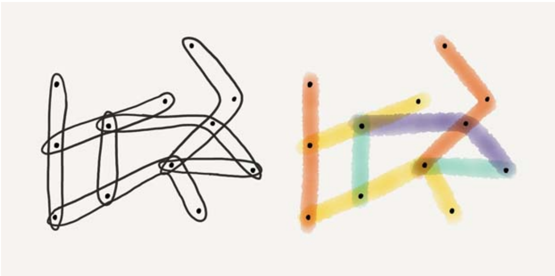
ریاضی‌دانان حدس اردوش را حل می‌کنند *

کلسی هوستون ـ ادواردز

مترجمان: حمیدرضا گل‌محمدی و سعید علیخانی **

چکیده:

پنجاه سال پیش، پال اردوش و دو ریاضی‌دان دیگر با مسئله‌ای در نظریهٔ گراف مواجه شدند که فکر می‌کردند به‌زودی حل خواهد شود. ولی در آخر، تیمی از ریاضی‌دانان آن‌را حل کردند.



شکل ۱: یک اَبَرگراف و یک رنگ‌آمیزی یالی آن

بالاخره، ریاضی‌دانان ثابت کردند که برای رنگ‌آمیزی یال‌های یک ابرگراف خطی، به تعداد رنگ‌هایی بیش از تعداد رئوس گراف اصلا نیاز ندارید. در پاییز سال ۱۹۷۲، زمانی که ونس فابر[۱] به تازگی استاد دانشگاه کلرادو شده بود، دو ریاضی‌دان سرشناس، پال اردوش[۲] و لازلو لوواش[۳] به ملاقات او رفتند. فابر تصمیم گرفت به این مناسبت یک دورهمی برگزار کند. به خصوص که اردوش به عنوان محققی خاص و پر تلاش شهرت بین‌المللی داشت و همکاران فابر مشتاق دیدار او بودند. مانند بسیاری از این مهمانی‌های دورهمی، اردوش در گوشه‌ای می‌نشست و طرفدارانش او را احاطه می‌کردند. اردوش این توانایی را داشت که بحث‌های همزمان را اغلب به چندین زبان دربارهٔ موضوعات مختلف انجام دهد. اردوش، فابر و لوواش بحث‌های خود را بر روی ابرگراف‌ها که ایده‌ای جدید و نویدبخش در نظریهٔ گراف در آن زمان بود، متمرکز کردند. پس از چندبار مباحثه، آن‌ها به یک سؤال واحد رسیدند که بعدها به‌عنوان «حدس اردوش ـ فابر ـ لوواش» شناخته شد. این حدس مربوط به حداقل تعداد رنگ‌های مختلف مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یال‌های ابرگراف‌ها با محدودیت‌های خاص است. فابر، که اکنون ریاضی‌دان مرکز علوم محاسبات انستیتوی تجزیه و تحلیل دفاعی است می‌گوید: «این ساده‌ترین چیز ممکنی بود که ما توانستیم به آن برسیم. ما در طول مهمانی کمی روی آن فکر کردیم و گفتیم فردا این کار را تمام خواهیم کرد. اما این امر هرگز اتفاق نیفتاد. مسئله بسیار دشوارتر از حد انتظار بود.»

اردوش مرتباً آن‌را به‌عنوان یکی از سه حدس مورد علاقهٔ خود تبلیغ می‌کرد و برای راه‌حل آن جایزه‌ای پیشنهاد می‌کرد که هنگامی‌که ریاضی‌دانان به دشواری مسئله پی‌بردند جایزه به ۵۰۰ دلار افزایش یافت. این مسئله در محافل نظریهٔ گراف

[1] Vance Faber
[2] Paul Erdős
[3] László Lovász

به خوبی شناخته شده بود و تلاش‌های زیادی را برای حل، به‌خود جلب کرد که هیچ‌یک موفقیت‌آمیز نبودند.

اما اکنون نزدیک به ۵۰ سال بعد از آن ماجرا، یک تیم متشکل از پنج ریاضی‌دان سرانجام ثابت کردند که ایدهٔ مهمانی دورهمی چای درست است. در نسخه‌ای از مقاله آن‌ها که در ماه ژانویه منتشر شد، یک کران برای تعداد رنگ‌هایی که می‌تواند برای رنگ‌آمیزی یال‌های ابرگراف‌های خاص مورد نیاز باشد، ارائه می‌شود، به‌طوری‌که یال‌های روی‌هم‌افتاده (یال‌های هم‌پوشان یا متقاطع) همرنگ نباشند. این روش شامل کنارگذاشتن بعضی از یال‌های گراف و رنگ‌آمیزی تصادفی برخی دیگر است؛ ترکیبی از ایده‌هایی که محققین در سال‌های اخیر برای حل تعدادی از مسائل باز دیرینه استفاده کرده‌اند. این راه‌حل برای اردوش، فابر و لوواش زمانی که آنها مسئله را طراحی کردند، معلوم نبود. اما اکنون، دو ریاضی‌دان باقی‌مانده از آن گروه سه‌نفرهٔ، می‌توانند از نوآوری‌های ریاضی که ناشی از حس کنجکاوی آنها بود، لذت ببرند.

فقط به اندازهٔ کافی رنگ

هنگامی که اردوش، فابر و لوواش چای می‌نوشیدند و بحث ریاضی می‌کردند، ساختار گراف‌مانندی در ذهن خود داشتند. گراف‌های معمولی از نقطه‌هایی ساخته شده‌اند که «رأس» نامیده می‌شوند و این رئوس توسط خطوطی با نام «یال» به‌هم وصل می‌شوند. هر یال دقیقاً دو رأس را به‌هم وصل می‌کند، اما ابرگراف‌های در نظرگرفته‌شده توسط اردوش، فابر و لوواش کمتر محدودکننده بوده و هر تعداد از رئوس را می‌توانند دربر داشته باشند. این تصورِ گسترده‌تر از یک یال، ابرگراف‌هایی را ایجاد می‌کند که همه‌کاره‌تر از هاپ و اِسپُک[1] هستند[2]. گراف‌های متعارف فقط می‌توانند روابط بین یک جفت شیء را بیان کنند، مانند دو دوست در یک شبکهٔ اجتماعی، که هر شخص با یک رأس نشان داده می‌شود، اما برای بیان رابطهٔ بین بیش از دو نفر مانند عضویت مشترک در یک گروه، هر یال باید بیش از دو نفر را دربر بگیرد، که ابرگراف‌ها این اجازه را می‌دهند. با این حال، این همه‌کاره بودن بهای بالایی دارد زیرا اثبات ویژگی‌های عام برای ابرگراف‌ها نسبت به گراف‌های معمولی، دشوارتر است. گیل کالای[3]، یک متخصص نظریهٔ گراف می‌گوید: «هنگامی‌که شما به سمت ابرگراف‌ها بروید، بسیاری از کارهای شگفت‌انگیز در نظریهٔ گراف از بین می‌روند و یا بسیار دشوارتر می‌شوند». به عنوان مثال، مسائل رنگ‌آمیزی یالی در ابرگراف‌ها سخت‌تر می‌شوند. در این سناریوها، هدف رنگ‌آمیزی تمام یال‌های یک گراف یا ابرگراف است، به‌طوری‌که هیچ دو یالی که در یک رأس به هم می‌رسند رنگ یکسان نداشته باشند. حداقل تعداد رنگ مورد نیاز برای انجام این کار به عنوان شاخص رنگی گراف شناخته می‌شود. این حدس اردوش ـ فابرـ لوواش یک سؤال رنگ‌آمیزی در مورد نوع خاصی از ابرگراف است که در آن یال‌ها، کمترین هم‌پوشانی را دارند. در این ساختارها، که به عنوان ابرگراف خطی شناخته می‌شوند، هیچ دو یالی در بیش از یک رأس اجازهٔ هم‌پوشانی ندارند. حدس پیش‌بینی می‌کند که شاخص رنگی یک ابرگراف خطی نمی‌تواند بیش از تعداد رئوس آن باشد. به عبارت دیگر، اگر یک ابرگراف خطی دارای ۹ رأس باشد، یال‌های آن بدون توجه به نحوهٔ ترسیم آنها می‌توانند با استفاده از حداکثر نُه رنگ، رنگ‌آمیزی شوند. کلی بودن حدس

[1] hub-and-spoke

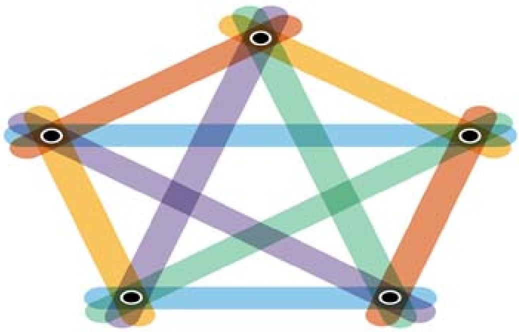
[2] هاپ و اسپک، یک مدل شبکه‌ای برای مدیریت کارآمد ارتباطات مشترک یا الزامات امنیتی است.

[3] Gil Kalai

اردوش– فابر– لوواش، اثبات آن را به چالش می‌کشد. همان‌طورکه به سمت ابرگراف‌های با رئوس بیشتر و بیشتر حرکت می‌کنید، روش‌های مرتب کردن طوقه‌های آنها نیز افزایش می‌یابد. با وجود تمام این احتمالات، به نظر می‌رسد که ممکن است برخی از پیکربندی‌های یال‌ها وجود داشته باشد که نیاز به رنگ‌های بیشتری نسبت به رأس‌هایی که دارد، داشته باشد. «انواع گوناگونی از ابرگراف‌ها وجود دارند که ویژگی‌های کاملاً متفاوتی دارند.» این گفته‌ای از آبیشك موتوکو[1] است، یکی از نویسندگان این اثبات که با همکاری دونگ یانگ کانگ،[2] تام کلی،[3] دانیلا کوهن[4] و دریکاستوس،[5] که همگی از دانشگاه بیرمنگام هستند، آن‌را به سرانجام رسانده است. او می‌گوید: «تعجب‌آور است که این جمله درست است». اثبات این پیش‌بینی شگفت‌انگیز به معنای رویارویی با چندین نوع ابرگراف است که به‌ویژه رنگ‌آمیزی آن‌ها چالش‌برانگیز است. به‌علاوه مؤید این مطلب هم هست که هیچ نمونهٔ دیگر از ابرگراف‌ها وجود ندارد که رنگ‌آمیزی آن سخت‌تر باشد.

سه ابرگراف اکسترمال

اگر شما درحال طراحی روی یک صفحه هستید و یک ابرگراف خطی رسم می‌کنید، شاخص رنگی آن احتمالاً بسیار کمتر از تعداد رئوس آن خواهد بود. اما سه نوع ابرگراف اکسترمال وجود دارند که محدودیت را کنار می‌زنند. در اولی، هر یال فقط دو رأس را به‌هم متصل می‌کند. این ابرگراف معمولاً یک «گراف کامل» نامیده می‌شود، زیرا هر جفت از رئوس با یک یال متصل می‌شوند. گراف‌های کامل با تعداد رئوس فرد، ماکسیمم مقدار شاخص رنگی مجاز را توسط حدس اردوش ـ فابرـ لوواش دارند.

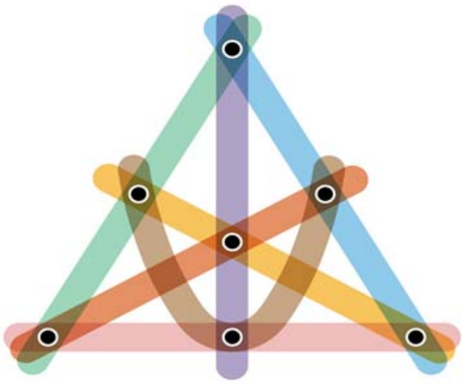


شکل ۲: اولین ابرگراف اکسترمال (گراف کامل)

دومین مثال اکسترمال، به تعبیری، عکس یک گراف کامل است. در جایی‌که یال‌ها در یک گراف کامل فقط تعداد

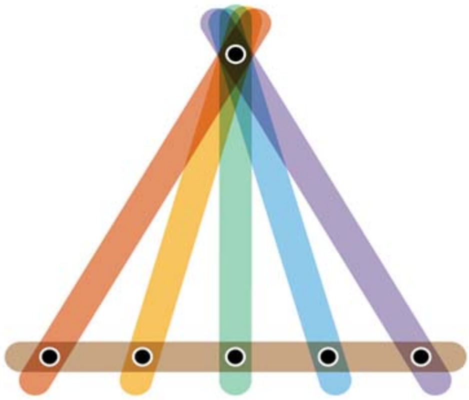
[1] Abhishek Methuku
[2] Dong-yeap Kang
[3] Tom Kelly
[4] Daniela Kühn
[5] Deryk Osthus

کمی از رئوس را به‌هم متصل می‌کنند (دو رأس)، تمام یال‌های این نوع گراف تعداد زیادی رأس را به‌هم متصل می‌کنند. همان‌گونه که تعداد کل رئوس زیاد می‌شود، تعداد دربرگیرنده‌های هر یال نیز افزایش می‌یابد. این گراف، صفحه تصویری متناهی نامیده می‌شود و مانند گراف کامل دارای ماکسیمم مقدار شاخص رنگی است.



شکل۳: دومین ابرگراف اکسترمال

گراف اکسترمال سوم در وسط طیف قرار می‌گیرد: با یال‌های کوچک که فقط دو رأس را به‌هم وصل می‌کنند و یال‌های بزرگ که بسیاری از رئوس را به‌هم وصل می‌نمایند. در این نوع گراف شما اغلب یک رأس خاص دارید که به هریک از دیگر یال‌های تنها متصل می‌شود، سپس یک یال تکی بزرگ وجود دارد که بقیه را دربر می‌گیرد.



شکل۴: سومین ابرگراف اکسترمال

اگر یکی از سه ابرگراف اکسترمال را کمی اصلاح کنید، گراف نتیجه نیز معمولاً دارای ماکسیمم مقدار شاخص رنگی خواهد بود. بنابراین هریک از این سه مثال، خانواده گسترده‌تری از ابرگراف‌های چالش‌برانگیز را نمایندگی می‌کند، که سال‌ها تلاش ریاضی‌دانان را برای اثبات حدس اردوش ـ فابر ـ لوواش دچار وقفه کرده است. هنگامی‌که یک ریاضی‌دان برای نخستین‌بار با این حدس برخورد می‌کند، ممکن است با تولید یک الگوریتم ساده یا یک روش آسان که رنگی را

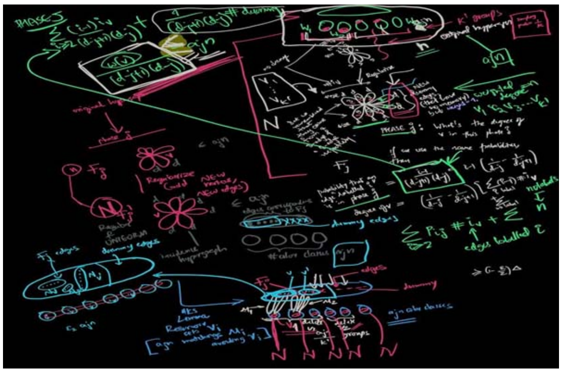
برای اختصاص دادن به هر یال مشخص می‌کند، سعی کند آن را ثابت نماید. چنین الگوریتمی باید برای همهٔ ابرگراف‌ها کار کند و فقط به اندازهٔ تعداد رأس‌هایی که وجود دارد از رنگ‌های متعدد استفاده کند. اما سه خانواده از ابرگراف‌های اکسترمال، شکل‌های بسیار متفاوتی دارند. بنابراین هر روشی برای اثبات امکان رنگ‌آمیزی یکی از خانواده‌ها، معمولاً برای ابرگراف‌های دو خانوادهٔ دیگر ناموفق است. کانگ می‌گوید: «داشتن یک قضیهٔ مشترک برای ادغام کردن همهٔ حالت‌های اکسترمال بسیار مشکل است». در حالی‌که اردوش، فابر و لوواش دربارهٔ این سه ابرگراف اکسترمال اطلاع داشتند، آن‌ها نمی‌دانستند که موارد دیگری نیز وجود دارد که دارای مقدار ماکسیمم شاخص رنگی می‌باشند. اثبات جدید، گام بعدی را برمی‌دارد. این اثبات نشان می‌دهد ابرگرافی که به طور قابل ملاحظه‌ای با این سه مثال متفاوت باشد، به رنگ‌آمیزی کمتر از تعداد رئوس آن نیاز دارد. به عبارت دیگر، این امر ثابت می‌کند که ابرگراف‌هایی که به این سه شبیه هستند به‌همان اندازه سخت به‌نظر می‌رسند. استوس می‌گوید: «اگر این سه خانواده را کنار بگذارید، به‌نوعی نشان می‌دهیم که نمونه‌های بد دیگری وجود ندارد. اگر به هیچ‌یک از این‌ها خیلی نزدیک نباشید، می‌توانید از رنگ‌های بسیار کمتری استفاده کنید».

مرتب‌سازی یال‌ها

اثبات جدید براساس پیشرفت‌های جف کان[1] از دانشگاه راتگرز بنا می‌شود، او کسی است که نسخهٔ تقریبی حدس اردوش ـ فابر ـ لوواش را در سال ۱۹۹۲ میلادی به‌اثبات رساند. اواخر نوامبر، کوهن و استوس که هر دو ریاضی‌دان بزرگی هستند با تیمی شامل سه محقق پسادکتری برای بهبود نتیجه کان شروع به‌کار کردند، با این فرض که شاید حتی نتوانند حدس را به‌صورت کامل حل کنند. اما ایده‌های آن‌ها از آنچه انتظار داشتند، قدرتمندتر بود. وقتی شروع به‌کار کردند، متوجه شدند که شاید بتوانند حدس را دقیقاً ثابت کنند. استوس می‌گوید: «همه چیز نوعی سِحر و جادو بود. بسیار خوش‌شانسی بود به‌گونه‌ای که تیم ما دقیقاً با آن تناسب داشت.» آن‌ها با مرتب‌سازی (جداسازی) یال‌های یک ابرگراف به چندین دستهٔ مختلف براساس اندازهٔ یال که در آن تعداد رئوس و یال‌ها با هم مرتبط می‌شوند، شروع کردند. آنها بعد از مرتب‌سازی (جداسازی) شروع به سخت‌ترین کار یعنی رنگ‌آمیزی اولین یال‌ها کردند، یال‌هایی با بیشترین تعداد رئوس. راهکار آن‌ها برای رنگ‌آمیزی یال‌های بزرگ به یک ساده‌سازی متکی بود. آن‌ها این یال‌ها را به‌عنوان رئوس یک گراف معمولی، جایی‌که هر یال فقط دو رأس را به هم متصل می‌کند، پیکربندی مجدد کردند. آن‌ها یال‌ها را با استفاده از نتایج ثابت شده از نظریهٔ گراف متعارف رنگ‌آمیزی کردند و سپس آن رنگ‌آمیزی را که به ابرگراف اصلی بازمی‌گردد، انتقال دادند. کان می‌گوید: «آن‌ها در حال جذب انواع و اقسام چیزهایی هستند که آن‌ها و افراد دیگر طی دهه‌ها در حال توسعهٔ آن بوده‌اند». پس از رنگ‌آمیزی بزرگترین یال‌ها، آن‌ها روش خود را به‌صورت نزولی به‌کار بردند و کوچکترین یال‌های یک گراف برای رنگ‌آمیزی را در انتهای کار حفظ نمودند. ازآنجایی‌که یال‌های کوچک، رئوس کمتری را لمس می‌کنند، رنگ‌آمیزی آن‌ها آسان‌تر است. اما حفظ‌نمودن آن‌ها برای رنگ‌آمیزی در انتهای کار نیز رنگ‌آمیزی را از یک جهت سخت‌تر می‌کند. وقتی آن‌ها به رنگ‌آمیزی یال‌های کوچک رسیدند، بسیاری از رنگ‌های موجود قبلاً در یال‌های مجاور دیگر استفاده شده بود.

[1] Jeff Kahn

برای حل این مشکل، نویسندگان از روش جدیدی در ترکیبیات به نام جذب استفاده کردند که آن‌ها و دیگران اخیراً برای حل طیف وسیعی از سؤالات استفاده کرده‌اند. کالای می‌گوید: «دانیلا و دریکا با در نظرگرفتن سؤالات مشهور دیگر، نتایج زیادی کسب کرده‌اند. اکنون گروه آن‌ها با استفاده از این روش سعی در اثبات حدس اردوش ـ فابرـ لوواش دارند».



شکل ۴: محققان، بسیاری از روش‌ها را برای ایجاد یک الگوریتم که انواع مختلف ابرگراف‌های خطی را پوشش می‌دهد، ترکیب کردند. در شکل بالا، یادداشت‌هایی که در طول فرایند نوشتند، مشاهده می‌شوند.

رنگ‌های جاذب

محققان از جذب به‌عنوان راهی برای افزودن تدریجی یال‌ها به یک رنگ‌آمیزی استفاده می‌کنند، مادامی‌که در طول مسیر اطمینان حاصل می‌کنند که رنگ‌آمیزی همواره خواص درست را حفظ می‌کند. این، به‌ویژه برای رنگ‌آمیزی مکان‌هایی که بسیاری از یال‌های کوچک در یک رأس واحد، هم‌رأس می‌شوند، مانند رأس خاصی که در سومین ابرگراف اکسترمال به بقیه متصل است، مفید است. گروه‌هایی از این دست، تقریباً از همهٔ رنگ‌های موجود استفاده می‌کنند و باید با دقت رنگ‌آمیزی شوند. برای این کار، نویسندگان مخزنی از یال‌های کوچک ایجاد کردند که از این گروه‌های مشکل‌ساز استخراج شده‌اند. سپس آن‌ها روش رنگ‌آمیزی تصادفی را در بسیاری از یال‌های کوچک باقی مانده، مانند به‌کاربردن یک روش و قالب برای تصمیم‌گیری در مورد رنگ یال داده شده، اعمال کردند. با ادامهٔ رنگ‌آمیزی، نویسندگان به‌طور راهبردی، رنگ‌های غیرقابل‌استفاده را انتخاب کرده و آن‌ها را با روشی دقیق در یال‌های ذخیره شده، اعمال کرده و آنها را در رنگ‌ها «جذب» کردند. جذب باعث بهبود کارایی روش رنگ‌آمیزی تصادفی می‌شود. رنگ‌آمیزی یال‌ها به‌طور تصادفی پایهٔ خوبی برای یک روش کلی است، اما این نیز بی‌فایده است، چرا که اگر در همهٔ یال‌ها به‌کار برده شود، بعید است که پیکربندی بهینهٔ رنگ‌ها را ایجاد کند. اما اثبات اخیر، انعطاف‌پذیری رنگ‌آمیزی تصادفی را با تکمیل‌کردن آن با جذب، که یک روش دقیق‌تر است، تعدیل می‌کند. در پایان، با رنگ‌آمیزی بزرگ‌ترین یال‌های گراف با یک راه‌کار و سپس یال‌های کوچک‌تر با استفاده از روش‌های جذبی و دیگر روش‌ها، نویسندگان توانستند ثابت کنند که تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یال‌های هر ابرگراف خطی هرگز بیشتر از تعداد رئوس نیست. این ثابت می‌کند که حدس اردوش ـ فابر ـ لوواش درست است. بنابر اصول احتمالاتی، اثبات آن‌ها فقط برای ابرگراف‌های به اندازهٔ کافی بزرگ کار می‌کند، آن‌هایی که بیش از تعداد مشخصی

رأس دارند. این روش در ترکیبیات رایج است و ریاضی‌دانان آن‌را اثبات تقریباً کاملی می‌دانند، زیرا فقط تعداد محدودی از ابرگراف‌ها را از قلم می‌اندازد. لوواش می‌گوید: «هنوز این فرض در مقاله وجود دارد که تعداد گره‌ها باید بسیار زیاد باشد، اما احتمالاً این فقط یک فرض اضافی هست. اساساً، حدس اکنون اثبات شده است». کان می‌گوید: «حدس اردوش ـ فابر ـ لوواش به عنوان سؤالی آغاز شد که به نظر می‌رسید در طول یک مهمانی خصوصی می‌توان آن‌را پرسید و پاسخ داد. در سال‌های بعد، ریاضی‌دانان دریافتند که این حدس به‌آن سادگی که به نظر می‌رسید نبود، شاید همان چیزی باشد که به‌هرحال سه ریاضی‌دان می‌خواستند. یکی از معدود مواردی که بهتر از حل یک مسئله ریاضی در کنار نوشیدن چای است، ارائه‌دادن ایده‌ای است که در نهایت الهام‌بخش دهه‌ها نوآوری ریاضی در راه رسیدن به راه‌حل نهایی آن باشد. تلاش‌ها برای اثبات حدس منجر به کشف روش‌هایی شد که کاربرد کلی‌تری دارند. این نوعی روش است که اردوش در ریاضیات بدست آورد».

*Kelsey Houston-Edwards, Mathematicians Settle Erdős Coloring Conjecture, *Quanta Magazine*, April 5, 2021, available at https://www.quantamagazine.org/mathematicians-settle-erdos-coloring-conject

** دانشگاه ایوانکی، دانشگاه یزد