frac{(t+1)k}{2} \rfloor$

در این حالت همه A_iها بجز حداکثر یکی، زیرمجموعه‌ی T هستند پس در این حالت زیرمجموعه‌های k عضوی از نوع B' وجود ندارد و

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n - \lfloor \frac{(t+1)k}{2} \rfloor}{k}.$$

پس در این حالت حکم اثبات می‌شود.

حالت دوم. $|T| < \lfloor \frac{(t+۱)k}{۲} \rfloor$

در این حالت زیرمجموعه‌های k عضوی از نوع B' حداکثر برابر است با

$$\sum_{i<j} |A_i \setminus T||A_j \setminus T| \binom{n-۲}{k-۲} \leq \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲}.$$

پس

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-|T|}{k} + \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲}.$$

دقت کنید که

$$\binom{n-|T|}{k} - \binom{n-\lfloor \frac{(t+۱)k}{۲} \rfloor}{k} \geq \binom{n-|T|}{k} - \binom{n-|T|-۱}{k} \geq \binom{n-|T|-۱}{k-۱}$$

پس

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-\lfloor \frac{(t+۱)k}{۲} \rfloor}{k} - \binom{n-|T|-۱}{k-۱} + \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲}$$

اما چون n به اندازه‌ی کافی نسبت به t, k بزرگ است به راحتی می‌توان نشان داد که

$$-\binom{n-|T|-۱}{k-۱} + \binom{t+۱}{۲} k^۲ \binom{n-۲}{k-۲} < ۰$$

و حکم نتیجه می‌شود.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۱۱) زیرمجموعه‌ی A از یک حلقه‌ی R را پوچ‌گرا می‌نامیم هرگاه به ازای هر دنباله‌ی $a_1, a_2, \cdots$ در A عدد طبیعی n موجود باشد که $a_1 \cdots a_n = 0$. ثابت کنید در یک حلقه‌ی جابجایی ایده‌ال تولید شده توسط یک مجموعه‌ی پوچ‌گرا خود یک مجموعه‌ی پوچ‌گرا است.

پاسخ: فرض کنید A یک مجموعه‌ی پوچ‌گرا و J ایده‌ال تولیدشده توسط A در حلقه R باشد.

فرض خلف: J مجموعه‌ی پوچ‌گرا نیست.

در این صورت دنباله‌ی $f_1, f_2, \cdots$ در J وجود دارد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی $f_1 \cdots f_n \neq 0$ برقرار است. اگر قرار دهیم

$\Lambda = \{I \lhd R : \forall n \in \mathbb{N}, f_1 \cdots f_n \notin I\}$ آنگاه $\{0\} \in \Lambda$ و بنابر لم زرن Λ عضو ماکزیمالی مثل B دارد.

ادعا: $x \in R \backslash B$ وجود دارد که $xA \subseteq B$.

اولاً $A \nsubseteq B$ زیرا در غیر این صورت $J \subseteq B$ و بنابراین $f_1 \in B$ که تناقض است. لذا $a_1 \in A \backslash B$ وجود دارد. اگر $a_1 A \subseteq B$، ادعا ثابت می‌شود و گرنه $a_2 \in A$ وجود دارد که $a_1 a_2 \notin B$. اگر $a_1 a_2 A \subseteq B$ ادعا ثابت می‌شود. در غیر این صورت مانند قبل ادامه می‌دهیم. حال چون A یک مجموعه‌ی پوچ‌گرا است پس از متناهی مرحله این روند متوقف می‌شود و ادعا ثابت می‌شود.

چون $x \notin B$، از ماکزیمال بودن B در Λ نتیجه می‌شود عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $f_1 \cdots f_n \in B + Rx$.

از طرفی $xJ \subseteq B$ بنابراین $f_1 \cdots f_n f_{n+1} \in f_{n+1}(B + Rx) \subseteq B + Rxf_{n+1} \subseteq B$ که تناقض است.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety

۱۲) فرض کنید عدد حقیقی گنگ α و تابع $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $g(z)=1+e^z+e^{\alpha z}$ داده شده باشد. ثابت کنید بستار مجموعه‌ی $\{\mathrm{Re}(z):g(z)=0\}$ یک بازه‌ی بسته و کراندار است. (منظور از $\mathrm{Re}(z)$ قسمت حقیقی عدد مختلط z است.)

پاسخ: ثابت می‌کنیم بازه‌ی مذکور در حکم، بازه‌ای به شکل $[r_0,r_1]$ است که تشکیل شده است از rهایی که اعداد ۱ و e^r و $e^{\alpha r}$ در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $\alpha>1$. اثبات در حالت‌های $0<\alpha<1$ و $\alpha<0$ مشابه است. در حالت $\alpha>1$ تعریف می‌کنیم

$$r_0=\inf\{r:1<e^r+e^{\alpha r}\},\qquad r_1=\sup\{r:e^{\alpha r}<1+e^r\}$$

به وضوح $r_0<0<r_1$. ثابت می‌کنیم بازه‌ی مذکور در حکم، بازه‌ی $[r_0,r_1]$ است. تعریف می‌کنیم

$$S=\{\mathrm{Re}(z):g(z)=0\}$$

برای هر zای که $g(z)=0$، از نابرابری مثلث نتیجه می‌شود

$$1\le e^{Re(z)}+e^{\alpha\mathrm{Re}(z)},\qquad e^{\alpha\mathrm{Re}(z)}\le 1+e^{\mathrm{Re}(z)}$$

پس $r_0\le\mathrm{Re}(z)\le r_1$. در نتیجه $S\subset[r_0,r_1]$ که نتیجه می‌دهد $\bar{S}\subset[r_0,r_1]$.

حال فرض کنیم $r\in[r_0,r_1]$. اکنون اعداد ۱ و e^r و $e^{\alpha r}$ در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند و در نتیجه مثلثی با آن اضلاع وجود دارد. پس اعداد حقیقی θ_1 و θ_2 وجود دارند که

$$1+e^{r+i\theta_1}+e^{\alpha r+i\theta_2}=0$$

تعریف می‌کنیم

$$h(z)=1+e^{z+i\theta_1}+e^{\alpha z+i\theta_2}$$

فرض کنیم $\epsilon_0>0$ به نحوی باشد که r تنها ریشه‌ی h در $B_{\epsilon_0}(r)$ باشد. حال برای هر $0<\epsilon<\epsilon_0$ تعریف می‌کنیم

$$\rho=\min_{\partial B_\epsilon(r)}|h(z)|>0$$

لم: فرض کنید α عددی گنگ و θ عددی دلخواه باشد. در این صورت برای هر $\delta > ۰$ اعداد صحیح m و n وجود دارند که $|\theta - m\alpha - n| < \delta$.

بنابر این لم، اعداد صحیح m و n وجود دارند که $|\frac{\theta_۲ - \alpha\theta_۱}{۲\pi} - m\alpha - n| < \delta$. حال تعریف می‌کنیم

$$\phi(z) = g(z + i(\theta_۱ + ۲m\pi))$$

داریم

$$|h(z) - \phi(z)| = \left|e^{\alpha z + i\theta_۲} - e^{\alpha z + i(\alpha\theta_۱ + ۲m\alpha\pi)}\right| = |e^{\alpha z}| \left|e^{i(\theta_۲ - \alpha\theta_۱ - ۲m\alpha\pi)} - ۱\right| \leq ۲\pi\delta|e^{\alpha z}|$$

که در آن از نابرابری مقدماتی $|e^{i\theta} - ۱| \leq |\theta|$ استفاده کرده‌ایم. حال $\delta > ۰$ را عددی می‌گیریم که برای هر $z \in \partial B_\epsilon(r)$، داشته باشیم $۲\pi\delta|e^{\alpha z}| < \rho$. در این صورت برای هر $z \in \partial B_\epsilon(r)$ خواهیم داشت $|h(z) - \phi(z)| < |h(z)|$. پس بنابر قضیه روشه، تعداد ریشه‌های h و ϕ داخل $B_\epsilon(r)$ برابر است. پس ϕ ریشه‌ای مانند z دارد که $|z - r| < \epsilon$ و در نتیجه $|\mathrm{Re}(z) - r| < \epsilon$. حال با توجه به تعریف ϕ نتیجه می‌شود که g نیز ریشه‌ای دارد که $|\mathrm{Re}(z) - r| < \epsilon$. چون استدلال بالا برای هر $۰ < \epsilon < \epsilon_۰$ برقرار است نتیجه می‌گیریم که $r \in \bar{S}$.

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS
کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety