

سخن نخست

هشتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن جدیدترین سمینار از دنباله سمینارهای دوسالانه‌ای است که در بیش از ۱۵ سال پیش آغاز گردید. این همایش زیر نظر و با همکاری انجمن ریاضی ایران سازماندهی شده و دامنه وسیع و فراگیری از مباحث در جبر خطی محض و کاربردی به همراه کاربردهای آن را در بر می‌گیرد.

کمیته برگزاری سمینار حضور تمامی شرکت‌کنندگان در سمینار را خوش‌آمد می‌گوید و آرزومند اقامتی خوش و مفید در سنج‌ج برای شما می‌باشد. حدود ۱۵۰ نفر در این سمینار شرکت نموده‌اند. ما نهایت تلاش خود را به کار بسته‌ایم تا سمینار تا حد ممکن ارزنده و مناسب برگزار گردد. وظیفه خود می‌دانیم تا مراتب قدردانی خود را از تمامی افراد و سازمان‌هایی که برگزاری این همایش را میسر ساختند ابراز نماییم. به ویژه، از راهنمایی‌های ریاست محترم، دبیر محترم همایش‌ها، دبیرخانه و دیگر مسئولین محترم انجمن ریاضی ایران بسیار قدردانی می‌گردد. همکاری و هماهنگی‌های منسجم کل مجموعه دانشگاه کردستان قابل تقدیر و تشکر است. به همین مناسبت مراتب سپاس کمیته اجرایی تقدیم می‌گردد به:

ریاست محترم دانشگاه، معاونت محترم پژوهشی و فناوری دانشگاه، ریاست و معاونت‌های محترم آموزشی و پژوهشی دانشکده علوم، مدیریت و کارشناس محترم روابط بین‌الملل و همکاری‌های علمی دانشگاه و وزارت علوم، کارشناسان و کارکنان محترم دفتر مرکزی تهران، مدیریت محترم گروه ریاضی، مدیران و همکاران محترم سایر گروه‌های علمی دانشکده علوم، امور عمومی و پشتیبانی دانشگاه و دانشکده علوم، اداره مالی دانشکده، واحد محترم فناوری اطلاعات دانشکده علوم، مدیریت و کارشناسان محترم طرح‌های عمرانی دانشگاه، مدیریت و کارکنان محترم روابط عمومی دانشگاه کردستان و کلیه کارکنان محترم و دانشجویانی که هر یک به نحوی در برگزاری سمینار نقش داشتند. همچنین وظیفه خود می‌دانیم از حمایت‌های بسیار ارزنده مدیریت بانک تجارت استان کردستان تشکر و قدردانی نماییم.

فهرست مطالب

۱.....	سخنرانی ها
۲.....	توزیعی از مقادیر ویژه برای ماتریسهای هنکل مثلثی مایل
۶.....	تشخیص چهره با استفاده از تجزیه مقادیر تکین SVD
۱۰.....	پیش شرط سازی روش تاو ماتریسی تکه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل
۱۴.....	ماتریس‌های همبستگی مرتبه‌ی ۲ و ۳ و ۴
۱۸.....	استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربردها در تدریس جبر خطی
۲۲.....	بررسی ویژگی‌های $l^p(S)$ به کمک فضای ماتریس‌ها
۲۳.....	پوسترها
۲۴.....	فشرده سازی تصویر دیجیتال با تجزیه مقادیر تکین
۲۸.....	عملگرهای القایی روی فضای چندجمله‌ایهای همگن
۳۲.....	نتایجی پیرامون روش زیردرمیان
۳۶.....	افزایش سرعت شناسایی زمینه ویدیو با محاسبه مرحله‌ای تجزیه QR
۴۰.....	حل مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریسهای تصادفی دوگانه با استفاده از ماتریسهای تصادفی هم طیف با آن
۴۴...	الگوریتمی برای حل مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس های تصادفی دوگانه
۴۸.....	قضیه‌ای در جبر خطی با کاربردهایی برای حل معادلات درجه دو
۵۲.....	نگاشت های جمعی حافظ عملگرهای نیمه برودر
۵۶	یک الگوریتم غیریکنوا مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی برای مسائل بهینه‌سازی نامقید

مقالات سخنرانی

توزیعی از مقادیر ویژه برای ماتریسهای هنکل مثلثی مایل

مریم شمس سولاری^{۱*}

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور تهران
shamssolary@pnu.ac.ir, shamssolary@gmail.com

چکیده. در این مقاله سعی می کنیم توزیعی از مقادیر ویژه برای ماتریسهای هنکل مثلثی مایل چگال بدست آوریم. در واقع تعمیمی از توزیع مقادیر ویژه برای این ماتریسها در حالتی که همه عناصر قطر فرعی و زیر آن ناصفر هستند بدست می آوریم. برای این کار از تابع مولد و یک ساختار بلوکی استفاده کرده و با کمک بسط لاپلاس و روند استقرایی توزیعی از مقادیر ویژه می یابیم.

۱. ماتریسهای هنکل مثلثی مایل و یک توزیع از مقادیر ویژه

هدف از این مقاله بررسی آنالیز طیفی مقادیر ویژه برای ماتریسهای مربعی هنکل با عناصر قطر فرعی و درایه های زیرین ناصفر می باشد، یعنی

$$H_n(f) = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & f_1 \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & f_1 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & f_1 & \cdots & f_{k-2} & f_{k-1} \\ \circ & \circ & f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ \circ & f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k & \circ \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k & \circ & \circ \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

در [۱، ۲] این ماتریسها بوسیله ضرایب بسط فوریه f_m و به کمک روابط زیر معرفی شده اند: $F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m z^m$ ، $f \in L^{\infty}$ که $f = f(\omega) = \omega^n \sum_{m=1}^k f_m \omega^{m-1}$ ، سری سمت راست روی $|z| < 1$ بطور مطلق همگرا به $F(z)$ می باشد. مربع این ماتریسها ماتریسهای تاپلیتز می باشند که در [۳] در مورد آنها صحبت شده است. در مقاله [۱] یک قانون حدی ضعیف برای مقادیر ویژه این ماتریسها در صورتیکه تنها سه ردیف از درایه های

ماتریس هنکل مثلثی مایل ناصفر است ارائه شده است:

$$H_3(f) = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & f_1 \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & f_1 & f_2 \\ \circ & \circ & \cdots & f_1 & f_2 & f_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & f_1 & \cdots & \circ & \circ & \circ \\ f_1 & f_2 & \cdots & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix},$$

ما سعی می کنیم این مسئله را برای ماتریسهای هنکل مثلثی مایل چگال بررسی کنیم.

$$\rho_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k} \quad (2.1)$$

رابطه فوق یک توزیع تجربی از مقادیر ویژه می باشد و ρ یک اندازه که چگالی آن بوسیله رابطه $\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$ ، که در واقع نیمی از توزیع $\arcsin$ روی بازه $(-1, 1)$ می باشد، معرفی شده است. آنگاه می توان نشان داد حد $\rho^\# := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ وجود دارد و طبق همگرایی ضعیف اندازه به دو تابع $push - forward$ چگالی بصورت زیر تجزیه می شود، که $T_i(x)$ چندجمله ایهای چیشف نوع اول، J_k ماتریس تبادیل و H_k ماتریس هنکل از مرتبه مناسب می باشند:

$$\varphi^+, \varphi^- : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.1)$$

$$\varphi_k(x) := \varphi^+(x) = \sqrt{T \cdot J_k \cdot H_k(f) \cdot F^t}, \quad \varphi^- := -\varphi^+$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_k), \quad T = (1, 2.T_1(x), 2.T_2(x), \dots, 2.T_{k-1}(x))$$

با کمک بسط لاپلاس، ساختار بلوکی ماتریسها و استقرای ریاضی نشان می دهیم که می توان یک توزیع برای مقادیر ویژه ماتریسهای هنکل مثلثی مایل چگال بدست آورد. در واقع بوسیله توزیع تجربی مقادیر ویژه و تابع چگالی برای هر تابع پیوسته $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(\varphi^+(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(\varphi^-(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (4.1)$$

می توان ثابت کرد که اکثریت مقادیر ویژه از ماتریس بزرگ $H_n(f)$ در اطراف مجموعه $(\varphi^+([-1, 1]) \cup \varphi^-([-1, 1]))$ متمرکز شده اند. برای اثبات فرض می کنیم درایه (n, n) از ماتریس $H_n(f)$ صفر باشد، یعنی

$$G_n(f) = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & f_1 \\ \circ & \circ & \cdots & f_1 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & f_1 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & \circ \end{pmatrix},$$

قرار می دهیم:

$$J_n.G_n(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & \circ \\ \circ & f_1 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & f_1 & f_2 \\ \hline \circ & \circ & \cdots & \circ & f_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \circ & f_1 \end{array} \right)$$

و

$$J_n.H_n(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ \circ & f_1 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & f_1 & f_2 \\ \hline \circ & \circ & \cdots & \circ & f_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \circ & f_1 \end{array} \right).$$

با کمک این ساختار بلوکی و توابع $push - forward$ داریم:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{(T^*, \mathfrak{Y}.T_{n-1}(x)). \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \circ & f_1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} F^* \\ f_n \end{array} \right)} \quad (5.1)$$

$$T = (\underbrace{1, \mathfrak{Y}.T_1(x), \mathfrak{Y}.T_2(x), \dots, \mathfrak{Y}.T_{n-2}(x)}_{T^*}, \mathfrak{Y}.T_{n-1}(x)), F^t = (\underbrace{f_1, \dots, f_{n-1}}_{F^*}, f_n)^t$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{(T^*, \circ). \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \circ & f_1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} F^* \\ \circ \end{array} \right)}. \quad (6.1)$$

لذا داریم:

$$|\varphi_n(x)^{\mathfrak{Y}} - \phi_n(x)^{\mathfrak{Y}}| =$$

$$|f_n + \mathfrak{Y}.T_1(x)f_{n-1} + \mathfrak{Y}.T_2(x)f_{n-2} + \dots + \mathfrak{Y}.T_{n-1}(x)f_1||f_n| \leq \mathfrak{Y} \sum_{i=1}^n |f_i||f_n|$$

از همگرایی مطلق سری $F(z)$ و روابط فوق می توان نتیجه گرفت:

$$\phi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) \text{ for } n \geq k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) - \phi_n(x) = \circ. \quad (7.1)$$

حال بدنبال روابط بین دترمینان ماتریسهای هنکل $H_n(f)$ و $G_n(f)$ و توابع مولد

$$h(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} D_n(\lambda)z^n, \quad g(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} S_n(\lambda)z^n \quad (8.1)$$

هستیم که برای اینکار از بسط لاپلاس استفاده می کنیم:

$$D_n(\lambda) = \left| \begin{array}{ccccc} -\lambda & \circ & \cdots & \circ & f_1 \\ \circ & -\lambda & \cdots & f_1 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & f_1 & \cdots & f_{n-2}-\lambda & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n-\lambda \end{array} \right|, \quad S_n(\lambda) = \left| \begin{array}{ccccc} -\lambda & \circ & \cdots & \circ & f_1 \\ \circ & -\lambda & \cdots & f_1 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & f_1 & \cdots & f_{n-2}-\lambda & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & -\lambda \end{array} \right|.$$

با کمک بسط لاپلاس روی سطر آخر و قرار دادن
 $D_0(\lambda) = S_0(\lambda) = 1$, $D_1(\lambda) = f_1 - \lambda$, $S_1(\lambda) = -\lambda$ برای $n \geq 2$ داریم

$$h(z) = \frac{g(z) + f_1 z}{1 + \lambda(1 - z)[F(z) - f_0 - f_1 z]}. \quad (9.1)$$

با استفاده از نتایج [1]، برای $k = 3$ داریم:

$$\varphi_3(x) = \sqrt{(f_1 - f_3)^2 + f_2^2 + 2f_2(f_1 + f_3)x + 4f_1 f_3 x^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(\varphi_3(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(-\varphi_3(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

با استفاده از استقرای ریاضی و $push - forward$ در فرض استقرا و استفاده از نتایج ساختار بلوکی و بسط لاپلاس داریم:

$$-\frac{\partial \log((- \lambda)^n S_n(\lambda^{-1}))}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k \lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{r+1} \right) \lambda^r, \quad (10.1)$$

$$m^\#(\lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\lambda) = -\lambda \frac{\partial \log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-1)^n S_n(\lambda^{-1})} \right)}{\partial \lambda} = -\lambda \frac{\partial \log \sigma(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^{-1}}, \quad (11.1)$$

از $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-1)^n S_n(\lambda^{-1})}$ معکوس شعاع همگرایی در تابع مولد $g(z)$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{S_n(\lambda)} = \frac{1}{\sigma(\lambda)} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{S_n(\lambda^{-1})} = \frac{1}{\sigma(\lambda^{-1})} = \sigma^{-1}(\lambda^{-1}).$$

از (7.1)، (9.1) و (11.1) حکم استقرا ثابت می شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 - \lambda^2 \varphi_n^2(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\lambda \frac{\partial \log \sigma(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^{-1}}.$$

مراجع

1. Angerer, W. P.: On the spectrum of banded Hankel matrices. Linear Algebra Appl., **439**, 1496–1505 (2013).
2. Angerer, W. P., Zamora, A.: Eigenvalues of a statistical mechanics matrix., J. Math. Chem., **50**, 1411-1419 (2012).
3. Shams Solary, M.: Finding eigenvalues for heptadiagonal symmetric Toeplitz matrices. J. Math. Anal. Appl., **402**, 719–730 (2013).

تشخیص چهره با استفاده از تجزیه مقادیر تکین (SVD)

مجتبی شکوه حاج عباسعلی خان^{۱*} و پرویز سرگلزایی^۲

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

author1@uok.ac.ir

author2@uok.ac.ir

^۳ گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده. در این مقاله از روش تجزیه مقدار تکین (Singular Value Decomposition)، برای تشخیص چهره استفاده می‌کنیم و یک مجموعه‌ای از بردارها را در یک زیر فضا از فضای چهره که از مجموعه‌ای چهره‌های پایه تشکیل شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم، سپس تصویر جدید را با تصویرهای فضای چهره که قبلاً ذخیره شده است جهت شناسایی مورد مقایسه قرار می‌دهیم، همه این بررسی‌ها را با برنامه نویسی در محیط نرم افزار متلب (Matlab) انجام خواهیم داد.

۱. تعاریف

تعریف ۱.۱. M_n را یک فضای ماتریس مختلط $n \times n$ در نظر می‌گیریم، بعضی از نویسندگان از نماد $\mathbb{C}^{n \times n}$ استفاده می‌کنند. اکنون فرض کنید که $A \in M_n$ و بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ بردار ویژه A باشد آنگاه λ را مقدار ویژه A می‌نامیم چنانچه

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و x یک بردار باشد، آنگاه p -نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۳.۱. فضای برداری $\mathbb{R}^{m \times n}$ به دست آمده از $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را می‌توانیم با ضرب داخلی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\langle R, S \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_{ij}. \quad (1.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. پردازش تصویر، تجزیه مقادیر تکین، تشخیص چهره.
* سخنران

برای فضای برداری $\mathbb{R}^{m \times n}$ نرم به دست آمده از ضرب داخلی را نرم فروبنیوس^۱ می نامیم و به صورت $\| \cdot \|_F$ نمایش می دهیم. بنابراین اگر $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ باشد آنگاه

$$\|G\|_F = (\langle G, G \rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}^2}.$$

۲. SVD

تجزیه مقدار تکین مبنی بر دنباله ای از خواص قطری سازی معمولی است که می تواند برای ماتریس مستطیلی به کار برده شود. مقادیر تکین A مجذور ریشه های مقادیر ویژه $A^T A$ هستند و با $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ نشان داده می شوند و به صورت نزولی مرتب می شوند این بدان معناست که مقادیر تکین A ، $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $1 \leq i \leq n$ می باشد. تجزیه A به صورت $U \Sigma V^T$ تجزیه مقدار تکین می باشد که در آن U یک ماتریس متعامد $m \times m$ و V نیز یک ماتریس متعامد $n \times n$ و Σ یک ماتریس $m \times n$ است که عناصر خارج از قطر آن همگی صفر می باشد و عناصر روی قطر اصلی آن $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $1 \leq i \leq n$ می باشد.

قضیه ۱.۲ (قضیه SVD). اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، بنابراین A دارای تجزیه مقدار تکین می باشد.

□

برهان. به [۱] مراجعه شود

۳. روش SVD برای تشخیص چهره

روش SVD مجموعه ای از چهره های شناخته شده به عنوان بردار در زیر فضا که فضای چهره نامیده شده و از گروه های کوچکی از چهره های مبنا پدید آمده است را مورد بررسی قرار می دهد. در این مورد، ماتریس A را به عنوان مجموعه ای از چهره پروژه تعریف می کنیم. فرض کنید هر تصویر چهره دارای $m \times n$ پیکسل باشد و به صورت بردار f_i دارای $M \times 1$ ستون نمایش داده شود، یک مجموعه پروژه S با N تعداد از تصویر چهره های شناخته شده از افراد به فرم یک ماتریس $M \times N$ به صورت $S = [f_1, \dots, f_N]$ است، میانگین

تصویر $\bar{f}$ از مجموعه S به صورت $\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$ به دست می آید. با کم کردن $\bar{f}$ از چهره های اصلی خواهیم داشت $a_i = f_i - \bar{f}$ ، $i = 1, 2, \dots, N$. این موجب می شود ماتریس جدید A با سطر و ستون $M \times N$ را به صورت $A = [a_1, a_2, \dots, a_N]$ به دست می آوریم. تجزیه مقدار تکین A را به صورت $A = U \Sigma V^T$ محاسبه می کنیم. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ یک پایه متعامد برای $R(A)$ در محدوده (ستون) زیر فضای از ماتریس A تشکیل می دهد. از آن جا که ماتریس A یک مجموعه پروژه S با N تصویر چهره تشکیل شده، $R(A)$ در فضای چهره با $m \times n$ پیکسل یک زیر فضای چهره نامیده می شود، و هر u_i که $i = 1, 2, \dots, r$ را پایگاه چهره می نامیم.

اگر $x = [x_1, x_2, \dots, x_r]^T$ باشد که مختصات (مکان) از هر $m \times n$ تصویر چهره

^۱Frobenius norm

f در زیرفضای چهره است. اکنون یک طرح عددی از $f - \bar{f}$ روی این پایگاه چهره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T (f - \bar{f}) \quad (1.3)$$

مختصات بردار x برای پیدا کردن بهترین توصیف چهره f از چهره پروژه استفاده می‌شود. این باعث پیدا شدن بعضی چهره پروژه f_i که $i = 1, 2, \dots, N$ می‌شود که فاصله را به حداقل می‌رساند

$$\epsilon_i = \|x - x_i\|_2 = [(x - x_i)^T (x - x_i)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

از آنجایی که x_i مختصاتی از بردار f_i است و $f - \bar{f}$ یک طرح عددی روی پایگاه چهره است لذا $x_i = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T (f_i - \bar{f})$. یک چهره f در طبقه چهره f_i قرار می‌گیرد وقتی که مینیمم ϵ_i از ϵ_0 اولیه که از قبل تعریف شده کمتر باشد، در غیر این صورت چهره f در طبقه چهره‌های ناشناخته قرار می‌گیرد. اگر f یک چهره نباشد، فاصله آن از چهره‌های زیرفضا بزرگتر از صفر می‌شود. از این رو بردار طرح از $f - \bar{f}$ بر روی فضای چهره به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_p = [u_1, u_2, \dots, u_r] x \quad (3.3)$$

که x از معادله (1.3) به دست می‌آید. فاصله f از فضای چهره بین $f - \bar{f}$ و f_p روی فضای چهره ϵ_f می‌باشد:

$$\epsilon_f = \|(f - \bar{f}) - f_p\|_2 = [(f - \bar{f} - f_p)^T (f - \bar{f} - f_p)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

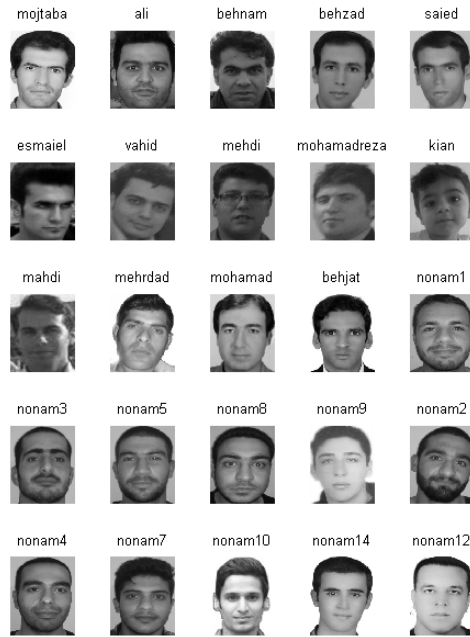
اگر ϵ_f بزرگتر از ϵ_1 اولیه از پیش تعریف شده باشد، f یک تصویر چهره نیست. در ادامه نتایج الگوریتم تشخیص چهره با استفاده از SVD را ارائه می‌دهیم.

۴. نتایج عددی

معمولاً یک چهره دارای M (مثلاً ۱۰۰۰۰) بعد می‌باشد. اما ماتریس A که در این پروژه با توجه به بانک چهره ایجاد می‌شود دارای رتبه r کمتر از N یا برابر با N است که برای تشخیص چهره کافی است، به این ترتیب تا حد زیادی محاسبات برای تشخیص چهره کاهش می‌یابد. در شکل ۱ قسمت الف بانک چهره و در قسمت ب میانگین چهره‌ای که از بانک چهره به دست آورده‌ایم را نشان داده‌ایم. در ادامه در جدول ۱ چند چهره را جهت بررسی به نرم افزار داده و می‌بینیم که چهره‌هایی که در بانک هستند را با خطای خیلی کم تشخیص می‌دهد و چهره‌هایی که در بانک نیستند با بررسی که با بانک می‌شود تفاوت قابل توجهی دارد که به سادگی تشخیص می‌دهد که این چهره یا تصویر در بانک نیست. بنابراین نتیجه می‌گیریم که الگوریتم بدست آمده با استفاده از SVD توانایی خوبی جهت تشخیص چهره دارد.



شکل ب. میانگین چهره های بانک پروژه



شکل الف. بانک چهره های پروژه

شکل ۱: بانک چهره و میانگین بانک چهره

جدول ۱: نتایج به دست آمده از الگوریتم تشخیص چهره از مقایسه چهره های مختلف با بانک چهره پروژه

تصویر ارسالی	خطا ϵ_f رابطه (۴.۳)	خطا ϵ_i رابطه (۲.۳)	پیام نرم افزار
	0.1820×10^{-9}	0.2376×10^{-10}	$face \rightarrow mojtaba$
	0.5702×10^{-10}	0.1576×10^{-10}	$face \rightarrow kian$
	۹۳۲۶/۹۱۲۷	۷۸۵۲/۷۵۸۷	$unknown \ face$
	۱۲۲۵۳/۰۷۹۱		$not \ a \ face$

مراجع

1. Cao, L.: Singular value decomposition applied to digital image processing. Division of Computing Studies Arizona State University Poly-technic Campus, 1–15 (2009).
2. Horn, R.A., Johnson, C.R.: Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 134–144 (1991).
3. Akritas, A.G., Malaschonok, G. I.: Application of Singular-value Decomposition (SVD). Tambov University, Tambov, Russia, (2004).

پیش شرط سازی روش تاو ماتریسی تکه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل

مجتبی حاجی‌پور* و محسن کیان

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد
m.hajipoor@ub.ac.ir
kian@ub.ac.ir

چکیده. در این مقاله، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل روش تاو ماتریسی تکه‌ای به همراه یک پیش شرط ساز مناسب ارائه شده است. با اعمال روش تاو ماتریسی تکه‌ای، معادله ماتریسی بلوکی $\mathbf{Ma} = \mathbf{F}$ بدست می‌آید که با افزایش درجه تقریب، عدد حالت $\mathbf{M}$ به سرعت رو به افزایش می‌گذارد. لذا برای کنترل عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ از توابع آزمون و کوششی جدیدی بهره می‌بریم. نتایج عددی ارائه شده بیانگر کارایی روش است.

۱. پیش‌گفتار

روش تاو ماتریسی (محاسباتی) به عنوان یکی از روش‌های طیفی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی به کار می‌رود. یک مسئله معادلات دیفرانسیل معمولی همراه با شرایط تکمیلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} Dy(x) = f(x), & x \in [-1, 1], \\ B_j(y) = d_j, & j = 1, 2, \dots, \nu \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن D یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه ν و B_j ها تابعهای خطی هستند که به صورت

$$\begin{cases} D = \sum_{i=0}^{\nu} p_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, & p_i(x) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_{ij} x^j, \\ B_j(y) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{i=1}^J B_{ji}^{(k)} y^{(k)}(a_i), & j = 1, 2, \dots, \nu, \end{cases} \quad (2.1)$$

تعریف می‌شوند که α_i درجه چندجمله‌ای $p_i(x)$ است و شرایط تکمیلی مسئله در نقاط $a_1, a_2, \dots, a_J$ از بازه $[-1, 1]$ داده شده‌اند. همچنین فرض می‌کنیم که $f(x) = \sum_{i=0}^{n_f} f_i x^i$ یک چندجمله‌ای و یا تقریبی به صورت چندجمله‌ای از درجه n_f است.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 65L20; Secondary 41A502, 34A30.

واژگان کلیدی. روش تاو ماتریسی، معادله دیفرانسیل، پیش شرط ساز، عدد حالت.
* سخنران

روش تاو محاسباتی که توسط اورتیز و سامارا در [۱] معرفی شده است بر اساس ماتریس‌های بینهایت η و μ پایه گذاری شده است، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

با اعمال روش تاو ماتریسی بر یک معادله دیفرانسیل معمولی، نهایتاً به معادله ماتریسی $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{F}}$ دست می‌یابیم که $\underline{\underline{M}}$ ماتریس مربعی بلوکی است. با افزایش درجه تقریب، عدد حالت $\underline{\underline{M}}$ به سرعت رو به افزایش می‌گذارد، استفاده از روش‌های تکراری در این دسته از مسائل عملاً دچار مشکل می‌شود. در این مقاله، ابتدا روش تاو ماتریسی تکه‌ای را روی معادله دیفرانسیل اعمال می‌کنیم که این روش با درجه تقریب نسبتاً کوچکتر، دارای دقت بیشتری نسبت به روش تاو استاندارد می‌باشد. سپس برای به دست آوردن یک پیش‌شرط ساز مناسب که عدد حالت ماتریس $\underline{\underline{M}}$ را کنترل نماید، توابع آزمون و کوششی چنان انتخاب می‌کنیم که جملاتی که بیشترین اثر را در افزایش عدد حالت ماتریس $\underline{\underline{M}}$ دارا هستند کنترل نماید.

۲. پیاده‌سازی روش تاو تکه‌ای

فرض کنیم $1 = x_n < \dots < x_1 < x_0 = -1$ یک افراز از بازه $[-1, 1]$ و $\rho = \frac{n}{m}$, $i = 0, 1, \dots, \rho - 1$ باشند که $[x_{i \times m}, x_{(i+1) \times m}]$ زیر بازه‌های $[-1, 1]$ می‌خواهیم جواب $y(x)$ از (۱.۱) را به صورت تکه چندجمله‌ایهای $y_i(x)$ از درجه m با ضرایب نامعلوم $a_{i0}, \dots, a_{im}$ تخمین بزنیم که

$$y(x) \approx \begin{cases} \sum_{r=0}^m a_{0r} v_{0r}^*(x), & x \in [x_0, x_m], \\ \sum_{r=0}^m a_{1r} v_{1r}^*(x), & x \in [x_m, x_{2m}], \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{r=0}^m a_{\rho-1,r} v_{\rho-1,r}^*(x), & x \in [x_{n-m}, x_n] \end{cases} \quad (1.2)$$

که در آن توابع پایه‌ای (کوششی) هستند که به چندجمله‌ایهای مناسب (چبیشف و لژاندر و ...) از درجه r به زیر بازه $[x_{i \times m}, x_{(i+1) \times m}]$ انتقال می‌یابند. فرض کنیم $u_{i,s}^*(x)$ چندجمله‌ایهای توابع آزمون (تست) باشند، با استفاده از

$$\underline{\underline{V}}_i^* = (v_{i0}^*(x), v_{i1}^*(x), \dots)^T, \quad \underline{\underline{U}}_i^* = (u_{i0}^*(x), u_{i1}^*(x), \dots)^T, \quad (2.2)$$

و اگر y_i و f_i به ترتیب تحدید توابع y و f بر زیر بازه $[x_{i \times m}, x_{(i+1) \times m}]$ باشند آنگاه داریم

$$y_i(x) = \sum_{r=0}^m a_{ir} v_{ir}^*(x) = \underline{\underline{a}}_i \underline{\underline{V}}_i^*, \quad f_i(x) = \sum_{r=0}^m f_{ir} u_{ir}^*(x) = \underline{\underline{f}}_i \underline{\underline{U}}_i^*,$$

با اعمال روش تاو ماتریسی معادله دیفرانسیل روی هر زیربازه $[x_{i \times m}, x_{(i+1) \times m}]$ تبدیل به معادله ماتریسی $Dy(x) = \underline{y} \prod_{v_i u_i} \underline{U}_i^*$ می شود که $\underline{a}_i = (a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im}, 0, \dots)$ و ماتریس $\prod_{v_i u_i}$ ترکیب خطی از ماتریس های μ و η است [۲]. لذا معادله دیفرانسیل (۱.۱) را بر سرتاسر بازه $[-1, 1]$ می توان به صورت سیستم بلوکی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \prod_{v_0 u_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \prod_{v_1 u_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \prod_{v_{\rho-1} u_{\rho-1}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{a}_0 \\ \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_{\rho-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_0 \\ \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_{\rho-1} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

همچنین به منظور برقراری شرط پیوستگی، معادله های

$$y_{i-1}^{(k)}(x) = y_i^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \dots, \rho-1, \quad (4.2)$$

باید در نقاط $x = x_{im}$ که $i = 1, \dots, \rho-1$ برقرار باشند. بعلاوه برای $j = 1, \dots, \nu$ ، شرایط تکمیلی مسئله نیز به فرم ماتریسی زیر تبدیل می شود

$$B_j(y) = \underline{a}_{i_1} B_{i_1 j} + \dots + \underline{a}_{i_J} B_{i_J j}, \quad i_l \in \{0, 1, \dots, \rho-1\}, \quad 1 \leq l \leq J, \quad (5.2)$$

ماتریس B را به عنوان ماتریس شرایط تکمیلی در نظر می گیریم که $B_{i_l j}$ ها به عنوان j امین ستون از زیرماتریس های از B در i_l امین زیر بازه هستند. نهایتاً، با اعمال شرایط پیوستگی (۴.۲) و شرایط تکمیلی (۵.۲) در دستگاه بلوکی (۳.۲)، معادله دیفرانسیل به همراه شرایط تکمیلی (۱.۱) به فرم دستگاه ماتریسی جبری زیر

$$\mathbf{Ma} = \underline{\mathbf{F}}, \quad (6.2)$$

معادل می شود که با حل آن با استفاده از یک روش تکراری، مانند روش گرادیان مزدوج، یا یک روش مستقیم مقادیر مجهول $\underline{a} = [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{\rho-1}]^T$ بدست می آیند.

۳. پیش شرط ساز روش تاو تکه ای

ماتریس $\mathbf{M}$ ماتریس مربعی بلوکی از مرتبه $\rho(m+1) \times \rho(m+1)$ است و معمولاً دارای $\rho(m+1)^2$ عنصر غیر صفر است که معمولاً حل این معادله بدون استفاده از یک روش مناسب از نظر زمان و حافظه اشغال شده، مقرون به صرفه نیست. به عبارت دیگر با افزایش درجه تقریب m ، عدد حالت $\mathbf{M}$ به سرعت رو به افزایش می گذارد، استفاده از روش های تکراری در این دسته از مسائل عملاً دچار مشکل می شود. برای رفع این مشکل توابع پایه و آزمون جدیدی را استفاده می کنیم که مانع رشد عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ می شوند. فرض کنیم « m درجه تقریب تاو» و ν مرتبه عملگر دیفرانسیلی D باشد، در آن صورت چندجمله ای های زیر که در [۲، ۳] معرفی شده اند را به ترتیب عنوان توابع تست و پایه برای معادلات دیفرانسیل بر بازه $[a, b]$ گسترش می دهیم

$$t_{T_m}(x) = 2^{\nu-1}(\nu-1)! l_{T_m}^{-1} m \left(\frac{2}{b-a} \right)^{\nu} G_{m-\nu}^{(\nu-\frac{1}{2})}(x), \quad (1.3)$$

$$b_{T_m}(x) = l_{T_m}^{-1} T_m(x), \quad l_{T_m} = 2^{m-1}, \quad x \in [a, b], \quad (2.3)$$

که در آن $G_m^{(\nu-\frac{1}{2})}(x)$ معرف چندجمله‌ایهای گگنباثر با پارامتر ν و $T_m(x)$ معرف m -امین چندجمله‌ای چبیشف هستند.

۴. نتایج عددی

در این بخش جواب یک مسئله مقدار مرزی را با استفاده از روش تاو تکه‌ای پیش‌شرط سازی شده محاسبه می‌کنیم. برای حل دستگاه ماتریسی نهایی از روش گرادیان مزدوج موجود در نرم‌افزار MATLAB استفاده نموده‌ایم.

مسئله معادله دیفرانسیل معمولی زیر را با جواب واقعی $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0, & x \in [-2, 3] \\ y(-2) = \frac{1}{5}, & y(3) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

در جدول زیر برای $\rho = 1, 2, 3, 4, 5$ جواب تقریبی تاو تکه‌ای پیش‌شرط سازی شده گزارش شده است. همانطور که دیده می‌شود با افزایش ρ (تعداد تکه چندجمله‌ایها) ماکسیم خطا بین جواب تقریبی و جواب واقعی کاهش می‌یابد؛ برای $\rho = 5$ و $m = 18$ دیده می‌شود که ماکسیم خطا $1/4 \times 10^{-11}$ است.

جدول ۱: ماکزیمم خطای بین جواب واقعی و جواب تاو تکه‌ای پیش‌شرط سازی شده

	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 4$	$\rho = 5$
$m = 6$	$2/6 \times 10^{-1}$	$1/7 \times 10^{-2}$	$4/2 \times 10^{-3}$	$1/6 \times 10^{-3}$	$4/0 \times 10^{-4}$
$m = 12$	$2/1 \times 10^{-2}$	$1/6 \times 10^{-4}$	$7/3 \times 10^{-6}$	$7/4 \times 10^{-7}$	$4/0 \times 10^{-8}$
$m = 18$	$1/5 \times 10^{-3}$	$1/7 \times 10^{-6}$	$4/0 \times 10^{-8}$	$3/4 \times 10^{-8}$	$1/4 \times 10^{-11}$

مراجع

1. Ortiz E.L., Samara, H.: An operational approach to the Tau Method for the numerical solution of non-linear differential equations. Computing, **27**, 15–25 (1981)
2. Hajipour M., Hosseini S.M.: The performance of a Tau preconditioner on systems of ODEs. Appl. Math. Model. **35**, 80–92 (2011)
3. Ghoreishi F., Hosseini S.M.: The Tau method and a new preconditioner. J. Comput. Appl. Math., **163**, 351–379 (2004)

ماتریس‌های همبستگی مرتبه‌ی ۲ و ۳ و ۴

علی محمد نظری^{۱*} و سمیه یونسی^۲

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک
^۲ sm.younesi89@yahoo.com^۲ ^۱ a-nazari@araku.ac.ir

چکیده. در این مقاله برای دو ماتریس میانگین دوری، ما نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به هر دو ماتریس را با استفاده از مقادیر ویژه یکی از آن‌ها می‌یابیم.

۱. پیش‌گفتار

X یک ماتریس همبستگی است اگر نیمه معین مثبت متقارن و درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ باشند. ماتریس میانگین دوری ماتریس متقارن A ، ماتریسی دوری است که سطر اول آن از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود (اندیس درایه‌های ماتریس متقارن A را از ۰ تا $n-1$ در نظر می‌گیریم)

$$A_c = \text{Circ} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,j}, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,(j+1) \bmod n}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,(j+n-1) \bmod n} \right). \quad (1.1)$$

ماتریس میانگین دوری ماتریس متقارن A را با A_c نشان می‌دهیم. ماتریس A_e ، ماتریسی متقارن است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ و بقیه درایه‌های آن، درایه‌های ماتریس متقارن A هستند. در واقع

$$A_e = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j, \\ a_{i,j} & \text{اگر } i \neq j. \end{cases} \quad (2.1)$$

ماتریس میانگین دوری ماتریس A_e را با A_{ec} نشان می‌دهیم که سطر اول آن از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$A_{ec} = \text{Circ} \left(1, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,(j+1) \bmod n}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,(j+n-1) \bmod n} \right). \quad (3.1)$$

می‌خواهیم تمام ماتریس‌های همبستگی مرتبه‌ی ۲ و ۳ و ۴ را با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس A_{ec} که به صورت $\mu_0 < \dots < \mu_{k-1}$ مرتب شده‌اند و چندگانگی متناظر به آن‌ها را که با $d_0, \dots, d_{k-1}$ نشان می‌دهیم، به دست می‌آوریم.

2010 Mathematics Subject Classification. 15A18; 90C2.

واژگان کلیدی. ماتریس همبستگی، ماتریس میانگین دوری، ماکزیمم کننده.
* سخنران

۲. ساخت ماتریس‌های همبستگی

۱.۲. ماتریس‌های همبستگی مرتبه‌ی ۲. ماتریس متقارن A را با درایه‌های حقیقی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A = \begin{bmatrix} a & m_1 \\ m_1 & b \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

ماتریس میانگین دوری ماتریس متقارن A را با استفاده از رابطه‌ی (۱.۱) به‌دست می‌آوریم

$$A_c = \text{Circ} \left(\frac{a+b}{2}, m_1 \right) = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} & m_1 \\ m_1 & \frac{a+b}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

با توجه به مرجع [۲]، چون نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس A_c با نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس A_{ec} برابر است، بنابراین نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس A_{ec} را به‌دست می‌آوریم. ابتدا ماتریس A_e را با توجه به رابطه‌ی (۲.۱) می‌نویسیم

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

و ماتریس میانگین دوری ماتریس A_e را از رابطه‌ی (۳.۱) به‌دست می‌آوریم

$$A_{ec} = \text{Circ} (1, m_1) = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

چون ماتریس A_{ec} دوری است بنابر مرجع [۱]، مقادیر ویژه آن از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$\lambda_j = c_0 + c_1 \omega^j + \dots + c_{n-1} \omega^{(n-1)j}, \quad \omega = \exp \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

بنابراین مقادیر ویژه ماتریس A_{ec} با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) عبارتند از

$$\lambda_0 = 1 + m_1, \quad \lambda_1 = 1 - m_1. \quad (6.2)$$

حال برای سه حالت $m_1 < -1$ و $-1 \leq m_1 \leq 1$ و $m_1 > 1$ مقادیر ویژه ماتریس A_{ec} را مرتب می‌کنیم و ماکزیمم کننده تابع حقیقی

$$l(t) = -nt^2 + \sum_{j=0}^{k-1} d_j [t - \mu_j]_+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7.2)$$

را که با $\tau(\mu)$ نشان می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم (رابطه‌ی ۴,۷ در مرجع [۲]) و نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس‌های A_c و A_{ec} از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = V \text{Diag} ([\lambda_0(A_{ec}) - \tau(\mu)]_+, \dots, [\lambda_{n-1}(A_{ec}) - \tau(\mu)]_+) V^H, \quad (8.2)$$

که

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}, \quad V^H = (\bar{V})^T,$$

$$[\lambda_j(A_{ec}) - \tau(\mu)]_+ = \max \{ \lambda_j(A_{ec}) - \tau(\mu), 0 \}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9.2)$$

قضیه ۱.۲. فرض کنیم A ماتریس متقارن در رابطه‌ی (۱.۲) باشد و ماتریس‌های رابطه‌های (۲.۲) و (۴.۲) به ترتیب ماتریس‌های میانگین دوری، ماتریس‌های A و A_e باشند.
۱- اگر $m_1 < -1$ ، آنگاه نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس‌های A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}(1, -1). \quad (10.2)$$

۲- اگر $-1 \leq m_1 \leq 1$ ، آنگاه نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس‌های A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}(1, m_1). \quad (11.2)$$

۳- اگر $m_1 > 1$ ، آنگاه نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس‌های A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}(1, 1). \quad (12.2)$$

۲.۲. ماتریس‌های همبستگی مرتبه‌ی ۳. تمام ماتریس‌های همبستگی در سه حالت به دست آمده است که در قضیه‌ی زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم A ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a & m_1 & m_2 \\ m_1 & b & m_3 \\ m_2 & m_3 & c \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

ماتریس‌های میانگین دوری، ماتریس‌های A و A_e با فرض $t = \frac{m_1+m_2+m_3}{3}$ به ترتیب برابر هستند با

$$A_c = \text{Circ}\left(\frac{a+b+c}{3}, t, t\right), \quad A_{ec} = \text{Circ}(1, t, t),$$

و مقادیر ویژه ماتریس A_{ec} با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) عبارتند از

$$\lambda_0 = 1 + 2t, \quad \lambda_1 = 1 - t, \quad \lambda_2 = 1 - t,$$

۱- اگر $m_1 + m_2 + m_3 < -\frac{3}{2}$ ، آنگاه نزدیک‌ترین ماتریس همبستگی به ماتریس‌های A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

۲- اگر $-\frac{3}{4} \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 3$ ، آنگاه نزدیکترین ماتریس همبستگی به ماتریسهای A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}(1, t, t).$$

۳- اگر $m_1 + m_2 + m_3 > 3$ ، آنگاه نزدیکترین ماتریس همبستگی به ماتریسهای A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}(1, 1, 1).$$

۳.۲. ماتریسهای همبستگی مرتبه ۴. تمام ماتریسهای همبستگی مرتبه ۴ در ۲۲ حالت به دست آمده است که به دو مورد از آن در قضیه زیر اشاره می‌کنیم.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم A ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & b & m_4 & m_5 \\ m_2 & m_4 & c & m_6 \\ m_3 & m_5 & m_6 & d \end{bmatrix},$$

ماتریسهای میانگین دوری، ماتریسهای A و A_e با فرض $t_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_4 + m_6}{4}$ و $t_2 = \frac{m_2 + m_5}{2}$ و $t_3 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$ به ترتیب برابر هستند با

$$A_c = \text{Circ}\left(\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{1}{4}t_1, t_2, \frac{1}{4}t_1\right), \quad A_{ec} = \text{Circ}\left(1, \frac{1}{4}t_1, t_2, \frac{1}{4}t_1\right),$$

و مقادیر ویژه ماتریس A_{ec} با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) عبارتند از

$$\lambda_0 = 1 + t_1 + t_2, \quad \lambda_1 = 1 - t_2, \quad \lambda_2 = 1 - t_1 + t_2, \quad \lambda_3 = 1 - t_2,$$

۱- اگر $0 \leq m_2 + m_5 \leq 2$ و $0 \leq m_1 + m_3 + m_4 + m_6 \leq 2$ ، آنگاه نزدیکترین ماتریس همبستگی به ماتریسهای A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}\left(1, \frac{1}{4}t_1, t_2, \frac{1}{4}t_1\right).$$

۲، ۱- اگر $0 < m_1 + m_3 + m_4 + m_6 \leq 4$ و $0 < m_2 + m_5 > 2$ و $t_3 \leq 6$ ، آنگاه $\max\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_1$ و نزدیکترین ماتریس همبستگی به ماتریسهای A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}\left(1, \frac{1}{4}t_1, 1, \frac{1}{4}t_1\right).$$

۲، ۲- اگر $0 < m_1 + m_3 + m_4 + m_6 < 4$ و $0 < m_2 + m_5 > 2$ و $t_3 > 6$ ، آنگاه $\max\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_1$ و نزدیکترین ماتریس همبستگی به ماتریسهای A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}\left(1, \frac{1}{4}t_1, 1, \frac{1}{4}t_1\right).$$

۲، ۳- اگر $m_1 + m_3 + m_4 + m_6 = 4$ و $m_2 + m_5 > 2$ ، آنگاه $\tau_1(\mu) = \tau_2(\mu)$ و نزدیکترین ماتریس همبستگی به ماتریسهای A_c و A_{ec} برابر است با

$$X_*(A_c) = X_*(A_{ec}) = \text{Circ}(1, 1, 1, 1).$$

مراجع

1. Davis, P.: Circulant Matrices John Wiley and Sons, New York, (1979).
2. Travaglia, M. V.: A lower bound for the nearest correlation matrix problem based on the circulant mean. Comp Appl Math, (2013).

استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربردها در تدریس جبر خطی

ابوالفضل رفیع‌پور

بخش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
drafiempor@gmail.com
Rafiepour@uk.ac.ir

چکیده. هدف اصلی مقاله حاضر، معرفی رویکرد مدل‌سازی به عنوان یک بدیل مناسب برای ارائه درس‌های ریاضی در سطح دانشگاه است. مثال مورد استفاده در این مقاله از حوزه جبر خطی انتخاب شده است. در این مقاله ضمن مرور مختصری بر برنامه درسی ریاضی، رویکرد مدل‌سازی و کاربردها به همراه چرخه مدل‌سازی و فرآیند ارزیابی حل مسایل مدل‌سازی، معرفی خواهند شد. سپس، نقش فعالیت‌های مستلزم استفاده از مدل ریاضی در ارتقا توانایی حل مسئله دانشجویان برای حل مسایل دنیای واقعی مورد بحث قرار خواهد گرفت و به نمونه‌ای از این نوع فعالیت‌ها دنیای واقعی که مستلزم استفاده از مدل ریاضی مربوط به مباحث جبرخطی است، اشاره خواهد شد. در پایان، برخی از مزیت‌های و معایب استفاده از رویکرد مدل‌سازی در تدریس درس‌های ریاضی دانشگاهی برشمرده می‌شود.

۱. پیش‌گفتار

تا اوایل قرن نوزدهم، ریاضیات جزئی از علوم طبیعی بود و شامل بسیاری از فعالیت‌های کاربردی می‌شد. از اوایل قرن نوزدهم بود که توجهات زیادی به آموزش ریاضی به صورت محض شد. از اواخر قرن نوزدهم، بیشتر برنامه‌های درسی ریاضی بر روی هر دو مؤلفه ریاضی محض و ریاضی کاربردی تأکید کردند. اما در طول قرن بیستم، برنامه درسی ریاضی همواره بین این دو وضعیت «ریاضی کاربردی و ریاضی محض» در حال نوسان بوده است. در طی زمان، گاهی تعادل به نفع آموزش ریاضی به شکل محض بوده و گاهی به نفع آموزش ریاضی کاربردی ریاضی بوده است. این تغییرات پی‌درپی بر اساس تمایلات اجتماعی و تغییرات مختلف در نیازمندی‌های آموزشی و یادگیری دانش‌آموزان/دانشجویان بوده است. به طور مثال در انگلستان، صاحبان صنایع مدعی بودند، که فارغ‌التحصیلان مدرسه/دانشگاه در استفاده از دانش ریاضی خود، در موقعیت‌های دنیای واقعی ناتوان هستند [۲]. اعتراض صنایع در واقع به این دلیل بود که فارغ‌التحصیلان فقط قادر بودند از دانش ریاضی خود برای حل مسایل معمولی و آشنا استفاده نمایند و نمی‌توانستند دانش خود را برای حل مسایل ناآشنا به کار ببرند.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 97M99; Secondary 15A06.

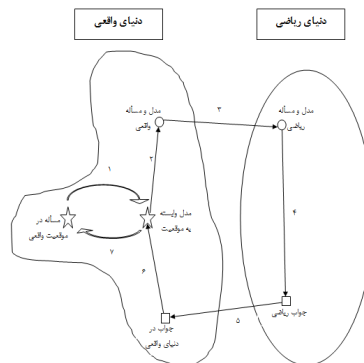
واژگان کلیدی. رویکرد مدل‌سازی، جبر خطی، آموزش ریاضی دانشگاهی، دنیای واقعی.

همین موضوع یعنی توانایی به کارگیری ریاضی در موقعیت های دنیای واقعی، بعدها تبدیل به تمرکز پژوهشی گروهی از پژوهشگران در دنیا گردید. این پژوهشگران در سال ۱۹۸۳ با برگزاری اولین کنفرانس دوسالانه خود «گروه مطالعاتی بین‌المللی برای تدریس مدل‌سازی ریاضی و کاربردها» را پایه‌گذاری کردند. در حال حاضر ۱۶ دوره از این کنفرانس‌ها برگزار شده است و این گروه یکی از گروه‌های پژوهشی وابسته به کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی است. موضوعات پژوهشی مورد بحث در گروه مطالعاتی بین‌المللی برای تدریس مدل‌سازی ریاضی و کاربردها، طیف وسیعی از موضوعات ریاضی از دوره ابتدایی تا درس‌های ریاضی دانشگاهی را در بر می‌گیرد. یکی از موضوعاتی که در حوزه پژوهش‌های دانشگاهی بیشتر مورد توجه بوده، استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد برای تدریس جبرخطی است. در مقاله حاضر با معرفی رویکرد مدل‌سازی و کاربردها، مثالی از یک فعالیت دنیای واقعی ارائه می‌شود که مستلزم استفاده از مفاهیم جبرخطی است. در ادامه مزایا و معایب استفاده از این رویکرد معرفی خواهند شد.

۲. رویکرد مدل‌سازی و کاربرد

تعابیر مختلف برای مدل‌سازی و کاربرد از گذشته تاکنون وجود داشته است ولی تعبیری که بیش از همه مورد توافق است، تعبیر فرشافل [۴] است که از سایرین ساده‌تر است و معمولاً برای آموزش افراد مبتدی مورد استفاده قرار می‌گیرد و شامل چهار مرحله است که در آن، فرآیند مدل‌سازی با یک مسئله که در موقعیت دنیای واقعی قرار دارد، شروع می‌شود. سپس از دنیای واقعی به زبان دنیای ریاضی صورت‌بندی می‌گردد تا یک مدل ریاضی به وجود آید. آن‌گاه این مسئله در دنیای ریاضی، حل می‌شود و بعد، جواب مسئله از دنیای ریاضی به زبان دنیای واقعی ترجمه و تفسیر می‌شود و در نهایت، جواب مطرح شده در دنیای واقعی، در مقابل موقعیت اصلی که مسئله در آن طرح شده، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

اما در تعبیر پیچیده‌تری از فرآیند مدل‌سازی [۱] فرآیند مدل‌سازی با یک مسئله واقعی آغاز می‌شود و موقعیت واقعی در تکلیف یا فعالیت مدل‌سازی ارائه می‌گردد. اولین گام شامل «ساختن یک تصویر ذهنی» (گام ۱ در چرخه شکل ۱) از موقعیت است که الزاماً برای دانش‌آموزان بدیهی نیست. نتیجه این مرحله دست یافتن به مدل «موقعیت-مدار» یا مدل «وابسته به موقعیت» است. سپس این مدل ساده‌تر می‌شود و شرایط به طور ایده آل فرض می‌شوند - مثلاً در نظر گرفتن زمین به عنوان یک کره - و کلیه مفروضات دوباره ساختاربندی می‌شوند (گام ۲ در چرخه شکل ۱) تا «مدل واقعی» به دست آید. در ادامه، این مدل واقعی طی فرآیند صورت‌بندی (گام ۳ در چرخه شکل ۱) تبدیل به یک «مدل ریاضی» می‌شود و در دنیای ریاضی، با استفاده از روش‌های حل مسئله (گام ۴ در چرخه شکل ۱)، یک جواب ریاضی‌وار برای مسئله ارائه می‌شود. بالاخره، در گام بعدی جواب به دست آمده در دنیای ریاضی در دنیای واقعی تفسیر می‌شود (گام ۵ در چرخه شکل ۱) و در گام بعدی، جواب به دست آمده در دنیای واقعی با مدل موقعیت‌مدار اعتبار بخشی می‌گردد (گام ۶ در چرخه شکل ۱). در نهایت، جواب به دست آمده در دنیای واقعی، با موقعیت اصلی مسئله مقابله می‌شود (گام ۷ در چرخه شکل ۱) تا معنادار بودن پاسخ به دست آمده مورد بررسی قرار گیرد.



شکل ۱: هفت گام فرآیند مدل‌سازی در قالب یک چرخه [۱]

برای ارزیابی عملکرد دانشجویان در حل تکالیف مدل‌سازی، از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. این روش‌ها متناظر با یک یا چند جزء از فرآیند مدل‌سازی است که در چرخه شکل شماره ۱ آمده است و معمولاً وزن اختصاص یافته به هر قسمت متفاوت هستند.

۳. فعالیت‌های مستلزم استفاده از مدل ریاضی (جبرخطی)

در پژوهش‌هایی که از رویکرد مدل‌سازی و کاربردها در آموزش ریاضی استفاده می‌کنند، از فعالیت‌های مختلفی استفاده می‌شود. یک نوع از این فعالیت‌ها، «تکالیف مدل‌سازی مستلزم استفاده از مدل ریاضی»، است که در آن دانشجویان برای خلق کردن و ارزیابی مدل‌های ریاضی تشویق می‌شوند. معمولاً این گونه از تکالیف به صورت مسایل باز- پاسخ طراحی می‌شوند به گونه‌ای که دانشجویان را برای ساختن مدل‌های ریاضی در راستای حل مسایل پیچیده دنیای واقعی به چالش بکشند.

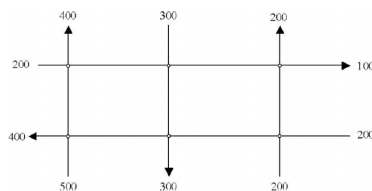
نمونه‌ای از این گونه مسایل که در آن از یک مدل مبتنی بر مفاهیم جبر خطی برای حل مسئله استفاده می‌شود، در شکل ۲ آمده است. این مسئله در [۳] مورد استفاده قرار گرفته است. آنها در مقاله خود، عملکرد چهار گروه از دانشجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی در حل یک مسئله دنیای واقعی که درباره جریان عبور و مرور وسایل نقلیه در یک منطقه پر رفت آمد شهر است، گزارش کرده‌اند.

شکل ذیل طرح دو خیابان پر رفت و آمد در یک محدوده تجاری شهر را نشان می‌دهد. مرکز کنترل ترافیک شهر حسگرهایی را برای شمارش اتومبیل‌های عبوری از یک نقطه مشخص، در جاهای مختلف نصب کرده است. بردارها جهت خیابان را نشان می‌دهند. تعداد اتومبیل‌های عبوری نیز در شکل آمده است. در هر تقاطع یک میدان وجود دارد. در ضمن اتومبیل‌ها حق پارک کردن در کنار خیابان را ندارند. با اینکه در شرایط عادی عبور و مرور در این دو خیابان با حالت عادی جریان دارد، ولی مرکز کنترل ترافیک علاقمند است امکان‌های موجود را برای تغییر برخی از مسیرها (مثلاً بستن یک یا چند خیابان) بررسی نماید.

با توجه به توضیحات ارائه شده در بالا، به سوالات ذیل پاسخ دهید.

- آیا می‌توان یکی از راه‌هایی که بین دو میدان هستند را به طور موقت بست؟ اگر بله کدام راه را می‌توان بست و کدام را نمی‌توان؟

- مرکز کنترل ترافیک قصد دارد با نصب برخی علائم در ابتدای هر جاده مسیر عبور و مرور اتومبیل‌ها را با بستن برخی از جاده‌ها تغییر دهد. چه تعداد از این علائم مورد نیاز است؟ آیا روشی برای انتخاب این علائم جاده‌ای وجود دارد، که ارزیابی جریان عبور و مرور را ساده‌تر کند؟
- آیا مدلی که ارایه کرده‌اید با محدودیت عبور حداکثر ۲۰۰ خودرو در هر ساعت در هر خیابان، سازگار است؟ اگر نیست، شما چگونه مدل قبلی خودتان را جرح و تعدیل می‌کنید تا این محدودیت جدید را در نظر بگیرید.



شکل ۲: طرح خیابان‌ها

۴. سخن پایانی (مزایا و معایب این روش)

استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد برای تدریس مفاهیم ریاضی در کلاس‌های درسی ریاضی دانشگاهی، همانند سایر رویکردها دارای مزایا و معایب خاص خود می‌باشد. یک از جدی‌ترین محدودیت‌های استفاده از این روش وقت گیر بودن آن است. به عنوان مثال در [۳] که در آن از فعالیت مطرح شده در شکل ۲ استفاده گردید، مستلزم ۷ جلسه دو ساعته از کلاس درس بود. اما در کنار این محدودیت که در نگاه نخست، تأمل برانگیز است، برخی مزایا را می‌توان برای استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد برای تدریس مفاهیم ریاضی در کلاس‌های درسی ریاضی دانشگاهی برشمرد. با استفاده از این روش ریاضی برای دانشجویان (به خصوص برای دانشجویانی که رشته تحصیلی‌شان ریاضی نیست) معنادارتر می‌شود و همین باعث می‌شود که درک بهتری از نقش ریاضی در پدیده‌های دنیای واقعی داشته باشند. پژوهش‌های متعددی نشان داده‌اند که استفاده از این رویکرد باعث بهبود عملکرد دانشجویان در حل مسایل دنیای واقعی خواهد شد.

مراجع

1. Borromeo Ferri, R. : *Theoretical and empirical differentiations of Phases in the modeling process. Zentralblatt fur Didaktik Mathematik*, **38** (2), 86 – 95 (2006).
2. Pollak, H.: *Mathematical modeling – A conversation with Henry Pollak. In Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.W. and Niss, M. (Eds.): Modelling and applications in mathematics education. the 14th ICMI study SIAM Rev., Springer, New York* (2007).
3. Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., Lozano, M.D.: *Fast verification for all eigenpairs in symmetric positive definite generalized eigenvalue problems. Linear Algebra Appl.*, **432**, 2125 – 2140 (2010).
4. Verschaffel, L. : *Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: promises and pitfalls (plenary lecture), In Cockburn, A.D., Nardi, E. (Eds.): Proceeding of the 26th Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, **1**, 64 – 80 (2002).

بررسی ویژگی‌های $l^p(S)$ به کمک فضای ماتریس‌ها

صابر ناصری*

دانشگاه کردستان، دانشکده علوم، گروه ریاضی
S.naseri@uok.ac.ir

چکیده. در این مقاله با استفاده از فضای ماتریسها l^p - مون به بررسی برخی از خواص فضای $l^p(S)$ که در آن S یک نیم‌گروه براندت روی یک گروه می‌باشد می‌پردازیم و در این راستا نشان می‌دهیم $l^p(S)$ تحت چه شرایطی یک چبر باناخ است. همچنین میانگین‌پذیر بودن آن را بررسی می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

در سال ۱۹۹۹ فضایی از ماتریس‌ها تحت عنوان l^1 - مون روی جبرهای باناخ معرفی شد و به کمک این مفهوم برخی از خواص جبر نیم‌گروه‌ها مورد بررسی قرار گرفت [۱]. در سال ۲۰۱۰، مفهوم l^1 - مون را به l^p - مون برای $1 \leq p$ ، توسعه داده شد [۳]. در اینجا می‌خواهیم از این مفهوم برای بررسی برخی خواص $l^p(S)$ استفاده کنیم و ثابت می‌کنیم که اگر S یک نیم‌گروه براندت روی گروهی متناهی مانند G باشد آنگاه $l^p(S)$ برای $p \geq 1$ میانگین‌پذیر است.

مفهوم میانگین‌پذیر جبرهای باناخ برای اولین توسط جانسون معرفی و مورد بررسی قرار گرفت [۲].

فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک A - مدول باناخ باشد نگاشت خطی $D : A \rightarrow E$ را مشتق می‌نامند هرگاه برای هر $a, b \in A$ ،
$$D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

اگر $x \in E$ آنگاه نگاشت $\delta_x : A \rightarrow E$ که $\delta_x(a) = a \cdot x - x \cdot a$ یک مشتق است. مشتق‌های از این نوع را مشتق داخلی می‌نامند.

اگر E یک A - مدول باناخ باشد آنگاه دوگان E^* ، یعنی E^* با اعمال تعریف شده زیر یک A - مدول باناخ است.

$$\langle x, a \cdot f \rangle = \langle x \cdot a, f \rangle \quad \text{و} \quad \langle x, f \cdot a \rangle = \langle a \cdot x, f \rangle$$

برای هر $f \in E^*$ و $x \in A$ ، $a \in E$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. جبرهای باناخ - میانگین‌پذیر - نیم‌گروه - نیم‌گروه براندت .
* سخنران

تعریف ۱.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد در اینصورت A را میانگین پذیر می نامند هرگاه برای هر A - مدول E ، هر مشتق کراندار $D : A \rightarrow E^*$ ، یک مشتق داخلی باشد.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $(A, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد و $1 \leq p < \infty$ و I مجموعه اندیس دلخواه باشد، فضای همگی ماتریس های $B = [b_{ij}]_{I \times I}$ روی A به طوری $\left(\sum_{i,j \in I} \|b_{ij}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ را با نماد $\mathcal{LM}_I^p(A)$ نمایش می دهیم. اگر $B \in \mathcal{LM}_I^p(A)$ ، $B = [b_{ij}]_{I \times I}$ در اینصورت قرار می دهیم $\|B\|_p = \left(\sum_{i,j \in I} \|b_{ij}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

قضیه ۳.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ و $1 \leq p \leq 2$ و I مجموعه اندیس دلخواه باشد، در اینصورت فضای $\mathcal{LM}_I^p(A)$ با ضرب ماتریس ها و نرم $\|\cdot\|_p$ ، یک جبر باناخ است [۳].
جبر باناخ $\mathcal{LM}_I^p(A)$ برای $1 \leq p \leq 2$ و I یک مجموعه اندیس دلخواه را جبر l^p - مون می نامند.

۲. نتایج اصلی

یکی از کاربردهای فضاهای $\mathcal{LM}_I^p(A)$ ، این است که اگر G یک گروه و S یک نیم گروه براندت روی G باشد آنگاه بررسی می کنیم تحت چه شرایطی $l^p(S)$ یک جبر باناخ است و اینکه چه وقت این فضا، میانگین پذیر است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید S یک مجموعه دلخواه باشد و $1 \leq p < \infty$ در اینصورت قرار می دهیم

$$l^p(S) = \left\{ \sum_{s \in S} \alpha_s \delta_s : \sum_{s \in S} |\alpha_s|^p < \infty \right\}$$

اگر $f \in l^p(S)$ و $f = \sum_{s \in S} \alpha_s \delta_s$ ، چنانچه نرم $\|\cdot\|_p$ روی $l^p(S)$ را به این صورت تعریف کنیم که $\|f\|_p = \left(\sum_{s \in S} |\alpha_s|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ آنگاه $l^p(S)$ با نرم $\|\cdot\|_p$ یک فضای باناخ است. حال اگر S یک نیم گروه باشد چنانچه روی $l^p(S)$ عمل ضرب را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\delta_x * \delta_y = \delta_{xy} \quad (x, y \in S) \quad (1.2)$$

به سادگی دیده می شود که اگر $p = 1$ آنگاه $l^1(S)$ با ضرب (۱.۲) و نرم $\|\cdot\|_1$ یک جبر باناخ است. در صورتیکه $p > 1$ آنگاه لزوماً فضای باناخ $l^p(S)$ با ضرب تعریف شده (۱.۲) یک جبر باناخ نیست.

تعریف ۲.۲. فرض کنید G یک گروه و I یک مجموعه اندیس دلخواه باشد.

الف) یک ماتریس $I \times I$ روی $G \cup \{e\}$ را کانونی می نامند هرگاه تمام درایه های آن به جز یکی، همه صفر باشند.

ب) نیم گروه S متشکل از تمام ماتریس های کانونی $I \times I$ روی $G \cup \{e\}$ و ماتریس صفر را نیم گروه براندت روی G می نامند.

گزاره ۳.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به طوری که $|G| = m$ و $1 < p < \infty$ و S یک نیمگروه براندت روی G با مجموعه اندیس I باشد. در اینصورت فضای باناخ $l^p(S)$ نسبت به عمل ضرب (۱.۲) بسته است اگر و فقط اگر مجموعه اندیس I متناهی باشد.

برهان. فرض کنید I متناهی باشد در اینصورت نیمگروه براندت S متناهی است. فرض کنیم $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ و $f, g \in l^p(S)$ به طوری که $f = \sum_{i=1}^n \alpha_{s_i} \delta_{s_i}$ و $g = \sum_{j=1}^n \beta_{s_j} \delta_{s_j}$ آنگاه

$$f * g = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{s_i} \delta_{s_i} \right) * \left(\sum_{j=1}^n \beta_{s_j} \delta_{s_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{s_i} \beta_{s_j} \delta_{s_i s_j}$$

$$\|f * g\|_p^p = \sum_{i,j} |\alpha_{s_i}|^p |\beta_{s_j}|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_{s_i}|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n |\beta_{s_j}|^p \right) < \infty$$

بنابراین $f * g \in l^p(S)$. بنابراین $l^p(S)$ نسبت به عمل پیچش بسته است. فرض کنید I نامتناهی باشد در اینصورت زیرمجموعه‌ی $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ متمایز و نامتناهی از I موجود است. اگر قرار دهیم $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{(e)i_n, i_n}$ و $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{(e)i_n, i_n}$ آنگاه

$$\|f\|_p^p = \sum_{s \in S} |f(s)|^p = \sum_{i,j \in I} \sum_{g \in G} |f((g)_{ij})|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$$

بنابراین $f \in l^p(S)$. با برهانی مشابه می‌توان دید $g \in l^p(S)$. در صورتیکه $(f * g)(e) = \infty$. بنابراین $f * g \notin l^p(S)$. لذا $l^p(S)$ نسبت به عمل پیچش بسته نیست. $\square$

قضیه ۴.۲. اگر G یک گروه متناهی باشد آنگاه عددی ثابت مانند k موجود است به طوری که $l^p(G)$ با نرم $\| \cdot \|_p$ و ضرب $k \| \cdot \|_p$ ($x, y \in G$) $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ یک جبر باناخ است [۳].

گزاره ۵.۲. اگر G یک گروه متناهی و مجموعه اندیس I متناهی باشد و $1 \leq p < \infty$ آنگاه عددی ثابت مانند k وجود دارد به طوری که فضای $\mathcal{LM}_I^p(l^p(G), k \| \cdot \|_p)$ یک جبر باناخ است [۳].

قضیه ۶.۲. اگر S یک نیمگروه براندت روی گروه G باشد آنگاه $l^p(S)/\mathbb{C}\delta_e$ و $\mathcal{LM}_I^p(l^p(G))$ به طور طولی، یکرخت هستند.

برهان. اگر تعریف کنیم

$$\Phi : l^p(S) \longrightarrow \mathcal{LM}_I^p(\mathcal{A})$$

$$f \longmapsto [f_{ij}]$$

که در آن برای هر $i, j \in I$

$$f_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f_{ij}(g) = f((g)_{ij})$$

و $((g)_{ij})$ ماتریس $I \times I$ ، که در آن درایه‌ی (i, j) ام آن مساوی g و بقیه درایه‌های دیگر آن برابر با صفر می‌باشد.

می‌توان دید که تابع Φ خوش تعریف است، و بسادگی دیده می‌شود که Φ خطی است و $\|\Phi(f)\|_p \leq \|f\|_{l^p(S)}$ پس $\|\Phi(f)\|_p \leq 1$ $\|f\|_{l^p(S)} \leq 1$ لذا Φ کراندار است.

برای هر $B \in \mathcal{LM}_I^p(l^p(G))$ که $B = [f_{ij}]$ اگر تعریف کنیم $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ $f((g)_{ij}) = f_{ij}(g)$ $(i, j \in I, g \in G)$ در اینصورت

$$\sum_{s \in S} |f(s)|^p = \sum_{i, j \in I} \sum_{g \in G} |f((g)_{ij})|^p = \sum_{i, j \in I} \|f_{ij}\|_{l^p(G)}^p < \infty$$

بنابراین $f \in l^p(S)$ پس $\Phi(f) = B$ لذا Φ پوشا است. بسادگی می‌توان دید که $\ker \Phi = \mathbb{C}\delta_0$ بنابراین $\frac{l^p(S)}{\mathbb{C}\delta_0}$ و $\mathcal{LM}_I^p(A)$ به طور طولیایکریختند. $\square$

گزاره ۷.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی و مجموعه اندیس I متناهی باشد و $1 \leq p < \infty$ آنگاه ثابتی مثبت مانند k وجود دارد که $l^p(S)$ با نرم $\| \cdot \|_p$ و ضرب $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ $(x, y \in G)$ یک جبر باناخ است.

برهان. نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۴،۲، گزاره‌ی ۵،۲ و قضیه ۶،۲ می‌باشد. $\square$

نتیجه ۸.۲. جبر باناخ $(l^p(S), \| \cdot \|_p) / \mathbb{C}\delta_0$ با جبر $(\mathcal{LM}_I^p(l^p(G)), k\| \cdot \|_p)$ به طور طولیایکریخت است.

قضیه ۹.۲. اگر $(A, \| \cdot \|)$ یک جبر باناخ دارای عنصر یکه e_A و فضای $\mathcal{LM}_I^p(A)$ یک جبر باناخ باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

- الف) جبر باناخ $\mathcal{LM}_I^p(A)$ میانگین‌پذیر است.
ب) جبر باناخ A میانگین‌پذیر است و مجموعه اندیس I متناهی است [۳].

لم ۱۰.۲. اگر G یک گروه متناهی باشد و $1 \leq p < \infty$ ، آنگاه جبر $l^p(G)$ میانگین‌پذیر است [۳].

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی و مجموعه اندیس I متناهی باشد و S نیم‌گروه براندت روی G باشد در اینصورت $l^p(S)$ برای $1 \leq p < \infty$ ، میانگین‌پذیر است.

برهان. نتیجه‌ای از قضیه ۴،۲، لم ۱۰،۲، قضیه ۹،۲ و نتیجه ۸،۲ است. $\square$

مراجع

1. G.H. Esslamzadeh; Banach algebra structure an amenability of a class of matrix algebras with applications, J. Funct. Anal, **161** (1999), 364-383.
2. B. E. Johnson; Cohomology in Banach algebra, Mem. Amer Math. Soc. **127** (1972).
3. S. Naseri, H. Samea; The Structure and amenability of l^p -munn algebras, Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol, **36** (2010), 75-83.

مقالات پوستر

فشرده سازی تصویر دیجیتال با تجزیه مقادیر تکین (SVD)

مجتبی شکوه حاج عباسعلی خان^{۱*} و پرویز سرگلزایی^۲

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده. در این مقاله با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین (Singular Value Decomposition)، ماتریس A متناظر با یک تصویر را به U ، S و V به صورت $A = USV^T$ تبدیل کرده ایم که موجب می شود یک تصویر دیجیتالی را در 3 ماتریس بررسی کنیم. در واقع SVD به ما اجازه می دهد تصویر اصلی را در مجموعه ای کوچکتر از داده ها که ویژگی تصویر اصلی را حفظ می کند بررسی کرده که این می تواند منجر به فشرده سازی تصویر و ذخیره داده ها در یک فضای کمی از حافظه و در نتیجه پردازش سریعتر اطلاعات شود. با استفاده از این روند ما یک تصویر را فشرده کرده و فشرده سازی را با نسبت فشرده سازی و میزان کیفیت مورد بررسی قرار داده ایم و نتایج به دست آمده از فشرده سازی تصویر با SVD را با روش تجزیه و تحلیل مؤلفه های اصلی (Principal Component Analysis) که برای فشرده سازی در بسیاری موارد مورد استفاده قرار می گیرد مقایسه کرده ایم

۱. تعاریف

تعریف ۱.۱. M_n را یک فضای ماتریس مختلط $n \times n$ در نظر می گیریم، بعضی از نویسندگان از نماد $\mathbb{C}^{n \times n}$ استفاده می کنند. اکنون فرض کنید که $A \in M_n$ و بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ بردار ویژه A باشد آنگاه λ را مقدار ویژه A می نامیم چنانچه

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و x یک بردار باشد، آنگاه p -نرم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۳.۱. فضای برداری $\mathbb{R}^{m \times n}$ به دست آمده از $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را می توانیم با ضرب داخلی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\langle R, S \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_{ij}. \quad (1.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. پردازش تصویر، تجزیه مقادیر تکین، فشرده سازی تصویر. * سخنران

برای فضای برداری $\mathbb{R}^{m \times n}$ نرم به دست آمده از ضرب داخلی را نرم فروبنیوس^۱ می نامیم و به صورت $\| \cdot \|_F$ نمایش می دهیم. بنابراین اگر $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ باشد آنگاه

$$\|G\|_F = (\langle G, G \rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}^2}.$$

۲. SVD

تجزیه مقدار تکین مبنی بر دنباله ای از خواص قطری سازی معمولی است که می تواند برای ماتریس مستطیلی به کار برده شود. مقادیر تکین A مجذور ریشه های مقادیر ویژه $A^T A$ هستند و با $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ نشان داده می شوند و به صورت نزولی مرتب می شوند این بدان معناست که مقادیر تکین A ، $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $1 \leq i \leq n$ می باشد. تجزیه A به صورت $U \Sigma V^T$ تجزیه مقدار تکین می باشد که در آن U یک ماتریس متعامد $m \times m$ و V نیز یک ماتریس متعامد $n \times n$ و Σ یک ماتریس $m \times n$ است که عناصر خارج از قطر آن همگی صفر می باشد و عناصر روی قطر اصلی آن $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $1 \leq i \leq n$ می باشد.

قضیه ۱.۲ (قضیه SVD). اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، بنابراین A دارای تجزیه مقدار تکین می باشد.

□

برهان. به [۱] مراجعه شود

اگر A دارای تجزیه مقدار تکین $U \Sigma V^T$ باشد می توان بیان کرد که A نتیجه $U \Sigma$ ضرب در V^T می باشد. اگر $U \Sigma$ را به صورت ستونی و V^T را به صورت سطری بلوکی کنیم آنگاه خواهیم داشت

$$U \Sigma = (\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \dots + \sigma_n u_n)$$

و می توانیم A را به صورت یک بسط خارجی بیان کنیم

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_n u_n v_n^T. \quad (۱.۲)$$

اگر رتبه A برابر با n باشد، بنابراین

$$A' = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_{n-1} u_{n-1} v_{n-1}^T$$

با توجه به نرم فروبنیوس یک ماتریس با رتبه $n-1$ که نزدیک به ماتریس A است به دست می آید و غیره.

۳. PCA

تجزیه و تحلیل مؤلفه های اصلی (PCA) روشی آماری برای ساده کردن مجموعه ای از داده ها با کاهش مجموعه ای چند بعدی از داده ها به مجموعه ای با بعدهای کمتر برای تجزیه و تحلیل می باشد و در پردازش تصویر نیز بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۳].

^۱ Frobenius norm

۴. فشرده سازی با SVD

ذخیره سازی عکس در کامپیوتر به صورت یک ماتریس $m \times n$ است و هر یک از درایه های آن ماتریس معرف میزان سطح خاکستری در آن نقطه می باشد. اگر A ماتریس متناظر با یک تصویر دیجیتال باشد دارای تجزیه مقدار تکین $U\Sigma V^T$ است، بنابراین A را می توان با استفاده از رابطه (۱.۲) به صورت بسط زیر نشان داد.

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_n u_n v_n^T$$

نزدیک ترین ماتریس با رتبه k با قطع کردن جملات بعد از مرحله k به دست می آید

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_k u_k v_k^T$$

میزان حافظه برای ذخیره سازی A_k ، $k(2n+1)$ خواهد بود. می توان k را به طور قابل ملاحظه ای کمتر از n انتخاب کنیم به گونه ای که تصویر دیجیتال متناظر با A_k خیلی نزدیک به تصویر اصلی باشد. برای اندازه گیری کارایی فشرده سازی تصویر با SVD و PCA می توانیم عامل فشرده سازی را با استفاده از نسبت فشرده سازی به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$C_R = \frac{m \times n}{k(m+n+1)} \quad (1.4)$$

دو معیار اندازه گیری خطا که برای مقایسه روش های مختلف فشرده سازی تصویر مورد استفاده قرار می گیرد میانگین مربع خطا (MSE) و ماکزیمم نسبت سیگنال به نویز ($PSNR$) می باشد.

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} [M(x,y) - M'(x,y)]^2, \quad (2.4)$$

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{255}{\sqrt{MSE}} \right). \quad (3.4)$$

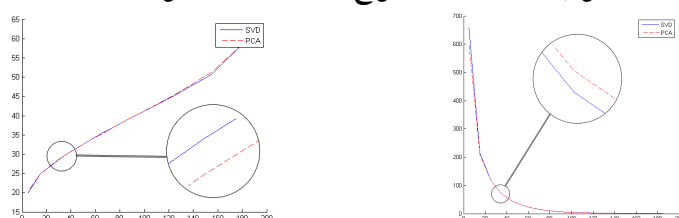
که در آن $M(x,y)$ مربوط به تصویر اصلی است و $M'(x,y)$ مربوط به یک نسخه از تقریب می باشد و m و n ابعاد تصویرها می باشد. مقدار کم MSE به معنای خطای کمتر است ولی بین MSE و $PSNR$ رابطه ی عکس وجود دارد. به این معنا که مقدار $PSNR$ زیاد می شود. به طور منطقی مقدار زیاد $PSNR$ خوب است چون به این معناست که نسبت سیگنال به نویز بالاست.

۵. نتایج عددی

در این بخش یک تصویر چهره را با SVD به ازای k مقدار از مقادیر تکین فشرده سازی خواهیم کرد و نتایج آن را در شکل ۱ نمایش می دهیم و نتایج بدست آمده را با PCA مقایسه می کنیم.



شکل الف. چهره اصلی شکل ب. $k = 5$ شکل ج. $k = 15$ شکل د. $k = 25$ شکل ه. $k = 35$



شکل و. خطای MSE روش SVD و PCA شکل ز. $PSNR$ با روش SVD و PCA

شکل ۱: فشردگی سازی چهره مجتبی به ازای k های مختلف با SVD و نمودار مقایسه روش SVD و PCA

جدول ۱: نتایج بدست آمده از فشردگی سازی چهره مجتبی با SVD

k	فضای ذخیره (بایت)	C_R	MSE	$PSNR$	زمان پردازش (ثانیه)
$k = 5$	۶۱۰۲	۲۴/۵۶۶۵	۶۵۸/۱۳۲۸	۱۹/۹۴۷۷	۰/۱۰۴۲
$k = 15$	۷۰۱۴	۸/۱۸۸۸	۲۱۴/۵۶۷۵	۲۴/۸۱۵۲	۰/۰۹۵۱
$k = 25$	۹۱۷۲	۴/۹۱۳۳	۱۱۷/۷۷۴۶	۲۷/۴۲۰۳	۰/۱۱۸۱
$k = 35$	۹۶۸۳	۳/۵۰۹۵	۷۰/۶۴۲۳	۲۹/۶۴۰۲	۰/۱۰۹۱
$k = 45$	۹۹۵۷	۲/۷۲۹۶	۴۴/۷۶۰۹	۳۱/۶۲۱۸	۰/۱۰۷۴
تصویر اصلی	۱۵۴۱۹	—	—	—	—

۶. نتیجه گیری

با توجه به شکل ۱ و جدول ۱ نتیجه می‌گیریم که به ازای $k=35$ تصویر بازسازی شده مطلوب و قابل قبول است که در این محدوده خطای MSE روش SVD کمتر از روش PCA است همچنین محاسبات به وسیله روش PCA خیلی بالاست بررسی ما نشان می‌دهد که برای تصویرهای با کیفیت بالا زمان فشردگی سازی روش PCA حدوداً ۱۰ برابر روش SVD می‌باشد بنابراین روش SVD بسیار مطلوب تر از روش PCA است.

مراجع

1. Cao, L.: Singular value decomposition applied to digital image processing. Division of Computing Studies Arizona State University Poly-technic Campus, 1–15 (2009).
2. Horn, R.A., Johnson, C.R.: Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 134–144 (1991).
3. Shlens, J., : A Tutorial on Principal Component Analysis. California, version 2, 1–11 (2003).

عملگرهای القایی روی فضای چندجمله‌ایهای همگن

یوسف زمانی^۱ و مهین رنجبری^{۲*}

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند
zamani@sut.ac.ir
m-ranjbari@sut.ac.ir

چکیده. فرض کنید $H_d[x_1, \dots, x_m]$ فضای برداری مختلط چندجمله‌ایهای همگن درجه d از متغیرهای مستقل $x_1, \dots, x_m$ باشد. فرض کنید T یک عملگر خطی روی $H_1[x_1, \dots, x_m]$ باشد. عملگر القایی $P(T)$ روی $H_d[x_1, \dots, x_m]$ وجود دارد بقسمی که $P(T)q(x_1, \dots, x_m) = q(Tx_1, \dots, Tx_m)$. هدف اصلی این مقاله، بررسی برخی خواص جبری عملگر القایی $P(T)$ می‌باشد.

۱. مقدمه

فرض کنید $H_d[x_1, \dots, x_m]$ فضای برداری مختلط چندجمله‌ایهای همگن از درجه d با متغیرهای مستقل $x_1, \dots, x_m$ باشد. فرض کنید $\Gamma_{d,m}$ مجموعه تمامی دنباله‌های $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ باشد بقسمی که بازای هر $1 \leq i \leq d$ ، $1 \leq \alpha_i \leq m$. مجموعه $\Gamma_{d,m}$ را با ترتیب الفبایی مرتب می‌کنیم. فرض کنید $G_{d,m}$ زیرمجموعه $\Gamma_{d,m}$ شامل همه دنباله‌های غیر نزولی باشد. برای هر $\alpha \in G_{d,m}$ ، وزن α را بصورت $\omega(\alpha) = \prod_{i=1}^d x_{\alpha(i)}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت مجموعه

$$\mathfrak{B} = \{\omega(\alpha) : \alpha \in G_{d,m}\}$$

پایه ای مرتب (با ترتیب الفبایی) برای $H_d[x_1, \dots, x_m]$ است. یک ضرب داخلی روی $H_d[x_1, \dots, x_m]$ بصورت $(\omega(\alpha), \omega(\beta)) = \delta_{\alpha,\beta} \nu(\alpha)$ تعریف می‌کنیم که در آن $\nu(\alpha) = |S_{\mu(\alpha)}|$ ، مرتبه زیرگروه یانگ متناظر با $\mu(\alpha)$ ، افزاز چندبارگی α است.

در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم $V = H_1[x_1, \dots, x_m]$.

تعریف ۱.۱. فرض کنید T یک عملگر خطی روی V باشد. در این صورت T یک عملگر خطی $P(T)$ با ضابطه

$$P(T)q(x_1, \dots, x_m) = q(Tx_1, \dots, Tx_m)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47B37; Secondary 15A69, 15A15, 15A04.

واژگان کلیدی. چندجمله‌ایهای همگن، عملگرهای خطی، پرمنتت. * سخنران

روی $H_d[x_1, \dots, x_m]$ القا می‌کند. فرض کنید $GL(V)$ گروه عملگرهای خطی وارونپذیر روی فضای برداری V باشد. باسانی می‌توان دید که تابع

$$P : GL(V) \longrightarrow GL(H_d[x_1, \dots, x_m])$$

یک نمایش گروه $GL(V)$ روی $H_d[x_1, \dots, x_m]$ تعریف می‌کند. می‌توان بررسی کرد که این نمایش، لزوماً صادق نیست.

تعریف ۲.۱. [۳، ۱] فرض کنید $M_m(\mathbb{C})$ فضای برداری ماتریسهای $m \times m$ روی میدان اعداد مختلط باشد.

الف) ماتریس $A \in M_m(\mathbb{C})$ را نیم‌معین مثبت گوئیم هرگاه A هرمیتی و بازای هر $x \in \mathbb{C}_{n \times 1}$ ، $x^* A x \geq 0$ در این حالت می‌نویسیم: $A \geq 0$.

ب) ماتریس $A \in M_m(\mathbb{C})$ را معین مثبت گوئیم هرگاه A هرمیتی و بازای هر $x \in \mathbb{C}_{n \times 1}$ ، $x^* A x > 0$ در این حالت می‌نویسیم: $A > 0$.

پ) هرگاه $A, B \in M_m(\mathbb{C})$ و A هرمیتی باشند و داشته باشیم: $A - B \geq 0$. آنگاه می‌نویسیم $A \geq B$.

تعریف ۳.۱. [۳، ۲] برای هر $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{C})$ ، پرمنت A بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{per} A = \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)},$$

که در آن S_m گروه متقارن درجه m است. باسانی می‌توان دید که تابع پرمنت دارای خاصیت ضربی نیست. ثابت می‌شود که برای ماتریسهای نیم‌معین مثبت $A, B \in M_m(\mathbb{C})$ ،

$$\text{per}(A + B) \geq \text{per}(A) + \text{per}(B).$$

۲. نتایج

لم ۱.۲. فرض کنید $T \in \text{End}(V)$. فرض کنید نمایش ماتریسی T نسبت به پایه متعامد یکه $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ برابر $A = (a_{ij})$ باشد. در این صورت بازای هر $\gamma, \alpha \in G_{d,m}$ ، درآیه (γ, α) - ام نمایش ماتریسی $P(T)$ نسبت به پایه مرتب $\mathfrak{B}$ برابر $\frac{1}{\nu(\gamma)} \text{per} A[\gamma|\alpha]$ است.

تعریف ۲.۲. فرض کنید A یک ماتریس مختلط $m \times m$ باشد. در این صورت ماتریس القایی $P(A)$ ماتریسی است از مرتبه $|G_{d,m}|$ ، بطوریکه بازای هر $\alpha, \beta \in G_{d,m}$ ، درآیه (α, β) - ام آن برابر است با

$$\frac{1}{\nu(\alpha)} \text{per} A[\alpha|\beta].$$

توجه کنید که تابع $A \longrightarrow P(A)$ یک نمایش گروه $GL(m, \mathbb{C})$ تعریف می‌کند.

تعریف ۳.۲. ماتریس $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{C})$ را مثبت گوئیم هرگاه بازای هر $a_{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq m$.

لم ۴.۲. فرض کنید $A \in M_m(\mathbb{C})$.

الف) اگر A مثبت باشد آنگاه $P(A)$ نیز مثبت است.

ب) اگر $P(A)$ مثبت و d فرد باشد، آنگاه A نیز مثبت است.

لم ۵.۲. فرض کنید $A \in M_m(\mathbb{C})$.

الف) اگر A بالا مثلثی باشد آنگاه $P(A)$ نیز بالا مثلثی است.

ب) اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ مقادیر ویژه A باشند آنگاه

$$\lambda_\alpha = \prod_{i=1}^d \lambda_{\alpha(i)}, \quad \alpha \in G_{d,m}$$

مقادیر ویژه $P(A)$ هستند. بویژه $\det P(A) = (\det A)^{\binom{d+m-1}{m}}$ و $\text{tr} P(A) = S_{[d]}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ چند جمله ای شور متناظر با افراز $[d]$ از d است.

ج) اگر $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ یک ماتریس قطری باشد آنگاه $P(A)$ نیز قطری است.

لم ۶.۲. اگر $T \in \text{End}(V)$ ، آنگاه $P(T)^* = P(T^*)$.

قضیه ۷.۲. اگر عملگر خطی $T: V \rightarrow V$ یکی از خواص هرمیتی، یکانی، نرمال، شبه هرمیتی (d فرد)، نیم معین مثبت و معین مثبت را داشته باشد، آنگاه عملگر القایی $P(T)$ نیز خواص متناظر را دارد.

قضیه ۸.۲. فرض کنید T و S دو عملگر خطی نیم معین مثبت روی V باشند. در این صورت

$$P(T) \geq P(S) \text{ آنگاه } T \geq S \text{ بویژه، } P(T+S) \geq P(T) + P(S).$$

اکنون در ادامه عکس قضیه ۷.۲ را بررسی می کنیم.

قضیه ۹.۲. فرض کنید T و S عملگرهای خطی روی فضای ضرب داخلی V باشند آنگاه $P(T) = P(S)$ اگر و تنها اگر $T = cS$ و $c^d = 1$.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید T عملگر خطی روی V و $P(T)$ عملگر القایی روی $H_d[x_1, \dots, x_m]$ باشد.

الف) اگر عملگر $P(T)$ نرمال باشد آنگاه T نیز نرمال است.

ب) اگر عملگر $P(T)$ یکانی باشد آنگاه T نیز یکانی است.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید عملگر القایی $P(T)$ هرمیتی باشد. در این صورت عدد مختلط c وجود دارد بقسمی که

$$T^* = cT, \quad c = e^{i\theta}, \quad d\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

تبصره ۱۲.۲. فرض کنید عملگر خطی $P(T)$ هرمیتی باشد. بنا به قضیه ۱۱.۲ عدد مختلطی مانند c وجود دارد بقسمی که $c = e^{i\theta}$, $T^* = cT$ و $\theta d \equiv 0 \pmod{2\pi}$ لذا عدد صحیحی مانند k وجود دارد بطوریکه $\theta d = 2k\pi$ یا $\theta = \frac{2k\pi}{d}$. حال فرض کنید $D = e^{\frac{i\theta}{d}} T$ در این صورت

$$(e^{\frac{i\theta}{d}} T)^* = e^{-\frac{i\theta}{d}} T^* = e^{-\frac{i\theta}{d}} e^{i\theta} T = e^{\frac{i\theta}{d}} T,$$

پس عملگر $D = e^{\frac{i\theta}{d}} T$ هرمیتی است. در نتیجه اگر عملگر $P(T)$ هرمیتی باشد آنگاه $T = e^{-\frac{i\theta}{d}} D$ ، یعنی T مضرب اسکالری از یک عملگر خطی هرمیتی است.

تبصره ۱۳.۲. فرض کنید عملگر خطی $P(T)$ هرمیتی باشد و $\text{rank}(T) = r > d$ فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ مقادیر ویژه غیر صفر عملگر خطی T باشند. چون T هرمیتی است پس اعداد مختلط $\mu_j = e^{\frac{i\theta}{d}} \lambda_j$ همگی حقیقی هستند. اگر عملگر خطی $P(T)$ نیم معین مثبت باشد آنگاه اعداد

$$\prod_{i=1}^d \lambda_{\alpha(i)} > 0 : \alpha \in Q_{d,r},$$

مقادیر ویژه غیر صفر $P(T)$ هستند. باسانی دیده می شود که اگر $P(T)$ هرمیتی باشد آنگاه عدد صحیحی مانند k وجود دارد بطوریکه $T = e^{\frac{ik\pi}{d}} D$ و D هرمیتی است. اگر $P(T)$ نیم معین مثبت باشد آنگاه D فقط یکی از خواص نیم معین مثبت و یا نیم معین منفی را خواهد داشت. نتایج مشابه با جابجا کردن مفاهیم نیم معین مثبت با معین مثبت بدست می آید.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید عملگر خطی $P(T)$ شبه هرمیتی باشد آنگاه T مضرب اسکالری از یک عملگر شبه هرمیتی است.

لم ۱۵.۲. فرض کنید $T : H_1[x_1, \dots, x_m] \rightarrow H_1[x_1, \dots, x_m]$ یک عملگر خطی باشد بطوریکه $\text{rank}(T) = r$. آنگاه $\text{rank}(P(T)) = |G_{d,r}|$.

مراجع

- [1] R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, 2007.
- [2] M. Marcus, Finite Dimensional Multilinear Algebra, Part I, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [3] R. Merris, Multilinear Algebra, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997.

نتایج پیرامون روش زیردرمینان

علی مسیبی درچه^{۱*} و محمد مسیبی درچه

^۱ گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور
alimosayebi@chmail.ir
mmosayebi1363@yahoo.com

چکیده. مقادیر ویژه یک ماتریس در بخش‌های مختلف ریاضیات کاربردهای فراوان دارند. روش‌های موجود (لورییر، ضرایب نامعین، کریلف و ...) جهت به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس با محاسبات طولانی همراه‌اند. در این مقاله ضرایب چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس را با استفاده از فقط زیردرمینان‌های حاصل از حذف سطر و ستون‌هایی از ماتریس بیان می‌کنیم. اثبات برخی نتایج در این زمینه همچون صحیح بودن ضرایب چند جمله‌ای مشخصه ماتریس‌هایی با درایه‌های اعداد صحیح که با روش‌های موجود نمی‌توان اثبات کرد، از مزایای روش زیردرمینان می‌باشد.

۱. پیش‌گفتار

تعریف ۱.۱. هر تابع یک‌به‌یک و پوشا روی یک مجموعه‌ی غیرتهی را یک جایگشت می‌نامیم. اگر $\{1, 2, \dots, n\}$ هر ترتیبی مانند $i_1 i_2 \dots i_n$ از این مجموعه را یک جایگشت روی این مجموعه می‌نامیم. جایگشت $i_1 i_2 \dots i_n$ را زوج می‌نامیم اگر بتوان این جایگشت را با تعداد زوجی تغییر، تبدیل به جایگشت $123 \dots n$ کرد و فرد گوئیم اگر با تعداد فردی تغییر، بتوان آن را به $123 \dots n$ تبدیل کرد. ر.ک. [۴]

تعریف ۲.۱. فرض کنید $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس مربعی باشد در این صورت

$$\det A = \sum \pm a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

که در آن $\sum$ روی تمام جایگشت‌های $j_1 j_2 \dots j_n$ از مجموعه $1, 2, \dots, n$ تغییر می‌کند و علامت + برای جایگشت زوج و - برای جایگشت فرد است [۱].

نکته ۳.۱. اگر $A = (a_{ij})_{n \times n}$ آنگاه در تعریف $\det A$ همه حاصل ضرب‌های n عنصر A را به این نحو در نظر می‌گیریم که هر حاصل ضرب از هر سطر و ستون فقط یک عنصر داشته باشد.

واژگان کلیدی. اثر ماتریس، چندجمله‌ای مشخصه، جایگشت.
* سخنران

اثر ماتریس A را $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ یعنی مجموع عناصر روی قطر اصلی تعریف کرده و با نماد $tr A$ نشان می‌دهیم. چند جمله‌ای تکین $f(x) = \det(xI - A)$ را چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A گوئیم که در آن I ماتریس همانی است و در [۳] داریم:

$$f(x) = x^n - (tr A)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + (-1)^n \det A$$

تعریف ۴.۱. فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد و $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ را دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون i_1 و حذف سطر و ستون i_2 تا حذف سطر و ستون i_k تعریف می‌کنیم.

با این نماد گذاری داریم: $tr A = \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} M_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$

$$n = 2 \implies f(x) = x^2 - (\sum_{i=1}^2 M_i)x + \det A$$

$$n = 3 \implies f(x) = x^3 - (\sum_{i < j} M_{i,j})x^2 + (\sum_{i=1}^3 M_i)x - \det A$$

$$n = 4 \implies$$

$$f(x) = x^4 - (\sum_{i_1 < i_2 < i_3} M_{i_1, i_2, i_3})x^3 + (\sum_{i < j} M_{i,j})x^2 - (\sum_{i=1}^4 M_i)x + \det A$$

لم ۵.۱. (روش لورییر). اگر $f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_n$ چند جمله‌ای مشخصه

ماتریس A باشد و $s_k = tr A^k$ آنگاه $p_1 = -s_1$ و $p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1s_1)$ و $\cdots$ و

$$p_n = -\frac{1}{n}(s_n + p_1s_{n-1} + \cdots + p_{n-1}s_1) \quad \text{رک [۱] و [۲].}$$

۲. چند جمله‌ای مشخصه

لم ۱.۲. اگر $A = (a_{ij})_{n \times n}$ و $1 \leq m < n$ و $f(x) = \det(xI - A)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد آنگاه ضریب x^m برابر است با $(-1)^{n-m} \sum_{i_1 < \dots < i_m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m}$

برهان: اگر

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

آنگاه با توجه به تعریف ۲.۱ و نکته ۳.۱ این دترمینان برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های n تایی که از هر سطر و ستون یک و فقط یک درایه در این حاصل ضرب وجود دارد. حال برای بدست آوردن ضریب x^m به حاصل ضرب‌های n تایی از تعریف ۲.۱ نیاز داریم که m حاصل ضرب از قطر اصلی و بقیه حاصل ضرب از غیر قطر اصلی و جملاتی از درایه‌های قطر اصلی به صورت a_{ii} انتخاب شوند. پس داریم:

$$S = \sum \pm (a_{i_1 i_1} - x) \cdots (a_{i_m i_m} - x) a_{i_{m+1} j_{m+1}} \cdots a_{i_n j_n} \quad (۱.۲)$$

که در آن $a_{i_m+1 j_{m+1}}$ و $\cdots$ و $a_{i_n j_n}$ بنابر نکته ۳.۱ از سطر و ستون i_1 و $\cdots$ و i_m نیستند و علامت $+$ و $-$ مربوط به جایگشت زوج و فرد است. لذا

$$S = (-x)^m \sum \pm a_{i_m+1 j_{m+1}} \cdots a_{i_n j_n} + R$$

که در آن R جملاتی از $\sum$ در رابطه بالا است که شامل x با توان کمتر از m است و ما با آنها کار نداریم و لذا ضریب x^m برابر $\sum \pm a_{im+1}j_{m+1} \cdots a_{in}j_n$ است که در آن علامت $+$ پشت $\sum$ برای n زوج و $-$ برای n فرد است زیرا اگر n زوج باشد نیازی به ضرب منها در $|A - xI|$ برای تکین بودن این چند جمله‌ای نیست و اگر n فرد باشد برای تکین بودن چند جمله‌ای داریم $|xI - A| = -|A - xI|$ و اما در اینجا $\pm(-1)^m = (-1)^{n-m}$ و بنابراین حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۲.۲ (روش زیردرمینان). چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس به صورت زیر است:

$$f(x) = x^n - \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_{n-1}} M_{i_1, \dots, i_{n-1}} \right) x^{n-1} + \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_{n-2}} M_{i_1, \dots, i_{n-2}} \right) x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n M_i \right) x + (-1)^n \det A$$

که در آن ضرایب چند جمله‌ای مجموعی از زیردرمینان‌های A است.

$\square$

برهان: با توجه به لم ۱.۲ واضح است.

نتیجه ۳.۲. ضرایب چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس مربع با درایه‌های اعداد صحیح، اعدادی صحیح‌اند.

برهان: با توجه به لم ۱.۲ ضرایب چند جمله‌ای مشخصه عبارت‌اند از مجموعی از زیر درمینان‌های ماتریس با درایه‌های اعداد صحیح که اعدادی صحیح‌اند. $\square$

با توجه به این نتیجه، چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس مربع با درایه‌های اعداد صحیح دارای ریشه گویای غیر صحیح نمی‌باشد.

نتیجه ۴.۲. اگر A یک ماتریس مربع با درایه‌های اعداد صحیح باشد آنگاه $tr A^2 - (tr A)^2$ عددی زوج است.

برهان: با توجه به روش لورییر ۵.۱ داریم $p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1)$ و بنابر ضریب x^{n-2} و بنابر نتیجه ۳.۲، p_2 عددی صحیح است. اما $p_2 = -\frac{1}{2}(tr A^2 - (tr A)^2)$ و حکم ثابت است. $\square$

نتیجه ۵.۲. اگر s_i ها و p_i ها همان‌هایی باشند که در لم ۵.۱ روش لورییر گفته شد و A ماتریسی با درایه‌های اعداد صحیح باشد آنگاه برای هر $n, \dots, 1, k$ عدد $s_k + p_1 s_{k-1} + \cdots + p_{k-1} s_1$ مضرب k است.

برهان: بنابر ۵.۱ داریم $-kp_k = s_n + \cdots + p_{n-1} s_1$ و بنابر نتیجه ۳.۲، p_k عددی صحیح است و لذا حکم ثابت است. $\square$

لازم به ذکر است که این سه نتیجه را نمی‌توان با روش‌های لورییر و ضرایب نامعین و کریلف و دیگر روش‌ها اثبات کرد. حال به عنوان نمونه به مقایسه‌ی روش زیردرمینان با روش لورییر اکتفا می‌کنیم.

مثال ۶.۲. در [۲] با استفاده از روش اثر ماتریس (روش لورییر) چند جمله‌ای مشخصه

ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ را به صورت زیر بدست آورده است ابتدا توان‌های مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 30 & 22 & 18 & 20 \\ 22 & 18 & 16 & 18 \\ 18 & 16 & 18 & 22 \\ 20 & 18 & 22 & 30 \end{pmatrix} \text{ و } A^3 = \begin{pmatrix} 208 & 178 & 192 & 242 \\ 178 & 148 & 154 & 192 \\ 192 & 154 & 148 & 178 \\ 242 & 192 & 178 & 208 \end{pmatrix}$$

(در این روش تنها به قطر اصلی نیازمندیم، لذا

$$\begin{pmatrix} 2108 & & & \\ & 1388 & & \\ & & 1388 & \\ & & & 2108 \end{pmatrix})$$

محاسبه کامل A^4 لزومی ندارد.) بنابراین: $s_1 = tr A = 4$ و $s_2 = tr(A^2) = 96$ و $s_3 = tr(A^3) = 712$ و $s_4 = tr(A^4) = 6992$ و بنابراین $p_1 = -4$ و $p_2 = -40$ و $p_3 = -56$ و $p_4 = -20$. در اینجا با روش زیردترمینان (قضیه ۲.۲) داریم $det A = -20$ و $tr A = 4$ و $\sum_{i=1}^4 M_i = 56$ و $\sum_{i < j} M_{i,j} = -40$ و بنابراین

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 40x^2 - 56x - 20$$

مشاهده می‌شود که روش زیردترمینان به مراتب ساده‌تر و راحت‌تر از روش لورییر است. علاوه بر این در روش لورییر نمی‌توان ضرایب را به طور جداگانه محاسبه کرد. همچنین معمولاً با محاسبه توانهای A به اعداد بزرگی می‌رسیم. در صورتی که در روش زیردترمینان ضرایب به طور جداگانه قابل محاسبه‌اند و محاسبات کمتری لازم است.

مراجع

۱. م.ب. احمدی، آنالیز عددی ۲، انتشارات پیام‌نور، ۱۳۸۵.
۲. ص. قاسم‌پور و ج. وحیدی، روش‌های محاسبات عددی، انتشارات علوم رایانه، ۱۳۹۰.
۳. ه.ک. کنزی، جبر خطی، ترجمه‌ی ج. فرشیدی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰.
۴. ع. مسیبی درچه، مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گروه‌ها، انتشارات قانون مدار، ۱۳۹۲.

افزایش سرعت شناسایی زمینه ویدئو با محاسبه مرحله‌ای تجزیه QR

محمود امین طوسی و سمیه پورصدیق*

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
m.amintoosi@hsu.ac.ir
pourseddigh@gmail.com

چکیده. شناسایی زمینه در ویدئو از مسائل مهم پردازش تصویر و بینایی ماشین است که تحقیقات مختلفی را به خود معطوف نموده است. در برخی از روشهای مورد استفاده در این حوزه از مقادیر قطر اصلی ماتریس R در تجزیه QR برای شناسایی فریمهای زمینه استفاده شده است. یکی از مشکلات این شیوه محاسبه مجدد تجزیه QR در بازه‌های زمانی پی‌درپی و حجم محاسباتی بالای آن است. در این مقاله با تغییر نحوه چیدمان ماتریس ورودی و محاسبه عناصری از ماتریسهای Q و R که با ورود فریم جدید ویدئو تحت تاثیر قرار می‌گیرند، حجم محاسبات کم شده و زمان پردازش از نظر تئوری به نصف کاهش پیدا می‌کند. نتایج آزمایشات انجام شده، کاهش حدود ۳۵ درصدی زمان اجرا را در عمل نشان می‌دهد.

۱. پیش‌گفتار

شناسایی نواحی متحرک در ویدئو یا پیش زمینه (Foreground) از قسمت ثابت صحنه یا زمینه (Background) یکی از مراحل اساسی در بسیاری از مسایل حوزه پردازش تصویر و بینایی ماشین می‌باشد که تحقیقات متعددی را به خود معطوف نموده است. تفاضل هر فریم ویدئو از زمینه تصویر یک راهکار معمول برای شناسایی اشیاء متحرک است. در بسیاری موارد زمینه ثابت فیلم از قبل مشخص نیست و باید تخمین زده شود. به این زمینه ثابت، تصویر زمینه یا مدل زمینه گفته می‌شود. تخمین دقیق‌تر این مدل منجر به شناسایی بهتر اشیاء خواهد شد که روشهای متعددی در این زمینه پیشنهاد شده است [۱]. یکی از روشهای مواجهه با مسئله استفاده از تجزیه QR است که در [۲] به آن پرداخته شده است. ایده اصلی در شیوه فوق‌الذکر تبدیل فریمهای ویدئو به یک ماتریس و شناسایی فریمهای زمینه از طریق میزان وابستگی خطی ستونهای ماتریس بوده است. حتی در وضعیتی که دوربین ثابت باشد و هیچ شیء متحرکی در صحنه وجود نداشته باشد، فریمهای این ویدئو کاملاً با هم برابر نبوده و مقادیر پیکسلها تا حدودی با هم متفاوت هستند. اگر هر فریم مثلاً با ابعاد ۳۲۰×۲۴۰ به صورت یک بردار ستونی با $۷۶۸۰۰ = ۳۲۰ \times ۲۴۰$ عنصر دربیاید، هر فریم را می‌توان یک بردار در فضای ۷۶۸۰۰ تصور کرد. نزدیک بودن بردارها

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 68T45; Secondary 15A23, 68U10.

واژگان کلیدی. تجزیه QR، الگوریتم گرام اشمیت، شناسایی زمینه.

* سخنران



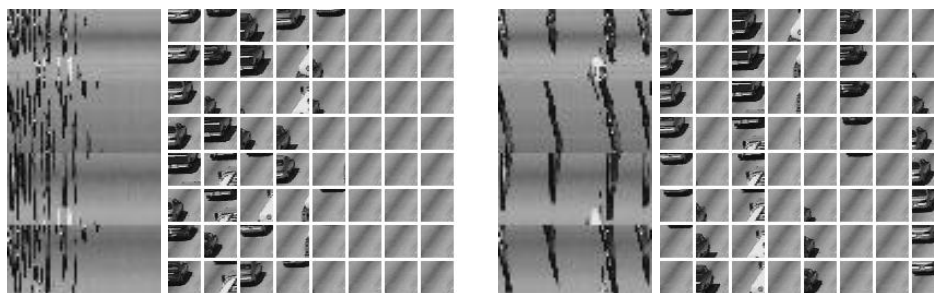
شکل ۱: یک فریم از یک ویدیوی نمونه، زمینه استخراج شده بر اساس روش مورد استفاده در مقاله و نتیجه شناسایی اشیاء متحرک مبتنی بر زمینه بدست آمده.

در فضا می‌تواند به این معنی باشد که هر دو بردار (فریم) محتوای نسبتاً یکسانی دارند. در این مقاله فرض بر این است که دوربین ثابت بوده و اشیاء متحرک در صحنه توقف طولانی ندارند؛ مانند ویدیوهای اخذ شده از دوربین‌های نظارتی اتوبانها که شکل ۱ یک نمونه را نشان می‌دهد. فرض کنیم بردارهایی که در واقع متعلق به زمینه بوده‌اند به صورت پراکنده در ماتریس A قرار گرفته‌اند. با این فرض که شیء متحرک هم‌رنگ با زمینه نیست، یکی از بردارهای متعلق به زمینه به عنوان یک پایه متعامد در ماتریس Q از تجزیه QR ماتریس A ظاهر خواهد شد و سایر ستونهای متعامد یک ماتریس Q که مرتبط با این بردارها هستند مقدار R (روی قطر اصلی) بسیار کوچکی خواهند داشت. به این ترتیب می‌توان این فریمها را شناسایی و مدل زمینه را بر اساس آنها ایجاد کرد.

در بسیاری از مواقع همانند شکل ۱ هیچ وقت کل صحنه خالی از اشیاء متحرک نیست، لذا به جای اعمال روش فوق روی کل فریم آن را روی بلاکهای کوچکتری از تصویر اعمال نموده و نتایج را در کنار هم قرار می‌دهیم. شکل ۲ یک بلاک از ۶۴ فریم متوالی ویدیوی شکل ۱ به همراه ماتریس ایجاد شده از کنار هم قرار دادن ستونی‌شده‌ی این فریمها را نشان می‌دهد. در این مثال اندازه هر بلوک ۳۰ در ۳۰ پیکسل بوده است و لذا A یک ماتریس ۹۰۰×۶۴ خواهد بود. برای نمایش بهتر فقط ۱۲۰ سطر ماتریس A (متناظر با عناصر روی قطر اصلی، قطر فرعی و سطر و ستون وسط هر بلاک) نمایش داده شده است.

ترتیب جدید این بلاکها بر اساس مقادیر R تجزیه QR ماتریس مربوط به آنها در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در ترتیب جدید بلاکهای متناظر با زمینه تصویر به انتهای لیست منتقل شده‌اند. نمایش ستونی این بلاکها در تصویر سمت چپ شکل ۳ مؤید همین مطلب است که ستونهای مرتبط با زمینه تصویر به دلیل وابستگی زیادشان به هم در انتها قرار گرفته‌اند.

عمل شناسایی فریمهای زمینه می‌تواند روی ماتریس حاصل از کل ویدیو و یا روی یک برش از ویدیو انجام شود. عموماً در کاربردهای برخط به جای اعمال روش روی کل ویدیو، یک پنجره لغزان با طول ثابت روی ویدیو در نظر گرفته می‌شود و مدل زمینه بر اساس فریمهای موجود در این پنجره برآورد می‌گردد. سپس فریمهای موجود در پنجره بروزرسانی شده و مجدداً عملیات تکرار می‌شود. به عنوان مثال اگر طول پنجره N فریم باشد، عملیات برای فریمهای ۱ تا N انجام شده (ماتریس A و مدل زمینه ساخته می‌شود) سپس با دریافت فریمهای جدید، ماتریس بر اساس فریمهای ۲ تا $N + ۱$ ساخته شده و عملیات ادامه پیدا می‌کند.



شکل ۲: توالی یک بلاک تصویر در ۶۴ فریم متوالی (از چپ به راست و از بالا به پایین) و بخشی از ماتریس A حاصل از آن (اولین ستون متناظر با اولین بلاک، دومین ستون متناظر با دومین بلاک و تا آخر).

شکل ۳: بازترتیب بلاکهای شکل ۲ بر اساس مقادیر R از تجزیه QR به همراه ماتریس A که ستونهای آن بر اساس مقادیر روی قطر ماتریس R از تجزیه QR ماتریس A در شکل ۲ مرتب شده‌اند.

۲. دستاوردهای پژوهش

مشکلی که در روش فوق‌الذکر وجود دارد نیاز به محاسبه مجدد تجزیه QR در هر پنجره می‌باشد. اگر ماتریس حاصل از فریمهای یک تا N را A و ماتریس حاصل از فریمهای دو تا $N + 1$ را A_1 بنامیم، تنها اختلاف آنها ستونهای اول و آخر آنهاست. در واقع $N - 1$ ستون اول ماتریس A_1 ، همان $N - 1$ ستون آخر A هستند و آخرین ستون A_1 فریم جدیدی است که وارد شده است.

اگر بتوان از خروجی تجزیه A تجزیه A_1 را با عملیات محاسباتی کمتری بدست آورد، عمل تخمین زمینه هم با سرعت بیشتری انجام خواهد گرفت. الگوریتم‌های متعددی برای روش گرام اشمیت در منابع مختلف ذکر شده است [۳، ۴]؛ از این میان الگوریتم ارائه شده در [۳] برای منظور موردنظر ما مناسب تشخیص داده شد که در الگوریتم ۱ نشان داده شده است. برای اصلاح آن به نحوی که بتوان با داشتن تجزیه QR ماتریس A ، تجزیه ماتریس A_1 را بدست آورد، فقط کافیت مقداردهی اولیه ماتریس v را به صورت مناسب انجام داد و در اولین حلقه الگوریتم، به جای شروع از اولین ستون، از ستون i ام عملیات را ادامه دهیم. الگوریتم ۲ وضعیت جدید را نشان می‌دهد. به این ترتیب ورودی الگوریتم ۲ به جز ماتریس ورودی، ماتریسهای Q و R بدست آمده از تجزیه ماتریس فریمهای قبلی (A) و i ، اندیس آخرین فریم اضافه شده می‌باشد.

اگر فریم جدید در ستون آخر قرار گیرد و ستون اول حذف شود، مقدار i در الگوریتم ۲ همیشه باید یک باشد و لذا دو الگوریتم تفاوتی با هم نخواهند داشت، به منظور رفع این مشکل و حفظ سازگاری الگوریتم ۲ با الگوریتم ۱، ماتریس A از آخر به اول پر می‌شود، به این صورت که آخرین ستون آن، اولین فریم ویدیو و اولین ستون آن، آخرین فریم ویدیو ما در پنجره جاری خواهد بود. فریم جدید ورودی در یک صف اولین ورودی اولین خروجی جایگزین اولین فریم قبلی (آخرین ستون ماتریس) خواهد شد.

الگوریتم ۲ الگوریتم گرام اشمیت مرحله‌ای	الگوریتم ۱ الگوریتم گرام اشمیت
Input: A_1, Q, R, i Output: Q, R 1: $v \leftarrow [Q(1:m, 1:i-1) A(1:m, i:n)]$ 2: for $k=i, \dots, n$ do 3: for $j=1, \dots, k-1$ do 4: $r_{jk} \leftarrow \langle v_k, v_j \rangle$ 5: $v_k \leftarrow v_k - v_j r_{jk}$ 6: end for 7: $r_{kk} \leftarrow \ v_k\ _2$ 8: $v_k \leftarrow v_k / r_{kk}$ 9: end for	Input: $A_{m \times n}$ Output: Q, R 1: $v \leftarrow Q$ 2: for $k=1, \dots, n$ do 3: for $j=1, \dots, k-1$ do 4: $r_{jk} \leftarrow \langle v_k, v_j \rangle$ (همان q_j هست v_j) 5: $v_k \leftarrow v_k - v_j r_{jk}$ 6: end for 7: $r_{kk} \leftarrow \ v_k\ _2$ 8: $v_k \leftarrow v_k / r_{kk}$ 9: end for

در یک فرآیند دوری، هر زمان که فریم جدیدی وارد می‌شود، در سمت چپ ستون قبلی در ماتریس قرار می‌گیرد و پس از رسیدن به ابتدای ماتریس، فریم جدید در آخرین ستون قرار می‌گیرد. اگر مرتبه زمانی محاسبه هر بردار پایه متعامد ماتریس Q را $O(1)$ فرض کنیم، مرتبه زمانی الگوریتم ۱ برای محاسبه N ستون ماتریس Q ، $O(N)$ و لذا مرتبه زمانی محاسبه ماتریس Q برای تمام N فریم یک پنجره، $O(N^2)$ می‌باشد. حال اگر محاسبات مورد نیاز بر طبق الگوریتم اصلاح شده ۲ انجام شود، اگر فریم وارد شده i امین فرم ورودی باشد (البته پس از یک بار پر شدن پنجره)، مرتبه زمانی الگوریتم $O(i)$ خواهد بود. چون i در هر دور پر شدن پنجره مقادیر یک تا N را بخود می‌گیرد، پس مرتبه زمانی انجام محاسبات برای N فریم یک پنجره با الگوریتم دوم، $N^2/2 \approx N(N+1)/2$ خواهد بود که تقریباً معادل نصف زمان لازم برای انجام محاسبات با الگوریتم ۱ است.

نتایج برنامه‌های نوشته شده در MATLAB روی چند نمونه ویدیو نشان داد که در عمل به دلیل بالاسری مربوط به سایر دستورات برنامه شناسایی زمینه، روش استخراج مدل زمینه با الگوریتم دوم به صورت میانگین ۳۵ درصد نسبت به الگوریتم ۱ کاهش پیدا کرده است. خروجی شناسایی زمینه و شناسایی اشیاء متحرک برای یک فریم از یک ویدیوی نمونه در شکل ۱ آمده است.

هنوز در الگوریتم ۲ محاسبات صرفاً بر اساس فریم جدید و تجزیه ماتریس قبلی انجام نمی‌شود و به قسمتی از ماتریس ورودی هم وابسته است، به عنوان کارهای آتی می‌توان به حذف وابستگی محاسبات به ماتریس ورودی و لذا کاهش مرتبه زمانی آن از $O(i)$ به $O(1)$ اشاره نمود.

مراجع

- [1] Sobral, A., Vacavant, A.: A comprehensive review of background subtraction algorithms evaluated with synthetic and real videos Computer Vision and Image Understanding, **122**, 4 - 21, (2014).
- [2] Amintoosi, M., Farbiz, F., and Fathy, M.: A QR Decomposition based mixture model algorithm for background modeling. ICICS2007, Sixth International Conference on Information, Communication and Signal Processing, 1-5, (2007).
- [3] Watkins, D. S.: Fundamentals of Matrix Computations, Wiley, (3rd ed.), (2010).
- [4] Golub, G. H.; Van Loan, C. F.: Matrix Computations, Johns Hopkins, (3rd ed.), (1996).

حل مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریسهای تصادفی دوگانه با استفاده از ماتریسهای تصادفی هم طیف با آن

اکرم پورمیر^{۱*}، سید مرتضی احمدی^۲، و محمدرضا گلوئی^۳

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان
purmirakram@yahoo.com
math.ahmadi67@yahoo.com
^۳ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زابل
galavi@opt.math.tu-graz.ac.at

چکیده. در این مقاله به ارائه روشی برای حل مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس های دوگانه می پردازیم. ابتدا ناحیه مشخص شدنی برای وجود ماتریس تصادفی با طیف داده شده را به دست می آوریم و سپس شرط کافی برای ماتریس تصادفی A هم طیف با ماتریس تصادفی B را به دست می آوریم. نشان خواهیم داد که B نزدیکترین ماتریس تصادفی دوگانه به A نسبت به نرم فروبینیوس است و نتایج وابسته مورد بحث قرار می گیرد.

۱. پیشگفتار

ماتریس A از مرتبه $m \times n$ با درایه های حقیقی؛ نامنفی گفته می شود اگر همه درایه های آن نامنفی باشد و تصادفی نامیده می شود اگر مجموع هر سطر آن مساوی یک باشد. درکل هر ماتریس $m \times n$ ، روی میدان اعدادحقیقی R که مجموع هر سطر آن مساوی عدد نامنفی $r \in R^+$ باشد؛ ماتریس تصادفی r -تعمیم یافته گفته می شود و اگر A و A^T ماتریس های تصادفی r -تعمیم یافته باشند به آن ماتریس تصادفی دوگانه r -تعمیم یافته گفته می شود. ماتریس های تصادفی دوگانه r -تعمیم یافته از مرتبه $n \times n$ با درایه های حقیقی را با $\Omega^r(n)$ نشان می دهیم و اگر $r = 1$ باشد آنگاه ماتریس A راتصادفی دوگانه می نامیم. اگرلیست n تایی، $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ طیف ماتریس نامنفی از مرتبه $n \times n$ با مقدارویژه پرون λ باشد به صورت $\{\lambda; \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ می نویسیم و می گوئیم λ مشخص شدنی است. این مقاله از دوبخش تشکیل شده، دربخش اول ناحیه وجود ماتریس تصادفی با

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. مساله مقدارویژه معکوس، ماتریس تصادفی، ماتریسهای هم طیف .
* سخنران

طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ را به دست می آوریم و در بخش دوم شرایط کافی برای ماتریس تصادفی دوگانه هم طیف با ماتریس تصادفی را پیدا می کنیم.

۲. ناحیه وجود ماتریس تصادفی

قضیه ۱.۲. فرض کنید A ماتریس دلخواه از مرتبه $n \times n$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و بردار ویژه $X = (x_1, \dots, x_t)^T$ باشد به طوری که $\forall k = 1, \dots, t$ و $t \leq n$ ، $rank(X) = t$ ، $Ax_k = \lambda_k x_k$ ، فرض کنید C ماتریس دلخواه از مرتبه $t \times n$ باشد، آنگاه ماتریس $A+XC$ دارای مقادیر ویژه $\mu_1, \dots, \mu_t, \lambda_{t+1}, \dots, \lambda_n$ می باشد بطوری که $\mu_1, \dots, \mu_t$ مقادیر ویژه ماتریس $D+XC$ هستند و همچنین $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس نامنفی از مرتبه $n \times n$ باشد. اگر $\sigma(A) = (r; \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ با مقدار ویژه پرون r باشد. آنگاه عدد حقیقی $k_A \geq -r$ وجود دارد، به طوری که برای هر $(r + \epsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ، $\epsilon \geq k_A$ ، طیف ماتریس نامنفی تصادفی دوگانه $(r + \epsilon)$ - تعمیم یافته است.

اثبات: باتوجه به اینکه r مقدار ویژه پرون ماتریس نامنفی A است بنابراین A را می توان یک ماتریس تصادفی نامنفی r - تعمیم یافته در نظر گرفت. بردار $y = \sqrt{n}(y_1, \dots, y_n)^T$ در R^n در نظر می گیریم به طوری که $y_j \geq 0$ ، $\forall j = 1, \dots, n$ ، طبق قضیه (۱.۲) ماتریس $B = A + ey^T$ طیف $\sigma(B) = (r + \sum_{j=1}^n y_j, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ را دارا می باشد. حال شرایطی که B ماتریس تصادفی دوگانه نامنفی باشد؛ را بررسی می کنیم:

$$B = [a_{ij}]_{n \times n} + [1 \dots 1]^T [y_1 \dots y_n] \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱.۲)$$

سطر j ام ماتریس B برابر $r + \sum_{j=1}^n y_j$ است، اگر x_j مجموع ستون j ام ماتریس A باشد، آنگاه $x_j + ny_j$ مجموع ستون j ام ماتریس B می باشد. حال برای اینکه ماتریس B تصادفی دوگانه باشد. سیستم n معادله خطی و n مجهول زیر را داریم:

$$ny_i + x_i = r + \sum_{j=1}^n y_j \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (۲.۲)$$

چون $\sum_{j=1}^n x_j = nr$ بنابراین دستگاه تعداد متناهی جواب دارد. فرض می کنیم $x_m = \max(x_j)$ ، $\forall j = 1, \dots, n$ را به عنوان تنها پارامتر سیستم در نظر می گیریم و جواب آن توسط معادله زیر به دست می آید.

$$y_i = r + y_m - \frac{1}{n}(2x_i + \sum_{j=1}^n x_j), \quad j \neq i, m, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (۳.۲)$$

و ij امین درایه $B = (b_{ij})$ توسط معادله زیر به دست می آید:

$$\forall j \neq m, \quad b_{ij} = a_{ij} + r + y_m - \frac{1}{n}(2x_i + \sum_{j=1}^n x_j), \quad \forall j = m, \quad b_{im} = a_{im} + y_m, \quad (j \neq i) \quad (۴.۲)$$

حال کوچکترین درایه ستون j ام را a_j در نظر می گیریم. آنگاه برای اینکه B نامنفی باشد، داریم:

$$a_i + r + y_m - \frac{1}{n}(2x_i + \sum_{j=1}^n x_j) \geq 0, \quad j \neq i, m \quad (5.2)$$

سیستم (۵.۲) دارای $n - 2$ معادله و $n - 1$ مجهول می باشد و بنابراین تعداد متناهی جواب دارد. حال فرض می کنیم k_A کوچکترین مقدار y_m باشد که در (۵.۲) صدق می کند، چون $x_j \leq na_j$ برای هر $j \neq m$ داریم:

$$r + k_A \geq r + k_A + a_j - \frac{1}{n}(2x_j + \sum_{k=1}^n x_k) \geq 0, \quad (k \neq m, j), \quad \forall j \neq m \quad (6.2)$$

علاوه بر این

$$a_m - \frac{1}{n}(2x_m + \sum_{k=1}^n x_k) \leq 0 \quad (7.2)$$

در نتیجه:

$$r + k_A \geq a_m + k_A \geq 0 \quad (8.2)$$

بنابراین $k_A \geq -r$. حال برای هر $\epsilon \geq k_A$ عددی حقیقی مانند $\alpha \geq 0$ وجود دارد به طوری که $\epsilon = k_A + \alpha$ آنگاه $(r + \epsilon, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ طیف ماتریس تصادفی دوگانه است و بنابراین $r + \epsilon$ مقدار ویژه پرون ماتریس تصادفی دوگانه تعمیم یافته می باشد.

مثال ۳.۲. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ با طیف $\lambda = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ باشد در این صورت $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ و $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$ ماتریس تصادفی $-\frac{3}{4}$ تعمیم یافته می باشد.

۳. شرایط کافی برای ماتریس تصادفی هم طیف با ماتریس تصادفی دوگانه

قضیه ۱.۳. فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس تصادفی از مرتبه $n \times n$ با مقدار ویژه پرون ۱ باشد و فرض کنید a_j کوچکترین درایه ماتریس و همچنین x_j مجموع ستون j ام ماتریس باشد، اگر

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i \leq 1 + na_i \quad (1.3)$$

آنگاه ماتریس تصادفی دوگانه B از مرتبه $n \times n$ با طیف $\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ وجود دارد علاوه بر این B نزدیکترین ماتریس تصادفی دوگانه منحصر بفرد به A نسبت به نرم فروبینیوس است که B هم طیف با A است.

اثبات: در سیستم (۵.۲) مقدار $r = 1$ را جایگزین می کنیم و با توجه به این که

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \text{ داریم:}$$

$$a_j + y_m + \frac{x_m}{n} - \frac{x_j}{n} \geq 0 \quad (2.3)$$

با انتخاب $y_m = \frac{1}{n} - \frac{x_m}{n}$ در (2.3) معادله ی (1.3) را بدست می آوریم و بنابراین B ماتریس تصادفی دوگانه با طیف $\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ می باشد. برای بخش دوم، فرض کنیم I_n ماتریس همانی از مرتبه $n \times n$ و J_n ماتریس خود توان از مرتبه $n \times n$ با درایه های $\frac{1}{n}$ باشد، حال کافی است ثابت کنیم $B = (I_n - J_n)A(I_n - J_n) + J_n$ چون برای ماتریس تصادفی B داریم: $AJ_n = J_n$ بنابراین

$$(I_n - J_n)A(I_n - J_n) + J_n = A - J_nA + J_n \quad (3.3)$$

علاوه بر این هر درایه ij ماتریس J_nA مساوی $\frac{x_j(A)}{n}$ است. و بنابراین همه درایه های B و $A - J_nA + J_n$ یکسان هستند و اثبات کامل شد.

مثال 2.3. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس تصادفی با طیف $\sigma(A) = (1, \frac{1}{3}, 0)$

باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = 0$ و داریم $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ به طوری که B ماتریس

دوگانه تصادفی منحصر به فرد و همچنین نزدیکترین ماتریس به A نسبت به نرم فروبینیوس است.

4. دستاوردهای پژوهش

- (1) فرض کنید A ماتریس حقیقی از مرتبه $n \times n$ با طیف $\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد آنگاه A هم طیف با ماتریسی است که مجموع سطر و ستون آن 1 است.
- (2) فرض کنید A ماتریس حقیقی از مرتبه $n \times n$ با طیف $\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد آنگاه عدد حقیقی $k_A \geq 0$ وجود دارد به طوری که $\{1 + k_A; \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ طیف ماتریس تصادفی دوگانه $-(1 + k_A)$ - تعمیم یافته نامنفی است.

مراجع

1. Borobia, A.: Inverse Eigenvalue Problem: Handbook of linear algebra, second ed., chapman and Hall / CRC., New York (2007).
2. Chu, M. T., Golub, G. H.: Inverse Eigenvalue problem, Theory: Algorithm and Application, Oxford science publication., Oxford University Press (2005).
3. Mourad, B.: A note on a relationship between the inverse eigenvalue problem for non-negative and doubly stochastic matrices and some application. Linear Algebra Appl., **416**, 3400–3412 (2012).
4. Laffy, T. J., Smigo, H.: On a classic example in the nonnegative inverse eigenvalue problem., Electronic Journal of Linear Algebra., **17**, 333 – 342 (2008).
5. Yang, S-J., Xu, C-G.: Row Stochastic Inverse Eigenvalue Problem., Jurnal of Inequalities and Applications., **9**, 119 – 143 (2011).

الگوریتمی برای حل مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس های تصادفی دوگانه

اکرم پورمیر^{۱*}، سید مرتضی احمدی^۲، و محمدرضا گلوئی^۳

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان
purmirakram@yahoo.com
math.ahmadi67@yahoo.com
^۳ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زابل
galavi@opt.math.tu-graz.ac.at

چکیده. مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن تعیین n تایی از اعداد حقیقی که طیف ماتریس تصادفی دوگانه متقارن از مرتبه $n \times n$ باشد. در این مقاله ناحیه Δ_n^s از R^n را بررسی می کنیم، که هر نقطه در این ناحیه طیف ماتریس های تصادفی دوگانه باشد. سپس الگوریتمی را برای حل مساله مقدار ویژه معکوس با توجه به طیف داده شده ارائه می کنیم و در انتها دستاوردهای پژوهش را بیان می کنیم.

۱. پیش گفتار

لیست n -تایی $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ را طیف ماتریس می نامیم. مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس های تصادفی دوگانه تعیین شرط لازم و کافی برای n عدد حقیقی یا مختلط است به طوری که طیف ماتریس تصادفی دوگانه متقارن باشد. بطور معادل پیدا کردن ناحیه θ_n از C^n است به طوری که هر نقطه در این ناحیه طیف ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن از مرتبه $n \times n$ باشد. این مقاله در دویبخش سازماندهی شده است. در بخش اول ناحیه Δ_n^s را به دست می آوریم به طوری که هر نقطه در این ناحیه طیف ماتریس تصادفی دوگانه متقارن باشد و در ادامه الگوریتمی برای حل مساله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس های تصادفی دوگانه ارائه می کنیم. شرط کافی برای این که $\sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ طیف ماتریس تصادفی دوگانه باشد را به دست می آوریم و در انتها به بیان نتایج به دست آمده می پردازیم.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. طیف ماتریس، مرز مجموعه، ماتریس تصادفی دوگانه،
* سخنران

۲. کران طیف ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن

فرض کنید نگاشت $E : M_s^+(n) \rightarrow R^n$ (مجموعه ماتریس های متقارن نامنفی را با $M_s^+(n)$ نشان می دهیم) به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$E(X) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (1.2)$$

اگر مجموعه ماتریس های همانی از مرتبه $n \times n$ را با I_n نشان دهیم آنگاه $E(I_n) = (1, 1, \dots, 1)$ و اگر مجموعه ماتریس های خود توان از مرتبه $n \times n$ که درایه های آن $\frac{1}{n}$ باشد را با J_n نشان می دهیم آنگاه $E(J_n) = (1, 0, \dots, 0)$.

تعریف ۱.۲. نقطه $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \theta_n^s$ ، دیواره مرزی می گوئیم اگر برای بعضی $i \neq j$ داشته باشیم $\lambda_i = \lambda_j$ بنابراین تصویر نگاشت E برای هر ماتریس تحویل ناپذیر دیواره مرزی است چون مقدار ویژه ۱ تکرار می شود.

تعریف ۲.۲. نقطه $\lambda = (1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \theta_n^s$ مرز راسی می نامند اگر برای هر $a > 1$ آنگاه $a\lambda + (1-a)E(I_n)$ طیف ماتریس تصادفی دوگانه متقارن نباشد

تعریف ۳.۲. نقطه $(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \theta_n^s$ مرز گفته می شود اگر دیواره مرز یا مرز راسی در مجموعه قرار داشته باشد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $X \in \theta_n^s$ (مجموعه همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن باشد) به طوری که $E(X)$ دیواره مرز نباشد. اگر همه درایه های قطری X مثبت باشند آنگاه $E(X)$ مرز راسی در θ_n^s نیست، به ویژه تصویر هر ماتریس تصادفی دوگانه متقارن نامنفی مرز راسی در θ_n^s نمی باشد.

۳. روشی برای ساختن ماتریس تصادفی دوگانه متقارن

اگر $V_n \in GL(n, R)$ (مجموعه ماتریس ها با درایه های حقیقی را با $GL(n, R)$ نشان می دهیم) ماتریس V_n را طوری در نظر می گیریم که سطر اول مساوی e_n^T و مجموع $n-1$ سطر آخر مساوی صفر است و بنابراین در V_n^{-1} ستون اول مساوی e_n و مجموع $n-1$ ستون آخر مساوی صفر است. فرض کنید x بردار ویژه ماتریس تصادفی دوگانه A از مرتبه $n \times n$ وابسته به مقدار ویژه λ باشد، اگر O_p نمایش بردار O از مرتبه $1 \times p$ باشد آنگاه

$$\begin{bmatrix} x \\ O_p \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} x \\ O_p \end{bmatrix}$$

به ترتیب بردارهای ویژه ماتریس های تصادفی دوگانه

$$I_p \oplus A$$

و

$$A \oplus I_p$$

از مرتبه

$$(n+p) \times (n+p)$$

وابسته به مقدار ویژه λ می باشد.
الگوریتم:

مرحله ۱: برای $k = 1, 2, \dots$ رئوس Δ_n^s را پیدا می کنیم و سپس بردارهای ویژه واحد آن را که با

$$\frac{1}{\sqrt{k}} e_k, x_2, \dots, x_k$$

نشان می دهیم به دست می آوریم.
مرحله ۲: ماتریس متعامد

$$X_k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} e_k |X_2| \dots |X_k \right)$$

از مرتبه $k \times k$ را که $x_1, x_2, \dots, x_k$ بردارهای ویژه هستند، را به دست می آوریم. همچنین برای ماتریس قطری (Ω_k) که درایه های قطری آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ می باشد، شرط $X_k \Omega_k X_k^T$ را بررسی می کنیم.

مرحله ۳: برای $k > n$ ، با قراردادن $n - k + 1$ ستون اول ماتریس V_n و جایگذاری

$$k - 1 \text{ ستون آخر ماتریس } V_n \text{ را از مرتبه } n \times n, \dots, \begin{bmatrix} x_2 \\ \circ \\ \cdot \\ \cdot \\ \circ \end{bmatrix} \text{ را می سازیم، آنگاه}$$

ناحیه ای که $A_n V A_n^T$ نامنفی است را به دست می آوریم.
مرحله ۴: این روند را با انتخاب رئوس متفاوت تکرار کنید.

$$\text{مثال ۱.۳. با به کار بردن الگوریتم برای روی رئوس } \Delta_4^s \text{ داریم: } p_1 = \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \end{bmatrix}$$

$$\text{بنابراین } X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ که ماتریس متعامد است. و با محاسبه } X \Lambda_4 X^T \text{ داریم: } 1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \geq 0$$

۴. دستاوردهای پژوهش

(۱) اگر $1 - (n - 1)\lambda_n \geq 0$ آنگاه وجود دارد ماتریس تصادفی دو گانه A از مرتبه $n \times n$ با طیف $(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ علاوه بر این اگر برای $i \neq j$ داشته باشیم $\lambda_i \neq \lambda_j$

آنگاه ماتریس A نامتقارن است.

(۲) اگر

$$\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1 \right]$$

آنگاه وجود دارد ماتریس تصادفی دو گانه متقارن A که $(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ طیف آن می باشد.

مراجع

1. Berman, A., Plemmons, R. J.: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences., SIAM Publications, Philadelphia (1994).
2. Borobia, A., Moro, J.: on the boundary of the set of real spectra of nonnegative matrices., Linear Algebra Appl., **278**, 281–293 (1998).
3. Mourad, B.: A not on the boundary of the set wherethe decreasingly orderd spectral of symmetric doubly stochastic matrices lie., Linear Algebra. Appl., **416**, 546–558 (2006).
4. Mourad, B., Abbas, H., Ghaddar, A.: An algoritm for constructing doubly stochastic matrices for the inverse eigenvalue problem.. Linear Algebra. Appl., **439**, 1382 – 1400 (2013).
5. Perfect, H., Mirsky, L.: Spectral properties of doubly - stochastic matrices., Monatsh Mathl., **69**, 35 – 57 (1965).

قضیه‌ای در جبر خطی با کاربردهایی برای حل معادلات درجه دو

مانیا کریمی نیا^۱ و مهسا آقاپور^۲

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور شیراز
Many_karimi@yahoo.com

^۲ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور تبریز
Aqapour_mahsa@yahoo.com

چکیده. با یافتن فرمولی برای چندجمله‌ای ویژه با محدودیت نگاشت خطی^۱ در R^n برای یک زیرفضای آفین^۲، مجموعه کاملی از نامتغیرهای متعامد برای معادلات دو در R^n بدست می‌آوریم.

۱. مقدمه و نمادگذاری

یافتن فرمولی جبری که در نظریه نامتغیرهای متعامد معادلات درجه دو کاربرد دارد. نگاشت خطی $f: E \rightarrow E$ که در آن E یک فضای برداری n بُعدی روی میدان K ، E^* فضای دوگانه آن، و H یک زیرصفحه در E با محدود نمودن f به H و تصویر روی H ، نگاشت خطی جدید $\bar{f}$ بدست می‌آید که رابطه بین f و $\bar{f}$ را بررسی می‌کنیم. $A = (a_{ij})$ ، ماتریسی در K و مزدوج^۱ آن را با $\text{adj } A$ در نظر داریم. $\text{adj } A = (\det A)A^{-1}$. نگاشت‌های یکسان j_E و j_H . چندجمله‌ای ویژه f ، $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \sum_{k=0}^n \sigma_k \lambda^{n-k}$ ، است.

قضیه ۱.۱. نگاشت خطی f ، نگاشت یکتای $\text{adj } f$ وجود دارد اگر A ماتریس f نسبت به پایه E باشد، آنگاه $\text{adj } f$ نسبت به این پایه، $\text{adj } A$ می‌باشد.

۲. بدست آوردن چند فرمول جبری

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\nu \in E$ و $g \in E^*$ به طوریکه $g(\nu) = 1$ و $H = g^{-1}(0)$ و f نگاشت خطی و $g \otimes \nu = j_E - P_H$ ، آنگاه (1.2) ، برقرار است؛

$$\det(P_H \circ f|_H) = g((\text{adj } f)(\nu)) \quad (1.2)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. ماتریس مزدوج، زیرفضای آفین، نگاشت خطی.

^۱ Adjugate matrix

برهان. فرض که $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ پایه‌ای از H باشد. چون $g(\nu) = 1$ ، $\{e_1, \dots, e_{n-1}, \nu\}$ پایدار از E است. اگر $A = (a_{ij})$ ، $1 \leq i, j \leq n$ باشد، آنگاه $P_H \circ f|_H$ در $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ عبارتست از (a_{ij}) ، $1 < i, j \leq n-1$. فرض که $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه دوگانه^۲ $\{e_1, \dots, e_{n-1}, \nu\}$ باشد. چون $g(\nu) = 1$ و $g(e_i) = 0$ برای $i = 1, \dots, n-1$ ، $e^n((\text{adj } f)(\nu)) = g((\text{adj } f)(\nu))$ لذا $e^n = g, 1, \dots, n-1$. $\square$

نتیجه ۱.۲. با جانشینی $\lambda j_E - f$ در (۱.۲)، به جای f ، داریم:

$$\det(\lambda j_E - P_H \circ f|_H) = g(\text{adj}(\lambda j_E - f)(\nu)).$$

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma'_k \lambda^{n-1-k}$ و $\det(\lambda j_E - f) =$ در این صورت اگر K نامتناهی باشد، داریم:

$$\sigma'_i = \sigma_i + \sigma_{i-1}g(f(\nu)) + \dots + \sigma_0 g(f'(\nu)) \quad (2.2)$$

برهان. چون $\text{adj}(\lambda I - A)$ چندجمله‌ای‌های در λ با درجه $n-1$ می‌باشند، لذا $\text{adj}(\lambda I - A)(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)I$ چون $\text{adj}(\lambda I - A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^{n-1-k}$ بنابراین

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^{n-1-k} \right] (\lambda I - A) = \left[\sum_{r=0}^n \sigma_r \lambda^{n-r} \right] I. \quad (3.2)$$

با یکسان فرض کردن ضرایب داریم:

$$c_i = \sigma_0 A^i + \sigma_1 A^{i-1} + \dots + \sigma_i I \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (4.2)$$

نتیجه که $\det(\lambda j_E - f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{r=0}^k \sigma_{k-r} f^r \right] \lambda^{n-1-k}$ بنابراین

$$\det(\lambda j_E - P_H \circ f|_H) = g(\text{adj}(\lambda j_E - f)(\nu)) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{r=0}^k \sigma_{k-1} g(f^r(\nu)) \right] \lambda^{n-1-k}.$$

داریم $\sigma'_k = \sum_{r=0}^k \sigma_{k-r} g(f^r(\nu))$ که در نتیجه با $\lambda = 0$ ، قضیه کیلی-همیلتون کلاسیک^۳ حاصل می‌شود و به معادله‌ی $0 = A^n + \sigma_1 A^{n-1} + \dots + \sigma_n I$ خواهیم رسید. $\square$

۳. نامتغیرهای متعامد معادلات درجه دو در R^n

معادله‌ی

$$x^t A x + 2b'x + a_{n+1, n+1} = 0 \quad (1.3)$$

^۲Dual basis

^۳Classical Cayley-Hamilton

را با تغییر متعامد بهنجار مناسب محورها، می‌توانیم به فرم استاندارد تغییر و در قالب ضریب‌های a_{ij} بدست آوریم. با تغییر متغیر متعامد محوری $x = Tx' + d$ معادله‌ی

$$x'^t A' x' + 2b'^t x' + a_{n+1, n+1} = 0 \quad (2.3)$$

حاصل می‌شود که:

$$A' = T^t A T \quad \text{و} \quad b' = d^t A d + 2b^t d + a_{n+1, n+1} \quad (3.3)$$

از تشابه A' و A داریم: $\text{adj}(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(A) \lambda^{n-i}$ که $\sigma_0 = 1$ و $\sigma_i(A) = (-1)^i S_i$ ماتریس متقارن^۴ $(n+1)(n+1)$ را در نظر می‌گیریم؛

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ b^t & a_{n+1, n+1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

اگر $\bar{x} = T \bar{x}'$ با جانشینی $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\bar{T} = \begin{bmatrix} T & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\sigma_{n+1}(\bar{A}) = (-1)^n \det \bar{A}$ بنابراین $\sigma_i(A)$ و $\sigma_{n+1}(\bar{A})$ نامتغیرهای متعامد برای همه معادلات درجه دو هستند.

نامتغیرهای ویژه: در (۳.۳)، $b' = 0$ اگر و تنها اگر $Ad = -b$. هر جوابی از $Ax = -b$ یک مرکز S است. اگر r مرتبه A ، آنگاه S یک مرکز یکتا دارد اگر و تنها اگر $r = n$. وقتی $r < n$ ، ممکن است جواب‌های زیاد نامتناهی و یا هیچ جوابی نداشته باشد.

قضیه ۱.۳. اگر $r < n$ و S یک مرکز دارد، آنگاه $\sigma_{r+1}(\bar{A})$ یک نامتغیر متعامد است.

لم ۱.۳. اگر $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ، $\lambda_i \neq 0$ و $b^t = (b_1, \dots, b_r)$ ، آنگاه:

$$(-1)^r \sum_{i=1}^r \lambda_1 \cdots \hat{\lambda}_i \cdots \lambda_r b_i^r = - \sum_{j=0}^{r-1} \sigma_j(A) b^t A^{r-j-1} b.$$

برهان قضیه ۱.۳. A متقارن و T متعامد^۵، $A' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$. اگر $x = Tx'$ داریم $\bar{A}' = \bar{T}^t \bar{A} \bar{T}$. چون S مرکز دارد پس $b' = -A^t(T^t d)$ یعنی برای $r+1 \leq i \leq n$ داریم $a'_{i, n+1} = 0$.

$$\sigma_{r+1}(\bar{A}) = \sigma_{r+1}(\bar{A}') = (-1)^{r+1} \left[\lambda_1 \cdots \hat{\lambda}_i a_{n+1, n+1} - \sum_{i=1}^r \lambda_1 \cdots \hat{\lambda}_i \cdots \lambda_1 a'_{i, n+1} \right]$$

بنا بر لم ۱.۳، داریم:

$$\sigma_{r+1}(\bar{A}) = -\sigma_r(A) \sigma_{n+1, n+1} - \sum_{j=0}^{r-1} \sigma_j(A) b^t A^{r-j-1} b. \quad (5.3)$$

^۴ Symmetric matrix

^۵ Orthogonal

با تغییر متعامد کلی و (۵.۳) داریم:

$$\sigma_{r+1}(\overline{A'}) = -\sigma_r(A)a_{n+1,n+1} - 2d^t f(A)b - d^t f(A)Ad - \sum_{j=0}^{r-1} \sigma_j(A)b^t A^{r-j-1}b.$$

که $f(A) = \sum_{j=0}^{r-1} \sigma_j(A)A^{r-j}$ چون $\sigma_i(A) = 0$ و $\lambda \neq 0$ با فرض $x \in R^n$ و $Ax \in \text{Im } A$ داریم $f(A)A = 0$ بنابراین $f(A)b = 0$ پس $\sigma_{r+1}(\overline{A'}) = \sigma_{r+1}(\overline{A})$ قضیه ۲.۳. اگر $r < n$ و S هیچ مرکزی نداشته باشد، آنگاه $\sigma_{r+2}(\overline{A})$ یک متغیر نامتعامد است.

برهان. وقتی $x = Tx'$ و A, T را قطری می‌سازیم و با اعمال تغییر متعامد کلی داریم:

$$\sigma_{r+2}(\overline{A'}) = -\sigma_r(A)\|T^t f(A)b + T^t f(A)Ad\|^2 \quad (۶.۳)$$

می‌دانیم $f(A)A = 0$ لذا $\sigma_{r+2}(\overline{A}) = \sigma_{r+2}(\overline{A'})$ □

نتیجه ۱.۳. اگر $r < n$ ، شرط لازم و کافی برای S جهت داشتن مرکز این است که $\sigma_{r+2}(\overline{A}) = 0$.

معادلات استاندارد: $r \leq n$ (۱) و $\sigma_{r+2}(\overline{A}) = 0$ در این صورت یک سیستم متعامد که

در آن S به صورت $0 = a'_{n+1,n+1} + \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_r x_r'^2$ و $\frac{-\sigma_{r+1}(\overline{A})}{\sigma_r(A)}$ است.

(۲) $r < n$ و $\sigma_{r+2}(\overline{A}) \neq 0$ در این حالت سیستم متعامد و معادله S به صورت

$$0 = a'_{r+1,r+1} + \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_r x_r'^2 + \frac{-\sigma_{r+2}(\overline{A})}{\sigma_r(A)} \text{ است.}$$

۴. نتیجه گیری

زمانی که معادله استاندارد در قالب نامتغیرها مشخص شد فرمول‌بندی مقادیر آن نامتغیرها آسان و از قانون دکارت استفاده می‌شود.

مراجع

1. D. J. Struik. Lectures on Analytic and projective Geometry, Addison wesley. 1953.
2. E. A. Maxwell. coordinate Geometry with vectors and tensors. Oxford U.P. 1958.
3. F. D. Grosshans, Rigid motion of conics and introduction to invariant theory. Answer, Math. Monthly: 407-413 (1981).
4. G. Salmon. Traite Geometrique Analytique a Trois Dimensions. anthier-villars. paris 1899.
5. W. H. Greub. Linear Algebra. Springer. New York. 1967.

نگاشت های جمعی حافظ عملگرهای نیمه برودر

تکتم آقاسی زاده^۱ و الهام حسینی^۱

^۱دانشگاه خیام، دانشکده علوم پایه
elhamhosseini2012@gmail.com
t.aghasizadeh@khayyam.ac.ir

چکیده. در سراسر این مقاله X و Y را فضاهای باناخ و H را فضای هیلبرت مختلط تفکیک پذیر نامتناهی البعد و $L(X)$ را جبر تمام عملگرهای خطی کراندار روی X در نظر می گیریم. در این مقاله نگاشت های جمعی پیوسته و پوشایی را توصیف می کنیم که عملگرهای شبه برودر بالایی و پایینی را در هر دو جهت حفظ می کند.

۱. پیش گفتار

در مبحث نظریه عملگرها، نگاشت های حافظ خاصیت های مختلف از اهمیت بسیاری برخوردارند. این مسائل تاریخچه ای نسبتاً طولانی دارند. اولین نتیجه به سال ۱۸۹۷ برمی گردد، هنگامی که فروبینوس^۱ [۱] ساختار نگاشت های خطی حافظ دترمینان بین فضاهای ماتریس را تشریح کرد. برای تقریباً چهل و پنج سال، به جز یکی دو نتیجه از پولیا^۲ [۲] و شور^۳ [۳]، هیچ کار قابل توجه یا مستقیمی روی این مسائل انجام نشد. این موضوع با کارهای دیودونه^۴ [۴] ادامه یافت و از آن به بعد به خصوص در سه دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفت. در این مقاله به بررسی نگاشت های حافظ عملگرهایی با صعود و نزول متناهی می پردازیم و از کنار هم قرار دادن این نگاشت ها و نگاشت های حافظ عملگرهای فردهلم بالایی و پایینی دسته بندی مطلوبی برای آن ها می یابیم.

تعریف ۱.۱. اگر $T \in L(X)$ ، $a(T)$ و $d(T)$ را به ترتیب صعود و نزول T می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$a(T) = \min\{n \geq 0; N(T^n) = N(T^{n+1})\}$$
$$d(T) = \min\{n \geq 0; R(T^n) = R(T^{n+1})\}$$

2000 Mathematics Subject Classification. Mathematics Subject Classification. 47B49, 47L99, 47A55, 47B37 .

واژگان کلیدی. شبه برودر، نگاشت های جمعی حافظ .

^۱Frobenius

^۲Polya

^۳Schur

^۴Dieudonne

تعریف ۲.۱. عملگر $T \in L(X)$ را شبه فردهلم بالایی (پایینی) نامیم اگر $R(T)$ بسته باشد و $(\dim N(T)(\operatorname{codim} R(T)))$ متناهی باشد. چنین عملگرهایی را با نماد $F_+(X)(F_-(X))$ نمایش می دهیم و عملگرهای فردهلم را به صورت $F(X) := F_+(X) \cap F_-(X)$ تعریف می کنیم.

تعریف ۳.۱. مجموعه عملگرهای دارای صعود نزول متناهی، شبه برودر بالایی و پایینی و شبه برودر را به ترتیب با نماد $A(X), D(X), B_+(X), B_-(X)$ و $B(X)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} A(X) &:= \{T \in L(X); a(T) < \infty\}, \\ D(X) &:= \{T \in L(X); d(T) < \infty\}, \\ B_+(X) &:= F_+(X) \cap A(X), B_-(X) := F_-(X) \cap D(X), \\ B(X) &:= B_+(X) \cap B_-(X). \end{aligned}$$

قضیه ۴.۱. فرض کنیم $\phi : L(H) \rightarrow L(H)$ یک نگاشت پیوسته جمعی پوشا باشد و Λ هر یک از مجموعه های B_+ و B_- را نشان دهد. فرض کنیم که ϕ, Λ را در هر دو جهت حفظ کند در این صورت
الف) نگاشت های دوسویی پیوسته $A, B : H \rightarrow H$ وجود دارد که با هر دو خطی یا هر دو مزدوج خطی هستند به طوری که برای هر عملگر از رتبه متناهی $F \in L(H)$ ،
$$\phi(F) = AFB.$$

یا
ب) نگاشت های پیوسته دوسویی $C, D : H \rightarrow H$ وجود دارد که با هر دو خطی یا مزدوج خطی هستند به طوری که برای هر عملگر از رتبه متناهی $F \in L(H)$ ،
$$\phi(F) = CF^*D.$$

برهان. به قضیه ۸,۲ [۶] مراجعه کنید. $\square$

لم ۵.۱. فرض کنیم $\phi : L(H) \rightarrow L(H)$ یک نگاشت پیوسته جمعی پوشا باشد که B_+ و B_- را در هر دو جهت حفظ می کند در این صورت
الف) اگر $B \in L(H)$ یک عملگر وارون پذیر باشد و برای هر عملگر از رتبه متناهی F ،
$$\phi(F) = FB, \quad \phi(S) = cS, \quad S \in L(H).$$

که $c \in \mathbb{C}$ عدد غیر صفر وجود دارد به طوری که برای هر
ب) اگر $D \in L(H)$ یک عملگر وارون پذیر باشد و برای هر عملگر از رتبه متناهی F ،
$$\phi(F) = F^*D, \quad \phi(S) = cS^*, \quad S \in L(H).$$

که $c \in \mathbb{C}$ عدد غیر صفر وجود دارد به طوری که برای هر

برهان. به لم ۹,۲ [۶] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۶.۱. اگر T یک عملگر کراندار روی H باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند.

الف) T یک عملگر شبه برودر است.

ب) برای هر $S \in L(X)$ یک $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\varepsilon < \varepsilon_0$ ،
 $T + \varepsilon S \in A(H) \cup D(H)$.

□

برهان. به گزاره ۵,۲ [۶] مراجعه کنید.

برهان قضیه اساسی زیر در [۵] آمده است که به بیان آن می پردازیم.

قضیه ۷.۱. اگر $\phi : L(H) \rightarrow L(H)$ یک نگاشت جمعی پیوسته و پوشا باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.

الف) ϕ در هر دو جهت A را حفظ کند.

ب) ϕ در هر دو جهت D را حفظ کند.

پ) ϕ در هر دو جهت B_+ را حفظ کند.

ت) ϕ در هر دو جهت B_- را حفظ کند.

ث) یک عملگر خطی کراندار وارون پذیر یا مزدوج خطی $H \rightarrow H$: A و یک عدد غیرصفر $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که برای هر $S \in L(H)$ ،
 $\phi(S) = cASA^{-1}$.

□

برهان. به قضیه A در [۵] مراجعه شود.

برهان قضیه اساسی زیر در [۶] آمده است که به بیان آن می پردازیم.

قضیه ۸.۱. اگر $\phi : L(H) \rightarrow L(H)$ یک نگاشت جمعی پیوسته و پوشا باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.

الف) ϕ در هر دو جهت $A \cup D$ را حفظ می کند.

ب) ϕ در هر دو جهت B_+ و B_- را حفظ کند.

پ) یک عملگر خطی کراندار وارون پذیر یا مزدوج خطی $H \rightarrow H$: A و یک عدد غیرصفر $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که برای هر $S \in L(H)$ ،
 $\phi(S) = cASA^{-1}$ یا $\phi(S) = cAS^*A^{-1}$.

برهان. از الف به ب) فرض کنیم که T یک عملگر شبه برودر بالایی (پایینی) باشد پس طبق

قضیه ۶.۱ برای هر $S \in L(X)$ یک $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\varepsilon < \varepsilon_0$ ،

$\phi(T + \varepsilon S) \in A(H) \cup D(H)$ ، پس طبق فرض برای هر $\varepsilon < \varepsilon_0$ ،

$\phi(T) \in A(H) \cup D(H)$ در نتیجه طبق قضیه ۶.۱، $\phi(T)$ شبه برودر بالایی (پایینی) است.

از ب به پ) فرض کنیم که ϕ ، B_+ و B_- را در هر دو جهت حفظ کند، پس با استفاده از

قضیه ۴.۱ یکی از دو حالت (الف) یا (ب) اتفاق می افتد. در حالتی که (الف) را داشته

باشیم هر عملگر از رتبه متناهی F به صورت زیر می باشد.

$$\phi(F) = AFB.$$

قرار می دهیم $A\phi(.) = A^{-1}\phi(.)A$. طبق فرض ϕ_1 ، B_+ ، B_- را در هر دو جهت حفظ می کند، از طرفی داریم

$$\phi_1(F) = A^{-1}AFBA = FBA.$$

پس طبق لم ۵.۱ قسمت (الف)، یک عدد مخالف صفر $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که

برای هر $S \in L(H)$ ، $\phi_1(S) = cS$ ، بنابراین $\phi(S) = A^{-1}\phi(S)A$ پس $\phi(S) =$

$A = C$ در حالت (ب) ϕ به صورت $\phi(F) = CF^*D$ می باشد. قرار می دهیم $A = C$ و $\phi_2 = A^{-1}\phi(\cdot)A$ لذا طبق فرض نتیجه می گیریم ϕ_2 در هر دو جهت B_+ و B_- را حفظ می کند. پس داریم $\phi_2(F) = A^{-1}AF^*DA = F^*DA$ لذا طبق لم ۵.۱ قسمت (ب) یک عدد مخالف صفر $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که برای هر $S \in L(H)$ ، $\phi_2(S) = cS^*$ ، بنابراین داریم $\phi_2(S) = A^{-1}\phi(S)A$ پس $\phi_2(S) = cAS^*A^{-1}$ پس $\phi(S) = cAS^*A^{-1}$ نتیجه برای هر $S \in L(H)$ $\phi(S) = cAS^*A^{-1}$ از پ به الف) فرض کنیم $S \in A \cup D$ در این صورت صعود یا نزول متناهی است. بدیهی است که صعود یا نزول S^* نیز متناهی می باشد. چون عملگر A معکوس پذیر است پس $\phi(S) \in A \cup D$ در هر دو حالت دارای صعود یا نزول متناهی است و در نتیجه $\phi(S) \in A \cup D$. در صورتی که $\phi(S) \in A \cup D$ با روندی مشابه می بینیم که $S \in A \cup D$ ، در نتیجه ϕ در هر دو جهت $A \cup D$ را حفظ می کند.

□

مراجع

1. G. Frobenius, *Über die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen*, *sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* (1897) 994-1015.
2. G. Polya, Aufgabe 424, *Arch. Math. U. Phys.* 3(1913) 271.
3. I. Schur, *Einige bemerkungen zur determinanten theorie*, *Sitzungsberichte der preuss. Akad. Wiss. Zu Berlin* 25 (1925) 454-463.
4. J. Dieudonn, *Sur une generalisation du group orthogonal quatre variables*, *Arch. Math.* 1 (1949) 282-287.
5. M. Mbekhta, V. Muller, and M. Oudghiri, *Additive Preservers of the ascent, descent and related subsets*, *Academy of sciences of the czech republic*, no. 16-2012.
6. M. Mbekhta, V. Muller, and M. Oudghiri, *Additive Preservers of semi-browder operator*, 2000 Mathematics Subject Classification. 47B49, 47L99, 47A55, 47B37.

یک الگوریتم غیریکنوا مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی برای مسائل بهینه‌سازی نامقید

زهره کاکائی^{۱*} و کیوان امینی^۲

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی
zroj20@yahoo.com
^۲ گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه رازی کرمانشاه
kamini@razi.ac.ir

چکیده. در این مقاله یک الگوریتم جدید مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) با استفاده از ترکیب روش‌های ناحیه اطمینان اصلاح شده مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی با روش‌های زیرفضا و روش‌های غیریکنوا ارائه می‌شود. ویژگی اصلی این روش آن است که از حل زیر مسئله مجذوری اجتناب می‌کند و بجای آن در هر تکرار یک دستگاه معادلات خطی با ابعاد کوچکتر را حل می‌کند و به محاسبات کمتری نیاز دارد. با فرضیات مناسب، همگرایی سراسری الگوریتم ثابت می‌گردد. پیاده‌سازی روش و نتایج عددی حاصل کارایی این روش را تأیید می‌کند. ایده این مقاله از سه جهت: ۱- استفاده از نسبت غیریکنوا جدید، ۲- مقایسه با الگوریتم‌های مشابه، ۳- استفاده از روش‌های بهنگام متفاوت برای ماتریس B_k ، متفاوت از ایده مقالات می‌باشد.

۱. پیش‌گفتار

مسئله بهینه‌سازی نامقید به شکل

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad (1.1)$$

یکی از مسائل مهم در بهینه‌سازی است. یکی از ایده‌هایی که برای حل مسئله (۱.۱) پیشنهاد شده است روش‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد، که در آن حل مسئله بهینه‌سازی نامقید به یک معادله دیفرانسیل معمولی و یافتن نقطه تعادل آن تبدیل می‌گردد. در سال ۱۹۸۹، برون و بیگز [۱] یک روش ناحیه اطمینان مبتنی بر (ODE) موسوم به IMPBOT برای حل این مسئله ارائه نمودند. این روش که در میان روش‌های مبتنی بر ODE، یکی از کاراترین الگوریتم‌ها می‌باشد در تکرار k ام از حل سیستم معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x_k) - B_k(x(t) - x_k), \quad (2.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. 90C30, 65K05, 49M37.

واژگان کلیدی. بهینه‌سازی نامقید، روش غیریکنوا، روش‌های مبتنی بر ODE، همگرایی سراسری.
* سخنران

استفاده می‌کند. آنها برای حل دستگاه (۲.۱) از روش اویلر ضمنی استفاده کردند و نشان دادند که در هر گام می‌توان بردار $d_k = x_{k+1} - x_k$ را از حل دستگاه خطی

$$(h_k B_k + I)d = -h_k g_k, \quad (3.1)$$

بدست آورد که در آن h_k یک طول گام صحیح است. B_k یک تقریب شبه نیوتنی مناسب برای ماتریس هسی در x_k می‌باشد که از فرمول بهنگام BFGS بهنگام می‌گردد و $g_k = \nabla f(x_k)$. الگوریتم IMPBOT:

ورودی الگوریتم: بردار آغازین $x_0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$, طول گام اولیه h_0 , ماتریس مقارن $B_0 \in R^{n \times n}$ و $k = 0$.

گام ۱: اگر $\|g_k\| \leq \varepsilon$, توقف کن.

گام ۲: اگر ماتریس $h_k B_k + I$ معین مثبت باشد، به گام ۳ برو در غیر اینصورت قرار بده $h_k = \frac{1}{4} h_k$ و گام ۲ را تکرار کن.

گام ۳: d_k را با استفاده از حل دستگاه خطی (۳.۱) محاسبه کن. در صورتی که

$$f(x_k + d_k) \leq f(x_k) + \sigma g_k^T d_k, \quad (0 < \sigma < \frac{1}{4}),$$

گام ۴: با استفاده از یک رابطه مناسب B_{k+1} را بهنگام کن. $k = k + 1$ و به گام ۱ برو. $h_{k+1} = 2h_k$ و به گام ۲ برو، در غیر اینصورت $h_k = \frac{h_k}{4}$ و به گام ۳ برو.

توجه کنید که با تقسیم طرفین دستگاه (۳.۱) بر h_k به دست می‌آید.

$$(\lambda_k I + B_k)d = -g_k, \quad (4.1)$$

که همان دستگاه لونبرگ-مارکوارت می‌باشد. یکی از مشکلات روش IMPBOT آن است که دستگاه خطی (۳.۱) ممکن است چندین بار در یک تکرار، قبل از بدست آوردن یک گام آزمون مورد قبول حل شود، که در صورت بزرگ بودن تعداد متغیرها، حل دستگاه‌های خطی می‌تواند هزینه کلی محاسبات را به طور قابل توجهی افزایش دهد، بنابراین باعث کاهش کارایی الگوریتم می‌گردد.

۲. الگوریتم جدید

روش‌های غیر یکنوا یک ابزار بسیار مهم در کاهش محاسبات و بهبود نرخ همگرایی مسائل بهینه‌سازی می‌باشند که در ترکیب با اکثر الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی نامقید نتایج مناسبی تولید می‌کنند. در این راستا با استفاده از [۴]، یک روش ODE غیریکنوا اصلاح شده ارائه می‌گردد، که ایده اصلی آن ترکیب الگوریتم IMPBOT با روش‌های غیریکنوا می‌باشد. برای شروع تعریف قرار می‌دهیم

$$f_{l(k)} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}),$$

که در آن $0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1) + 1, N\}$, $m(0) = 0$ یک عدد صحیح ثابت می‌باشد. در الگوریتم جدید برای تولید ماتریس B_k از روش شبه‌نیوتن حافظه محدود L-BFGS استفاده می‌گردد، که برای حل مسائل بهینه‌سازی در مقیاس بزرگ مفید می‌باشد و بجای ذخیره‌سازی و محاسبه تقریب‌های هسی $n \times n$ ، فقط تعداد کمی از

بردارهای n -بعدی را ذخیره می‌کند.

الگوریتم MIMPBOT:

ورودی الگوریتم: $(\rho_0 \in (0, 1), \text{بردار آغازین } x_0 \in R^n, \varepsilon > 0, \text{ طول گام اولیه } h_0, k=0 \text{ و } B_0 \in R^{n \times n} \text{ ماتریس متقارن } m(0)=0, N>0, V_0=g_0 \in R^{n \times 1})$
گام ۱: اگر $\|g_k\| \leq \varepsilon$ ، توقف کن. در غیر این صورت برو به گام ۲.
گام ۲: m_k را تعریف کنید به طوری که $m_k = \min\{k, M\}$. فرض کنید که

$$V_k = (g_k, g_{k-1}, \dots, g_{k-m_k}) \in R^{n \times (m_k+1)},$$

اگر ماتریس $h_k V_k^T B_k V_k + I$ معین مثبت باشد، برو به گام ۳. در غیر این صورت، فرض کنید L_k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری که $2^{-L_k} h_k V_k^T B_k V_k + I$ معین مثبت است، قرار دهید $h_k = 2^{-L_k} h_k$.
گام ۳: y_k را از حل دستگاه خطی زیر به دست آور.

$$(h_k V_k^T B_k V_k + I)y = -h_k V_k^T g_k,$$

گام ۴: با محاسبه $p_k = V_k y_k$ و تعریف

$$q_k(y) = f_k + g_k^T V_k y + \frac{1}{2} y^T V_k^T B_k V_k y,$$

$\bar{\rho}_k$ را از رابطه زیر محاسبه کن.

$$\bar{\rho}_k = \frac{f_{l(k)} - f(x_k + p_k)}{q_k(0) - q_k(y_k)},$$

گام ۵: اگر $\bar{\rho}_k < \rho_0$ ، قرار بده $h_k = \frac{1}{2} h_k$ و به گام ۳ برو، در غیر این صورت قرار بده

$$h_{k+1} = \frac{1}{2} h_k, x_{k+1} = x_k + p_k.$$

گام ۶: با استفاده از یک رابطه بهنگام مناسب B_{k+1} را محاسبه کن. قرار بده $k = k + 1, m(k+1) = \min\{m(k) + 1, N\}$ و به گام ۱ برو.

۳. خواص همگرایی

تحت فرضیات زیر می‌توان خواص همگرایی مناسبی برای الگوریتم جدید اثبات کرد.

(A_1) مجموعه تراز $L(x_0) = \{x | f(x) \leq f(x_0)\}$ کراندار است.
(A_2) تابع گرادیان $g(x) = \nabla f(x)$ روی یک مجموعه محدب باز $\beta \subseteq L(x_0)$ پیوسته لیپشیتس باشد.
(A_3) دنباله ماتریسی $\{B_k\}$ به طور یکنواخت کراندار باشد.

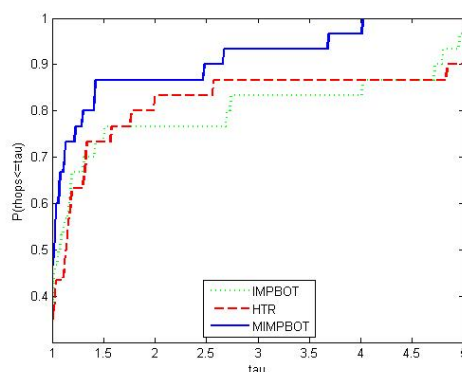
قضیه ۱. فرض کنید $\{x_k\}$ یک دنباله تولید شده توسط الگوریتم MIMPBOT باشد. اگر فرضیات (A_1) - (A_3) برقرار باشند، آنگاه یکی از موارد زیر اتفاق می‌افتد.

$$\exists K_0. \quad g_{K_0} = 0. \quad (1)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (2)$$

۴. نتایج عددی

برای نشان دادن برتری الگوریتم MIMPBOT، عملکرد آن در کنار دو الگوریتم IMPBOT و HTR [۳] مقایسه می‌گردد، همچنین در جهت یک مقایسه بهتر بین الگوریتم‌ها فرآیند دولان و مورِی [۲] را برای معیار $n_k = n_f + 5n_g$ بکار برده‌ایم. نتایج حاصل در (شکل ۱) به وضوح بیانگر این است که الگوریتم جدید نسبت به دو الگوریتم دیگر نتایج بسیار بهتری تولید می‌کند. الگوریتم جدید ۴۷٪ مسائل را در کمترین زمان با موفقیت حل می‌کند جاییکه دو الگوریتم HTR و IMPBOT به ترتیب در ۳۴٪ و ۳۷٪ مسائل پیروز بوده‌اند.



شکل ۱: نمودار اجرایی الگوریتم‌ها با مقیاس $n_f + 5n_g$

۵. نتایج

در این مقاله یک الگوریتم اصلاح شده جدید مبتنی بر ODE برای حل مسئله بهینه‌سازی نامقید ارائه شد که با استفاده از تکنیک‌های غیریکنوا شبیه روش‌های ناحیه اطمینان، سعی در بهبود نتایج و کاهش محاسبات دارد. نتایج عددی نشان می‌دهند که الگوریتم جدید یک الگوریتم مؤثر و کارا برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید می‌باشد.

مراجع

1. Brown, A. A., Biggs, M. c.: some effective methods for unconstrained optimization based on the solution of system of ordinary differentiable equations. J. Optim. Theory Appl., **62**, 211–224 (1989).
2. Dolan, E. D., More, J. J.: Benchmarking optimization software with performance profiles. Math. Program., Ser. A, **91**, 201–213 (2002).
3. Ou, Y. G.: A hybrid trust region algorithm for unconstrained Optimization. Appl. Numer. Math., **61**, 900 – 909 (2011).
4. Ou, Y. G., Ma, W.: A modified ODE-based algorithm for unconstrained Optimization problems. Numer. Algor., **65**, 233 – 250 (2014).

نمایه

- رفیع پور، ابوالفضل، ۱۸
پورمیر، اکرم، ۴۳
پورمیر، اکرم، ۴۷
سرگلزایی، پرویز، ۶
سرگلزایی، پرویز، ۲۷
آقاسی زاده، تکتیم، ۵۵
کاکائی، زهره، ۵۹
پورصدیق، سمیه، ۳۹
یونسی، سمیه، ۱۴
احمدی، سید مرتضی، ۴۳
احمدی، سید مرتضی، ۴۷
ناصری، صابر، ۲۲
نظری، علی محمد، ۱۴
امینی، کیوان، ۵۹
کریمی نیا، مانیا، ۵۱
شکوه حاج عباسعلی خان، مجتبی، ۲۷
شکوه حاج عباسعلی خان، مجتبی، ۶
حاجی پور، مجتبی، ۱۰
کیان، محسن، ۱۰
مسیبی درچه، محمد، ۳۵
گلوئی، محمدرضا، ۴۳
گلوئی، محمدرضا، ۴۷
امین طوسی، محمود، ۳۹
شمس سولاری، مریم، ۲
آقاپور، مهسا، ۵۱
رنجبری، مهین، ۳۱
حسینی، الهام، ۵۵
زمانی، یوسف، ۳۱