

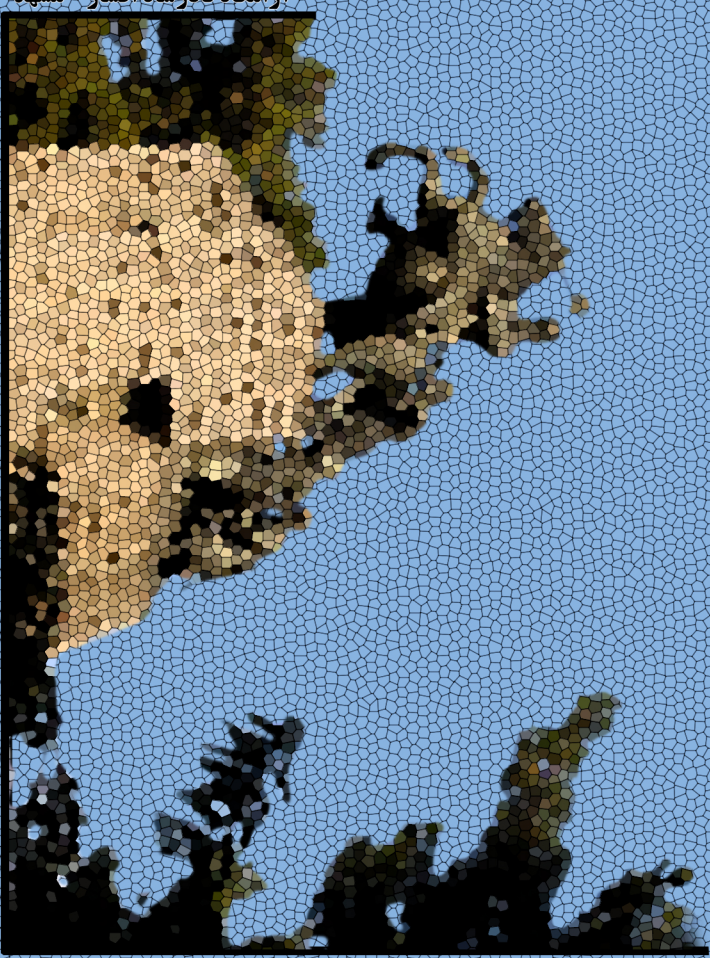
چکیده مبسوط مقالات هفتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن

۷ و ۸ اسفند ۱۳۹۲

$$\left[\begin{array}{l} f(C^*AC) \leq C^*f(A)C \quad N(A)^\perp = \mathcal{R}(A^t) \\ |(x,y)| \leq \|x\| \|y\| \quad s(A+B) \prec_w s(A) + s(B) \end{array} \right]$$

Extended Abstracts
The 7 Seminar on
Linear Algebra and its Applications
26-27 February 2014

آرامگاه نادرشاه افشار - مشهد



Ferdowsi University of Mashhad
P. O. Box 1159, Mashhad 91775, Iran
<http://www.um.ac.ir/~math/slaa7.htm>



چکیده مبسوط مقالات
هفتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
دانشگاه فردوسی مشهد

۷ و ۸ اسفند ۱۳۹۲

نام کتاب: خلاصه مقالات هفتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن

تدوین‌کننده: دکتر محمد صال مصلحیان

صفحه‌آرا: صدیقه صادقی

ناشر: کمیته برگزاری سمینار

سال انتشار: زمستان ۱۳۹۲

محل انتشار: مشهد

امور فنی و چاپ: دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مندرجات

پیام خیرمقدم.....	۱
حمایت کنندگان سمینار.....	۲
سخنرانان عمومی.....	۲
کمیته علمی-اجرایی سمینار.....	۳
اسامی شرکت کنندگان.....	۴
نمایه نویسندگان.....	۱۰
سخنرانی ها.....	۱۱
پوسترها.....	۴۴

پیام خیرمقدم

با کمال مسرت مقدم اعضای محترم هیات علمی و دانشجویان عزیز دوره‌های تحصیلات تکمیلی را گرامی می‌داریم. دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد افتخار دارد میزبان هفتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن باشد. امید است که حاصل مساعی و تلاش برگزارکنندگان بتواند رضایت خاطر میهمانان گرامی را فراهم نماید و موجب گردد تا آنان از منظر لطف و عنایت، کاستی‌ها و کمبودها را به دیده‌ی اغماض بنگرند.

از بین مقالات رسیده به دبیرخانه سمینار، سعی ما بر این بود تا به تعداد بیشتری از علاقه‌مندان فرصت ارایه کارهایشان داده‌شود، بنابراین حدود ۹۰ مقاله برای ارائه به صورت شفاهی و ۳۵ مقاله به صورت پوستر در سمینار پذیرفته شدند.

برگزاری این سمینار مدیون هم‌فکری، همیاری و همکاری افراد بسیاری به ویژه تلاش‌های بی‌شائبه جناب آقای دکتر محمد صالح مصلحیان (دبیر سمینار)، سرکار خانم دکتر شیرین حجازیان (مسئول دبیرخانه) و جناب آقای دکتر احمد عرفانیان است. هم چنین در این جا لازم است تا مراتب قدردانی و امتنان خود را از هیات رئیسه محترم دانشگاه فردوسی مشهد، انجمن ریاضی ایران، مدیریت و کارکنان هتل بزرگ طرقله و سایر حمایت‌کنندگانی که نام آنها در این کتابچه ذکر گردیده است، ابراز نماییم. در خاتمه برای شما میهمانان ارجمند آرزوی اقامتی خوش در مشهد داریم و امیدواریم که برنامه‌های علمی سمینار مورد توجه قرار گیرد.

کمیته برگزاری سمینار

حمایت کنندگان سمینار



- معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه فردوسی مشهد



- دانشگاه بجنورد



- انجمن ریاضی ایران



- قطب علمی آنالیز روی ساختارهای جبری



- قطب علمی مدل سازی و محاسبات بر روی سیستم های خطی و غیرخطی



- قطب علمی داده های ترتیبی و فضایی

سخنرانان عمومی

پروفسور مهدی رجبعلی پور (فرهنگستان علوم ایران)

Prof. Sorina Barza (Sweden)

Prof. Takeaki Yamazaki (Japan)

کمیته علمی-اجرایی سمینار

دکتر فائزه توتونیان (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر شیرین حجازیان (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر کاظم خشیارمنش (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر محمد صال مصلحیان (دبیر سمینار)

دکتر احمد عرفانیان (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر معصومه فشنندی (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر رضا قنبری (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر رجبعلی کامیابی گل (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر مرتضی گچ پزان (دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر علی محمد نظری (دبیر سمینار قبلی و نماینده انجمن ریاضی ایران)

دکتر عباس سالمی (نماینده انجمن ریاضی ایران)

کادر اجرایی

صدیقه صادقی	حسن رئیس المحدثین	مجتبی باخرد
فاطمه عبدالله زاده گنابادی	ذبیح صادقی فر	علی زمانی
فرزانه فالیزکاران یزدی	محمد قنبری	مصطفی ستاری
زهره نجفی	حمیدرضا مومنی	مهدی کاظمی

اسامی شرکت کنندگان

نام	نام خانوادگی	دانشگاه	مرتبۀ
محمد	آرشی	دانشگاه صنعتی شاهرود	ه. ع. دانشیار
تکتم	آقاسی زاده	دانشگاه خیام	ه. ع. استادیار
حمیدرضا	ابراهیمی ویشکی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
فاطمه	ابطحی	دانشگاه اصفهان	ه. ع. استادیار
جعفر	احمدی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
سلمان	احمدی اصل	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	د. دکتری
یوسف	استارمی	دانشگاه پیام نور زنجان	ه. ع. استادیار
الهام	استوار	دانشگاه آزاد اسلامی کرمان	ک. ارشد
محمد باقر	اسدی	دانشگاه تهران	ه. ع. استادیار
فاطمه	اسماعیل زاده	دانشگاه آزاد اسلامی بجنورد	ه. ع. استادیار
جواد	اسماعیلی	دانشگاه شاهرود	د. دکتری
طاهره	افتخاری	دانشگاه سیستان و بلوچستان	ک. ارشد
بدرالسادات	افضلی بروجنی	دانشگاه آزاد اسلامی شهرکرد	د. ارشد
محمد	الباجی	دانشگاه شهید چمران اهواز	د. ارشد
مریم	امیاری	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	ه. ع. دانشیار
محمد	امینی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
فاطمه	امینی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
احسان	انجیدنی	دانشگاه نیشابور	ه. ع. استادیار
رضا	انشایی	دانشگاه اشرفی اصفهانی	ه. ع. استاد
حسین	اورعی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. مربی
مهدی	ایزدی فرهادی	دانشگاه تهران	د. ارشد
اسما	ایلخانی زاده منش	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	ه. ع. استادیار
مهدی	ایمانی نژاد	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	د. دکتری
مجتبی	باخرد	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
سورینا	بارزا	دانشگاه کارلستد	ه. ع. استاد
الهام	بزمی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
بهروز	بصیرت	دانشگاه آزاد اسلامی بیرجند	ه. ع. استادیار
پروین	بقائی شهرکی	دانشگاه حکیم سبزواری	ک. ارشد
سعید	بهبودی سوها	دانشگاه زنجان	ک. ارشد
رضا	بهزادی	دانشگاه دانشگاه شیراز	د. دکتری

افشین	بهمرام	دانشگاه تهران	دکتری
علی	پارسیان	دانشگاه تفرش	ه. ع. استادیار
اکرم	پورمیر	دانشگاه سیستان و بلوچستان	د. ارشد
سعیده	پیریاوفا	دانشگاه صنعتی امیرکبیر	د. دکتری
آزیتا	تاج الدینی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
حمید	ترابی اردکانی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
علی	تقوی	دانشگاه مازندران	ه. ع. دانشیار
حسین	تقی زاده کاخکی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. دانشیار
فائزه	توتونیان	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
عباس	جعفرزاده	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
حسنا	جعفرمنش	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
لیلا	جعفری	دانشگاه زنجان	ک. ارشد
زهره	جمال کاشانی	دانشگاه کاشان	ک. ارشد
مهناز	چکشی	دانشگاه صفاهاان	دکتری
کاظم	چیتی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
نرگس	حاج ابوطالبی	دانشگاه آزاد اسلامی شاهرود	د. دکتری
مجتبی	حاجی پور	دانشگاه بجنورد	ه. ع. استادیار
مریم	حاجی صادقی	دانشگاه صنعتی مالک اشتر	د. دکتری
شیرین	حجازیان	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
فیروزه	حسنوند	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	د. دکتری
مهدی	حسینی	دانشگاه زنجان	ه. ع. استادیار
روجا	حسین زاده	دانشگاه مازندران	دکتری
الهام	حسینی	دانشگاه خیام	ک. ارشد
امین	حسینی	مرکز آموزش عالی کاشمر	ه. ع. استادیار
سیده مریم	حسینی	دانشگاه بیرجند	د. ارشد
غلامعلی	حیدری	دانشگاه شهید باهنر کرمان	د. دکتری
زهره	حیدری دارنی	دانشگاه اراک	ک. ارشد
فاطمه	خالویی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
مهناز	خانه گیر	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	ه. ع. استادیار
محمد	خرسند زاک	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
سید مصطفی	خرمی زاده	دانشگاه صنعتی شیراز	ه. ع. استادیار
مریم	خسروی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
کاظم	خشیارمنش	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد

مریم	خورشیدی	مرکز آموزش عالی فیروز آباد	د. دکتری
رضا	دادبخش	دانشگاه شیراز	د. ارشد
علی	دادخواه	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
زهره	دادی	دانشگاه بجنورد	ه. ع. استادیار
فرزاد	دادی پور	تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته	ه. ع. استادیار
علی	دانایی	دانشگاه شیخ بهایی	ه. ع. استاد
مریم	درخشان خانقاه	دانشگاه محقق اردبیلی	د. ارشد
احمد	دلفان	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
محمد علی	دهقان	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	ه. ع. استاد
مهدی	دهقانی	دانشگاه یزد	د. دکتری
ریحانه	رئیزی طوسی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
پاندورا	رجاء	دانشگاه شهیدبهشتی	ه. ع. استادیار
مهدی	رجبعلی پور	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استاد
زهره	رحمتی نصرآباد	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
محمد	رحیمی	دانشگاه پیام نور تهران	د. دکتری
مریم	رحیمیان	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
سعیده	رشیدی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
محسن	رضا پور	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
امین	رفیعی	دانشگاه حکیم سبزواری	ه. ع. استادیار
سروش	رکاب ساز	دانشگاه تهران	د. ارشد
فریدون	رهبرنیا	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. دانشیار
عباس	ریاحی فر	دانشگاه پیام نور نوشهر	ک. ارشد
جعفر	زعفرانی	دانشگاه شیخ بهایی	ه. ع. استاد
علی	زمانی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
علیرضا	زمانی بهابادی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
الهام	زمانی پور	دانشگاه سیستان و بلوچستان	د. ارشد
جواد	زمانی پور	دانشگاه آزاد اسلامی بیرجند	د. ارشد
سمیه	زنگویی زاده	دانشگاه شهید باهنر کرمان	د. دکتری
محسن	زهرائی	دانشگاه آزاد اسلامی اهواز	د. دکتری
صادق	زیبایی	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	د. دکتری
عباس	سالمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استاد
انسیه	سپاهی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد

رضا	سعادت	دانشگاه علم و صنعت ایران	ه. ع. دانشیار
علیرضا	سهیلی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
علیرضا	شجاعی فرد	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	د. دکتری
مریم	شمس سولاری	دانشگاه پیام نور اصفهان	ه. ع. استادیار
سعیده	شمسی گمچی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
جمیله	شمشیری	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	د. دکتری
عالمه	شیخ حسینی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
فرید	صابری موحد	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. دانشیار
امیر	صادقی	دانشگاه علوم مالزی	د. دکتری
صدیقه	صادقی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
فرزانه	صادقی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	د. دکتری
قدیر	صادقی	دانشگاه حکیم سبزواری	ه. ع. استادیار
محمد	صال مصلحیان	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
سینا	صبا	دانشگاه تهران	د. ارشد
محمود	صبورملکی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
جواد	صبوری کیوانلو	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
احمد	صفاپور	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	ه. ع. استادیار
پریسا	صفری	دانشگاه محقق اردبیلی	ک. ارشد
مژده	صفری زاده	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
ابوالفضل	صنمی		د. دکتری
بهناز	ضعیفی	دانشگاه سیستان و بلوچستان	ک. ارشد
غلامرضا	طالبی	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	د. دکتری
بهناز	طلوع	دانشگاه حکیم سبزواری	ه. ع. استادیار
فاطمه	عبداله زاده	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
عبدالعزیز	عبدالهی	دانشگاه شیراز	ه. ع. استاد
احمد	عرفانیان	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
اعظم	عرفانیان عطار	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
نجمه	عزیزی زاده	دانشگاه شهید باهنر کرمان	د. دکتری
سهراب	عفتی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. دانشیار
آریا	عقیلی آشتیانی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر	د. دکتری
قاسم	علی پور	دانشگاه تبریز	ک. ارشد
اکرم	علیخانی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان	د. دکتری

رحیم	علیزاده	دانشگاه شاهد	ه. ع. استادیار
داود	علیمحمدی	دانشگاه اراک	ه. ع. استادیار
فریده	عمرانی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
حسین	عوض زاده	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
محمد امین	غفاری شاد	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
محمد	غلامپور	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
فرزانه	فالیزکاران	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
فاطمه	فرجی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
رامین	فرشچیان	دانشگاه فردوسی مشهد	ک. ارشد
زهرا	فرشیدیان فر	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	ک. ارشد
محمد رضا	فرمانی	دانشگاه بیرجند	د. دکتری
مرضیه	فروغ	دانشگاه فردوسی مشهد	دکتری
معصومه	فشندی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
فاطمه	فهمیان	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
سمانه	قابل	دانشگاه صنعتی سهند تبریز	ک. ارشد
فاطمه	قانع استاد قاسمی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
فاطمه	قانع	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
راضیه	قربانی	دانشگاه صنعتی سهند تبریز	ک. ارشد
سمیه	قربانی پور	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
رضا	قنبری	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استادیار
هوگر	قهرمانی	دانشگاه کردستان	ه. ع. استادیار
ایمان	کافیان	دانشگاه فردوسی مشهد	د. کارشناسی
علیرضا	کامل میرمصطفایی	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. دانشیار
رجبعلی	کامیابی گل	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
اصغر	کرایه چیان	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
جواد	کریمی	دانشگاه علوم پایه دامغان	ک. ارشد
زینب	کمالی	دانشگاه اصفهان	ه. ع. استادیار
اسماعیل	کوکبی فر	دانشگاه یزد	د. دکتری
محسن	کیان	دانشگاه بجنورد	ه. ع. استادیار
فرنگیس	کیانفر	دانشگاه شهید باهنر کرمان	د. دکتری
اقبال	کیهانی	دانشگاه آزاد اسلامی همدان	دکتری
مرتضی	گچ پزان	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. دانشیار
منظر	مالکی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری

مریم	محسنی پور	دانشگاه حکیم سبزواری	د. دکتری
مهدی	محمدزاده کاریزکی	دانشگاه آزاد اسلامی مشهد	د. دکتری
حسین	محمدیان	مهندسی فناوری‌های قوچان	ه. ع. استادیار
امیر حسین	مختاری	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
علی	مرصعی	دانشگاه زنجان	دکتری
بهروز	مشایخی فرد	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
طیبه	مشهوری	دانشگاه سیستان و بلوچستان	ه. ع. مربی
فاطمه	مقبلی	دانشگاه خیام	ک. ارشد
سید محمود	منجگانی	دانشگاه صنعتی اصفهان	ه. ع. استادیار
امین	منصوری	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
زینب	موسوی	دانشگاه زنجان	د. دکتری
سید احمد	موسوی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	د. دکتری
حسین	مومنائی	دانشگاه شهید باهنر کرمان	ه. ع. استادیار
محمدعلی	مهرجوفرد	دانشگاه ولی عصر رفسنجان	د. دکتری
فرض الله	میرزاپور	دانشگاه زنجان	ه. ع. دانشیار
مجید	میرزاویری	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
حامد	نجفی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
زهرا	نجفی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. ارشد
علی محمد	نظری	دانشگاه اراک	ه. ع. استادیار
اسداله	نیکنام	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
سارا	واعظ زاده	دانشگاه صنعتی امیرکبیر	د. دکتری
کینگ ون	وانگ	دانشگاه شانگهای	ه. ع. استاد
مهدی	وثوق	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
علی	وحیدیان کامیاد	دانشگاه فردوسی مشهد	ه. ع. استاد
فهمیه	ولی زاده	دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکزی	د. دکتری
محبوبه	هوشیارصادقیان	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
تاکه آکی	یامازاکی	دانشگاه تویو	ه. ع. استاد
سلمان	یزدانی	موسسه آموزش عالی بینالود مشهد	ه. ع. مربی
دانیال	یعقوبی	دانشگاه فردوسی مشهد	د. دکتری
پروین	یگانه	دانشگاه سیستان و بلوچستان	ک. ارشد

نمایه نویسندگان

- اسماعیل، بابایی، ۷۳
 اعتصامی، کمال، ۱۶
 الباجی، محمد، ۴۴
 بابایی، اسماعیل، ۷۷
 بقائی شهرکی، پروین، ۵۳
 بهبودی سوها، سعید، ۵۷
 جعفری، لیلا، ۵۷
 حاجی صادقی، مریم، ۱۶
 حاجی پور، مجتبی، ۱۱
 حسینی، سیده مریم، ۶۱
 حسینی، الهام، ۸۹
 حیدری، غلامعلی، ۲۰
 رحیمیان، مریم، ۶۵
 ریواز، عظیم، ۳۲
 زمانی، یوسف، ۷۳
 زمانی، یوسف، ۷۷
 زیبایی، صادق، ۴۰
 سرگلزائی، پرویز، ۹۳
 سلیمانی ساردو، فاطمه، ۳۲
 شمس سولاری، مریم، ۲۸
 صدیق، سید مصطفی، ۵۷
 ضعیفی، بهناز، ۶۹
 عزیز زاده، نجمه، ۳۲
 عفتی، سهراب، ۸۵
 علی پور، قاسم، ۴۹
 قابل، سمانه، ۷۳
 قربانی، راضیه، ۷۷
 قره ویس، علی اکبر، ۲۰
 قلی زاده، عبدالله، ۵۳
 لنگری، جواهر، ۴۰
 مقبلی، فاطمه، ۸۹
 منصوری، امین، ۸۵
 نادری، الهام، ۲۴
 نظری، علی محمد، ۲۴
 ولی زاده، فهیمه، ۳۶
 ولی، محمدعلی، ۲۰
 پناهی، مهدی، ۶۱
 کامیابی گل، رجبعلی، ۳۶
 کرایه چیان، اصغر، ۶۵
 کریمی، جواد، ۸۱
 کمالی، حمید، ۸۵
 یشربی نائینی، احسان، ۶۹
 یگانه، پروین، ۹۳

سخنرانی‌ها



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

پیش‌شرط سازی روش تاو ماتریسی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مجتبی حاجی پور *

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد
m.hajipoor@ub.ac.ir

چکیده. در این مقاله، کارایی و سرعت روش تاو محاسباتی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از یک پیش‌شرط ساز مناسب بهبود داده می‌شود. در مسائل خطی، با اعمال روش تاو، نهایتاً معادله ماتریسی $\underline{M}\underline{a} = \underline{F}$ حاصل می‌شود که $\underline{M}$ ماتریس مربعی از مرتبه $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ و n درجه تقریب روش است. در روش تاو استاندارد با افزایش n ، عدد حالت $\underline{M}$ به سرعت بزرگ می‌شود، لذا توابع آزمون و کوششی جدیدی را معرفی می‌کنیم که منجر به یک پیش‌شرط ساز مناسب برای کنترل عدد حالت ماتریس $\underline{M}$ می‌شود، همچنین روش بدست آمده را با روش تاو استاندارد مقایسه می‌کنیم. نتایج عددی بیانگر کارایی این روش است.

۱. پیش‌گفتار

روش تاو محاسباتی را می‌توان به عنوان یکی از روش‌های طیفی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی قلمداد نمود. طی سال‌های ۱۹۸۱ و ۱۹۸۴ اورتیز و سامارا [۱، ۲] روش تاو محاسباتی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی مورد بررسی قرار دادند. یک مسئله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با شرایط تکمیلی روی مستطیل $\Omega = [-1, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} Dy(x) = f(x) & x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \\ D_j y(x) = \sigma_j(x), \quad j = 1, \dots, J \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن $\underline{D}$ عملگر دیفرانسیل مشتقات جزئی خطی از مرتبه $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ و با ضرایب چندجمله‌ای $p_i(x)$ از مرتبه ν_j نسبت به هر متغیر x_j است که به صورت

$$\underline{D} \equiv \sum_{i=0}^{\nu} p_i(x) \frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i} \quad (2.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. 65L20; 34A30, 41A25, 47E05

واژگان کلیدی. روش تاو، پیش‌شرط ساز، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، عدد حالت ماتریس.
* سخنران

تعریف می شود و $i = (i_1, \dots, i_d)$ یک چند اندیشه است که $|i| = i_1 + \dots + i_d$. شرایط تکمیلی معادله (۱.۱) نیز به صورت زیر می باشد

$$\mathbf{D}_j y \equiv \sum_{i=0}^{\nu} g_{i,j}(x) \frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i} a(x) \big|_{x_l=k_j} = \sigma_j(x), \quad j = 1, \dots, J \quad (3.1)$$

که در آن $\sigma_j(x)$ و $g_{i,j}(x)$ چند جمله ای هستند و $x_l = k_j$ شرایط مربوط به قسمت های متفاوت دامنه Ω هستند. روش تاو محاسباتی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل بر اساس ماتریس های

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

پایه گذاری شده است. با اعمال روش تاو بر یک معادله دیفرانسیل، نهایتاً به معادله ماتریسی $\mathbf{M} \underline{a} = \mathbf{F}$ دست می یابیم که $\mathbf{M}$ ماتریس مربعی بلوکی است. روش های سنتی که برای فرموله کردن روش تاو برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می شود دارای پیچیدگی عملیاتی نسبتاً زیادی است و تعداد عملیات جبری ماتریسی زیادی را می طلبد. لذا با استفاده از یک نمایش ماتریسی جدید، روش تاو را برای این دسته از معادلات ارائه می دهیم که دارای شکل ظاهری بسیار ساده ای است. همچنین با افزایش درجه تقریب، عدد حالت $\mathbf{M}$ به سرعت رو به افزایش می گذارد که استفاده از روش های مستقیم تکراری در این دسته از مسائل عملاً دچار مشکل می شود. در این مقاله ما برای به دست آوردن یک پیش شرط ساز مناسب که عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ را کنترل نماید، توابع آزمون و کوششی چنان انتخاب می کنیم که جملاتی که بیشترین اثر را در افزایش عدد حالت ماتریس $\mathbf{M}$ دارا هستند کنترل نماید.

۲. پیاده سازی روش تاو محاسباتی

فرض کنیم V_j ماتریس ضرایب چند جمله ایهای چبیشف نسبت به متغیر x_j باشد در آن صورت $V = V_d \otimes \dots \otimes V_1$ ماتریس ضرایب چند جمله ایهای چبیشف نسبت به $x = (x_1, \dots, x_d)$ در $\mathbb{R}^d$ می باشد. بنابراین $W = V.X$ تشکیل یک پایه برای چند جمله ایها روی $\mathbb{R}^d$ می دهد که $X = X_d \otimes \dots \otimes X_1$ و برای $j = 1, \dots, d$ داریم $X_j = [1, x_j, x_j^2, \dots]$. لذا بسط سری توانی $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ روی $\mathbb{R}^d$ را می توان به فرم $y(x) = a.X$ نشان داد که در آن $y = (a_i)_{i=0}^{\infty}$. بعلاوه بسط سری توانی $y(x) = a.X$ در پایه $W = V.X$ به صورت $y(x) = \alpha.W$ است که در آن $\alpha = a.V^{-1}$. در روش تاو فرض می شود که جوابی تقریبی مسئله (۱.۱) دارای بسطی به فرم $y(x) = a.X = \alpha.W$ است. با عمل عملگر مشتق $\mathbf{D}$ روی $y(x)$ داریم

$$\mathbf{D}y(x) = a. \prod_x.X = \alpha. \prod_w.W, \quad (1.2)$$

که در آن $\prod_w = V. \prod_x.V^{-1}$ و $\prod_x = (\prod_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ یک ماتریس نواری است که $\prod_{ij}$ ضرایب x^j در چند جمله ای $\mathbf{D}x^j$ است. همچنین اگر $f(x) = f_x.X = f_w.W$ بسط تابع

پیش شرط سازی روش تاو برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

سمت راست (۱.۱) باشد که $f_w = f_x \cdot V^{-1}$ ، در آن صورت معادله (۱.۱) به فرم ماتریسی

$$\alpha \cdot \prod_w = f_w, \quad (2.2)$$

بازنویسی می‌شود. همچنین برای شرایط تکمیلی فرض کنیم $B^{(j)}$ ماتریس متناظر با عمل D_j روی X و σ_j نمایش برداری $\sigma_j(x) = \sigma^{(j)} \cdot X$ باشد آنگاه برای $j = 1, \dots, J$ داریم

$$a \cdot B^{(j)} = \sigma^{(j)}, \quad \text{یا} \quad \alpha \cdot B_w^{(j)} = \sigma_w^{(j)} \quad (3.2)$$

که در آن $\sigma_w^{(j)} = \sigma^{(j)} \cdot V^{-1}$ و $B_w^{(j)} = V \cdot B^{(j)}$. بنابراین معادله دیفرانسیل با شرایط تکمیلی (۱.۱) با معادله جبری زیر معادل است:

$$\begin{cases} \alpha \cdot \prod_w = f_w \\ \alpha \cdot B_w^{(j)} = \sigma_w^{(j)}, \quad j = 1, \dots, J \end{cases} \quad (4.2)$$

که در آن α ماتریس ضرایب مجهول است. فرض کنیم $Z = U \cdot X$ یک پایه دلخواه برای فضای چندجمله‌ایها روی $\mathbb{R}^d$ باشد در آن صورت اگر $Z = U \cdot X$ را به عنوان توابع آزمون (تست) و $W = V \cdot X$ را بعنوان توابع پایه‌ای در نظر بگیریم آنگاه در دستگاه (۴.۲) ماتریس‌های $\prod_w$ و f_w به ترتیب با ماتریس‌های $\prod_{wz} = V \cdot \prod_x \cdot U^{-1}$ و $f_z = f_x \cdot U^{-1}$ جایگزین می‌شوند که $U = U_d \otimes \dots \otimes U_1$ به عنوان مثال فرض کنیم جواب تقریبی معادله دیفرانسیل

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x, y) + y \frac{\partial}{\partial x} a(x, y) - 2y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a(x, y) + 2(1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \\ + 8 \frac{\partial^2}{\partial y^2} a(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

به فرم $a(x, y) = a \cdot Y \otimes X = \alpha \cdot (V_2 \otimes V_1)(Y \otimes X) \cdot U^{-1}$ ، است در آن صورت

$$\prod_{wz} = W \cdot (I \otimes \eta^2 + (\eta - 2\eta\mu) \otimes \eta + (2\eta - 2\eta\mu^2 + 8\eta^2) \otimes I) \cdot U^{-1},$$

که در آن $W = (V_2 \otimes V_1)$ ماتریس ضرایب توابع پایه‌ای و $U = (U_2 \otimes U_1)$ ماتریس ضرایب توابع آزمون هستند. همانطور که ملاحظه می‌شود با استفاده از رویکرد فوق به راحتی می‌توان روش تاو را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی اعمال نمود. در حالیکه استفاده از روش‌های سنتی بسیار پیچیده و طاقت‌فرسا می‌باشد. از طرفی با اعمال روش تاو بر یک معادله دیفرانسیل، دستگاه معادلات جبری $Ma = F$ بدست می‌آید که M ماتریس مربعی بلوکی نامتناهی است. اگر جواب تقریبی روش تاو یک چندجمله‌ای از درجه n نسبت به هر متغیر باشد آنگاه M یک ماتریس بلوکی با بعد $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ است. در روش تاو محاسباتی استاندارد، توابع پایه‌ای و آزمون یکسان در نظر گرفته می‌شوند. لذا برای این روش با افزایش درجه تقریب، عدد حالت M به سرعت رو به افزایش می‌گذارد، و در نتیجه استفاده از روش‌های مستقیم و تکراری برای حل دستگاه معادلات جبری بدست آمده عملاً دچار مشکل می‌شود. بنابراین برای به دست آوردن یک پیش‌شرط ساز مناسب که عدد حالت ماتریس M را کنترل نماید، توابع آزمون و کوششی چنان انتخاب می‌کنیم که جملاتی که بیشترین اثر را در افزایش عدد حالت ماتریس M دارا هستند کنترل نماید. فرض می‌کنیم n درجه تقریب تاو باشد

و t_{T_n} معرف توابع آزمون و همچنین b_{T_n} معرف توابع پایه‌ای مبتنی بر چندجمله‌ایهای چبیشف نسبت به متغیر x_j باشند و m بزرگترین مرتبه عملگر دیفرانسیلی D باشد، لذا این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_{T_n}(x_j) = 2^{m-1}(m-1)! l_{T_n}^{-1} n \left(\frac{2}{b-a} \right)^m G_{n-m}^{(m-\frac{1}{2})}(x_j), \quad (6.2)$$

$$b_{T_n}(x_j) = l_{T_n}^{-1} T_n(x_j), \quad l_{T_n} = 2^{n-1}, \quad x_j \in [a, b] \quad (7.2)$$

که در آن $G_n^{(m-\frac{1}{2})}(x_j)$ معرف چندجمله‌ایهای گگنباثر با پارامتر m و $T_n(x_j)$ معرف چندجمله‌ای چبیشف هستند [3]. بنابراین به منظور انتخاب توابع پایه‌ای و آزمون برای فضای چندجمله‌ای d متغیره قرار می‌دهیم $V_j = b_{T_n}(x_j)$ و $U_j = t_{T_n}(x_j)$ که $j = 1, \dots, d$. در مثال زیر نتایج عددی روش تاو محاسباتی استاندارد و روش تاو پیش‌شرط سازی شده برای درجه تقریب‌های متفاوت مقایسه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود عدد حالت روش تاو پیش‌شرط سازی شده کنترل شده است.

مثال ۱۰۲. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۵.۲) را همراه با شرایط تکمیلی

$$\begin{aligned} a(x, -1) &= 0, & a(x, 1) &= 0, \\ a(-1, y) &= e^{-1}(y^2 - 1), & a(1, y) &= y^2 - 1, \end{aligned} \quad (8.2)$$

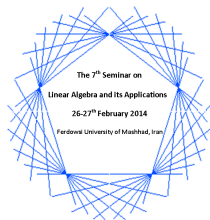
را روی مربع $\Omega = [-1, 1]^2$ در نظر بگیرید. جواب واقعی مسئله به فرم $a(x, y) = e^{1-x-4}(y^2 - 1)$ می‌باشد. نتایج عددی روش تاو پیش‌شرط سازی شده و عدد حالت تاو استاندارد چبیشف برای حل مثال فوق در جدول زیر گزارش شده است.

جدول ۱: مقایسه نتایج عددی روش تاو محاسباتی استاندارد و روش تاو پیش‌شرط سازی شده برای درجه تقریب‌های متفاوت

روش تاو استاندارد	روش تاو پیش‌شرط سازی شده		روش تاو استاندارد	روش تاو پیش‌شرط سازی شده	
	عدد حالت	ماکسیمم خطا		عدد حالت	ماکسیمم خطا
$n = 4$	$1/3 \times 10^3$	$1/7 \times 10^{-2}$	$1/3 \times 10^3$	$1/4 \times 10^1$	$2/7 \times 10^{-2}$
$n = 8$	$2/6 \times 10^4$	$3/7 \times 10^{-4}$	$2/6 \times 10^4$	$1/9 \times 10^2$	$1/7 \times 10^{-4}$
$n = 16$	$4/9 \times 10^8$	$3/7 \times 10^{-11}$	$4/9 \times 10^8$	$7/5 \times 10^4$	$3/7 \times 10^{-11}$
$n = 24$	$2/8 \times 10^{13}$	$2/2 \times 10^{-16}$	$2/8 \times 10^{13}$	$2/5 \times 10^8$	$2/2 \times 10^{-16}$

مراجع

1. E.L. Ortiz and H. Samara, *An operational approach to the Tau Method for the numerical solution of non-linear differential equations*, Computing 27 (1981), 15-25.
2. E.L. Ortiz and H. Samara, *Numerical solution of PDEs with variable coefficients with an operational approach to the Tau method*, Comp. & Maths. with Appls., 10 (1984), 5-13.
3. F. Ghoreishi and S. M. Hosseini, *The Tau method and a new preconditioner*, J. Comput. Appl. Math., 163 (2004), 351-379.



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

بازسازی شکل اجسام در پراکندگی معکوس امواج الکترومغناطیسی با روش نمونه برداری خطی با استفاده از منظم سازی تیخونوف و تجزیه مقادیر تکین

مریم حاجی صادقی^۱ * و سید کمال اعتصامی^۲

گروه ریاضی، مجتمع علوم کاربردی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر
^۱ hajisadeghi.math@gmail.com^۲ ete_home@yahoo.com

چکیده. در این مقاله به چگونگی بازسازی شکل اجسام در پراکندگی معکوس امواج الکترومغناطیسی با روش نمونه برداری خطی می‌پردازیم. این روش منجر به حل یک معادله انتگرالی فردلهم نوع اول بدو وضع می‌شود. روش منظم سازی تیخونوف و تجزیه مقادیر تکین را برای رفع مشکل بدو وضعی مسئله به کار برده و از اینکه L^2 -نرم جواب منظم شده روی مرز نامتناهی می‌شود، شکل جسم را بازسازی می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

پراکندگی الکترومغناطیسی یک پدیده فیزیکی است که به موجب آن موج الکترومغناطیسی فرودی با برخورد به یک مانع پراکنده می‌شود و میدان کلی در هر نقطه از فضا به صورت مجموع میدان پراکنده شده و میدان فرودی نوشته می‌شود. مسئله پراکندگی مستقیم شامل یافتن میدان‌های پراکنده شده است، هنگامی که ویژگی‌های فیزیکی و هندسی مانع کاملاً مشخص است. در حالی که مسئله پراکندگی معکوس منجر به مشخص کردن شکل مانع با استفاده از اطلاعات حاصل از میدان پراکنده شده در بی‌نهایت یا الگوی میدان دور می‌شود. پراکندگی موج الکترومغناطیسی تخت دارای هارمونیک زمانی از یک استوانه نامتناهی کاملاً رسانا را در نظر می‌گیریم که به طور جزئی با یک ماده دی‌الکتریک پوشانده شده است. فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^2$ یک ناحیه کراندار باز با کرانه لپ شیتز Γ باشد به طوری که $\overline{D} \setminus \mathbb{R}^2$ متصل باشد و Γ به صورت $\Gamma = \Gamma_I \cup \Pi \cup \Gamma_D$ تجزیه شده باشد که بخش پوشیده شده‌ی Γ_I و Γ_D از یکدیگر مجزا و Π اشتراک آنها می‌باشد. اگر موج فرودی به صورت TM قطبیده باشد، یعنی میدان فرودی موازی محور استوانه نوسان کند، آنگاه میدان اسکالر $u^i = e^{ikx \cdot d}$ را معرفی

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A52; Secondary 78A46, 45B05.

واژگان کلیدی. پراکندگی معکوس امواج الکترومغناطیسی، روش نمونه برداری خطی، منظم سازی تیخونوف، تجزیه مقادیر تکین.
* سخنران

م. حاجی صادقی و س. ک. اعتصامی

می‌کنیم که d جهت انتشار موج فرودی و k عدد موج می‌باشد به طوری که $E^i = (\circ, \circ, u^i)$. میدان کل $u = u^i + u^s$ که مجموع میدان فرودی و میدان پراکنده شده است در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = \circ \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \quad (1.1)$$

$$u(x) = \circ \quad x \in \Gamma_D \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik\lambda u(x) = \circ \quad x \in \Gamma_I \quad (3.1)$$

که n بردار یکه نرمال به سمت خارج Γ و λ ثابتی مثبت است. میدان پراکندگی u^s در شرط تشعشی زامرفلد

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right) = \circ, \quad r = |\vec{x}| \quad (4.1)$$

صدق می‌کند که تضمین می‌کند میدان پراکنده شده، بیرونی است.

خوش وضعی مسئله مقدار کرانه‌ای (۱.۱)-(۴.۱) در [۴] اثبات شده است. همچنین نشان داده شده که این مسئله جوابی یکتا در $H_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ است.

میدان پراکنده شده u^s دارای رفتار مجانبی

$$u^s(x) = u_\infty(\hat{x}, d) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \quad (5.1)$$

است که $u_\infty(\hat{x}, d)$ الگوی میدان دور موج پراکنده شده است. جواب اساسی $\phi(x, z)$ برای معادله هلمهولتز (۱.۱) به ازای z ثابت به صورت

$$\phi(\hat{x}, z) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} H_0^{(1)}(k|x-z|) \quad (6.1)$$

می‌باشد که $H_0^{(1)}$ تابع هنکل نوع اول از مرتبه صفر می‌باشد.

اساس روش نمونه برداری خطی حل معادله انتگرالی فردهلم نوع اول یا همان معادله میدان دور $(Fg = \phi_\infty)$

$$(Fg)(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-ik\hat{x}.z} \quad (7.1)$$

می‌باشد که $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ عملگر میدان دور، ϕ_∞ الگوی میدان دور (۶.۱) است و $\hat{x}, d \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| = 1\}$ با توجه به [۴] چون الگوی میدان دور u_∞ تحلیلی و عملگر میدان دور F فشرده است، معادله (۷.۱) بدو وضع می‌باشد و برای حل آن باید از روش منظم سازی تیخونوف استفاده کرد. قضیه زیر رفتار جواب معادله (۷.۱) را در کرانه D مشخص می‌کند:

قضیه ۱.۱. فرض کنید k^2 مقدار ویژه لاپلاسیان منفی در پراکنده‌گر D نباشد. اگر F عملگر میدان دور متناظر با (۱.۱)-(۴.۱) باشد، آنگاه

(۱) اگر $z \in D$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ تابع $g_z \in L^2(\Omega)$ وجود دارد به طوری که

$$\|Fg_z - \phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

بازسازی شکل اجسام با روش نمونه برداری خطی

و وقتی $z \in D$ به کرانه شکل نزدیک می شود

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma} \|g_z\|_{L^2(\Omega)} = \infty, \lim_{z \rightarrow \Gamma} \|v_{g_z}\|_{H^1(D)} = \infty$$

که $v_{g_z} = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d)$ تابع موج هرگلوتهز با کرنل g_z است.

(۲) اگر نقطه z خارج از D باشد، به ازای هر $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ تابع $g_z \in L^2(\Omega)$ وجود دارد به طوری که

$$\|Fg_z - \phi_{\infty}(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon + \delta$$

و

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|g_z\|_{L^2(\Omega)} = \infty, \lim_{\delta \rightarrow 0} \|v_{g_z}\|_{H^1(D)} = \infty.$$

برهان. برای مشاهده اثبات این قضیه به [۲] مراجعه کنید. $\square$

۲. دست آوردهای پژوهش

در این بخش با توجه به [۳] به چگونگی اجرای روش نمونه برداری خطی می پردازیم.

فرض کنید که الگوی میدان دور u_{∞} به صورت یک سری مثلثاتی $u_{\infty} = \sum_{n=-N}^{n=N} u_{\infty, n} \exp(in\theta)$ داده شده باشد. گسسته سازی معادله میدان دور (۷.۱) منجر به حل معادله ماتریسی بدو وضع

$$Ag_z = f_z \quad (۱.۲)$$

می شود. همانطور که قبلاً گفته شد این معادله باید منظم شود. این کار را با تجزیه مقادیر تکین A به صورت

$$A = U \Lambda V^* \quad (۲.۲)$$

آغاز می کنیم که U و V ماتریس های یکانی و Λ ماتریس قطری حقیقی شامل مقادیر منفرد $\Lambda_{l,l} = \sigma_l$ می باشد. جواب معادله (۱.۲) با جواب

$$\Lambda V^* g_z = U^* f_z \quad (۳.۲)$$

معادل است. اگر

$$\rho_z = (\rho_{z,1}, \rho_{z,2}, \dots, \rho_{z,n})^T = U^* f_z$$

آن گاه با توجه به [۵] منظم سازی تیخونوف معادله (۱.۲) منجر به حل

$$\min_{g_z \in \mathbb{R}^n} \|\Lambda V^* g_z - \rho_z\|_2^2 + \alpha \|g_z\|_2^2 \quad (۴.۲)$$

می شود که α پارامتر منظم سازی تیخونوف است. با تعریف $u_z = V^* g_z$ جواب مسئله (۴.۲) به صورت

$$u_{z,l} = \frac{\sigma_l}{\sigma_l^2 + \alpha} \rho_{z,l} \quad 1 \leq l \leq n$$

می باشد و در نتیجه

$$\|g_z\|_l^2 = \|u_{z,l}\|_l^2 = \left(\sum_{l=1}^n \frac{\sigma_l^2}{(\sigma_l^2 + \alpha)^2} |\rho_{z,l}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

پارامتر منظم سازی α را از اصل اختلافی موروزوف تعیین می‌کنیم. به این ترتیب که اگر

$$\|F - F^\delta\| \leq \delta$$

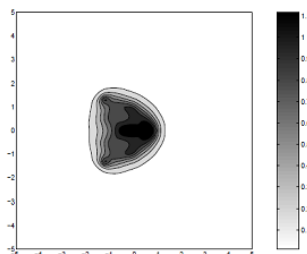
برآوردی برای خطای عملگر میدان دور F باشد، آن‌گاه طبق اصل اختلافی موروزوف، α بهینه، ریشه معادله

$$m(s) = \sum_{l=1}^n \frac{\delta^2 \sigma_l^2 - s^2}{(\sigma_l^2 + s)^2} |\rho_{z,l}|^2, \quad s > 0$$

خواهد بود.

مثال ۱.۲. شکل زیر یک کایت بازسازی شده با معادلات پارامتری

$x(t) = (1/5 \sin(t), \cos(t) + 0/65 \cos(2t) - 0/65)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
را نشان می‌دهد که با ماده‌ای با امپدانس سطح $\lambda = 5$ به طور کامل پوشیده شده است. نقاط
نمونه برداری شامل 101×101 نقطه داخل مربع $[-5, 5]^2$ انتخاب شده‌اند. g_z متناظر
با هر کدام از این نقاط محاسبه و خطوط تراز $\frac{1}{\|g_z\|_l^2}$ رسم شده است [۱].



مراجع

1. F. Cakoni and D. Colton, *The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data*, SIAM J. Appl. Math, 64 (2004), no. 2, 709–723.
2. F. Cakoni and D. Colton, *On the mathematical basis of the linear sampling method*, Georg. Math. J 10 (2003), no. 3, 411–425.
3. F. Cakoni, D. Colton and P. Monk, *The direct and inverse scattering problem for partially coated obstacles*, Inverse Problems 17 (2001), 1997–2015.
4. D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 2nd edn (Berlin: Springer), 1998.
5. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Dordrecht: Kluwer, 1995.



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

روشی برای حل مسئله کنترل بهینه با حالت نهایی آزاد با تکیه بر نظریه اندازه و برنامه ریزی خطی

غلامعلی حیدری^{۱*}، محمدعلی ولی^۲، و علی اکبر قره‌ویدی^۳

^{۱,۲} دانشگاه شهید باهنر کرمان بخش ریاضی

mvali@uk.ac.ir

gholamali.heydari@math.uk.ac.ir

^۳ دانشگاه شهید باهنر کرمان بخش مهندسی برق

a_gharaveisi@uk.ac.ir

چکیده. مسئله کنترل بهینه با حالت نهایی آزاد در سیستم‌های کنترل پیشرفته همچون کنترل مدل مرجع بسیار اهمیت دارد. بکارگیری روش‌های مبتنی بر نظریه اندازه و برنامه ریزی خطی در سیستم‌های زمان پیوسته به طور وسیعی مورد بررسی بوده است؛ ولی در زمینه مسئله کنترل بهینه با حالت نهایی آزاد این مطالعات محدودتر می‌باشند. در این مقاله سعی شده است تا با تغییر در قیود برنامه ریزی خطی، روش نسبتاً ساده‌ای برای حل این مسئله با روش‌های مذکور ارائه گردد.

۱. پیش‌گفتار

از جمله مسائلی که در مهندسی کنترل بسیار مورد توجه است، یافتن پاسخ بهینه برای یک سیستم کنترل با حالت نهایی آزاد می‌باشد که در آن مقدار حالت نهایی سیستم به صورت دقیق مهم نیست و تنها قرار داشتن آن در فضای شدنی مورد توجه می‌باشد. روش مبتنی بر نظریه اندازه اساساً برای مسائل کنترل با حالت نهایی معین تعریف شده است [۳] و تلاش‌هایی برای توسعه چارچوب عملکرد آن به صورت پذیرفته است. در مرجع [۱] ایده مطرح شده در [۳] برای سیستم‌های زمان گسسته مطرح شده است و در [۲] روشی برای مسائل زمان گسسته با افق بی‌نهایت آمده است. در [۴]، راهی برای حل مسائل کنترل بهینه با چند حالت نهایی معین بوسیله

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49M25; Secondary 49J15, 90C05, 28C05.

واژگان کلیدی. کنترل بهینه، سیستم زمان گسسته، نظریه اندازه، برنامه ریزی خطی.
* سخنران

برنامه ریزی خطی اعداد صحیح آمیخته ارائه شده است که در آن یکی از حالات نهایی که بهترین عملکرد را برای سیستم ایجاد می‌کند انتخاب شده و مسیر کنترل بهینه متناظر با آن نیز بدست می‌آید. لیکن در هیچ مقاله‌ای به طور خاص حل مسئله کنترل بهینه با حالت نهایی آزاد بررسی نشده است. در این مقاله با تغییر مختصری در قیود معادلات انتگرالی موجود در روش ارائه شده در [۳] روشی برای آزاد گذاردن حالت نهایی ارائه می‌شود. در آخر نیز مثال عددی برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی آورده شده است.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

با رجوع به [۳] پاسخ یک مسئله کنترل بهینه زمان پیوسته به صورت زیر:

$$\min I = \int_J f(x, u, t) dt \quad (1.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} J = [t_a, t_b], x(t) : J \longrightarrow X, u(t) : J \longrightarrow U \\ \dot{x} = g(x, u, t), x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b \end{cases}$$

به طور تقریبی از حل یک مسئله برنامه ریزی خطی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\min \sum_{k=1}^N \alpha_k f(z_k) \quad (2.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_i^g(z_k) = \Delta \varphi_i & \forall i = 1, \dots, M_1 \\ \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_i^j(z_k) = 0 & \forall i = 1, \dots, M_2, j = 1, \dots, n_x \\ \sum_{k=1}^N \alpha_k p_i(z_k) = a_{p_i} & \forall i = 1, \dots, L \end{cases}$$

که در روابط فوق n_x تعداد متغیرهای حالت است و تعداد N نقطه z_k به صورت یک شبکه با فواصل منظمی روی فضای $\Omega = X \times U \times J$ توزیع شده‌اند. چنانچه $B \subset \Omega$ یک گوی باز و $C^1(B)$ مجموعه توابع مشتق‌پذیر روی Ω باشد، تعداد M_1 تابع φ_i در $C^1(B)$ قرار دارند و توابع ψ_i^j و p_i نیز طبق تعاریف ارائه شده در [۳] حالت‌های خاصی از φ_i ها هستند. اگر یک مسئله کنترل بهینه با حالت نهایی آزاد را به صورت زیر در نظر بگیریم [۵]:

$$\min I = \int_J f(x, u, t) dt \quad (3.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} J = [t_a, t_b], x(t) : J \longrightarrow X, u(t) : J \longrightarrow U \\ \dot{x} = g(x, u, t), x(t_a) = x_a, x(t_b) = \text{free} \end{cases}$$

روشی برای حل مسئله کنترل بهینه با حالت نهایی آزاد...

در این نوع مسائل پاسخ بهینه شامل مسیر حالت و کنترل و حالت نهایی می‌باشد. چنانچه بخواهیم مسئله مذکور را در قالب روش ارائه شده در [۳] حل نماییم، باید در قیود انتگرالی مربوط به توابع φ_i تغییر ایجاد نماییم زیرا با نامعین بودن حالت نهایی $\Delta\varphi_i$ نیز نامعین می‌گردد. حال با در نظر داشتن $\Delta\varphi_i = \varphi(x(t_a)) - \varphi(x(t_b))$ می‌توان قیود مربوط به φ_i ها را به این صورت نوشت:

$$\left[\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_i^g(z_k) \right] + \varphi(x(t_b)) = \varphi(x(t_a)) \quad \forall i = 1, \dots, M_1 \quad (4.2)$$

با این کار $\varphi(x(t_b))$ خود یکی از مجهولات مسئله برنامه ریزی می‌گردد با این تفاوت که تنها در قیود ظاهر می‌گردد و در تابع هزینه اصلی برنامه ریزی ضریب آن صفر است. حال چنانچه توابع φ_i فقط شامل توابع خطی نسبت به متغیرهای حالت باشند، در این صورت مسئله برنامه ریزی مذکور مانند قبل یک مسئله برنامه ریز خطی با $N + m$ متغیر خواهد بود که m در آن برابر با تعداد متغیرهای حالت می‌باشد و حل آن، تقریبی از جواب مسئله کنترل بهینه اصلی با حالت نهایی آزاد بدست می‌دهد:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^N \alpha_k f(z_k) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_i^g(z_k) \right] + \varphi(x(t_b)) = \varphi(x(t_a)) & \forall i = 1, \dots, M_1 \\ \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_i^j(z_k) = 0 & \forall i = 1, \dots, M_2, j = 1, \dots, n_x \\ \sum_{k=1}^N \alpha_k p_i(z_k) = a_{p_i} & \forall i = 1, \dots, L \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

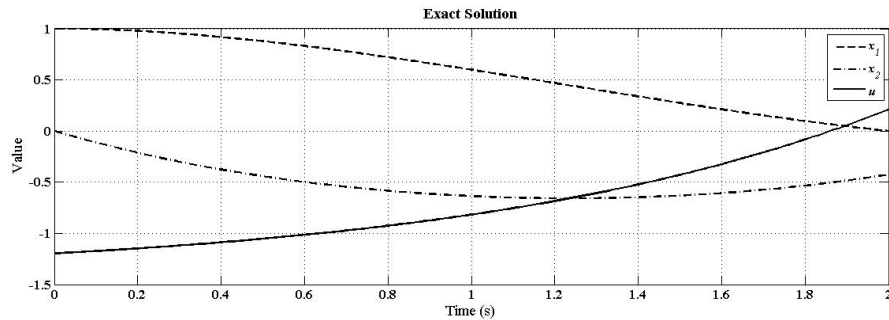
در ادامه مثالی از اجرای روش فوق بر روی یک مسئله نمونه از [۵] آورده شده و پاسخ آن با پاسخ دقیق بدست آمده از حل کلاسیک مقایسه گردیده است:

$$\min I = \int_0^2 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \quad (6.2)$$

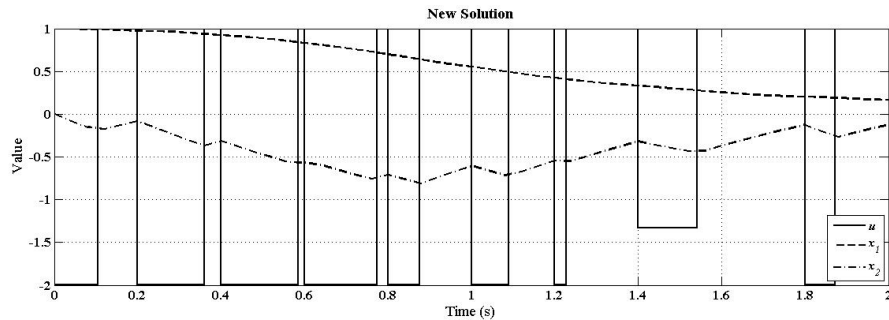
$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0 \\ x_1(2), x_2(2) : \text{free} \end{cases}$$

طبق [۵] حل مسئله فوق با تشکیل هامیلتونی و حل معادلات لاگرانژ به نتایج زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} u &= -1/4176 + 0/2206e^t \\ x_1 &= 2/197 - 1/4176t - 1/3073e^{-t} + 0/1103e^t \\ x_2 &= -1/4176 + 1/3073e^{-t} + 0/1103e^t \\ I &= 1/368, x_1(2) = 0, x_2(2) = -0/4257 \end{aligned}$$



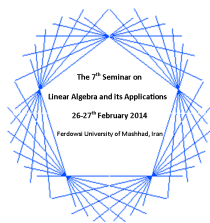
که در شکل فوق نیز رسم شده‌اند. حال چنانچه در نظر بگیریم $\varphi_1 = x_1$ ، $\varphi_2 = x_2$ و توابع ψ_i همانند [۳] و به تعداد ۶ تا باشند، تعداد تقسیمات برای همه متغیرها ۱۰ تا باشد، $U = [-2, 1]$ ، $X = [-2, 2] \times [-2, 2]$ و سایر شرایط نیز مطابق [۳] در نظر گرفته شود، در این صورت توابع کنترل و حالت به صورت شکل زیر در می‌آیند و نیز:

$$I = 4/468, x_1(2) = 0/1650, x_2(2) = -0/1236$$


مشاهده می‌شود که نتیجه بدست آمده شباهت به پاسخ کلاسیک دارد و نشانه صحت عملکرد روش پیشنهادی است. البته چون در این روش فرض بر این است که φ_i ها فقط مرتبه اول باشند، دقت نتایج کمی پایین است و میزان تابع هدف I در روش پیشنهادی به صورت قابل ملاحظه‌ای بیش از مقدار آن در روش کلاسیک است.

مراجع

۱. غ. حیدری، م. ولی و.ع. قره‌ویسی، ارائه روشی نو برای حل مسئله کنترل بهینه زمان گسسته با تکیه بر نظریه اندازه و برنامه ریزی خطی، مجموعه مقالات چهل و چهارمین کنفرانس ریاضی (۱۳۹۲)، ۱۰۱-۱۰۳.
۲. آ. زارع، ع. خاکی‌صدیق و.ع. وحیدیان‌کامیاد، مسائل کنترل بهینه گسسته غیرخطی با افق بینهایت، مجموعه مقالات یازدهمین کنفرانس مهندسی برق (۱۳۸۲)، شماره ۳، ۲۸۲-۲۷۵.
3. J.E. Rubio, *Control and Optimization The Linear Treatment Of Nonlinear Problems*, Manchester University Press, UK, 1986.
4. H. H. Mehne, M. H. Farahi and A. V. Kamyad *MILP modelling for the time optimal control problem in the case of multiple targets*, Optim. Control Appl. Meth. 27 (2006), no. 2, 77-91.
5. D. E. Kirk *Optimal Control Theory: An Introduction*, Dover Publications, US, 2004.



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

بررسی دومین بزرگترین مقدار ویژه لاپلاسی گراف‌های یک دوری با $\lambda_2 \leq 1$

علی محمد نظری^۱ * و الهام نادری^۲

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه اراک
^۱a-nazari@araku.ac.ir
^۲e-naderi@arshad.araku.ac.ir

چکیده. گراف همبندی را که تعداد یال‌هایش با تعداد رئوسش برابر باشد، گراف یک دوری می‌گوییم. در این مقاله در میان گراف‌های یک دوری با $\lambda_2 \leq 1$ به بررسی دومین بزرگترین مقدار ویژه لاپلاسی می‌پردازیم.

۱. مقدمه

مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی ماتریس‌ها و عملگرها از جمله اساسی‌ترین و به همین جهت، پرکاربردترین مباحث و ابزار در بسیاری از زمینه‌های علوم قدیم و جدید می‌باشد. نظریه‌ی طیفی گراف زمینه‌ای است در ریاضیات، که از ترکیب مسأله‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌ها با مطالعات و پژوهش‌های گراف‌ها تشکیل می‌یابد. تحقیق در مورد شعاع طیفی یک گراف موضوع مهمی در نظریه‌ی طیف گراف است. به طوری‌که در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۵ در میان تمام گراف‌های یک دوری و دو دوری n -رأسی، گراف‌هایی با بزرگترین شعاع طیفی تعیین شدند. از آنجایی که در یک شبکه، قطر از اهمیت زیادی برخوردار است و مسأله‌ی دومین بزرگترین مقدار ویژه‌ی یک گراف رابطه‌ی نزدیکی با قطر آن دارد، مطالعه‌ی دومین بزرگترین مقدار ویژه‌ی گراف‌ها از ارزش زیادی برخوردار شد. در سال ۱۹۸۲ مسأله‌ی تعیین همه‌ی گراف‌هایی که دومین بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس مجاورت آن‌ها از ۱ تجاوز نمی‌کند، مطرح شد [۱]. در سال‌های بعد نیز محققان تمام درخت‌های با $\lambda_2 = 1$ و گراف‌های یک دوری و دو دوری با ویژگی $\lambda_2 \leq 1$ ، را تعیین کردند. همچنین در سال ۲۰۰۹

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. گراف یک دوری، ماتریس مجاورت، ماتریس لاپلاسی، مقدار ویژه، مقدار ویژه لاپلاسی.
* سخنران

مقادیر ویژه لاپلاسی گراف‌های یک دوری، مورد بررسی قرار گرفت [۲].
در این مقاله تمامی گراف‌ها را ساده در نظر گرفته و در میان گراف‌های یک دوری با $\lambda_2 \leq 1$ به مطالعه‌ی دومین بزرگترین مقدار ویژه لاپلاسی آن‌ها پرداخته‌ایم.
فرض کنید گراف $G = (V, E)$ گرافی همبند با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد.
 $A(G)$ را ماتریس مجاورت G در نظر می‌گیریم. به‌وضوح A متقارن بوده و دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی می‌باشد. بدون کم شدن از کلیت می‌توان آن‌ها را به ترتیب زیر در نظر گرفت

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G).$$

در هر گراف درجه‌ی رئوس را با $d(v_i)$ نشان می‌دهیم. $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نیز به ترتیب نشان دهنده‌ی کمینه‌ی درجه و بیشینه درجه‌ی گراف G می‌باشند.
ماتریس لاپلاسی $L(G)$ به صورت $D(G) - A(G)$ تعریف می‌شود، به طوری‌که $D(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ یک ماتریس قطری از درجه رئوس G می‌باشد. مشاهده می‌شود که $L(G)$ یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن و منفرد است. علاوه بر این چون G همبند است، $L(G)$ تحویل ناپذیر می‌باشد و مقادیر ویژه‌های آن‌ها به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G) = 0.$$

تعریف ۱.۱. گراف همبندی را که تعداد یال‌هایش با تعداد رئوسش برابر باشد، گراف یک دوری می‌نامیم.

اکنون با در نظر گرفتن گراف‌های یک دوری، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

- ۱) $U_n = \{G \mid G \text{ گرافی یک دوری با } n \text{ رأس باشد}\}$ ،
- ۲) $U(k) = \{G \mid G \text{ گرافی یک دوری شامل دور } C_k \text{ باشد}\}$ ،
- ۳) $U_n(k) = \{G \mid G \in U_n, G \in U(k)\}$.

لم ۲.۱. فرض کنید V' زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف G باشد و $|V'| = k$. می‌دانیم $G - V'$ زیرگرافی از G می‌باشد که با حذف رئوس V' و یال‌های متصل به آن‌ها به دست آمده است. آن‌گاه برای $i = 1, 2, \dots, n - k$ داریم

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(G - V') \geq \lambda_{i+k}(G) \geq \lambda_{i+k}(G - V').$$

نامساوی فوق به نامساوی کوشی معروف است.
بنابراین اگر G_1 یک زیرگراف القایی از گراف G باشد، آن‌گاه

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(G_1).$$

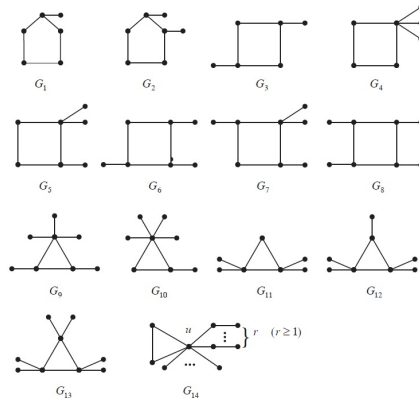
برهان. اثبات را در [۳] مشاهده کنید. $\square$

لم ۳.۱. فرض کنید G گرافی ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ باشد و $u \in V(G)$ ، آن‌گاه

$$P(G) = \lambda P(G - u) - \sum_{v \in N(u)} P(G - u - v) - 2 \sum_{z \in C(u)} P(G - V(Z)).$$

که در آن $P(G)$ نمایش چندجمله‌ای مشخصه ماتریس مجاورت گراف G و در اولین $N(u)$ ، مجموعه رئوس مجاور با u را نشان می‌دهد و دومین Σ نیز روی دورهایی مانند $Z \in C(u)$ (مجموعه‌ی همه‌ی دوره‌های شامل u می‌باشد) انجام می‌شود.

بزرگترین مقدار ویژه لاپلاسی گراف‌های یک دوری



شکل ۱: $G_1 - G_{14}$

برهان. اثبات در [۴] آمده است. $\square$

لم ۴.۱. گراف یک دوری G در شرط $\lambda_2 = 1$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر، G دور C و یا هر کدام از گراف‌های $(G_i, i = 1, \dots, 14)$ باشد.

برهان. اثبات در [۳] آمده است. $\square$

لم ۵.۱. فرض کنید $G \in U_n$ و $n \geq 8$ ، آنگاه

$$1. \lambda_2(G) \geq \lambda_2(C_3^{n-3}) \iff G \cong C_3^{n-3} \text{ و تساوی برقرار است}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(C_3^{n-3}) = 1 \text{ و } 1 < \lambda_2(C_3^{n-3}) < 1.2$$

$$3. \lambda_2(G) \geq 1 \iff G \neq C_3^{n-3} \text{ اگر}$$

توجه داشته باشید که C_3^{n-3} ، گرافی یک دوری است که با اتصال دو رأس آویزان از ستاره‌ی $K_{1, n-1}$ به دست می‌آید.

برهان. اثبات را در [۳] مشاهده کنید. $\square$

لم ۶.۱. گراف یک دوری G در رابطه‌ی $\lambda_2 < 1$ صدق می‌کند، اگر هر کدام از گراف‌های C_5, C_4, C_3^{m-3} و یا یکی از گراف‌های $(G_i, i = 15, \dots, 22)$ باشد.

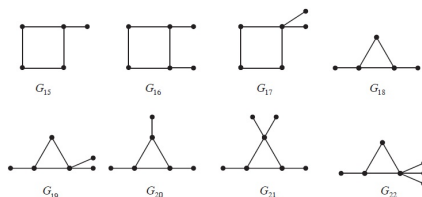
برهان. اثبات در [۳] آمده است. $\square$

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. در میان گراف‌های یک دوری با $\lambda_2 = 1$ ، تنها گراف‌های $(G_i, i = 1, \dots, 12)$ در رابطه‌ی $\mu_2 > 3$ صدق می‌کنند.

برهان. با محاسبات مستقیم از طریق برنامه‌ی MATLAB نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

ع. نظری و ا. نادری



شکل ۲: $G_{15} - G_{22}$

قضیه ۲.۲. از میان گراف‌های یک دوری با $\lambda_2 = 1$ ، تنها گراف‌های G_{13} و G_{14} و C_6 دارای $\mu_2 = 3$ هستند.

برهان. با توجه به شکل ۱ و محاسبات مستقیم از طریق برنامه‌ی MATLAB نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۳.۲. گراف یک دوری G با $\lambda_2 < 1$ ، در رابطه‌ی $\mu_2 \leq 3$ صدق می‌کند، اگر هر کدام از گراف‌های C_4 ، C_5 و C_3^{n-3} و یا یکی از گراف‌های $(15, 16, 17, 20)$ باشد. G_i $(i = 15, 16, 17, 20)$ باشد. برهان. با محاسبه‌ی چندجمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه‌ی لاپلاسی گراف‌ها از طریق برنامه‌ی MATLAB نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲. در میان گراف‌های شکل ۲، فقط گراف‌های $(18, 19, 21, 22)$ در G_i $(i = 18, 19, 21, 22)$ در رابطه‌ی $\mu_2 > 3$ صدق می‌کنند.

برهان. با محاسبه‌ی چندجمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه‌ی لاپلاسی گراف‌ها از طریق برنامه‌ی MATLAB نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۲. گراف یک دوری G با $\lambda_2 \leq 1$ ، در رابطه‌ی $\mu_2 \leq 3$ صدق می‌کند اگر گراف‌های C_4 ، C_5 و C_6 و C_3^{n-3} و یا هر کدام از گراف‌های G_{13} و G_{14} و گراف‌های $(15, 16, 17, 20)$ باشد. G_i $(i = 15, 16, 17, 20)$ باشد.

برهان. نتیجه به‌طور مستقیم از قضایای فوق، حاصل می‌شود. $\square$

مراجع

1. D. Cvetkovic, On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1, Publ. Inst. Math. 31 (45) (1982), 15–20.
2. J. Li, W. C. Shiu and W. H. Chan, Some results on the laplacian eigenvalues of unicyclic graphs, Linear Algebra Appl. 430 (2009), 2080–2093.
3. G. H. Xu, On unicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1, Discrete Appl. Math. 136 (2004), 117–124.
4. D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, Spectra of Graphs, Academic Press, New York, 1980



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

کوچکترین مقدار ویژه بوسیله خواصی از ماتریسهای شبه معین مثبت

مریم شمس سولاری *

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور تهران
shamssolary@pnu.ac.ir , shamssolary@gmail.com

چکیده. در این مقاله سعی می‌کنیم کوچکترین مقدار ویژه ماتریسهای هرمیتی یا متقارن را بوسیله خواصی از ماتریسهای شبه معین مثبت پیدا کنیم. این کار با استفاده از خطای ممیز شناور در تجزیه چولسکی و تا حد امکان در نظر گرفتن کلیه خطاهای محاسباتی و گرد کردن انجام می‌گیرد. می‌توان نشان داد یک ماتریس هرمیتی و یا متقارن که شبه معین مثبت نیست حداقل یک مقدار ویژه منفی دارد.

۱. پیش‌گفتار

اگر ماتریس A یک ماتریس متقارن و یا هرمیتی شبه معین مثبت باشد، آنگاه
$$x^t A x \geq 0 \text{ for all } x$$

بنابراین تجزیه چولسکی وجود دارد اما تئوری و محاسبات نسبت به ماتریس معین مثبت دقیق تر و نافذتر می‌باشد. در این مقاله ما از تجزیه چولسکی استاندارد استفاده می‌کنیم و ماتریسی را که هرمیتی و یا متقارن است ولی شبه معین مثبت نیست مورد بررسی قرار می‌دهیم یعنی نشان می‌دهیم حداقل یک مقدار ویژه منفی دارد. برای اینکار تغییراتی کوچک ولی دقیق در الگوریتم پروفیسور Rump در [۲، ۳] ارائه می‌دهیم. محاسبات ما براساس حساب ممیز شناور IEEE 754 می‌باشد و $\mathbb{F}(\mathbb{F} + i\mathbb{F})$ مجموعه اعداد ممیز شناور حقیقی و یا مختلط با خطای نسبی گرد کردن و خطای سرریز بصورت زیر می‌باشند:

$$eps = 2^{-53}, \quad eta = 2^{-1074}, \quad \gamma_k = \frac{keps}{1 - keps} \text{ for } k \geq 0, \quad [1, 5]$$

2010 Mathematics Subject Classification. 65G20.

واژگان کلیدی. مقادیر ویژه، مقادیر تکین، تجزیه چولسکی، شبه معین مثبت.
* سخنران

م. شمس سولاری

با فرض $A^T = A \in M_n(\mathbb{F})$ یا $A^* = A \in M_n(\mathbb{F} + i\mathbb{F})$ تجزیه چولسکی بصورت $(A = R^T R)$ خواهد بود که R یک ماتریس بالا مثلثی است و طبق [۲] تجزیه بطور کامل درالگوریتم زیر انجام می شود اگر همه ریشه های مربعی حقیقی باشند:

for $j = 1 : n$

for $i = 1 : j - 1$

$$r_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^* r_{kj}) / r_{ii}$$

end

$$r_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{kj}^* r_{kj})^{1/2}, \text{ end}$$

حال فرض کنید $A^T = A \in M_n(\mathbb{F})$ و یا برای اعداد مختلط $A^* = A \in M_n(\mathbb{F} + i\mathbb{F})$ بعلت خطای زیر ریز نمی توانیم از ماتریس A شبه معین مثبت استفاده کنیم.

قضیه ۱.۱. فرض کنید $A^T = A \in M_n(\mathbb{F})$ یا $A^* = A \in M_n(\mathbb{F} + i\mathbb{F})$ داده شده باشد.

تجزیه چولسکی از ماتریس A بوسیله $\hat{R}$ برای $1 \leq i, j \leq n$ تعریف شده باشد

$$s(i, j) := |\{k \in N : 1 \leq k < \min(i, j) \text{ and } \hat{r}_{ki} \hat{r}_{kj} \neq 0\}|, \quad (1.1)$$

$$\alpha_{ij} := \begin{cases} \gamma_{s(i,j)+2} & s(i, j) \neq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فرض کنید برای هر j داریم $\alpha_{jj} < 1$

$$d_j := ((1 - \alpha_{jj})^{-1} a_{jj})^{1/2} \quad M := \mathfrak{V}(\mathfrak{V}n + \max a_{\nu\nu}),$$

$$0 \leq \Delta(A) \in M_n(\hat{R}) \text{ by } \Delta(A)_{ij} := \alpha_{ij} d_i d_j + Meta,$$

آنگاه اگر تجزیه چولسکی ماتریس A بطور کامل انجام گیرد کوچکترین مقدار ویژه آن در رابطه زیر صدق می کند: $\lambda_{\min}(A) > -\|\Delta(A)\|_2$.

۲. مباحث مربوط به حسابگرها

با کمک تغییراتی در قضیه قبل برای زمانی که تجزیه چولسکی بطور جزئی انجام گیرد داریم:

قضیه ۱.۲. فرض کنید $A^T = A \in M_n(\mathbb{F})$ و یا $A^* = A \in M_n(\mathbb{F} + i\mathbb{F})$ داده شده باشد. فرض کنید تجزیه چولسکی با حساب ممیز شناور بصورت جزئی روی A انجام پذیرد. سپس با کمک نکات بیان شده در قضیه ۱.۱ داریم:

$$\lambda_{\min} < \|\Delta(A)\|_2. \quad (1.2)$$

لم ۲.۲. فرض کنید $a, b \in \mathbb{F}$ و $c = fl(aob)$ برای $c \in \{+, -\}$ تعریف کنید

$fl(c - \varphi|c|) \leq aob \leq fl(c + \varphi|c|)$, آنگاه $\varphi = eps(1 + \mathfrak{V}eps) \in \mathbb{F}$ می دانیم $\frac{1}{\mathfrak{V}eps} \eta$ کوچکترین عدد ممیز شناور نرمال شده می باشد.

کوچکترین مقدار ویژه بوسیله ماتریسهای شبه معین مثبت

برهان. ما از این حقیقت استفاده می کنیم که $fl(a \pm b) = a \pm b$ برای $\frac{1}{2} \epsilon \leq |a \pm b|$

$$fl(a \pm b) = a \pm b(1 + \epsilon_1) \quad |\epsilon_1| \leq \epsilon$$

اگر گرد کردن بطور مستقیم انجام پذیرد: $\tilde{A} = fl_{\Delta}(A + cI)$. در غیر اینصورت می توانیم از گرد کردن بطور مستقیم جلوگیری کنیم طبق ۲.۲ و تعریف $\tilde{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$$\tilde{a}_{ij} := \begin{cases} fl(d + \varphi|d|) & \text{with } d := fl(a_{ii} + c) \quad \text{if } i = j \\ a_{ij} & \text{otherwise} \end{cases}$$

داریم: $\varphi := \epsilon(1 + 2\epsilon) \in \mathbb{F}$. $\square$

قضیه ۳.۲. با استفاده از اطلاعات ذکر شده در قضیه ۱.۱ فرض کنید $c \in \mathbb{F}$ داده شده باشد $\|\Delta(\tilde{A})\|_2 \leq c$ و $\tilde{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ بصورتیکه $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ برای $i \neq j$ و $\tilde{a}_{ii} \geq a_{ii} + c$ برای همه مقادیر i . اگر تجزیه چولسکی روی $\tilde{A}$ با حساب ممیز شناور بصورت جزئی استفاده گردد، آنگاه ماتریس A شبه معین مثبت نیست پس حداقل یک مقدار ویژه منفی دارد.

حال روی ماتریس A تعریف می کنیم:

$$t_j = j - \min\{i | a_{ij} \neq 0\} \quad (2.2)$$

که تعداد عناصر ناصفر بالای قطر در j امین ستون از ماتریس می باشد، آنگاه داریم $0 \leq t_j \leq n - 1$ و با بکاربردن تجزیه چولسکی داریم:

$$\delta_i = ((1 - \beta_i)^{-1} \beta_i a_{ii})^{1/2} \quad \beta_i := \gamma_{t_i+2},$$

و طبق قضیه ۱.۱ داریم: $\|\Delta(A)\|_2 \leq \delta^T \delta + nMeta$. با کمک تغییرات زیر در الگوریتم [۲] و استفاده از قضیه زیر کوچکترین مقدار ویژه از ماتریس مورد نظر محاسبه می شود:

1. $A = A + c * speye(n)$, $speye$ is sparse identity matrix.
2. $[R, p] = chol(A)$, floating-point Cholesky Decomposition.
3. $p \neq 0$, Matrix A is not proved to positive semidefinite.
4. $p = 0$, positive semidefiniteness could not be verified.

قضیه ۴.۲. ماتریس متقارن و یا هرمیتی داده شده بصورت زیر را در نظر بگیرید: $A \in M_n(\mathbb{F})$ یا $A \in M_n(\mathbb{F} + i\mathbb{F})$. با کمک t_j در (۲.۲) تعریف شده

$$\beta_i := \gamma_{t_i+2}, \quad \beta'_i := \beta_i(1 - \beta_i)^{-1} \quad \beta''_i := \beta'_i(1 + \epsilon),$$

برای $i \in \{1, \dots, n\}$ و $\beta''_i < 1$ ، فرض کنید $c \in \mathbb{F}$ چنانکه

$$c \geq (1 - \sum_{i=1}^n \beta''_i)^{-1} (\sum_{i=1}^n \beta''_i a_{ii} + nMeta). \quad (3.2)$$

فرض کنید $\tilde{A} := fl_{\Delta}(A + cI)$ محاسبه روی $A + cI$ با گرد کردن رو به بالا انجام گیرد. تجزیه چولسکی بطور جزئی روی $\tilde{A}$ انجام پذیرد آنگاه ماتریس A شبه معین مثبت نیست یعنی حداقل یک مقدار ویژه منفی دارد.

برهان.

$$\delta_i = ((1 - \beta_i)^{-1} \beta_i a_{ii})^{1/2} \quad \beta_i := \gamma_{t_i+2}, \quad \beta'_i = \beta_i(1 - \beta_i)^{-1} \\ \|\Delta(A)\|_2 \leq \delta^T \delta + nMeta$$

م. شمس سولاری

$$= \sum_{i=1}^n [((1 - \beta_i)^{-1} \beta_i a_{ii})^{1/2}]^2 + nMeta = \sum_{i=1}^n \beta'_i a_{ii} + nMeta. \quad (4.2)$$

بوسیله $\tilde{A} = fl_{\Delta}(A + cI)$ داریم $\tilde{a}_{ii} = (a_{ii} + c)(1 + \epsilon_i)$ با $\epsilon_i \leq eps$

$$\sum_{i=1}^n \beta'_i (a_{ii} + c)(1 + \epsilon_i) + nMeta = \sum_{i=1}^n \beta'_i \tilde{a}_{ii} + nMeta,$$

سپس با کمی محاسبات [4] و استفاده از (4.2)، داریم:

$$\beta''_i := \beta'_i (1 + eps) \quad \sum_{i=1}^n \beta''_i < 1,$$

$$c \geq \frac{\sum_{i=1}^n \beta''_i a_{ii} + nMeta}{1 - \sum_{i=1}^n \beta''_i} \\ = \frac{\sum_{i=1}^n \beta'_i a_{ii} + nMeta + eps \sum_{i=1}^n \beta'_i a_{ii}}{1 - \sum_{i=1}^n \beta''_i} \geq \|\Delta(A)\|_2,$$

$$\|\Delta(\tilde{A})\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \beta'_i (a_{ii} + c)(1 + eps) + nMeta \leq c. \quad (5.2)$$

حال فرض کنید تجزیه چولسکی $\tilde{A}$ با حساب ممیز شناور بطور جزئی انجام گیرد. سپس

$\tilde{A} = A + cI + D$ با قطر $D \geq 0$ و قضایای ۱.۲ و ۳.۲ نتیجه خواهند داد:

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_{\min}(\tilde{A} - D) - c \leq \lambda_{\min}(\tilde{A}) - c < \|\Delta(\tilde{A})\|_2 - c \leq 0.$$

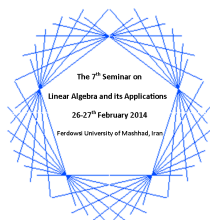
□

سپاس‌گزاری

از نظرات و پیشنهادات مفید و سازنده پروفسور S. M. Rump در دانشگاه صنعتی هامبورگ صمیمانه تشکر و قدر دانی می‌کنم.

مراجع

1. N.J.Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, (2nd edition) SIAM Publication, Philadelphia, 2002.
2. S. M. Rump, *Verification of Positive Definiteness*, BIT Numerical Mathematics, 46 (2005), 433–452.
3. S. M. Rump, *INTLAB-Interval Laboratory In Tibor Csendes, editor, Developments in Reliable Computing*, Kluwer Academic Publisher, (1999), 77–104.
4. M. Shams Solary, *Finding the Smallest Eigenvalue by Properties of Semidefinite Matrix*, Reliable Computing 18, (2013), 82–89.
5. R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

حل یک معادله ماتریسی با استفاده از روش منظم‌ساز تیخونوف

فاطمه سلیمانی ساردو^۱، عظیم ریواز^۲، و نجمه عزیزی زاده^۳ *

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه باهنر کرمان

^۱soleimanifateme824@yahoo.com

^۲arivaz@uk.ac.ir

چکیده. در این مقاله به حل یک نوع دستگاه معادله ماتریسی بدووضع که سمت راست آن دارای نویز می‌باشد، پرداخته می‌شود. روش منظم‌ساز تیخونوف به منظور کاهش تأثیر این نویز در جواب تقریبی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه ماتریس ضرایب دستگاه معادله ماتریسی انتخاب شده تنک می‌باشد از روش‌های تصویری نیز استفاده می‌شود که در اینجا فرآیند آرنولدی تعمیم یافته مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱. پیش‌گفتار

دستگاه معادله ماتریسی مورد بررسی در این مقاله به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{j=1}^p A_{i,j} X_{i,j} B_{i,j} = G_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (1.1)$$

که $A_{i,j}$ و $B_{i,j}$ ماتریس‌هایی تنک و بدووضع می‌باشند. این ماتریس‌ها می‌توانند به گونه‌ای بدووضع باشند که منفرد و از رتبه ناقص باشند. همچنین G_i ها ماتریس‌هایی متناظر با یک تصویری که به آن نویز وارد شده است، می‌باشند.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A52; Secondary , 68U10, 65F22.

واژگان کلیدی. منظم‌ساز تیخونوف، روش‌های تصویری، معادلات ماتریسی بدووضع .
* سخنران

ف. سلیمانی ساردو، ع. ریواز، و. عزیزی زاده

با حل (۱.۱) می‌توان این تصاویر را بازگردانی کرد. در [۱] بوحمدی و همکارانش با استفاده از روش منظم ساز تیخونوف، به حل معادله ماتریسی بدوضع $\sum_{i=1}^p A_i X B_i = G$ پرداخته‌اند. با استفاده از عملگر M (در [۲] چگونگی استفاده از این عملگر آورده شده است) (۱.۱) به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$M(X) = G, \quad X = (X_1, \dots, X_p), \quad G = (G_1, \dots, G_p). \quad (2.1)$$

فرم تیخونوف (۲.۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\min_X \{ \|M(X) - G\|_F^2 + \lambda \|M'(X)\|_F^2 \}. \quad (3.1)$$

در مسأله مینیم سازی (۳.۱) عملگر M' به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M' : \mathbb{R}^{n \times n} \times \dots \times \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$M'(X) = (\mathcal{L}_1(X), \dots, \mathcal{L}_p(X)),$$

$$\mathcal{L}_i(X) = \sum_{j=1}^p \mathcal{L}_{i,j} X_j \mathcal{L}_{i,j}^T, \quad i = 1, \dots, p$$

که λ پارامتر منظم ساز و $\mathcal{L}_{i,j}$ ها ماتریس‌هایی منظم می‌باشند.

۲. فرآیند آرنولدی بلوکی تعمیم یافته برای جفت عملگر (M, M')

همان گونه که اشاره کردیم، بعد ماتریس ضرایب معادله مورد بررسی از مرتبه بالایی می‌باشد. در این مقاله برای تصویر کردن مسأله مینیم سازی (۳.۱) در فضایی با بعد کمتر، از روش آرنولدی بلوکی تعمیم یافته برای جفت عملگر (M, M') استفاده می‌شود. الگوریتم این روش با ایجاد کردن تغییرات اندکی در الگوریتم موجود در [۱]، بدست می‌آید.

ماتریس اولیه این الگوریتم $(V_1^{(\circ)}, \dots, V_p^{(\circ)}) = V^{(\circ)}$ ، $V_i^{(\circ)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $i = 1, \dots, p$ و همچنین خروجی این الگوریتم ماتریس‌های H_M و $H_{M'}$ می‌باشند. این ماتریس‌ها مشابه H_A و H_L موجود در الگوریتم ۱ واقع در [۱] می‌باشند. با به کار بردن k گام از این الگوریتم ماتریس بلوکی $\mathcal{V} = [V_1, \dots, V_{2k+1}]$ تولید می‌شود که V_i ها ماتریس‌های $-F$ متعامدی می‌باشند که از الگوریتم فرایند آرنولدی بلوکی تعمیم یافته بدست آمده‌اند.

به راحتی می‌توان روابط زیر را که از الگوریتم مذکور بدست می‌آیند، ثابت کرد:

$$M(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(:, 1 : n\alpha_k p) ((H_M \otimes I_p) \otimes I_n), \quad (1.2)$$

$$M'(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(:, 1 : n\beta_k p) ((H_{M'} \otimes I_p) \otimes I_n). \quad (2.2)$$

حل معادلات ماتریسی بدوضع

در [۱] به چگونگی انتخاب پارامترهای α_k و β_k موجود در روابط فوق، پرداخته شده است.

۳. حل مسأله با استفاده از منظم ساز تیخونوف

اکنون با استفاده از الگوریتم فرایند آرنولدی مذکور، می توان جواب را در فضایی با بعد کمتر بدست آورد. در اینجا $\mathbb{E}_k = \text{span}\{V_1, \dots, V_k\}$ به عنوان فضای مورد نظر در نظر گرفته می شود، بنابراین:

$$X_k \in \mathbb{E}_k \implies X_k = \sum_{i=1}^k Y_k^i V_i = \mathcal{V}_k((Y_k \otimes I_p) \otimes I_n)$$

که

$$\mathcal{V}_k = [V_1, \dots, V_{k+1}].$$

بنابراین بجای حل مسأله مینیم سازی (۳.۱) می توان مسأله مینیم سازی زیر را حل کرد:

$$\min\{\|\mathcal{M}(X_k) - G\|_F^2 + \lambda\|\mathcal{M}'(X_k)\|_F^2\}. \quad (۱.۳)$$

از گزاره زیر به منظور ساده کردن مسأله فوق استفاده می شود.

گزاره ۱.۳. فرض کنید تصویر F - متعامد ماتریس G روی زیر فضای $\mathbb{E}_r$ به صورت

$\tilde{G} = \mathcal{V}_r(z_G \otimes I_p) \otimes I_n$ نشان داده شود و $z_G = (\langle V_1, G \rangle_F, \dots, \langle V_r, G \rangle_F)^T$ ، $V_1, \dots, V_r$ ماتریس های F - متعامدی می باشند که از الگوریتم مذکور بدست آمده اند،

$g, z \in \mathbb{R}^r$ ، آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$\langle \mathcal{V}_r(z \otimes I_p) \otimes I_n, \mathcal{V}_r(g \otimes I_p) \otimes I_n \rangle_F = \langle z, g \rangle_r \quad (۱)$$

$$\langle \mathcal{V}_r(z \otimes I_p) \otimes I_n, G \rangle_F = \langle z, z_G \rangle_r \quad (۲)$$

$$\|G - \tilde{G}\|_F^2 = \|G\|_F^2 - \|z_G\|_r^2 \geq 0 \quad (۳)$$

$$\|\mathcal{V}_r(z \otimes I_p) \otimes I_n - G\|_F^2 = \|z - z_G\|_r^2 + \|G\|_F^2 - \|z_G\|_r^2 \quad (۴)$$

اکنون با استفاده از روابط (۱.۲)، (۲.۲) و گزاره ۱.۳، مسأله مینیم سازی (۱.۳) به صورت زیر تغییر می کند:

$$\min\{\|H_{\mathcal{M}}Y_k - z_G\|_r^2 + \lambda\|H_{\mathcal{M}'}Y_k\|_r^2\}. \quad (۲.۳)$$

حل مساله (۲.۳) از حل مسأله کمترین مربعات زیر حاصل می شود:

$$Y'_{k,\lambda} = \operatorname{argmin}\left\|\begin{bmatrix} H_{\mathcal{M},k} \\ \sqrt{\lambda}H_{\mathcal{M}',k} \end{bmatrix} Y_{k,\lambda} - \begin{bmatrix} z_G \\ 0 \end{bmatrix}\right\|_r. \quad (۳.۳)$$

با حل معادله زیر می توان به مینیم کننده مسأله (۳.۳) دست یافت:

$$H_{\lambda,k}Y_{k,\lambda} = H_{\mathcal{M},k}^T z_G, \quad H_{\lambda,k} = (H_{\mathcal{M},k}^T H_{\mathcal{M},k} + \lambda H_{\mathcal{M}',k}^T H_{\mathcal{M}',k}). \quad (۴.۳)$$

ف. سلیمانی ساردو، ع. ریواز، و ن. عزیزی زاده

به منظور حل معادله (۴.۳) ابتدا باید پارامتر λ را باید پیدا کرد. روش‌های مختلفی برای پیدا کردن این پارامتر وجود دارد، از جمله این روش‌ها تابع GCV می‌باشد که در زیر به آن پرداخته می‌شود:

$$GCV(\lambda) = \frac{\|H_{\mathcal{M},k}Y_{k,\lambda} - z_G\|_2^2}{[trac(I - H_{\mathcal{M},k}H_{\lambda,k}^{-1}H_{\mathcal{M},k}^T)]^2}. \quad (۵.۳)$$

با استفاده از (۴.۳) معادله فوق به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$GCV(\lambda) = \frac{\|(I_{\alpha_k} - H_{\mathcal{M},k}H_{\lambda,k}^{-1}H_{\mathcal{M},k}^T)z_G\|_2^2}{[trac(I_{\alpha_k} - H_{\mathcal{M},k}H_{\lambda,k}^{-1}H_{\mathcal{M},k}^T)]^2}. \quad (۶.۳)$$

به منظور ساده سازی (۶.۳) می‌توان از تجزیه مقدار تکی‌ن تعمیم یافته $(H_{\mathcal{M},k}, H_{\mathcal{M}',k})$ استفاده کرد.

$$H_{\mathcal{M},k} = U_k C_k Z_k, \quad H_{\mathcal{M}',k} = V_k S_k Z_k \quad (۷.۳)$$

که $U_k \in \mathbb{R}^{\alpha_k \times \alpha_k}$ و $V_k \in \mathbb{R}^{\beta_k \times \beta_k}$ ماتریس‌هایی متعامد می‌باشند و $C_k = diag[c_1, \dots, c_k] \in \mathbb{R}^{\alpha_k \times k}$, $S_k = diag[s_1, \dots, s_k] \in \mathbb{R}^{\beta_k \times k}$ ماتریس‌هایی قطری با درایه‌های نامنفی می‌باشند و همچنین $Z_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ماتریسی نامنفرد می‌باشد. اگر روابط بالا را در تابع GCV جایگزین شود آنگاه رابطه زیر بدست می‌آید:

$$GCV(\lambda) = \frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^k (\frac{s_i^2 \tilde{b}_i}{c_i + \lambda s_i})^2 + \sum_{i=k+1}^{\alpha_k} \tilde{b}_i^2}{(\sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{c_i + \lambda s_i} - \alpha_k)^2} \quad (۸.۳)$$

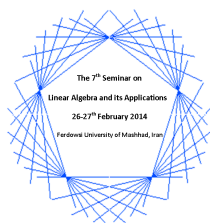
که

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{\alpha_k} \end{bmatrix} = U_k^T z_G.$$

بنابراین با مینیمم سازی (۸.۳) می‌توان λ را محاسبه کرد سپس با جایگزینی آن در (۴.۳)، $Y_{k,\lambda}$ را بدست آورد.

مراجع

1. A. Bohamidi, K. Jbilou, L. Reichel, H. Sadok, *A generalized global Arnoldi method for ill-posed matrix equations*, J. Comput. Appl. Math. (2011), 2078-2089.
2. F. Panjeh Ali Beik, D. Khojasteh Salkuyeh, *On the global Krylov subspace methods for solving general coupled matrix equations*, J. Comput. Appl. Math. (2011), 4905-4613.



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

محاسبه نرخ نویز سیگنال ECG به کمک فیلتر و موجک

فهمیه ولی زاده^۱ * و رجبعلی کامیابی گل^۲

^۱ گروه ریاضی دانشکده علوم پایه دانشگاه تهران مرکز
fahimehvalizade@yahoo.com

^۲ گروه ریاضی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی
kamyabi@math.um.ac.ir

چکیده. در سال‌های اخیر، سیگنال‌های الکتروکاردیوگرام (ECG) نقش مهمی را در تشخیص اولیه، پیش‌بینی و تحلیل بیماری قلبی برعهده داشته‌اند. سیگنال ECG ، سیگنالی متغیر با زمان است که فعالیت الکتریکی قلب را اندازه می‌گیرد. در زمان حاضر که انواع وسایل الکتریکی و مکانیکی در فضایی محدود مشغول به کار بوده به سادگی می‌توانند روی یکدیگر اثر بگذارند که منجر به پیدایش نویزها^۱ می‌شوند، بنابراین در هنگام ثبت یک سیگنال همواره عواملی ناخواسته موجودند که مانع دریافت عینی و واقعی سیگنال می‌شوند. برای از بین بردن این نویزها و عوامل ناخواسته از فیلترها استفاده می‌شود، اساس کار فیلترها جداسازی سیگنال‌ها بر اساس فرکانس و در واقع حذف نویز می‌باشد. فیلترها به بیان ریاضی همان عملگرهایی هستند که به صورت ماتریس^۲ در دو حوزه زمان و فرکانس قابل تعریف می‌باشند. در این پژوهش برای کاهش نویز سیگنال ECG از فیلترها در مرحله آنالیز و بازسازی و از موجک‌ها در مرحله پردازش سیگنال ECG استفاده شده است که به نتایج خوبی در رابطه با کاهش نویز سیگنال ECG رسیده شده است.

۱. پیش‌گفتار

سیگنال ECG نمایانگر تغییر در پتانسیل الکتریکی در طی سیکل قلبی است که توسط الکترودهای سطحی روی بدن ثبت می‌گردد. مشخصات شکل این سیگنال نتیجه پتانسیل عملی است که داخل قلب انتشار می‌یابد و سبب انقباض قسمت‌های مختلف عضله قلب می‌گردد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. سیگنال قلبی (ECG)، فیلترها، ماتریس، موجک‌ها.

SIGNAL NOISE RATIO
ELECTROCARDIOGRAM (ECG)
FILTER
WAVELET

* سخنران

ف. ولی زاده و ر. کامیابی گل

در هنگام ثبت سیگنال همیشه مساله‌ای که با آن روبرو هستیم به وجود آمدن نویز در سیگنال است. بدین ترتیب کاهش نویز سیگنال ECG به منظور تجزیه و تحلیل دقیق‌تری از سیگنال‌های موجود و در نتیجه تشخیص و تحلیل بهتر از وضعیت قلبی دارای اهمیت است. هر نوسان و تغییر غیر عمدی که بر روی سیگنال‌های مورد اندازه‌گیری ظاهر می‌شود نویز نامیده می‌شود. برای از بین بردن نویزها از فیلترها استفاده می‌شود که به نوعی معرف همان عملگرها می‌باشند.

تعریف ۱.۱. یک فیلتر دیجیتال H یک عملگر خطی کران‌دار $l^2 \rightarrow l^2$ است که در زمان تغییرتأخیر است. در مراحل مختلف فیلتر برای هر ورودی x ، یک خروجی $yx = Hx$ به دست می‌دهد چون H خطی است عمل کاملاً به وسیله خروجی‌های He_j تعیین می‌شود که یک پالس e_j برای $j = 0, \pm 1, \dots$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}, \quad x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e_n \quad (1.1)$$

ماتریس نامتناهی H ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = [H_{mn}] \text{ s.t. } H_{mn} := \langle He_n, e_m \rangle \quad (2.1)$$

بنابراین

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{mn} x(n), \quad He_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{mn} e_m, \quad (3.1)$$

برحسب عناصر ماتریس زمان تغییرتأخیر است و این بدین معنا است که:

$$H_{mn} = \langle He_n, e_m \rangle = \langle He_{n+k}, e_{m+k} \rangle = H_{m+k, n+k} \quad (4.1)$$

بنابراین عناصر ماتریس H_{mn} فقط وابسته به $m - n$ های مختلف است یعنی $H_{mn} = h(m - n)$ که توسط ضرایب $h(j)$ تعیین می‌گردد. ماتریس H_{mn} که عناصر ماتریس فقط وابسته به تفاضل سطر و ستون $(m - n)$ است را یک ماتریس تویپلیتز-هنکل^۲ می‌نامند. از عملگرهایی که به عنوان فیلتر بر روی سیگنال تأثیرگذار هستند می‌توان عملگرهای کاهش و افزایش نرخ نمونه‌برداری^۳ و عملگرهای تأخیری و تعجیلی^۴ را نام برد.

تعریف ۲.۱ (آنالیز با تک فیلتر). فرض کنید یک بانک فیلتر با دو فیلتر FIR (اگر فقط یک تعداد متناهی از ضرایب $h(n)$ غیر صفر باشند) H_0 و H_1 داشته باشیم، ورودی به صورت $X = \{x(n)\}$ و خروجی فیلترها به صورت $Y_j = H_j X$ برای $j = 0, 1$ است. هر سطر از ماتریس برابر صفر است و به طور مشابه هر سطر ماتریس نامتناهی H_1 نیز به جز برای دوره‌های $(h_1(N), h_1(N - 1), \dots, h_1(0))$ برابر صفر است و هر بردار سطری دارای نرم مشابه فیلتر H_1 را به وسیله فیلتر نرمال شده D جایگزین می‌کنیم:

$$C = \frac{1}{\|h_0\|} H_0, \quad D = \frac{1}{\|h_1\|} H_1 \quad (5.1)$$

^۱ digital filter

^۲Toeplitz-Henkel

^۳Down and Up sampling operators

^۴Dilay and Advance operators

محاسبه نرخ نویز سیگنال^۶ ECG به کمک فیلتر^۸ و موجک^۹

حال خروجی فیلترهای C و D را با اعمال عملگرهای کاهش نرخ نمونه برداری به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$L = (\downarrow 2)(C) = \frac{1}{\|h_o\|}(\downarrow 2)H_o, \quad B = (\downarrow 2)(D) = \frac{1}{\|h_1\|}(\downarrow 2)H_1 \quad (6.1)$$

حال می‌توان ماتریس‌های L و B را با هم در یک ماتریس بلوکی $H_t[B^L]$ در دامنه زمانی عمل^۵ ماتریس H_t در قسمت آنالیز بانک فیلتر قرار دهیم. این همان فیلتر اصلی است که در آن سطرهای فرد پاک شده‌اند.

گزاره ۳.۱. یک بانک فیلتر دومسیره به ما بهترین بازسازی را می‌دهد در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

- (۱) اعوجاج نداشته باشد.
- (۲) هم اثرسازی از بین رفته باشد.

۲. دستاوردهای پژوهش

در این پژوهش به جز استفاده از فیلترها، در مرحله پردازش از موجک‌ها استفاده شده است و به کاهش نویز سیگنال ECG پرداخته شده است و در مرحله نویزدایی از موجک‌های متنوع و فیلترهای پایین گذر و بالاگذر و جعبه ابزار موجک در نرم‌افزار متلب استفاده کرده‌ایم. داده‌های این پژوهش از پایگاه داده آریتمی MIT – BIH انتخاب گردیده که شامل ۴۸ ثبت دوکاناله الکتروکاردیوگرام است که توسط آزمایشگاه آریتمی BIH در بین سال‌های ۱۹۷۵-۱۹۷۹ بوده است. این داده‌ها در ۳۶۰ نمونه بر ثانیه و با فیلتر پایین گذر بر روی برد ۱/۰ - ۱۰۰ تنظیم شده است. از بین این داده‌ها به طور تصادفی ۱۵ داده را انتخاب نموده‌ایم و برای سیگنال‌های دریافت شده (SNR) نرخ نویز سیگنال محاسبه شده است که نتایج به صورت زیر ارائه می‌شود.

روش کار:

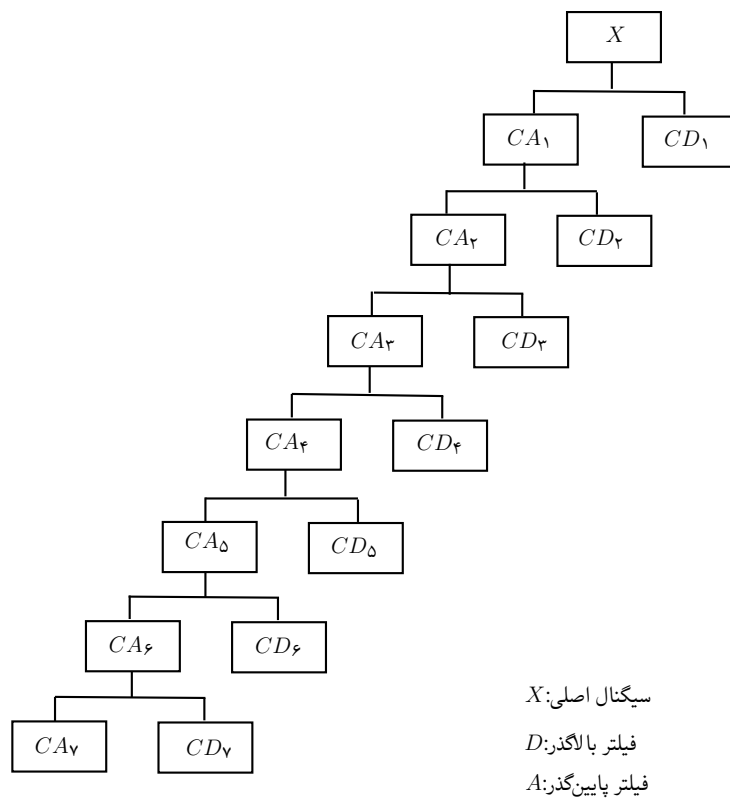
سیگنال ECG مورد نظر را در ۷ سطح تجزیه کرده و هر سیگنال با دو سطح فیلتر پایین گذر و بالاگذر آغاز می‌شود که دارای دو شرط اعوجاج و هم اثرسازی نباشد. نرخ نویز سیگنال (SNR) به معنای میزان تفاوت بین نویز موجود در سیگنال اصلی و سیگنال بعد از استفاده از فیلتر است. نرخ نویز سیگنال از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$SNR = 10 \log \frac{\sum_{n=0}^N V_R^2(n)}{\sum_{n=0}^N S_R^2(n)} = \frac{\text{میزان توان سیگنال}}{\text{میزان توان نویز}} \quad (1.2)$$

و در نهایت اختلاف توان نویزی سیگنال ورودی و خروجی برای هر سیگنال ECG در سه باند اصلی فرکانس ECG و در کل باند فرکانسی سیگنال محاسبه شده که نتایج نشان دهنده بهترین خروجی با موجک $bd1$ بوده است. اما برای تست و اطمینان از کارهای تجربی که انجام شده سیگنالی را سبیه‌سازی کرده مجدداً SNR محاسبه شد و در این مرحله به این نتیجه رسیده شد که موجک $bd4$ بهترین خروجی را داشته است.

^۵Action

ف. ولی زاده و ر. کامیابی گل

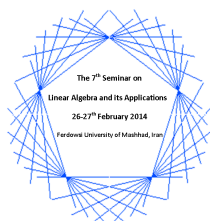


شکل ۱: روند تجزیه سیگنال‌ها

در واقع SNR ، به عنوان یک شاخص کمی برای بهبود خروجی معرفی می‌شود و با استفاده از فیلترها و تجزیه موجکی می‌توان به نتایج قابل بحثی در مورد سیگنال ECG رسید.

مراجع

۱. پایان‌نامه کارشناسی ارشد / پردازش سیگنال‌های بیولوژی به کمک موجک‌ها / فهیمه ولی‌زاده / سال ۱۳۹۲ / دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد.
2. Boggess, A., Narcowich, F. S., *A first course in wavelets with fourier analysis*, 2nd Ed, Wiley, (2009).
3. Miller, W., *Lecture notes and background materials for math 5467*, Introduction to the mathematics of wavelets, (2006).
4. Rangaayyan Ranagaraj, M., "Biomedical signal analysis", A case-study approach, Calgary, Alberta, Canada, (2001).
5. Weeks, M., *Digital signal processing using matlab and wavelets*, Georgia state university, Infinity science press (LLC), (2006).



چکیده مبسوط سخنرانی‌های هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای ماتریس‌های تصادفی دوگانه

صادق زیبایی^۱ * و جواهر لنگری^۲

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان
s.zibaei@stu.vru.ac.ir
^۲ گروه ریاضی، دانشگاه کوثر بجنورد
javaherlangari61@yahoo.com

چکیده. در این مقاله به حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای ماتریس‌های تصادفی دوگانه می‌پردازیم. ابتدا الگوریتمی کارا که از طریق ماتریس‌های هاوس هولدر و رتبه یک به روز می‌شود را برای حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس متقارن معرفی می‌کنیم سپس شرایط کافی که تضمین کننده ماتریس‌های تصادفی دوگانه است را بیان می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس (IEP) از تنوع جالب توجهی برخوردارند و کاربردهای فراوانی در آنالیز عددی، نظریه کنترل، فیزیک کاربردی، مکانیک کاربردی و مسأله‌ی اشتورم-لیوویل و غیره دارند. هدف اصلی یک IEP ساخت پارامترهای فیزیکی نظیر جرم، طول، خاصیت رسانایی و ... یک سیستم معین با استفاده از رفتار دینامیکی مورد نظر یا مشاهده شده می‌باشد. به طور خاص در جبر خطی عددی هدف یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس ساخت یک ماتریس با خصوصیات طیفی معین می‌باشد، که این داده‌های طیفی ممکن است شامل اطلاعات کامل و یا جزئی از مقادیر یا بردارهای ویژه باشند [۱]. فرض کنید $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. اگر یک ماتریس نامنفی مانند A با طیف Λ وجود داشته باشد، گوئیم Λ مشخص شدنی است، بعلاوه اگر A متقارن نیز باشد، گوئیم Λ به طور متقارن مشخص شدنی است. هدف اصلی مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس نامنفی ($NIEP$) و

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 15A18; Secondary 15A19.

واژگان کلیدی. مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس، ماتریس‌های تصادفی دوگانه، ماتریس‌های هاوس هولدر.
* سخنران

مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس متقارن نامنفی ($SNIEP$) پیدا کردن شرایط لازم و کافی است، به طوری که طیف Λ به ترتیب مشخص شدنی و به طور متقارن مشخص شدنی باشد. البته طیف Λ باید مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، زمانی که به طور متقارن مشخص شدنی است. این مسائل سال‌های زیادی توجه محققین را به خود جلب کردند، اما هر دوی آن‌ها بی‌جواب باقی ماندند. مشکل اصلی آن‌ها کمیابی الگوریتم‌های عددی سودمند برای ساختن ماتریس‌هایی با طیف تعیین شده بود. این مقاله در دو بخش ۲ و ۳ تنظیم شده است. در بخش ۲ الگوریتمی را برای حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس متقارن معرفی می‌کنیم. شرایط کافی را برای این که ماتریس بدست آمده از الگوریتم معرفی شده یک ماتریس تصادفی دوگانه متقارن نامنفی باشد، در بخش ۳ ارائه می‌شود.

۲. حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس متقارن

مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس متقارن ($SyIEP$) به صورت زیر بیان می‌شود.

مسأله ۱: هدف این مسأله یافتن یک ماتریس حقیقی و متقارن $B \in M_n(\mathbb{R})$ با طیف داده شده‌ی $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ و بردار ویژه‌ی مثبت معلوم x می‌باشد.

قضیه ۱.۰۲. فرض کنید $\{(\mu_i, u_i)\}_{i=1}^n$ جفت ویژه‌های ماتریس $A, n \times n$ باشند به طوری که برای هر $j \neq i$ ، $u_i^T u_j = 0$ و $v_k = \frac{(\mu - \mu_k)u_k}{u_k^T u_k}$ در این صورت $\{(\mu_i, u_i)\}_{i=1, i \neq k}^n$ و (μ, u_k) جفت ویژه‌های ماتریس $A + u_k v_k^T$ هستند [۲].

برای حل مسأله ۱، ماتریس اولیه‌ی متقارن A را در قضیه ۱.۰۲ طوری انتخاب می‌کنیم که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی آن به آسانی محاسبه شوند. بنابراین بهتر است ماتریس متقارن اولیه یک ماتریس رتبه یک باشد. از سوی دیگر بردار مثبت x در مسأله ۱ باید یک بردار ویژه‌ی ماتریس A باشد. بنابراین ماتریس $A = xx^T$ ، یک انتخاب خوب است. فرض کنید I ماتریس همانی و H یک ماتریس هاوس هولدر باشد. i امین ستون I را با e_i و i امین ستون H را با h_i نشان می‌دهیم. اکنون قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۲.۰۲. فرض کنید $A = xx^T$ ، که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $x > 0$ و $Hx = \|x\|_2 e_1$. در این صورت

(۱) ستون‌های H یک مجموعه از بردارهای ویژه‌ی متعامد A را تشکیل می‌دهند.

(۲) $h_1 = \frac{x}{\|x\|_2}$ و $x^T x h_1 h_1^T = A$.

فرض کنید ماتریس $A = xx^T$ ماتریس توصیف شده باشد. در این صورت با استفاده از الگوریتم زیر می‌توانیم یک جواب برای مسأله‌ی ۱ بدست آوریم.

الگوریتم ۱:

(۱) بردار مثبت x و طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را به عنوان ورودی دریافت کن و مقدار اولیه‌ی ماتریس B را برابر صفر قرار بده،

(۲) ماتریس هاوس هولدر H را طوری محاسبه کن که $Hx = \|x\|_2 e_1$ ،

حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس برای ماتریس‌های تصادفی دوگانه

$$(۳) \text{ برای } i = 1, 2, \dots, n, B \leftarrow B + \lambda_i h_i h_i^T,$$

$$(۴) h_1, B \text{ را به عنوان خروجی چاپ کن.}$$

نتیجه ۳.۲. B یک جواب مسأله ۱ است، هرگاه بر طبق الگوریتم ۱ محاسبه شده باشد و

$$h_1 = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

۳. مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس تصادفی دوگانه

هر ماتریس $n \times n$ ، A با درایه‌های حقیقی، نامنفی گفته می‌شود اگر تمام درایه‌هایش نامنفی باشند. اگر مجموع هر سطر و ستون ماتریس A مساوی ثابت r باشد آن‌گاه A را یک ماتریس تصادفی دوگانه r -تعمیم یافته گویند. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های تصادفی دوگانه r -تعمیم یافته با عناصر حقیقی را با $\Omega^r(n, \mathbb{R})$ نمایش می‌دهند. در حالت خاص اگر $r = 1$ باشد آن‌گاه $\Omega^1(n, \mathbb{R})$ با عناصر نامنفی را ماتریس‌های تصادفی دوگانه گویند که از اهمیت خاصی برخوردارند.

حال مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس تصادفی دوگانه حقیقی ($RDIEP$) به صورت زیر بیان می‌شود.

مسأله ۲: فرض کنید $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. هدف این مسأله پیدا کردن شرایط لازم و کافی است به طوری که Λ طیف یک ماتریس تصادفی دوگانه حقیقی باشد.

قضیه‌ی زیر شرایط کافی را برای این که ماتریس حاصل از الگوریتم ۱، یک ماتریس تصادفی دوگانه متقارن نامنفی باشد را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $x = e = (1, 1, \dots, 1)^T$ و ماتریس هاوس هولدر H در الگوریتم ۱، تعیین شده باشد. فرض کنید $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ که $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ، برای هر $j \neq i$ ، $\lambda_i \neq \lambda_j$ ، $2 \leq i, j < n$. اگر نامساوی‌های

$$\min_{2 \leq i \leq n} b_{ii} = \frac{\lambda_1}{n} + \frac{\sum_{s=2}^n \lambda_s}{n(\sqrt{n}-1)^2} + \frac{(n-\sqrt{n}-2) \min_{2 \leq i \leq n} \lambda_i}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)} \geq 0, \quad (۱.۳)$$

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n} \geq 0, \min_{2 \leq j \leq n} b_{1j} = \frac{\lambda_1}{n} - \frac{\sum_{s=2}^n \lambda_s}{n(\sqrt{n}-1)} + \frac{\min_{2 \leq j \leq n} \lambda_j}{\sqrt{n}} \geq 0, \quad (۲.۳)$$

$$\min_{2 \leq i < j \leq n} b_{ij} = \frac{\lambda_1}{n} + \frac{\sum_{s=2}^n \lambda_s}{n(\sqrt{n}-1)^2} - \frac{\max_{2 \leq i, j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j)}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)} \geq 0, \quad (۳.۳)$$

برقرار باشند آن‌گاه

(۱) $(n-1)!$ ماتریس تصادفی دوگانه نامنفی λ_1 -تعمیم یافته در $\Omega^{\lambda_1}(n, \mathbb{R})$ وجود دارند که می‌توانند طیف Λ را مشخص کنند.

(۲) بزرگترین مقدار ویژه‌ی λ_1 ، باید ریشه‌ی پرون متناظر با بردار پرون e باشد.

(۳) بعلاوه اگر تمام درایه‌های ماتریس بدست آمده را بر λ_1 تقسیم کنیم ماتریس تصادفی دوگانه متقارن نامنفی بدست می‌آید.

مثال ۲.۳. فرض کنید $\Lambda = \{3, 1, -2, -2\}$ و $x = e$. در این صورت ماتریس

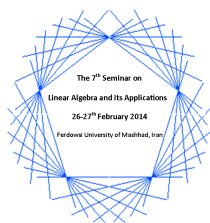
$$B_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0/5 & 0/5 \\ 2 & 0 & 0/5 & 0/5 \\ 0/5 & 0/5 & 0 & 2 \\ 0/5 & 0/5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{3, 1, -2, -2\}$$

ماتریسی با مقدار ویژه‌ی پرون ۳ و بردار ویژه‌ی پرون متناظر e می‌باشد. همچنین $B_{\Lambda} \in \Omega^2(3, \mathbb{R})$ و $\frac{B_{\Lambda}}{3}$ ماتریس تصادفی دوگانه متقارن نامنفی می‌باشد.

مراجع

1. M.T. Chu, G.H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems Theory, Algorithms, and Application*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 2005.
2. S.-x. Zhu, T.-x. Gu, X.-p. Liu, *Solving inverse eigenvalue problems via Householder and rank-one matrices*, Linear Algebra Appl. 430 (2009), 318–334.

پوسترها



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

نسبیت خاص، پارادوکس دوقلوها و فضاهاى ضرب داخلی

محمد الباجی *

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز
mohammad.albaji@yahoo.com

چکیده. در این مقاله به بیان پارادوکس دوقلوها پرداخته و سپس انعطاف پذیری جبر خطی در تولید هندسه ای ناقلیدسی برای توجیه این پارادوکس آشکار می شود

۱. پیش گفتار

یک جفت دوقلو را در نظر بگیرید که در یک زمان متولد می شوند. یکی از دوقلوها در زمین باقی می ماند و دیگری بلافاصله پس از تولد توسط موشکی به طرف ستاره ی آلفا که در فاصله ۴ سال نوری از زمین است، با سرعت $v = 0.8c$ پرتاب می شود و بلافاصله پس از رسیدن به آلفا با همان سرعت به طرف زمین برمی گردد. لذا برای دوقلو ۱ که در زمین باقی مانده این سفر به مدت ۱۰ سال طول می کشد:

$$\text{سال } 10 = \frac{\text{فاصله کل سفر بر حسب سال نوری}}{\text{سرعت حرکت بر حسب سرعت نور}} = \frac{8}{0.8}$$

اما از نظر قضیه نسبیت خاص زمانی که دوقلوی ۲ به زمین برمی گردد، هم سن برادرش نیست و سن او از رابطه زیر که همان اثر معروف اتساع زمان است، بدست می آید:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 83AXX; Secondary 15AXX.

واژگان کلیدی. نسبیت خاص، فضاهاى ضرب داخلی، هندسه مینکوفسکی، پارادوکس دوقلوها.
* سخنران

که در آن Δt سن دوقلوی ۱ ، Δt_0 سن دوقلوی ۲ ، v سرعت موشک و c سرعت نور است. لذا داریم:

$$10 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0.64}} = \frac{\Delta t_0}{0.6} \Rightarrow \Delta t_0 = 6$$

و این یعنی در لحظه ی رسیدن دوقلوی ۲ به زمین او فقط ۶ سال سن دارد!!!

۲. تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲. یک فضای ضرب داخلی روی فضای برداری X ، تابعی است که به هر زوج از بردارهای u, v از X عددی را با نماد $\langle u, v \rangle$ متناظر میکند. این تابع برای هر بردار u, v و w از x و هر اسکالر c در خواص زیر صدق میکند:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle v, u \rangle \quad (1) \\ \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (2) \\ \langle cu, v \rangle &= c \langle u, v \rangle \quad (3) \\ \langle u, u \rangle &\geq 0 \text{ و } \langle u, u \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } u = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

تعریف ۲.۲. فرض کنیم x یک فضای ضرب داخلی باشد. نرم بردار v که با $\|v\|$ مشخص می شود عبارت است از:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

تعریف ۳.۲. X را یک فضای ضرب داخلی در نظر بگیرید. فاصله دو بردار (نقاط) u, v از X که با $d(u, v)$ نشان داده می شود، از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

۳. نسبیت خاص و فضاها ی ضرب داخلی

از فضای برداری R^4 برای نمایش فضا-زمان استفاده میکنیم چون شامل ۴ مختصات: ۳ مختصات فضا (x_1, x_2, x_3) و یک مختص زمان (x_4) است. ضرب های داخلی زیادی وجود دارند که میتوانیم در R^4 قرار دهیم و هر کدام به یک هندسه منجر میشوند. هیچ کدام از این ضرب های داخلی با نتایج آزمایش مورد نظر مطابقت ندارند ، اما با در نظر نگرفتن چهارمین اصل موضوع ضرب داخلی (ذکر شده در تعریف ۱-۲) یک شبه ضرب داخلی خواهیم داشت که با نتایج هندسه مورد نظر ما تطابق خواهد داشت . این هندسه که به هندسه مینکوفسکی معروف است ، اولین بار توسط هرمان مینکوفسکی مطرح گردید.

فرض کنیم $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ دو عضو دلخواه از R^4 باشند. تابع $\langle X, Y \rangle$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle X, Y \rangle = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$$

نسبیت خاص، پارادوکس دوقلوها و فضاهای ضرب داخلی

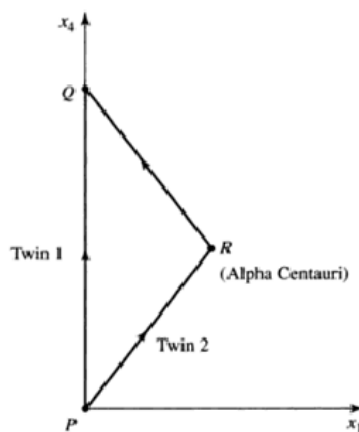
توجه کنید که درواقع $\langle X, Y \rangle$ یک ضرب داخلی نیست و اصل چهارم ضرب داخلی مثلا برای بردار $u = (1, 1, 1, 1)$ برقرار نمی باشد. اکنون برای این شبه ضرب داخلی، نرم بردارها و فاصله نقاط را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\|X\| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$$

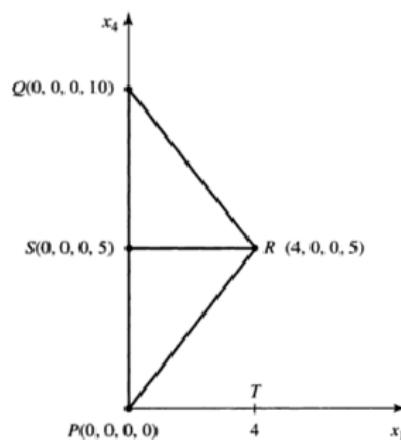
$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{|\langle X - Y, X - Y \rangle|}$$

$$= \sqrt{|-(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2|}$$

حال میبینیم که چگونه این هندسه برای توصیف رفتار زمان برای این سفر فضایی به کار میرود. دیاگرام فضا-زمان را رسم میکنیم. برای سهولت میتوانیم فرض کنیم که ستاره آلفا در راستای محور x_1 زمین قرار دارد. در این دیاگرام دوقلوی زمینی در راستای محور x_4 (زمان) حرکت میکند در حالی که دوقلوی فضایی هم در محور زمان و هم در راستای صعودی محور x_1 در سفر رفت و سپس در راستای نزولی محور x_1 در سفر برگشت حرکت میکند. دیاگرام فضا-زمان در شکل ۱-۳ نشان داده شده است.



شکل ۱-۳



شکل ۲-۳

برای دوقلوی ۱ داریم:

$$\text{سال } 10 = \frac{\text{فاصله کل سفر بر حسب سال نوری}}{\text{سرعت حرکت بر حسب سرعت نور}} = \text{زمان سفر بر حسب سال}$$

که از دیدگاه هندسی نشان میدهد که: $PQ = 10$

و برای دوقلوی ۲: به دیاگرام شکل ۲-۳ توجه کنید. فرض کنید P مبدا $(0, 0, 0, 0)$ در R^4 باشد. چون $PQ = 10$ ، نقطه Q $(0, 0, 0, 10)$ و نقطه S $(0, 0, 0, 5)$ میباشد. PT فاصله فضایی ستاره آلفا از زمین، یعنی ۴ سال نوری است بنابراین R نقطه $(4, 0, 0, 5)$ خواهد بود. اینک با استفاده از هندسه مینکوفسکی فاصله P و R را حساب می کنیم:

$$d(P, R) = \|(\mathfrak{O}, \circ, \circ, \mathfrak{F}) - (\circ, \circ, \circ, \circ)\|$$

$$= \sqrt{|-(\mathfrak{F} - \circ)^2 - (\circ - \circ)^2 - (\circ - \circ)^2 + (\mathfrak{O} - \circ)^2|}$$

$$= \sqrt{|-16 + 25|} = \sqrt{9} = 3$$

و به روش مشابه در این هندسه داریم: $d(R, Q) = 3$.

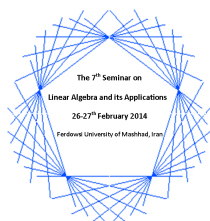
$d(R, P) = 3$ نشان می‌دهد که زمان سفر دوقلوی ۲ از P به R ، ۳ سال و زمان بازگشتش از نقطه R به Q نیز طبق $d(R, Q) = 3$ ، ۳ سال به طول انجامد، لذا در سفر فضاپیما مجموع سفر برای دوقلوی ۲، ۶ سال است.

در نتیجه وقتی دوقلوها همدیگر را در نقطه Q ملاقات می‌کنند، دوقلوی ۱، ۱۰ ساله و دوقلوی ۲، ۶ ساله است.

انعطاف پذیری ریاضیات و در اینجا انعطاف پذیری جبر خطی برای توجیه پدیده‌هایی که از آنها با عنوان پارادوکس نام می‌برند، زیبایی و جذابیت این علم را دوچندان می‌کند.

مراجع

۱. ر. رزنیک، آشنایی با نسبیت خاص، ترجمه جعفر گودرزی. چاپ هشتم. مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۸۶.
۲. ک. کرین، فیزیک جدید، ترجمه منیژه رهبر، بهرام معلمی. چاپ سوم. مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۸۶
3. C. G. Darwin, *the clock paradox in relativity*, nature, 180, 976 (1957).
4. Williams and Gareth, *Linear Algebra*, Jones and Bartlett Publishers, London 2001.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

قضایای نقطه ثابت برای یک رده از نگاشت های تعمیم یافته غیر انبساطی

قاسم علی پور

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز
gasemalipour@yahoo.com

چکیده. در این مقاله ابتدا رده جدید از نگاشت های تعمیم یافته غیرانبساطی به نام شرط (C) معرفی می‌گردد. شرطی که ضعیف تر از غیرانبساطی ها و قوی تر از شبه غیرانبساطی ها می‌باشد و نیز وجود نقاط ثابت این نگاشت ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱. پیش‌گفتار

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی از آن باشد. نگاشت $T : C \rightarrow X$ یک نگاشت غیرانبساطی نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم
$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و C زیر مجموعه‌ای ناتهی از X باشد. گوییم نگاشت $T : C \rightarrow X$ در شرط (C) روی C صدق می‌کند هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{3} \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \implies \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

تعریف ۳.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و C زیر مجموعه ناتهی از X باشد نگاشت $T : C \rightarrow X$ نگاشت شبه غیرانبساطی گفته می‌شود هرگاه $F(T) \neq \emptyset$ و برای هر $x_0 \in F(T)$ و هر $y \in C$ داشته باشیم

$$\|x_0 - Ty\| \leq \|x_0 - y\|.$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47H10; Secondary 47H09, 40A05, 52A41.

واژگان کلیدی. نگاشت غیرانبساطی، نگاشت شبه غیرانبساطی، نقطه ثابت.

ق. علی پور

تعریف ۴.۱. گوییم فضای نرم‌دار X در شرط آپتال^۱ صدق می‌کند هرگاه برای هر دنباله (x_n) از اعضای X که همگرایی ضعیف به x_0 باشد، داشته باشیم

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

به ازای هر $x \in X$ با شرط $x \neq x_0$.

تعریف ۵.۱. فضای باناخ X در هر مسیر محدب یکنواخت^۲ نامیده می‌شود (به اختصار $UCED$) اگر برای هر $\epsilon \in (0, 2]$ و $z \in X$ با $\|z\| = 1$ ، $\delta(\epsilon, z) > 0$ ای موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ با $\|x\| \leq 1$ و $\|y\| \leq 1$ و $x - y \in \{tz : t \in [-2, -\epsilon] \cup [\epsilon, 2]\}$ داشته باشیم

$$\|x + y\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon, z)).$$

۲. ویژگی های اساسی

گزاره ۱.۲. هر نگاشت غیرانبساطی در شرط (C) صدق می‌کند.

گزاره ۲.۲. فرض کنید نگاشت $T : C \rightarrow X$ در شرط (C) صدق می‌کند و حداقل یک نقطه ثابت دارد. آنگاه T نگاشت شبه غیرانبساطی است.

برهان. فرض کنید $z \in F(T)$ و $x \in C$. چون $\|z - x\| \leq \|z - Tz\| = \frac{1}{\gamma} \|z - Tz\|$ و در شرط (C) صدق می‌کند پس

$$\|z - Tx\| \leq \|Tz - Tx\| \leq \|z - x\|$$

یعنی T شبه غیرانبساطی است. $\square$

از تلفیق دو گزاره فوق به نتیجه زیر دست می‌یابیم.

نتیجه ۳.۲. همه نگاشت های غیرانبساطی با حداقل یک نقطه ثابت شبه غیرانبساطی هستند.

مثال ۴.۲. نگاشت T روی $[0, 3]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = 3 \\ 0 & x \neq 3 \end{cases} \quad (1.2)$$

آنگاه نگاشت T در شرط (C) صدق می‌کند و T غیرانبساطی نیست.

مثال ۵.۲. نگاشت T روی $[0, 3]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T(x) = \begin{cases} 2 & x = 3 \\ 0 & x \neq 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

آنگاه $F(T) \neq \emptyset$ و T شبه غیرانبساطی است در صورتی که T در شرط (C) صدق نمی‌کند و غیرانبساطی نیست.

^۱Opial

^۲Uniformly convex in every direction

قضایای نقطه ثابت برای یک رده از نگاشت های تعمیم یافته غیر انبساطی

لم ۶.۲. برای فضای باناخ X عبارات زیر معادلند:

الف) X یک $(UCED)$ است.

ب) اگر (x_n) یک دنباله کراندار در X باشد، آنگاه تابع f روی X که باضابطه

$$f(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

تعریف می شود اکیداً شبه محدب [۱] است [۳].

لم ۷.۲. فرض کنید T یک نگاشت روی زیر مجموعه بسته C از فضای باناخ X بوده و در شرط

(C) صدق کند، آنگاه $F(T)$ بسته است. به علاوه، اگر X اکیداً محدب و C محدب باشد آنگاه $F(T)$ محدب است. [۳]

لم ۸.۲. فرض کنید T یک نگاشت روی زیر مجموعه محدب و کراندار C از فضای باناخ X

بوده و T در شرط (C) صدق کند. همچنین فرض کنید $x_1 \in C$ و $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1)$. دنباله (x_n) در C را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{n+1} = \lambda T x_n + (1 - \lambda)x_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n - x_n\| = 0$. [۳].

لم ۹.۲. فرض کنید T یک نگاشت روی زیر مجموعه C از فضای باناخ X بوده و T در شرط

(C) صدق کند. در این صورت نامساوی

$$\|x - T y\| \leq 3 \|T x - x\| + \|x - y\|$$

برای هر $x, y \in C$ برقرار است [۲].

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید T یک نگاشت بر زیر مجموعه محدب و فشرده C از فضای باناخ X

بوده و T در شرط (C) صدق کند. همچنین فرض کنید $x_1 \in C$ و $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1)$. دنباله (x_n) در C را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{n+1} = \lambda T x_n + (1 - \lambda)x_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

آنگاه (x_n) به یک نقطه ثابت از T همگرایی قوی است. [۳]

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید T یک نگاشت روی زیر مجموعه محدب و فشرده ضعیف C از فضای

باناخ X با ویژگی اپیال بوده و T در شرط (C) صدق کند. دنباله (x_n) را در C با $x_1 \in C$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{n+1} = \lambda T x_n + (1 - \lambda)x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

و $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1)$ آنگاه (x_n) همگرایی ضعیف به یک نقطه ثابت از T می باشد [۳].

۳. قضایای وجودی

در این بخش، قضایای وجودی نقطه ثابت برای نگاشت هایی که در شرط (C) صدق می کنند

ارائه شده است. قضیه زیر مستقیماً از قضایای (۱۰.۲) و (۱۱.۲) بدست می آید.

ق. علی پور

قضیه ۱.۳. فرض کنید T یک نگاشت روی زیر مجموعه محدب C از فضای باناخ X بوده و در شرط (C) صدق کند. اگر T در یکی از شرایط زیر صدق کند،
الف) C فشردده است.
ب) C فشردده ضعیف است و X ویژگی اپیال دارد.
آنگاه T نقطه ثابت دارد.

قضیه ۲.۳. فرض کنید C یک زیر مجموعه محدب و فشردده ضعیف از فضای باناخ $(UCED)$ X باشد و T نگاشتی روی C بوده به طوری که T در شرط (C) صدق کند. آنگاه T نقطه ثابت دارد [۳].

۴. دست آوردهای پژوهش

در نهایت وجود نقاط ثابت مشترک برای خانواده ای از توابع را ثابت می کنیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید C یک زیر مجموعه محدب و فشردده ضعیف از فضای باناخ $(UCED)$ X باشد و فرض کنید S یک خانواده از نگاشت های تعویض پذیر روی C و صادق در شرط (C) باشد. آنگاه S نقطه ثابت مشترک دارد

برهان. فرض کنید $T_1, T_2, T_3, \dots, T_l \in S$. مطابق قضیه (۲.۳)، T_1 لااقل یک نقطه ثابت در C دارد به عبارتی $F(T_1) \neq \emptyset$. مطابق لم (۷.۲)، $F(T_1)$ بسته و محدب است. فرض کنید (فرض استقراء) $A := \bigcap_{j=1}^{k-1} F(T_j)$ مجموعه ناتهی، بسته و محدب برای عدد طبیعی k با $1 < k \leq l$ باشد. برای $j \in \mathbb{N}$ با $1 \leq j < k$ چون $T_k \circ T_j = T_j \circ T_k$ لذا برای $x \in A$

$$T_k x = T_k \circ T_j x = T_j \circ T_k x.$$

بنابر این $T_k x$ یک نقطه ثابت T_j می باشد و لذا $T_k x \in A$ و در نتیجه $T_k(A) \subset A$. بنابر قضیه (۲.۳)، T_k یک نقطه ثابت در A دارد، یعنی

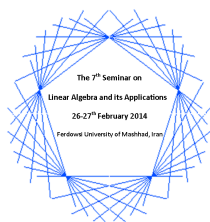
$$A \cap F(T_k) = \bigcap_{j=1}^k F(T_j) \neq \emptyset.$$

بنابر لم (۷.۲) این مجموعه بسته و محدب می باشد.

به عبارتی دیگر، مجموعه $\{F(T) : T \in S\}$ خاصیت اشتراک متناهی دارد. چون C فشردده ضعیف است لذا داریم $\bigcap_{T \in S} F(T) \neq \emptyset$. $\square$

مراجع

1. R. P. Agarwal, D. O Regan and D. R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with Applications, Topological Fixed point Theory and Its Applications*, Vol. 6, Springer, New York, 2009.
2. S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 65–71.
3. T. Suzuki, *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 1088–1095.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

MFS برای معادله دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان موج

پروین بقائی شهرکی^۱ * و عبدالله قلیزاده^۲

^۱گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری
parvinbaghaie@yahoo.com
^۲Gholizadeh@sttu.ac.ir

چکیده. در این مقاله نشان می‌دهیم که چگونه یک معادله دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان مرتبه دوم (معادله موج) با فرموله کردن این معادله در جملاتی از معادله هلمهلتز تعمیم‌یافته ناهمگن به‌طور عددی حل می‌شود. با استفاده از جواب‌های خصوصی تحلیلی که برای این معادلات بدست آمده، مسئله مقدار مرزی حاصل به حل معادله هلمهلتز ناهمگن منجر می‌شود که به‌طور مؤثری با استفاده از روش جواب‌های اولی (MFS) انجام می‌شود. الگوریتم حاصل کاراست از این جهت که به گسسته‌سازی دامنه یا مرز نیاز ندارند.

۱. پیش‌گفتار

روش‌های مرزی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی، ابزار مناسبی جهت حل بسیاری از مسائل مهندسی هستند. به‌ویژه، روش‌های ترفتنز مثل MFS^۱. اما برای معادلات هذلولوی و سهموی موقعیت کمتر رضایت‌بخش است و روش‌های مرزی برای این معادلات کمتر توسعه یافته است. یک مشکل بزرگ فرمول‌بندی سنتی محاسبه دامنه انتگرال بزرگ است که محاسبه آن وقت‌گیر است. یک راه حل استفاده از تکنیک‌های DRM^۲ است که کارآمد ولی طاقت‌فرسا می‌باشد. در این مقاله یک شیوه برای حل مسائل وابسته به زمان به‌دست می‌آوریم که گسسته‌سازی

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. روش جواب اولی، جواب خصوصی، اسپلاین‌های چندهمساز، معادله موج.
* سخنران

^۱Method of Fundamental Solution

^۲Dual Reciprocity techniques

دامنه یا مرز لازم نیست. این کار با اتصال MFS با جواب‌های خصوصی معادله هلمهلتز ناهمگن به‌دست آمده، انجام می‌شود و سمت راستشان از اسپلاین‌های صفحه نازک^۳ و مراتب بالاتر استفاده می‌شود. الگوریتم با نشان دادن این‌که چگونه مسائل مقدار مرزی به ازای معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان به حل معادله هلمهلتز ناهمگن کاهش می‌یابد، حاصل می‌شود. ناهمگنی با استفاده از جواب‌های خصوصی به‌دست آمده در [۳] حذف می‌شود. معادله همگن حاصل با استفاده از روش‌های مرزی مختلفی حل می‌شود. همان‌طور که نشان خواهیم داد MFS یک روش بسیار کارا برای انجام این کار است.

دو روش تبدیل لاپلاس و تفاضل متناهی در زمان برای تبدیل مسائل وابسته به زمان به مستقل از زمان استفاده می‌شود. در بخش ۲ این روش‌ها را برای معادله موج در $\mathbb{R}^2$ به‌کار می‌بریم و در بخش ۳ به بررسی روش‌هایی برای جواب خصوصی معادله هلمهلتز ناهمگن می‌پردازیم.

۲. معادله موج

مسئله مقدار مرزی اولیه برای معادله موج به صورت

$$\Delta u(P, t) = u_{tt}(P, t), \quad P \in D \subseteq \mathbb{R}^d, d = 2, 3, \quad t > 0 \quad (1.2)$$

که D یک دامنه مرزی در $\mathbb{R}^d, d = 2, 3$ است. برای سادگی، شرایط مرزی دیریکله

$$u(P, t) = g(P, t), \quad P \in \partial D, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

و شرایط اولیه

$$u(P, 0) = u_0, \quad u_t(P, 0) = v_0, \quad P \in D \quad (3.2)$$

را در نظر می‌گیریم. مسئله مقدار مرزی اولیه (IBVP) ۱.۲-۳.۲ یک جواب منحصر به فرد تحت شرایط کلی روی ∂D و g دارد. برای حل عددی ۱.۲-۳.۲، دو شیوه در نظر می‌گیریم: (۱) تبدیل لاپلاس در t و (۲) تفاضل متناهی در t . تبدیل لاپلاس را به صورت

$$\hat{u}(P, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(P, t) dt, \quad s > M \quad (4.2)$$

تعریف می‌کنیم. ۴.۲ را برای ۱.۲-۳.۲ به‌کار می‌بریم که $\hat{u}$ در مسئله مقدار مرزی

$$\Delta \hat{u}(P, s) - s\hat{u}(P, s) = -su_0 - v_0 \equiv m(P, s), \quad P \in D \quad (5.2)$$

$$\hat{u}(P, s) = \hat{g}(P, s) \quad P \in \partial D. \quad (6.2)$$

صدق می‌کند. تعریف می‌کنیم $v = \hat{u} - u_p$ ، که u_p یک جواب خصوصی برای ۵.۲ است و v در

$$\Delta v(P, s) - sv(P, s) = 0, \quad P \in \partial D, \quad (7.2)$$

$$v(P, s) = g(P, s) - u_p(P, s), \quad P \in \partial D. \quad (8.2)$$

صدق می‌کند. حال معادلات ۷.۲-۸.۲ با استفاده از روش‌های مرزی مثل MFS [۱] حل می‌شوند. در MFS، جواب ۷.۲ با

$$v(P, s) \simeq v_n(P, s) = \sum_{k=1}^n a_k G(P, Q_k; s), \quad (9.2)$$

^۳Think plate Splines

تقریب زده می‌شود که $G(P, Q; s)$ جواب اولی برای $\Delta - s$ است و $\{Q_k\}_1^n$ نقاط منبع روی سطح ساختگی S شامل D هستند. $\{a_k\}_1^n$ از طریق هم‌محلی با جایگذاری

$$\sum_{k=1}^n a_k G(P_j, Q_k; s) = g(P_j, s) - u_p(P_j, s), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (10.2)$$

تعیین می‌شوند. که $\{P_j\}_1^n$ ، n نقطه متمایز روی ∂D هستند. v_n تعیین شده، تقریب $\hat{u}$ با

$$\hat{u}_n = v_n + u_p \quad (11.2)$$

حاصل می‌شود. به این ترتیب تقریب u_n برای u از طریق معکوس عددی $\hat{u}_n$ به دست می‌آید. جواب خصوصی ۴.۲ با

$$u_p(P, s) = \int_{\hat{D}} G(P, Q, s) m(Q, s) dv, \quad (12.2)$$

به دست می‌آید که $\hat{D}$ دامنه شامل D می‌باشد. $\hat{D}$ یک دایره در $\mathbb{R}^2$ یا کره در $\mathbb{R}^3$ است. معادله ۱۲.۲ منجر به یک انتگرال می‌شود که با روش‌های عددی استاندارد محاسبه می‌شود. اگرچه این شیوه کاراست، وقتی $G(P, Q; s)$ در $\mathbb{R}^2$ یک تابع بسل است ناکاراست. با استفاده از تعمیم روش پوچ‌ساز^۴، جواب‌های خصوصی برای معادلات دیفرانسیل معمولی را به دست می‌آوریم. در [۲] نشان داده شده که چگونه این استدلال برای محاسبه جواب‌های خصوصی تحلیلی توسعه داده شده است، که اسپلاین‌های چندهم‌ساز مرتبه بالاتر به عنوان عناصر پایه استفاده می‌شوند که در بخش ۳ بیشتر بررسی می‌شود.

به خاطر این که معکوس عددی تبدیل لاپلاس یک مسئله بدوضع است، الگوریتم بالا ممکن است برای همه مسائل مفید نباشد. برای غلبه بر این مشکل، از تفاضل متناهی به جای تبدیل لاپلاس در زمان استفاده می‌کنیم.

یک کلاس از این روش‌ها، روش θ است [۳]. فرض کنید $\tau > 0$ و شبکه $t_n = n\tau$ برای $n \geq 0$ را تعریف می‌کنیم. به ازای $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ ، $u(P, t)$ را برای $(0 \leq \theta \leq 1)$ با

$$u(P, t) \simeq \theta u(P, t_{n+1}) + (1 - \theta) u(P, t_n) \quad (13.2)$$

تقریب می‌زنیم. بنابراین

$$\Delta u(P, t) \simeq \theta \Delta u(P, t_{n+1}) + (1 - \theta) \Delta u(P, t_n) \quad (14.2)$$

و

$$u_{tt} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\tau^2} \quad (15.2)$$

با جایگذاری ۱۴.۲-۱۵.۲ در ۱۰.۲ و نشان دادن تقریب حاصل $u(P, t_n) \equiv u_n(P)$ با $v_n, v_n(P)$ در

$$\theta \Delta v_{n+1} + (1 - \theta) \Delta v_n = \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{\tau^2} + f_n \quad (16.2)$$

بنابراین $(f_n \equiv f(P, t_n))$ و برای $\theta = 1$ شکل تفاضل پسرو به دست می‌آید.

$$\Delta v_{n+1} - \frac{v_{n+1}}{\tau^2} = \frac{v_{n-1} - 2v_n}{\tau^2} + f_n \quad (17.2)$$

^۴Annihilator

۳. جواب‌های خصوصی برای اسپلاین‌های چندهمساز

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، رویکردمان برای حل معادله موج مستلزم است که قادر به محاسبه جواب‌های خصوصی برای عملگر $\Delta - \lambda^2$ با انتخاب مناسب طرف راست این عملگر باشیم. در [۲] نشان داده شده است که فرم بسته جواب‌های خصوصی برای اسپلاین‌های صفحه نازک به دست می‌آید. چون این توابع می‌توانند به طور دلخواه مرتبه‌های بالاتری از تقریب را فراهم کنند برای کارهای عددی بسیار مناسب هستند. در اینجا مروری به این نتایج داریم.

حل معادله

$$\Delta \psi - \lambda^2 \psi = f \quad (۱.۳)$$

را در نظر می‌گیریم که f یک اسپلاین چندهمساز است، یعنی

$$f(P) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j^{[n]}(r_j) + p_n, \quad (۲.۳)$$

که

$$\varphi_j^{[n]}(r_j) = r_j^{2n} \log r_j, \quad n \geq 1 \quad (۳.۳)$$

که p_n یک چندجمله‌ای از درجه n است، $r_j = \|P - P_j\|$ و $\{P_j\}_1^N$ مجموعه‌ای از نقاط نامعلوم برای درونیابی چندجمله‌ای است. اگر $\{a_j\}_1^N$ در

$$\sum_{j=1}^N a_j b_i(P_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq l_n \quad (۴.۳)$$

صدق کند، آنگاه برای f مفروض یک اسپلاین چندهمساز منحصربه‌فرد $\hat{f}$ به فرم ۲.۳ روی $\{P_j\}_1^N$ وجود دارد. پس از این، جواب‌های خصوصی تقریبی را برای $(\Delta - \lambda^2)u_p = f$ به دست می‌آوریم f را با $\hat{f}$ تقریب می‌زنیم و $\hat{u}_p = (\Delta - \lambda^2)\hat{u}_p = \hat{f}$ را حل می‌کنیم. با توجه به کیفیت خطی بودن کافی است که

$$(\Delta - \lambda^2)\psi_j^{[n]} = \varphi_j^{[n]}. \quad (۵.۳)$$

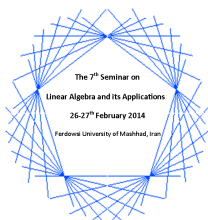
حل کنیم. در [۳] $\psi_j^{[n]}$ به شکل $\psi_j^{[n]}(r_j) = \psi_j^{[n]}$ است که

$$\psi^{[n]}(r) = AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r) + \sum_{k=1}^{n+1} c_k r_j^{2k-2} \log r + \sum_{k=1}^{n+1} d_k r_j^{2k-2} \quad (۶.۳)$$

جزئیات و اثبات در [۳] داده شده است.

مراجع

1. M.A Golberg, *The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems*, (1999), 105-176.
2. M.A. Golberg, C.S. Chen, *The annihilator method for computing particular solutions to partial differential equations*, Engineering Analysis with Boundary elements, 23 (1999), 267-274.
3. A.S.Muleshkov, M.A. Golberg, C.S. Chen, *Particular solutions of Helmholtz-type operators using higher order polyharmonic splines* submitted for publication.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

پارامتر بهینه برای خانواده‌ی روش‌های چبیشف-هالی

سعید بهبودی سوها^{۱*}، سید مصطفی رجائی صدیق^۲، و لیلا جعفری^۳

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه زنجان

saeed.sbs88@yahoo.com

rs-math@yahoo.com

^۳ گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شبستر

leylla-1366@yahoo.com

چکیده. در این مقاله یک پارامتر مناسب برای خانواده‌ی روش‌های چبیشف - هالی برای حل معادلات غیرخطی پیدا می‌کنیم که بر خلاف روش‌های چبیشف - هالی از جمله روش اویلر، روش چبیشف، روش هالی و روش سوپر هالی، این پارامتر دیگر دلخواه نیست بلکه با استفاده از نقطه تقریب اولیه (نزدیک ریشه) و معادله داده شده و مشتق اول و دوم آن بدست می‌آید. نتایج عددی کارایی روش ارائه شده را تأیید می‌کنند.

۱. پیش‌گفتار

معروفترین خانواده‌ی توابع تکراری برای $f: V \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ روشی است که در آن $\varphi(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود [۹]:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 + \frac{L_f(x)}{2(1 - \lambda L_f(x))} \right], \quad (1.1)$$

که در آن

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

و λ یک پارامتر حقیقی دلخواه است. این روش‌ها، روش‌های چبیشف - هالی^۱ نامیده می‌شوند که از دسته روش‌های مرتبه سه هستند [۹]، برخی از حالات خاص این روش‌ها عبارتند از:

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47J25; Secondary 41A25, 65D99, 39B12.

واژگان کلیدی. روش‌های تکراری، معادلات غیر خطی، پارامتر مناسب، روش‌های چبیشف - هالی.
* سخنران

^۱Chebyshev-Halley

س. بهبودی سوها، س.م. رجائی صدیق، و.ل. جعفری

روش چبیشف^۲ که با قرار $\lambda = 0$ بدست می‌آید:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 + \frac{1}{2} L_f(x) \right],$$

روش هالی^۳ که با انتخاب $\lambda = \frac{1}{2}$ حاصل می‌شود:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 + \frac{L_f(x)}{2 - L_f(x)} \right],$$

روش سوپر- هالی^۴ که در خصوص $\lambda = 1$ بدست می‌آید:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 + \frac{L_f(x)}{2(1 - L_f(x))} \right],$$

توجه کنید که در (۱.۱) وقتی $\lambda \rightarrow \pm\infty$ ، روش نیوتن معمول حاصل می‌شود:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

که جزء روش‌های مرتبه‌ی دوم است.

استخراج روش جدید

همانطوری که ملاحظه شد در روش‌های تکراری بالا مقدار پارامتر λ به صورت دلخواه و ثابت در روش‌های مذکور برای تخمین ریشه‌ی هر معادلات داده شده به کار می‌رود که در بعضی تخمین‌ها با مشکل روبه رو می‌شویم [۵] (به بخش نتایج عددی مراجعه کنید)، حال در اینجا روشی را برای پیدا کردن پارامتر مناسب برای رابطه (۱.۱) ارائه می‌دهیم. طرف راست رابطه (۱.۱) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 + \frac{L_f(x)}{2(1 - \lambda L_f(x))} \right].$$

در این صورت λ را طوری محاسبه می‌کنیم که $H(x)$ مینیمم شود، به همین خاطر از $H(x)$ مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم:

$$H'(x) = \left(\frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)L_f}{2f'(x)(1 - \lambda L_f)} \right)' = 0, \quad (2.1)$$

^۲Chebyshev

^۳Chebyshev-Halley

^۴Super-Halley

بنابراین:

$$\begin{aligned} & \frac{(f'(x)^2 - f(x)f''(x))(2(1 - \lambda L_f))^2}{(2f'(x)(1 - \lambda L_f))^2} \\ & + \frac{(f'(x)L_f + f(x)L'_f)2f'(x)(1 - \lambda L_f)}{(2f'(x)(1 - \lambda L_f))^2} \\ & - \frac{f(x)L_f(2f''(x)(1 - \lambda L_f) - 2\lambda f'(x)L'_f)}{(2f'(x)(1 - \lambda L_f))^2} = 0, \end{aligned}$$

حال صورت کسر را مساوی صفر قرار داده و بر حسب λ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (f'(x)^2 - f(x)f''(x))(2(1 - \lambda L_f))^2 \\ & + (f'(x)L_f + f(x)L'_f)2f'(x)(1 - \lambda L_f) \\ & - f(x)L_f(2f''(x)(1 - \lambda L_f) - 2\lambda f'(x)L'_f) = 0, \end{aligned}$$

که در این صورت بعد از محاسبات ساده، Δ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Delta = & (6f'(x)^2 L_f^2 - 8L_f f'(x)^2 + 2f'(x)^2 L_f^2)^2 - (16(f'(x)^2 - f(x)f''(x)) \times \\ & (4f'(x)^2 - 4f(x)f''(x) + 2f'(x)^2 L_f + 2f(x)f'(x)L'_f - 2f(x)f''(x)L_f)). \end{aligned}$$

فرض کنید که تقریب اولیه x_n یک تقریب قابل قبولی برای ریشه‌ی تکراری از مرتبه بزرگتر از یک باشد در این صورت $1 \ll \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ پس Δ کوچکتر از صفر خواهد شد که در این حالت $H'(x) \neq 0$ است [۹]. پس صورت کسر رابطه (۲۰۱) صفر نمی‌شود پس برای بدست آوردن نقطه بحرانی ریشه مخرج (۲۰۱) را مساوی صفر قرار می‌دهیم که در این صورت داریم:

$$\lambda = \frac{f'(x)^2}{f(x)f''(x)} = \frac{1}{L_f}. \quad (3.1)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید پارامتر λ بدست آمده به $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ و x معادله داده شده بستگی دارد.

تذکر: به منظور جلوگیری از صفر شدن مخرج و مشکلات محاسباتی عبارت سمت راست (۱۰۱)،

همواره قرینه λ ای که از رابطه (۳۴) بدست می‌آید را استفاده می‌کنیم یعنی: $\lambda^* = -\frac{1}{L_f}$ در اینجا به λ^* پارامتر بهینه^۵ می‌گوییم.

۲. نتایج عددی

در این بخش روش ارائه شده با پارامتر بهینه را با روش‌های تکراری خانواده چیشف - هالی با ارائه مثال‌هایی مقایسه می‌کنیم.

معادلات زیر را با استفاده از روش‌های مذکور حل کرده و تعداد تکرارهای هر معادله را با استفاده

^۵Optimal parameter

از هر روش محاسبه نموده و در جدول ۱ آورده‌ایم.
این مثالها تحت نرم افزار (MATLAB) نوشته شده‌اند. معیار توقف الگوریتم‌ها با در نظر گرفتن $|f(x_n)| < \epsilon$, $\epsilon = 10^{-15}$ انتخاب شده است.

$$(a) f(x) = e^x - 3x^2, \quad x^* = 9100075724887090.$$

$$(b) f(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \quad x^* = 1/3652300134140969.$$

$$(c) f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, \quad x^* = 0/25753028543986084.$$

$$(d) f(x) = xe^{(x^2)} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5, \\ x^* = -1/20764782713091893.$$

$$(e) f(x) = x^3 - 10, \quad x^* = 2/15443469003188372.$$

$$(f) f(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1, \quad x^* = 1/4044916482153411.$$

$$(g) f(x) = e^{(x^2+7x-30)} - 1, \quad x^* = 3.$$

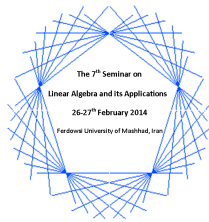
جدول ۱: مقایسه تعداد تکرارهای روش‌های نیوتن، هالی، چپیشف، سوپر-هالی با روش ارائه شده با پارامتر بهینه

روش ارائه شده	روش سوپر-هالی	روش چپیشف	روش هالی	روش نیوتن	تقریب اولیه	معادله
۴	۵	۴	۵	۶	۱	(a)
۶	واگرا	۶	واگرا	واگرا	-۰.۵	(b)
۴	۴	۴	۴	۴	۰.۵	(c)
۵	۵	۵	۵	۷	-۱.۲۵	(d)
۵	۵	۵	۵	۶	۲	(e)
۵	۵	۷	۶	۸	۱	(f)
۵	۵	واگرا	۵	واگرا	۲.۹۰	(g)

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌کنید روش ارائه شده در این مقاله در تعداد تکرارهای کم‌تری نسبت به روش‌های دیگر به ریشه‌ی مورد نظر با دقت مطلوب همگرا شده است.

مراجع

1. C. hangbum, *A one-parameter family of third-order methods to solve nonlinear equations*, Appl. Math. 189 (2007), 126–130.
2. D. Jiang, D. Han, *Some one-parameter families of third-order methods for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput. 195 (2008), 392–396.
3. J.M. Gutie´rrez, M.A. Herna´ndez, *An acceleration of Newton’s method: Super-Halley method*, Appl. Math. Comput. 117 (2001), 223–239.
4. S. Kumar, V. Kanwar and S. Singh, *On some modified families of multipoint iterative methods for multiple roots of nonlinear equations*, Appl. Math. 218 (2012), 7382–7394.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

کران بالای جدیدی برای شعاع طیفی حاصل ضرب آدامار دو ماتریس نامنفی

سیده مریم حسینی^۱ * و مهدی پناهی^۲

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند
^۱maryamhosseini@birjand.ac.ir
^۲mpanahi@birjand.ac.ir

چکیده. فرض کنید A و B دو ماتریس نامنفی باشند. در این مقاله کران بالای جدیدی برای شعاع طیفی حاصل ضرب آدامار ماتریس‌های A و B ارائه می‌شود. این کران تنها به درایه‌های A و B وابسته است، بنابراین به راحتی قابل محاسبه می‌باشد.

۱. پیش‌گفتار

برای عدد صحیح مثبت n ، قرار می‌دهیم $N = \{1, \dots, n\}$. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ مختلط و مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی به ترتیب با نماد $\mathbb{C}^{n \times n}$ و $\mathbb{R}^{n \times n}$ نشان داده می‌شوند.

فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس $n \times n$ حقیقی باشند. می‌نویسیم $A \geq B$ ($> B$)، هرگاه $a_{ij} \geq b_{ij}$ ($> b_{ij}$) برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$. هرگاه $A \geq 0$ (> 0)، گوئیم A یک ماتریس نامنفی (مثبت) است. شعاع طیفی A با $\rho(A)$ نشان داده می‌شود. اگر A یک ماتریس نامنفی باشد، آنگاه قضیه پرون-فروبنیوس تضمین می‌کند که $\rho(A) \in \sigma(A)$ ، که در آن $\sigma(A)$ ، طیف A را نشان می‌دهد [۱].

حاصل ضرب آدامار ماتریس‌های $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ به صورت $A \circ B \equiv (a_{ij}b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ تعریف می‌شود. لی در سال ۲۰۱۰ میلادی کرانی برای شعاع طیفی حاصل ضرب آدامار دو ماتریس نامنفی ارائه نمود [۲]. در این مقاله کران جدیدی برای $\rho(A \circ B)$ که در آن A و B ماتریس‌های نامنفی هستند، ارائه می‌گردد و نشان داده می‌شود که این کران از کران ارائه شده توسط لی بهتر است.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 15A06; Secondary 15A15.

واژگان کلیدی. ماتریس نامنفی، ضرب آدامار، شعاع طیفی.

* سخنران

۲. کران بالای جدیدی برای $\rho(A \circ B)$

فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های قطری ناصفر باشد. برای هر $i, j, k \in N$ قرار می‌دهیم

$$R_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|, \quad d_i = \frac{R_i}{|a_{ii}|};$$

$$m_{ji} = |a_{ji}|h_j, \quad h_j = \begin{cases} d_j, & d_j \neq 0, \\ 1, & d_j = 0, \end{cases} \quad m_i = \max_{i \neq j} \{m_{ji}\}.$$

نتیجه‌ی زیر در سال ۲۰۱۰ میلادی توسط لی و همکارانش ثابت شد [۲]:
اگر $A = (a_{ij}) \geq 0$ و $B = (b_{ij}) \geq 0$ ، آن‌گاه

$$\rho(A \circ B) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii}b_{ii} + m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \right\}. \quad (1.2)$$

در زیر کران بالای جدیدی برای $\rho(A \circ B)$ ارائه می‌شود که در آن A و B ماتریس‌های نامنفی می‌باشند. این کران تنها به درایه‌های A و B وابسته است، بنابراین به راحتی قابل محاسبه می‌باشد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ دو ماتریس نامنفی باشند. در این صورت

$$\rho(A \circ B) \leq \max_{i \neq j} \frac{1}{2} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4m_i m_j \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \sum_{l \neq j} \frac{b_{lj}}{h_l} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.2)$$

توجه ۲.۲. در ادامه یک مقایسه‌ی ساده بین کران بالای (۲.۲) و کران بالای (۱.۲) ارائه می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، برای $j \neq i$ فرض کنید که

$$a_{ii}b_{ii} + m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \geq a_{jj}b_{jj} + m_j \sum_{l \neq j} \frac{b_{lj}}{h_l}. \quad (3.2)$$

پس (۳.۲) را می‌توان به طور معادل به صورت

$$m_j \sum_{l \neq j} \frac{b_{lj}}{h_l} \leq a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj} + m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k},$$

کران بالای جدیدی برای مقادیر ویژه

نوشت. از (۲.۲)، داریم

$$\begin{aligned}
 & a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}m_i m_j \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \sum_{l \neq j} \frac{b_{lj}}{h_l} \right]^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \\
 & \leq a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \right. \\
 & \quad \left. + (\mathfrak{r}m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k})^{\mathfrak{r}} \right]^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \\
 & = a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj} + \mathfrak{r}m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k})^{\mathfrak{r}} \right]^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \\
 & = a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj} + \mathfrak{r}m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \\
 & = \mathfrak{r}a_{ii}b_{ii} + \mathfrak{r}m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k}.
 \end{aligned}$$

بنابراین از (۲.۲) و نامساوی فوق داریم

$$\begin{aligned}
 \rho(A \circ B) & \leq \max_{i \neq j} \frac{1}{\mathfrak{r}} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^{\mathfrak{r}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mathfrak{r}m_i m_j \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \sum_{l \neq j} \frac{b_{lj}}{h_l} \right]^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \right\} \\
 & \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\mathfrak{r}} \left\{ \mathfrak{r}a_{ii}b_{ii} + \mathfrak{r}m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \right\} \\
 & = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii}b_{ii} + m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \right\}.
 \end{aligned}$$

در نتیجه کران بالا در (۲.۲) بهتر از کران بالا در (۱.۲) است.

مثال ۳.۲. ماتریس‌های نامنفی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

س.م. حسینی و م. پناهی

را در نظر بگیرید. با به کارگیری (۱۰۲)، داریم

$$\rho(A \circ B) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii}b_{ii} + m_i \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \right\} = ۲۳/۲,$$

$$\rho(A \circ C) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_{ii}c_{ii} + m_i \sum_{k \neq i} \frac{c_{ki}}{h_k} \right\} = ۷.$$

اما با استفاده از قضیه ۱۰۲، داریم

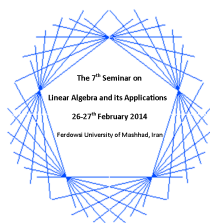
$$\rho(A \circ B) \leq \max_{i \neq j} \frac{1}{4} \left\{ a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + \left[(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4m_i m_j \sum_{k \neq i} \frac{b_{ki}}{h_k} \sum_{l \neq j} \frac{b_{lj}}{h_l} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = ۲۱/۸۶۴۶,$$

$$\rho(A \circ C) \leq \max_{i \neq j} \frac{1}{4} \left\{ a_{ii}c_{ii} + a_{jj}c_{jj} + \left[(a_{ii}c_{ii} - a_{jj}c_{jj})^2 + 4m_i m_j \sum_{k \neq i} \frac{c_{ki}}{h_k} \sum_{l \neq j} \frac{c_{lj}}{h_l} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = ۶/۰۲۲.$$

با توجه به این که $\rho(A \circ B) = ۲۰/۷۴۳۹$ و $\rho(A \circ C) = ۵/۶۴۰۷$ ، مثال فوق نشان می‌دهد که کران (۲۰۲) نسبت به کران (۱۰۲) بهتر است.

مراجع

1. A. Berman, R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
2. Y.T. Li, Y.Y. Li, R.W. Wang, Y.Q. Wang, *Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices*, Linear Algebra Appl. 432 (2010), 536–545.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

کاربرد تجزیه مقدار تکین در الگوگذاری تصویر

مریم رحیمیان^۱ * و اصغر کرایه چیان^۲

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۱ maryam.rahimian@yahoo.com

^۲ krachian@um.ac.ir

چکیده. در این مقاله روش جدیدی برای الگوگذاری تصویر با استفاده از تجزیه مقدار تکین ارائه می‌دهیم. این روش مبتنی بر بلوکی سازی ماتریس تصویر بوده و روش ارائه شده توسط بن حسین [۲] را بهبود می‌بخشد و موجب افزایش مقاومت الگوی جاسازی شده و افزایش میزان نامرئی بودن تصویر الگوگذاری شده می‌گردد. نتایج آزمایشی نشان می‌دهند که روش پیشنهاد شده می‌تواند در بهبود بخشیدن به کیفیت تصویر الگوگذاری شده و مقاومت الگوی جاسازی شده در برابر فشرده سازی مؤثر باشد.

۱. مقدمه

امروزه رشد روز افزون تکنولوژی ارتباطات و عرضه محصولات چندرسانه ای در شبکه، باعث نگرانی تولید کنندگان این محصولات از فعالیت‌های غیرمجازی همچون دستکاری محصولات و یا عرضه مجدد آن‌ها شده است. این موضوع به روش‌هایی برای حفظ داده‌های دیجیتالی در مقابل کپی‌ها و یا دستکاری‌های غیرمجاز نیاز دارد. الگوگذاری تصویر یکی از روش‌های مفید برای حفاظت از حق چاپ و نشر و اثبات مالکیت است و به روش‌های مختلفی صورت می‌گیرد [۲، ۳]. در این مقاله روش جدیدی مبتنی بر بلوکی کردن تصویر و روش ارائه شده توسط بن حسین [۲] ارائه می‌دهیم. بعلاوه با آزمایشات عددی نشان خواهیم داد که این روش موجب افزایش مقاومت الگوی جاسازی شده و افزایش میزان نامرئی بودن تصویر الگوگذاری شده می‌گردد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. تجزیه مقدار تکین، الگوگذاری تصویر، فشرده سازی تصویر، نرخ سیگنال رآسی به نویز.

* سخنران

جدول ۱: روش‌های جاسازی الگو

M^3 جاسازی Σ	M^2 جاسازی U, V	M^1 جاسازی U, Σ, V
$U_{iw} = U_i$	$U_{iw} = (1-t)U_w + tU_i$	$U_{iw} = (1-t)U_w + tU_i$
$\Sigma_{iw} = (1-t)\Sigma_w + t\Sigma_i$	$\Sigma_{iw} = \Sigma_i$	$\Sigma_{iw} = (1-t)\Sigma_w + t\Sigma_i$
$V_{iw} = V_i$	$V_{iw} = (1-t)V_w + tV_i$	$V_{iw} = (1-t)V_w + tV_i$

۲. یک روش جدید برای الگوگذاری تصویر

فرایند الگوگذاری شامل دو مرحله می‌باشد؛ جاسازی الگو و استخراج الگو. مالک تصویر، برای جلوگیری از استفاده غیرمجاز از تصویرش داخل تصویر الگویی را جاسازی می‌کند تا در زمان مناسب بتواند الگو را استخراج کند و توسط الگوی استخراج شده مالکیت خود را به اثبات برساند. اولاً الگوگذاری باید نامرئی باشد. یعنی کسی متوجه وجود الگو داخل تصویر نشود. دوماً الگوگذاری باید مقاوم باشد یعنی هرگونه دستکاری در تصویر الگوگذاری شده باعث خراب شدن الگوی داخل آن نشود. الگو می‌تواند یک تصویر شامل مشخصات مالک یا هر تصویر دیگری باشد. برای افزایش مقاومت پیشنهاد می‌کنیم الگو را چند بار و در چند مکان مختلف از تصویر جاسازی کنیم. برای این کار ابتدا ماتریس تصویر اصلی A را به چهار بلوک غیر مشترک A_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ با اندازه‌های مساوی افراز می‌کنیم، سپس الگو را در ماتریس‌های تجزیه مقدار تکین هر بلوک جاسازی می‌کنیم. برای انجام فرایند الگوگذاری از روشی که توسط بن حسین ارائه شده است [۲]، استفاده می‌کنیم. در اینجا الگوگذاری را برای یک تصویر خاکستری به کار می‌بریم. الگو باید به اندازه هر یک از بلوک‌ها باشد و آن را w می‌نامیم. حال تجزیه مقدار تکین هر بلوک و الگو را به دست می‌آوریم

$$w = U_w \Sigma_w V_w^T, \quad A_i = U_i \Sigma_i V_i^T, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

با استفاده از سه روش ارائه شده در جدول ۱ ماتریس‌های U_{iw} و Σ_{iw} و V_{iw} را به دست می‌آوریم و ماتریس الگوگذاری شده به صورت $A_w = U_{iw} \Sigma_{iw} V_{iw}$ به دست می‌آید. در این جدول پارامتر t یک ضریب دلخواه بین ۰ و ۱ است. اگر t نزدیک به ۱ باشد، آنگاه A_w نیز نزدیک به A می‌شود. بنابراین با انتخاب t نزدیک به ۱ یک الگوگذاری نامرئی به دست می‌آوریم. برای استخراج براساس روشی که توسط بن حسین ارائه شده، ابتدا مالک درون تصویر الگوگذاری شده مطابق با روشی که در جدول ۲ گفته شده، دوباره الگو را استخراج می‌کند. سپس با استفاده از تصویر به دست آمده الگو را از درون تصویر الگوگذاری شده‌ای که دستکاری شده است استخراج می‌کند. در این جا A'_w را تصویر الگوگذاری شده‌ی حمله شده می‌نامیم. فرض کنید U_{wa} ، Σ_{wa} و مؤلفه‌های SVD الگوی استخراج شده باشند که در فرایند استخراج به دست می‌آیند. مراحل استخراج به صورت زیر است.

ابتدا تجزیه مقدار تکین ماتریس A'_w را انجام می‌دهیم.

$$A'_w = [U'_w, \Sigma'_w, V'_w]$$

جدول ۲: سه روش که در هنگام استخراج الگو مطرح می‌شوند

$MP3$ جاسازی Σ	$MP2$ جاسازی U, V	$MP1$ جاسازی U, Σ, V
$U_{wi} = U_w$ $\Sigma_{wi} = (1-t)\Sigma_{iw} + t\Sigma_w$ $V_{wi} = V_w$	$U_{wi} = (1-t)U_{iw} + tU_w$ $\Sigma_{wi} = \Sigma_w$ $V_{wi} = (1-t)V_{iw} + tV_w$	$U_{wi} = (1-t)U_{iw} + tU_w$ $\Sigma_{wi} = (1-t)\Sigma_{iw} + t\Sigma_w$ $V_{wi} = (1-t)V_{iw} + tV_w$

سپس ماتریس‌های SVD الگوی استخراج شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$U_{wa} = \frac{1}{t}U_{wi} - \frac{(1-t)}{t}U'_w, \quad \Sigma_{wa} = \frac{1}{t}\Sigma_{wi} - \frac{(1-t)}{t}\Sigma'_w$$

$$V_{wa} = \frac{1}{t}V_{wi} - \frac{(1-t)}{t}V'_w$$

که در آن U_{wi} ، Σ_{wi} و V_{wi} مؤلفه‌های SVD ماتریسی هستند که بعد از دوبار الگوگذاری به دست آمده‌اند. و روش به دست آوردن آن در جدول ۲ ارائه شده است. داریم

$$w_a = U_{wa}\Sigma_{wa}V_{wa}^T \quad (1.2)$$

که در آن ماتریس w_a ماتریس متناظر با الگوی استخراج شده می‌باشد که مالک تصویر با هدف اثبات مالکیت می‌تواند از تصویر آن را استخراج کند.

۳. نتایج آزمایشات

ما فرایند جاسازی و استخراج را به طور آزمایشی برای تصویر عکاس (به عنوان تصویر اصلی) و تصویر برنج (به عنوان تصویر الگو) به کار می‌بریم.

برای محاسبه میزان شباهت دو تصویر از نرخ سیگنال رأسی به نویز^۱ ($PSNR$) استفاده می‌کنیم. فرض کنید A در اندازه $m \times n$ ماتریس مربوط به تصویر اصلی باشد و A^* ماتریس مربوط به تصویر اصلاح شده باشد، آنگاه $PSNR$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$PSNR(A, A^*) = 10 \log_{10} \frac{(\text{Maximum}(A(i, j)))^2}{\|A - A^*\|_F^2} \quad (1.3)$$

که $\text{Maximum}(A(i, j))$ بزرگترین درایه ماتریس A می‌باشد. همان‌طور که می‌دانیم هرچه مقدار $PSNR$ بزرگتر باشد شباهت دو تصویر بیشتر است. این معیار برحسب دسی‌بل^۲ بیان می‌شود و به طور معمول اگر این مقدار ۴۰ دسی‌بل و یا بیشتر باشد، دو تصویر را تقریباً مشابه هم در نظر می‌گیرند.

برای مقایسه میزان نامرئی بودن روش پیشنهادی با روشی که توسط بن حسین ارائه شده است از $PSNR$ بین تصویر اصلی و تصویر الگوگذاری شده استفاده می‌کنیم. که نتایج آن برای $t = 0.95$ در جدول ۳ ارائه شده‌اند.

^۱Peak signal to noise

^۲decibel

جدول ۳: مقدار PSNR بین تصویر اصلی و تصویر الگوگذاری شده با $t = 0.95$

روش پیشنهادی	روش ارائه شده توسط بن حسین	
۴۴/۵۱۱۸	۴۶/۳۴۹۸	جاسازی Σ
۳۳/۸۹۰۸	۳۲/۸۱۵۸	جاسازی U و V
۳۳/۱۷۶۹	۳۱/۹۰۴۰	جاسازی U و V و Σ

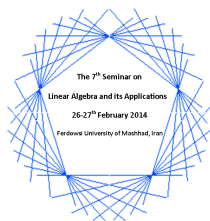
جدول ۴: محاسبه PSNR بین الگوی اولیه و الگوی استخراج شده در هر دو روش

استخراج از تصویر دستکاری نشده	دستکاری با فشرده سازی	
۳۲/۳۱۶۴	۳۴/۳۴۳۱	روش پیشنهادی با جاسازی Σ
۴۴/۰۱۱۵	۳۸/۴۲۹۶	روش پیشنهادی با جاسازی U, V
۳۰۰/۷۴۸۱	۳۸/۷۰۲۰	روش پیشنهادی با جاسازی U, Σ, V
۳۲/۴۸۹۰	۳۲/۴۴۱۸	روش بن حسین با جاسازی Σ
۴۵/۰۹۶۷	۳۵/۴۳۶۵	روش بن حسین با جاسازی U و V
۲۹۹/۹۴۶۵	۳۵/۱۳۹۹	روش بن حسین با جاسازی U, Σ, V

مشاهده می‌شود فقط در حالتی که جاسازی با استفاده از Σ صورت می‌گیرد میزان نامرئی بودن روش بن حسین بیشتر است و در دو حالت دیگر نامرئی بودن روش پیشنهادی بیشتر می‌باشد. در حالت اول چون PSNR بیشتر از ۴۰ می‌باشد دو تصویر از نظر چشم انسان تقریباً شبیه به هم است و این تفاوت اندک خدشه‌ای در روش ما به وجود نمی‌آورد و از ارزش روش ما نمی‌کاهد. حال روش خود را از لحاظ مقاومت با روش بن حسین مقایسه می‌کنیم. برای این کار بعد از جاسازی الگو در تصویر اصلی، تصویر الگوگذاری شده را به طور آزمایشی دستکاری می‌کنیم یا اصطلاحاً به آن حمله می‌کنیم. برای حمله کردن از روش فشرده سازی (کاهش حجم تصویر) استفاده می‌کنیم که در [۱] بیان شده است. با استفاده از PSNR بین الگوی اصلی و الگوی استخراج شده میزان مقاومت الگو را به دست می‌آوریم که نتایج آن در جدول ۴ آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود روش پیشنهادی مقاومت بهتری نسبت به روش بن حسین دارد.

مراجع

1. Y.-T. Shih, C.-S. Chien and C.-Y. Chuang, *An adaptive parameterized block-based singular value decomposition for image de-noising and compression*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012), 10370–10385.
2. A. Benhocin, L. Laouamer, L. Nana and A.C. Pascu, *New image watermarking scheme based on singular value decomposition*, Information hiding and multimedia signal processing 4 (2013), no. 1, 9–18.
3. Kh. Loukhaoukha, *On the security of digital watermarking scheme based on SVD and Tiny-GA*, Information hiding and multimedia signal processing 3 (2012), no. 2, 135–141.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

ارائه‌ی یک روش برای حل مسئله‌ی معکوس با ماتریس ضرایب جمع ثابت درایه‌های واقع در سطر و ستون آن

بهناز ضعیفی^۱ * و سید احسان یثربی نائینی^۲

^۱گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان
behnazaeefi@google.com

^۲گروه کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی تربیت حیدریه، تربیت حیدریه
yasrebi@toos.ac.ir

چکیده. در این مقاله، یک روش جدید برای حل دستگاه‌های معادلات خطی $AX = B$ ، $(X, B \in R^{n \times m}, m \leq n)$ با ماتریس مجهول $A \in R^{n \times n}$ که جمع درایه‌های واقع در سطر و ستون آن برابر با عدد ثابت $a \in \mathbb{R}$ می‌باشد، ارائه می‌گردد. این مسئله که از آن به مسئله‌ی معکوس یاد می‌شود، اغلب جواب ندارد و به کار بردن شیوه‌های معمول مانند استفاده از معکوس مور-پنرز، معمولاً جواب قابل اطمینان ارائه نمی‌دهند. در ادامه الگوریتمی پیشنهاد می‌شود که به کمک کم کردن حداقل مربعات خطا و تجزیه‌ی مقادیر منفرد (SVD) می‌تواند جوابی با بهترین تقریب را بیابد.

۱. پیش‌گفتار

امروزه با روی کار آمدن رایانه‌هایی با قدرت پردازش بالا، مسائل معکوس به یک علم پویا و دینامیک تبدیل و تقریباً در تمام علوم کاربردی و مهندسی وارد شده‌اند و از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به حل دستگاه معادلات خطی $AX = B$ ($X, B \in R^{n \times m}, m \leq n, A \in R^{n \times n}$) اشاره کرد که در آن حاصل جمع درایه‌های واقع در سطر و ستون ماتریس ضرایب برابر با $a \in \mathbb{R}$ می‌باشد. مانند اغلب مسائل معکوس، در این‌جا نیز تخمین مدل از روی اندازه‌گیری ورودی‌ها و خروجی‌ها هدف از حل مسئله می‌باشد. اما این کار که از طریق حداقل کردن مربعات خطا انجام می‌شود، به علت وجود اطلاعات ناکامل و انواع خطاها به راحتی امکان‌پذیر نخواهد بود و حل مسئله را با مشکل روبرو می‌سازد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. مسائل معکوس، ماتریس با حاصل جمع ثابت درایه‌های واقع در سطر و ستون، بهترین تقریب

* سخنران

ب. ضعیفی و ا. یثربی نائینی

نمادهایی که در این مقاله از آن‌ها استفاده می‌شود، عبارتند از: I_n و A^+ به ترتیب بیانگر معکوس مور-پنرز و ماتریس یکانی از مرتبه n می‌باشند. مجموعه‌ی تمام ماتریس‌هایی با بعد $n \times m$ نیز به صورت $R^{n \times m}$ نمایش داده خواهد شد. همچنین روابط

$$J_n = \frac{1}{n} e_n e_n^T, e_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^n \text{ و } k_n = I_n - J_n \text{ قرارداد می‌شوند.}$$

تعریف ۱.۱. حاصل جمع درایه‌های واقع در سطر و ستون ماتریس $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ برابر با عدد ثابت $a \in \mathbb{R}$ است، هرگاه

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} = a, \sum_{k=1}^n a_{kj} = a, a \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

۱.۱. را می‌توان معادل دو رابطه‌ی $Ae_n = ae_n$ و $e_n^T A = ae_n^T$ دانست. مجموعه‌ی تمام این ماتریس‌ها با نماد $FSR^{n \times n}$ نمایش داده می‌شوند.

برای ارائه‌ی الگوریتم، دو مسئله‌ی زیر بررسی می‌شوند:

مسئله‌ی ۱- با فرض $X, B \in R^{n \times m}$ ، $A \in FSR^{n \times n}$ به‌گونه‌ای یافت می‌شود که

$$\|AX - B\| = \min \quad (2.1)$$

مسئله‌ی ۲- $\bar{A} \in R^{n \times n}$ و S_E مجموعه‌ی جواب‌های مسئله‌ی ۱ مفروضند. $\hat{A} \in S_E$ چنان یافت می‌شود که رابطه‌ی $\|\bar{A} - \hat{A}\| = \inf_{A \in S_E} \|\bar{A} - A\|$ برقرار باشد.

لم ۲.۱. $AA^+B = B$ ، $DC^+C = D$ و $AD = BC$ شروط لازم و کافی برای جواب داشتن جفت معادلات $AX = B$ و $XC = D$ می‌باشند. جواب در این حالت برابر است با:

$$X = A^+B + DC^+ - A^+ADC^+ + (I_n - A^+A)Y(I_m - CC^+)$$

$Y \in R^{n \times m}$ ماتریس دلخواه و $A \in R^{s \times n}$ ، $B \in R^{s \times m}$ ، $C \in R^{m \times l}$ و $D \in R^{n \times l}$.

برهان. [۳]. □

لم ۳.۱. ماتریس‌های $X \in R^{m \times l}$ ، $Y \in R^{s \times n}$ و $Z \in R^{s \times l}$ مفروض می‌باشند. اگر $f(A) = 0$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\{f(A) = \|YZX - Z\|\}$ S^* ناتهی است اگر و تنها اگر $YY^+ZX^+X = Z$ برقرار باشد.

برهان. [۱]. □

اگر مجموعه‌ی S^* ناتهی باشد، مجموعه‌ای بسته و محدب خواهد بود، در این صورت مسئله‌ی ۲ يك جواب بهینه دارد [۴]. این جواب با $\hat{A}$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۴.۱. جواب عمومی ۲.۱ $A = aJ_n + k_n[BZ^+ + G(I_n - ZZ^+)]k_n$ می‌باشد.

برهان. [۱].

از لم ۲.۱ و رابطه‌ی ۳.۱، لم ۳.۱ و قضیه‌ی ۴.۱ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۵.۱. رابطه‌ی ۲.۱ جواب دارد اگر و تنها اگر $k_n BZ^+Z = k_n B$ و $e_n^T B = ae_n^T X$ و $Z = k_n X$ و $G \in R^{n \times m}$ دلخواه $A = aJ_n + (B - aJ_n X)Z^+k_n + k_n G(I_n - ZZ^+)k_n$ عمومی عبارت است از:

قضیه ۶.۱. با فرض $SVD(k_n) = U \setminus U^T$ و $Z = k_n X$ ، جواب مسئله‌ی ۲ برابر است با:

$$\hat{A} = aJ_n + U \setminus U^T B Z^+ U \setminus U^T + U \setminus U^T (\bar{A} - aJ_n - U \setminus U^T B Z^+ U \setminus U^T) U \setminus U^T.$$

برهان. [۱].

الگوریتم حل مسئله به کمک نتیجه‌ی ۵.۱ شرط‌های وجود جواب بررسی و جواب عمومی از قضیه‌ی ۴.۱ به دست آمده و معادل $\bar{A}$ در نظر گرفته می‌شود. در آخر نیز $\hat{A}$ محاسبه می‌شود. این جواب، تقریب بهینه خواهد بود. اما اگر S_E تهی باشد، پیشنهاد می‌شود از مقدار محاسبه شده‌ی ماتریس A در آزمایشگاه، معکوس مور-پنرز و یا جواب‌های نادقیق به دست آمده در فرایند حل مسئله استفاده گردد، این جواب معادل A در نظر گرفته خواهد شد.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

مثال ۱.۲. اگر $a = 0$ باشد، ماتریس را دومرکزی^۱ خوانند. این ماتریس در مهندسی برق کاربرد دارد و به آن ماتریس ادمیتانس^۲ گویند. در این حالت، روشی تکراری نیز بر اساس الگوریتم $LSQR$ بیان شده است [۲]. داده‌های زیر مربوط به یک شبکه‌ی الکتریکی برای یافتن ماتریس ادمیتانس می‌باشد.

$$B = \begin{bmatrix} 0.8000 & 3.0000 & -5.0000 \\ -0.6000 & -2.4000 & 2.4000 \\ -0.6000 & 0.6000 & 5.4000 \\ 2.4000 & 8.6000 & 2.4000 \\ -2.0000 & -9.8000 & -5.2000 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

خروجی الگوریتم عبارت است از:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.9714 & -0.9143 & 0.1714 & 0.9857 & 0.7286 \\ 0.6000 & 0.6000 & -0.0000 & -0.6000 & -0.6000 \\ 0.6571 & -0.4286 & -0.0571 & -0.5286 & 0.3571 \\ -1.0571 & -0.5714 & -1.3429 & 0.8286 & 2.1429 \\ 0.7714 & 1.3143 & 1.2286 & -0.6857 & -2.6286 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۲. $AX = B$ به قصد یافتن ماتریس دو تصادفی دوگانه‌ی تعمیم‌یافته ($a = 1$) چنان حل می‌شود که ماتریس‌های X و B به قرار زیر باشند.

$$B = \begin{bmatrix} 2.4000 & 5.6000 & 0.4000 \\ 1.0000 & 0.2000 & 7.8000 \\ 1.0000 & 3.2000 & 10.8000 \\ 4.0000 & 11.2000 & 7.8000 \\ -0.4000 & -7.2000 & 0.2000 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

به‌وضوح S_E تهی است. برای یافتن تقریب اولیه دو پیشنهاد ارائه می‌شود. استفاده از شبه معکوس و استفاده از جواب‌های تقریبی. در حالت اول خروجی برابر است با:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.7745 & 0.1500 & -0.1390 & 1.8479 & -0.0844 \\ 0.8416 & 0.2600 & 0.4183 & -0.7541 & 0.2342 \\ 0.5267 & 0.0500 & 0.3905 & -1.2245 & 1.2274 \\ -1.1233 & -0.1000 & -0.2595 & 1.3755 & 1.1074 \\ 1.5296 & 0.6400 & 0.5897 & -0.2447 & -1.5146 \end{bmatrix}$$

^۱Doubly Center

^۲Admittance Matrix

ب. ضعیفی و ا. یثربی نائینی

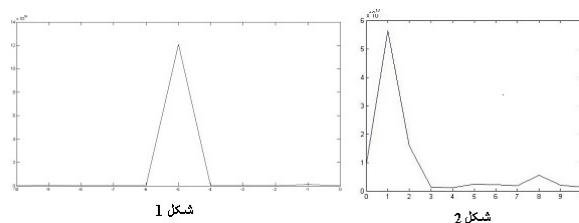
تقریب اولیه‌ای از ماتریس تصادفی دوگانه به صورت زیر مفروض است.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1/4000 & -0/4000 & 1/0100 & 0/4000 & 1/4000 \\ 0/8000 & 0/8000 & 0/2000 & -0/3900 & -0/4000 \\ 0/8000 & -0/2000 & 0/2000 & -0/4000 & 0/6100 \\ -1/2000 & -0/2000 & -0/8000 & 0/6000 & 2/6000 \\ 2/0000 & 1/0000 & 0/4000 & 0/8000 & -3/2000 \end{bmatrix}$$

خروجی الگوریتم در این صورت برابر است با:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1/4008 & -0/4000 & 1/0072 & 0/3972 & 1/3972 \\ 0/7992 & 0/7992 & 0/1972 & -0/3928 & -0/4028 \\ 0/7992 & -0/2008 & 0/1972 & -0/4028 & 0/6072 \\ -1/1988 & -0/1988 & -0/8008 & 0/5992 & 2/5992 \\ 2/0012 & 1/0012 & 0/3992 & 0/7992 & -3/2008 \end{bmatrix}$$

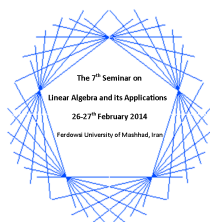
برای مثال ۱.۲، تغییرات عدد وضعیت به ازای $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ ، $a = \pm i$ ثبت شده است. شکل ۱ این تغییرات را نسبت به $-a$ و شکل ۲ نسبت به a نشان می‌دهند. علی‌رغم معادل بودن نرم‌ها، اما به علت وجود خطای محاسبات، از نرم-۲ استفاده شده است.



از شکل‌ها برمی‌آید که الگوریتم عامل بدو وضعی مسئله نمی‌باشد و خروجی قابل اطمینان می‌باشد. برای مقایسه از $\|r\|$ استفاده نشده است زیرا بزرگ و کوچک بودن این عدد، به جهت اینکه اغلب مسائل معکوس بدو وضع می‌باشند، قابل استناد نیست. البته عدد متناسب به $\|r\|$ برای $a = \pm i$ یکسان می‌باشد لذا دقت الگوریتم به علامت a وابسته نخواهد بود. اگر جواب‌های کم‌ترین مربعات وجود داشته باشد، پیاده‌سازی این الگوریتم جوابی با بهترین تقریب را خواهد داشت و در غیر این صورت، چنانکه از مثال‌های عددی نیز پیدا است، جواب بهتر هنگامی به دست خواهد آمد که از داده‌های آزمایشگاهی و یا تقریب مناسب استفاده شود و به کار بردن روش‌های معکوس‌گیری، جواب قابل اطمینانی ارائه نمی‌دهند.

مراجع

۱. ب. ضعیفی، حل مسئله معکوس با جمع درایه‌های سطر و ستون برابر، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۱۳۹۲.
۲. ب. ضعیفی، ر. کبیری و ا. یثربی نائینی، بررسی حل یک مسئله معکوس با ماتریس دومرکزی، پنجمین کنفرانس ریاضی کاربردی (۱۳۹۲)، صفحه ۲۳۹-۲۴۲.
3. W. Songgui and Y. Zhenhai, *Generalized Inverse Matrix and Its Application*, Beijing: Beijing Industry Press in Chinese, (1996).
4. Z. Lei, *Approximation in Clsd Convex Cones and its Applications in Numerical Analysis*, Annual of Hunan Mathematics in Chinese, 6(1986), 43-48, .



چکیده مسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

ماتریس های حافظ مقدار تابع ماتریسی تعمیم یافته از ماتریس های بالا مثلثی

سمانه قابل^۱، یوسف زمانی^۲، و اسماعیل بابایی^۳

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند

^۱samanehghabel@gmail.com

^۲zamani@sut.ac.ir

^۳e_babaei@sut.ac.ir

چکیده. فرض کنید H زیر گروهی از گروه متقارن S_n و χ یک سرشت تحویل ناپذیر از H باشد. فرض کنید d_χ^H تابع ماتریسی تعمیم یافته متناظر با H و χ باشد. هدف اصلی این مقاله مطالعه $\mathfrak{T}(H, \chi)$ ، مجموعه ماتریس های $A \in M_n(F)$ است به طوری که خاصیت $d_\chi^H(AX) = d_\chi^H(X)$ برای هر $X \in T_n^U(F)$ برقرار باشد، که $T_n^U(F)$ مجموعه ماتریس های بالا مثلثی $n \times n$ می باشد. در برخی حالات این ماتریس ها را به طور کامل مشخص می کنیم.

۱. پیش گفتار

فرض کنید S_n گروه متقارن از درجه n باشد. فرض کنید F یک میدان دلخواه از مشخصه صفر و $c : fS_n \rightarrow F$ یک تابع ناصفر باشد. اگر $X = [x_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ روی میدان F باشد، تابع شور تعمیم یافته متناظر با تابع c به صورت

$$d_c(X) = \sum_{\sigma \in S_n} c(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$$

تعریف می شود ([۴، ۳]).

فرض کنید H زیر گروهی از S_n و χ یک سرشت تحویل ناپذیر H باشد. تابع $c : fS_n \rightarrow F$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. حافظ های ماتریسی، تابع ماتریسی تعمیم یافته، ماتریس بالا مثلثی.
* سخنران

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$c(\sigma) = \begin{cases} \chi(\sigma) & , \quad \sigma \in H, \\ \circ & , \quad \sigma \notin H \end{cases}$$

در این صورت $d_c(X)$ را با $d_\chi^H(X)$ نشان داده و آن را تابع ماتریسی تعمیم یافته وابسته به H و χ می‌نامیم. در [۲] مارکوس^۱ و شالت^۲ مجموعه $\varphi(H, \chi)$ را بصورت زیر تعریف کردند:

$$\varphi(H, \chi) = \{A \in M_n(F) : d_\chi^H(AX) = d_\chi^H(X) ; \forall X \in M_n(F)\},$$

که در آن $M_n(F)$ فضای ماتریس‌های مربعی $n \times n$ با عناصر در میدان F می‌باشد. آنها نشان دادند که این مجموعه زیرگروهی از گروه ضربی ماتریس‌های نامنفرد، $GL_n(F)$ می‌باشد.

در [۵] دیاس داسیلوا^۳ و الویرا^۴ به‌طور کامل این زیرگروهها را مشخص کرده‌اند. در این مقاله مجموعه ماتریس‌هایی مانند $A \in M_n(F)$ را تعیین می‌کنیم که در رابطه

$$d_\chi^H(AX) = d_\chi^H(X),$$

برای هر $X \in T_n^U(F)$ صدق می‌کنند، که $T_n^U(F)$ مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی می‌باشد. مجموعه فوق را با $\mathfrak{T}(H, \chi)$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه $V_\sigma(H, \chi)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_\sigma(H, \chi) = \{L \in T_n^L(F) : l_{ii} = 1, 1 \leq i \leq n, \\ d_\chi^H(P(\sigma)LX) = d_\chi^H(P(\sigma)X) ; \forall X \in T_n^L(F)\}.$$

تعریف ۱.۱. فرض کنید $\sigma \in H$ بطوریکه $\sigma \neq \circ$. $\chi(\sigma) \neq \circ$ زیرگروه H_T^σ از H چنین تعریف می‌شود:

$$H_T^\sigma = \langle \tau : H \text{ ترانهش } \tau, \chi(\sigma^{-1}\tau) = -\chi(\sigma^{-1}) \rangle,$$

به ویژه وقتی $\sigma = id$ داریم:

$$H_T^{id} = \langle \tau : H \text{ ترانهش } \tau, \chi(\tau) = -\chi(1) \rangle.$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $H \leq S_n$ و χ سرشتی از H باشد. مجموعه $Z(H, \chi)$ به صورت

$$Z(H, \chi) = \{\pi \in H : \chi(1)\chi(\pi\sigma) = \chi(\pi)\chi(\sigma) \quad ; \quad \forall \sigma \in H\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $x \in F$. در این صورت ماتریس $E^{(i)+x(j)}$ را ماتریسی تعریف می‌کنیم که با اضافه کردن x برابر ستون j -ام ماتریس همانی به ستون i -ام آن، به دست می‌آید.

^۱Marcus

^۲Chollet

^۳Dias da Silva

^۴Oliveira

۲. دست آوردهای پژوهش

گزاره ۱.۲. فرض کنید H زیرگروهی از S_n و χ سرشتی از H باشد. در این صورت $A \in \mathfrak{T}(H, \chi)$ اگر و تنها اگر $\sigma \in H$ باشد که $\chi(\sigma) \neq 0$ و $L \in T_n^L(F)$ با درایه های قطری ۱ وجود داشته باشد به طوری که در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} & (i) \quad L^{-1}P(\sigma^{-1})A \in T_n^U(F) \\ & (ii) \quad \det(A) = \frac{\chi(1)\varepsilon(\sigma)}{\chi(\sigma^{-1})} \\ & (iii) \quad d_\chi^H(P(\sigma)LZ) = \chi(\sigma^{-1})\det(Z), Z \in T_n^U(F) \text{ بازای هر} \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲.

$$\mathfrak{T}(H, \chi) =$$

$$\bigcup_{\substack{\sigma \in H \\ \chi(\sigma) \neq 0}} \left\{ P(\sigma)LR : L \in V_\sigma(H, \chi), R \in T_n^L(F), \det(R) = \frac{\chi(1)}{\chi(\sigma^{-1})} \right\}$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید $L = [l_{ij}] \in T_n^L(F)$ ماتریسی باشد که عناصر قطری آن برابر ۱ است و فرض کنید $\sigma \in H$ به طوری که $\chi(\sigma) \neq 0$. اگر $L \in V_\sigma(H, \chi)$ آنگاه $l_{ij} = 0$ وقتی که i, j به مدارهای متفاوت از H_T^σ متعلق باشند.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $L = [l_{ij}] \in T_n^L(F)$ ماتریسی باشد که عناصر قطری آن برابر ۱ است و فرض کنید $\sigma \in Z(H, \chi)$ در این صورت $L \in V_\sigma(H, \chi) \Leftrightarrow l_{ij} = 0$ وقتی که i, j به مدارهای متفاوت از H_T^σ متعلق باشند.

گزاره ۵.۲. فرض کنید $L = E^{(k)+x(k+1)} \in T_n^L(F)$ با $x \neq 0$ و $\sigma \in H$ به طوری که $\chi(\sigma) \neq 0$ در این صورت $L \in V_\sigma(H, \chi)$ اگر و تنها اگر ترانهش $(k, k+1) \in H$ و $\chi((k, k+1)\sigma^{-1}) = -\chi(\sigma^{-1})$.

قضیه ۶.۲. فرض کنید $\chi = (n-1, 1)$ سرشت تحویل ناپذیر S_n باشد به طوری که $n > 3$. فرض کنید $\sigma \in S_n$ یک دور با طول $n-2$ و $L = [l_{ij}] \in T_n^L(F)$ با عناصر قطری برابر ۱ باشد. در این صورت $L \in V_\sigma(S_n, \chi)$ اگر و فقط اگر L در این شرط صدق کند: "برای $r > p$ اگر عدد صحیحی مانند k وجود داشته باشد به طوری که $p \leq k \leq r$ و $l_{rp} = 0$ آنگاه $\sigma(k) \neq k$ ".

قضیه ۷.۲. فرض کنید $\chi = (s, 1^{n-s})$ سرشت تحویل ناپذیر از S_n در شرایط زیر صدق کند

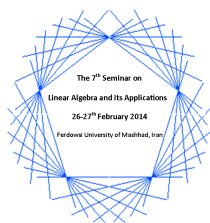
$$\begin{aligned} (1) \quad & s-1 > n-s \geq 1 \\ (2) \quad & \text{اگر } s \geq 5 \text{ و } s \text{ فرد باشد آنگاه } s-1 \neq 2(n-s) \\ (3) \quad & \text{اگر } s = 6 \text{ آنگاه } s \notin \{9, 10\}. \end{aligned}$$

فرض کنید $\sigma \in S_n$ یک دور به طول $s-1$ باشد به طوری که برای برخی $u < n-s+2$ $\{j : \sigma(j) \neq j\} = \{u, u+1, \dots, u+s-2\}$.

فرض کنید $L = [l_{ij}] \in T_n^L(F)$ با عناصر قطری برابر ۱ باشد. در این صورت $L \in V_\sigma(S_n, \chi)$ اگر و فقط اگر L در شرط زیر صدق کند: "برای $r > p$ اگر عدد صحیحی مانند k وجود داشته باشد به قسمی که $p \leq k \leq r$ و $l_{rp} = 0$ آنگاه $\sigma(k) \neq k$ ".

مراجع

1. R. Fernandes, *Matrices that preserve the value of the generalized matrix function of the upper triangular matrices*, Linear Algebra Appl. 401 (2005), 47–65.
2. M. Marcus and J. Chollat, *Linear groups defined by decomposable tensor equality*, Linear Multilinear Algebra 8 (1980), 207–212.
3. R. Merris, *Multilinear Algebra*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1997.
4. G. N. de Oliveira, *Generalized Matrix Functions*, Estudos instituto Galbenikian de Ciencia Oeiras, Portugal, 1973.
5. G. N. de Oliveira and J. A. Dias da Silva, *Equality of decomposable symmetrized tensors and *-matrix groups*, Linear Algebra Appl. 49 (1983), 191–219.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

تانسورهای λ - بحرانی تجزیه پذیر

راضیه قربانی^{۱*}، یوسف زمانی^۲، و اسماعیل بابایی^۳

^۱ دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند

ghorbanirazie@yahoo.com

^{۲،۳} گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند

zamani@sut.ac.ir

e_babaei@sut.ac.ir

چکیده. فرض کنید $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ افزایش از m و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbb{C}$ باشد. سرشت تحویل ناپذیر S_m متناظر با افزایش λ را با λ و رده تقارن تانسوری متناظر با λ و V را با V_λ نشان می دهیم. فرض کنید $\{1, \dots, \lambda_1\}$ و $z \in V_\lambda$ باشد. مفهوم z -ریج و به کمک این مفهوم، عنصر λ -بحرانی در V_λ تعریف می شود. همچنین چندجمله ایهای پلاکر تعمیم یافته به گونه ای ساخته می شوند که مجموعه ریشه های مشترک این چندجمله ایها برابر مجموعه خانواده های مؤلفه های عناصر λ -بحرانی تجزیه پذیر V_λ است.

۱. پیش گفتار

متخصصین هندسه ی جبری مکانهای صفر چندجمله ایها را مطالعه می کنند. به بیان دقیق تر آنان اشیای هندسی را مطالعه می کنند که چندگوناهای جبری خوانده می شوند و به طور موضعی، مکانهای صفر چندجمله ایها تعریف می شوند. کلاس های تقارن تانسوری تعمیمی از فضای گراسمن می باشند که در اواخر قرن ۱۹ کاملاً شناخته شده بودند. در سال ۱۹۹۴ شافاریویچ در [۵] نشان داد که مجموعه ی همه ی تانسورهای متقارن تجزیه پذیر در فضای گراسمن، $\wedge^m V$ ، یک چندگونای جبری از $\mathbb{C}^k$ است، (که در آن $k = \binom{n}{m}$ و n بعد فضای برداری V است). در سال ۲۰۰۶ دیاس دا سیلوا و رادریگس در [۲] تعمیمی از این واقعیت را برای تانسورهای متقارن تجزیه پذیر فضای V_λ به دست آوردند. آنها مفهوم تانسور بحرانی از V_λ را معرفی کردند و نشان دادند مجموعه ی همه ی تانسورهای بحرانی تجزیه پذیر V_λ یک چندگونای جبری است. در این مقاله با

2010 Mathematics Subject Classification. 15A69

واژگان کلیدی. تانسورهای تجزیه پذیر، چندجمله ایهای پلاکر، کلاس تقارن تانسوری.
* سخنران

روشی مشابه، مفهوم تانسور λ -بحرانی را در فضای V_λ برای هر افراز λ معرفی خواهیم کرد و نشان خواهیم داد مجموعه‌ی همه‌ی تانسورهای λ -بحرانی تجزیه‌پذیر در فضای V_λ نیز یک چند گونای جبری است.

فرض کنید V یک فضای برداری n -بعدی باشد. فرض کنید G زیرگروهی از S_m و χ یک سرشت تحویل ناپذیر G باشد. متقارن ساز متناظر با G و χ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(G, \chi) : V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes m}$$

$$T(G, \chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma),$$

که در آن $p(\sigma)$ عملگر جایگشتی متناظر با جایگشت σ است. برد عملگر تصویر $T(G, \chi)$ را با نماد $V_\chi(G)$ نشان داده و آن را کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ می‌گوییم.

فرض کنید $\Gamma_{m,n}$ مجموعه همه دنباله‌های $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ باشد بطوریکه به ازای هر $1 \leq i \leq m$ ، $1 \leq \alpha(i) \leq n$. اگر $\nu \in \Gamma_{m-1,n}$ و $j \in \{1, \dots, m\}$ ، آنگاه نماد $j \stackrel{t}{\leftarrow} \nu$ نشان دهنده‌ی عضوی از $\Gamma_{m,n}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$j \stackrel{t}{\leftarrow} \nu = (\nu(1), \dots, \nu(t-1), j, \nu(t), \dots, \nu(m-1)), \quad t = 1, \dots, m-1$$

فرض کنید $(x_1, \dots, x_m)$ یک خانواده از بردارهای غیر صفر V و $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ افرازی از m باشد. گردایه‌ی $C = (C_1, \dots, C_k)$ از زیر خانواده‌های $(x_1, \dots, x_m)$ ، یک μ -رنگ آمیزی (یا یک رنگ آمیزی با قالب μ) $(x_1, \dots, x_m)$ گفته می‌شود هرگاه

(i) به ازای هر $1 \leq i \leq k$ ، C_i مستقل خطی باشد،

(ii) برای هر $1 \leq i, j \leq k$ ، $i \neq j$ ، $C_i \cap C_j = \emptyset$ ،

(iii) $\bigcup_{i=1}^k C_i = \{1, \dots, m\}$ ،

(iv) برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $|\Delta_i| = \mu_i$. می‌توان نشان داد که با ترتیب تسطی، مجموعه قالبهای رنگ آمیزی $(x_1, \dots, x_m)$ دارای ماکزیمم است. این افراز ماکزیمم، افراز رتبه‌ی $(x_1, \dots, x_m)$ نامیده می‌شود و با $\rho(x_1, \dots, x_m)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $z \in V_\lambda$ ، $z \neq 0$. فرض کنید $W(z)$ اشتراک تمامی زیرفضاهای W از V باشد به طوری که $z \in W_\lambda$. گوئیم z بحرانی است هرگاه $\dim W(z) = \lambda'_1$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید z یک عضو غیر صفر از V_λ باشد. آنگاه پوچساز z ، که با نماد $Ann(z)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ی تمامی اعضایی مانند $v \in V$ به طوری که $T_\chi(z_U^\otimes \otimes v) = 0$.

قضیه‌ی زیر عناصر بحرانی را در فضای V_λ مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۱. $z \neq 0 = T_\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_m)$ یک تانسور تجزیه پذیر V_λ باشد. آنگاه z بحرانی است اگر و تنها اگر $\dim Ann^{(x_1, \dots, x_m)}(z) = \lambda'_1$.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\nu \in \Gamma_{m-1,n}$ ، $\gamma \in \Gamma_{m+1,n}$ و $t \in \{1, \dots, m\}$ و $k \in \{1, \dots, s_\gamma\}$ چندجمله‌ای

$$f_{\gamma, \nu, t, k}(X_\alpha : \alpha \in \Gamma_{m,n}) = \sum_{l=1}^{s_\gamma} c_{\gamma, k, l} X_{\nu \leftarrow \gamma(l)(m+1)}^t X_{\gamma_{m+1}}^{(l)}$$

از $\mathbb{C}[X_\alpha : \alpha \in \Gamma_{m,n}]$ چندجمله‌ای λ -پلاکر متناظر با (γ, ν, t, k) نامیده می‌شود.

قضیه‌ی زیر ارتباط بین عناصر بحرانی فضای V_λ و چند جمله‌ایهای λ -پلاکر را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۱. فرض کنید $z = x_1 \otimes \dots \otimes x_m = \sum_{\alpha \in \Gamma_{m,n}} a_\alpha e_\alpha^\otimes$. آنگاه $z^* \neq 0$ بحرانی است اگر و تنها اگر $(a_\alpha : \alpha \in \Gamma_{m,n})$ یک صفر چند جمله‌ایهای λ -پلاکر متناظر با (γ, ν, t, k) با $\gamma \in \Gamma_{m+1,n}$ ، $\nu \in \Gamma_{m-1,n}$ و $t \in \{1, \dots, m\}$ و $k \in \{1, \dots, s_\gamma\}$ باشد.

از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی تمامی تانسورهای بحرانی تجزیه‌پذیر فضای V_λ یک چندگونای جبری است.

تعریف ۶.۱. فرض کنید $z \in V_\lambda$. کوچک‌ترین زیر فضای V (با نسبت شمول)، شامل همه j -پیش تصویرهای z در V با بردارهای در $W(z)$ را با $W_j(z)$ نشان می‌دهیم. هرگاه برای هر $j = 1, \dots, \lambda_1$ ، z داشته باشیم: $\dim W_j(z) = \lambda'_j$ ، آنگاه گوییم z ، λ -بحرانی است.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $\nu \in \Gamma_{r_j-1,n}$ ، $\gamma \in \Gamma_{r_j+1,n}$ و $t \in \{1, \dots, r_j\}$ و $k \in \{1, \dots, s_\gamma\}$ چندجمله‌ای

$$f_{\gamma, \nu, t, k}(X_\alpha : \alpha \in \Gamma_{r_j,n}) := \sum_{l=1}^{s_\gamma} c_{\gamma, k, l}^{(j)} X_{\nu \leftarrow \gamma(l)(r_j+1)}^t X_{\gamma_{r_j+1}}^{(l)}$$

از $\mathbb{C}[X_\alpha : \alpha \in \Gamma_{r_j,n}]$ چندجمله‌ای $\chi^{(j)}$ -پلاکر متناظر با (γ, ν, t, k) نامیده می‌شود.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

قضیه‌ی زیر عناصر λ -بحرانی را در فضای V_λ مشخص می‌کند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $z = T_\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_m)$ یک عنصر تجزیه‌پذیر غیر صفر از V_λ باشد. آنگاه z ، λ -بحرانی است اگر و تنها اگر

$$\dim \text{Ann}_j^{(x_1, \dots, x_m)} = \lambda'_j, \quad j = 1, \dots, \lambda_1.$$

قضیه‌ی زیر ارتباط بین عناصر بحرانی فضای V_λ و چند جمله‌ایهای $\chi^{(j)}$ -پلاکر را نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbb{C}$ و $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ ، $\lambda_s > 0$ ، افزایی از m باشد. فرض کنید $(x_1, \dots, x_m)$ یک خانواده از بردارهای غیر صفر V باشد به طوری که

$$z^\otimes = x_1 \otimes \dots \otimes x_m = \sum_{\alpha \in \Gamma_{m,n}} b_\alpha e_\alpha^\otimes$$

و

$$z^* = T_\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \neq 0.$$

راضیه قربانی، یوسف زمانی، و اسماعیل بابایی

برای هر $j \in \{1, \dots, \lambda_1\}$ و هر $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_{\lambda_1}) \in S_{\lambda}$ فرض کنید
 $\Delta_j \cup \dots \cup \Delta_{\lambda_1} = \{a_1, \dots, a_{r_j}\}$,
 که در آن $r_j = \lambda'_j + \dots + \lambda'_{\lambda_1}$ فرض کنید
 $y_u := x_{a_u}, \quad u = 1, \dots, r_j,$
 $z_{\Delta,j}^{\otimes} = y_1 \otimes \dots \otimes y_{r_j} = \sum_{\alpha \in \Gamma_{r_j,n}} b_{\alpha}^{\Delta,j} e_{\alpha}^{\otimes},$

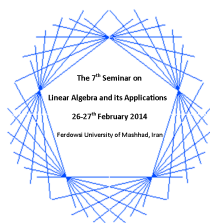
و

$z_{\Delta,j}^* = T_{\chi^{(j)}}(y_1 \otimes \dots \otimes y_{r_j}).$
 فرض کنید $\omega_j \in \Gamma_{r_j,n}$ به طوری که $M(\omega_j)$ عضو ماکزیمال مجموعه $\{M(\alpha) : \alpha \in \Gamma_{r_j,n}\}$ با ترتیب تسلطی باشد. فرض کنید $w_j(\{1, \dots, r_j\}) = \{p_1, \dots, p_v\}$ و $g_i = \min \omega_j^{-1}(\{p_i\})$.
 $i = 1, \dots, v, \lambda$ -بحرانی است اگر و تنها اگر
 $(1) \quad (b_{\alpha}^{\Delta,j}, \alpha \in \Gamma_{r_j,n})$ یک صفر چند جمله ای $\chi^{(j)}$ -پلاکر متناظر با $\gamma \in \Gamma_{r_j+1,n}$ باشد.
 $k \in \{1, \dots, s_{\gamma}\}$ و $t \in \{1, \dots, r_j\}, \nu \in \Gamma_{r_j-1,n}$ باشد.
 $rank \left[B^{\Delta,j}[\mu^{(j)} | (\omega_j)_{g_i} \xrightarrow{g_i} l] \right]_{(\Delta,i) \in S_{\lambda} \times \{1, \dots, \nu\}} = \lambda'_j$ $(\nu \in \{1, \dots, n\})$

از قضیه ی فوق نتیجه می شود که مجموعه ی همه ی تانسورهای λ - بحرانی تجزیه پذیر فضای V_{λ} یک چندگونای جبری است.

مراجع

۱. راضیه قربانی، تانسورهای λ - بحرانی تجزیه پذیر، پایان نامه ی کارشناسی ارشد، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، ۱۳۹۱.
2. J.A. Dias da Silva and Fatima Rodrigues, *Decomposable critical tensors*, Linear Algebra Appl. 414 (2006), 172–198.
3. R. Fernandes, Henrique F. da Cruz and Fatima Rodrigues, *Decomposable λ -critical tensors*, Linear Algebra Appl. 433 (2010), 297–317
4. R. Merris, *Multilinear Algebra*, Gordon and Breach, Amesterdam, 1997.
5. I.R. Shafarivich, *Basic Algebraic Geometry I*, Springer, Verlag, Berlin, 1994.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

روش جدیدی برای حل معادلات فازی و بازه ای خطی

جواد کریمی

دانشگاه علوم پایه دامغان
javad-karimi1366@yahoo.com

چکیده. هدف از این مقاله بررسی روشی برای بدست آوردن جواب معادلات فازی و بازه ای بر مبنای روش تعمیم یافته ای از گسترش بازه هاست که به عنوان بازه ی صفر نامیده می شود. محوریت بحث ما در این روش رفتار بازه ی صفر به عنوان بازه ای باشعاع مثبت و به مرکزیت صفر است. درواقع این روش نتیجه مستقیمی از عملکرد تفریقی بازه هاست. نتایج نشان داده شده به این مطلب اشاره دارد که جواب معادلات بازه ای خطی با استفاده از روش پیشنهادی در این مقاله می تواند به صورت طبیعی به عنوان عدد فازی در نظر گرفته شوند. یکی از فایده های مهم این روش این است که پهنای بازه ها را کاهش می دهد، به عبارت دیگر نشان خواهیم داد که بازه بدست آمده به عنوان یک ابزار کاربردی برای حل معادلات فازی و بازه ای خطی به خوبی دستگاه های آن است.

۱. پیش گفتار

مساله حل معادلات فازی و پارامتری باتوجه به مدل های کاربردی، بهینه سازی، اقتصاد و مکانیک و علم سرمایه گذاری و... همیشه مورد مطالعه ریاضی دان ها بوده است. حل معادلات فازی و بازه ای در حالت خطی نیز بدیهی نیست. به عنوان مثال در [۴] نشان داده شده است که دستگاه $AX = B$ برای هنگامی که A و B اعداد فازی مثلثی خاصی هستند، دارای جواب دقیقی نیست. همین مشکل برای حل دستگاه های معادلات خطی بازه ای نیز وجود دارد [۵]. گر چه پیشرفت های مهمی در زمینه حل دستگاه های خطی فازی بدست آمده است اما دو مساله مهم هنوز باقی هستند. مساله اول ماهیت خود روش است، مساله دوم پهنای بیش از حد بازه ها یا مقادیر فازی است. برای حل این مشکلات با استفاده از [۳] به معادله کلاسیک $F(X) = B$ از دیدگاه دیگری می

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 34A07; Secondary 34B90, 65G40, 14C20.

واژگان کلیدی. معادلات خطی بازه ای، معادلات خطی فازی، دستگاهی از معادلات خطی بازه ای.

پردازیم در واقع معادله $F(X) = B$ را به معادله $F(X) - B = 0$ تبدیل کرده و آن را به یک معادله بازه ای تبدیل می کنیم، در واقع در این روش ابتدا از روش کلاسیک (قدیمی) برای جوابی از معادلات خطی بازه ای استفاده می کنیم، در نتیجه ابتدا با یک محاسبه ساده بر روی دو متغیر شروع می کنیم که به عنوان کران هایی از ریشه یک بازه است. در این مقاله از مقادیر فازی به عنوان مجموعه هایی از α - برش ها بحث می کنیم چون هیچ مشکلی از لحاظ تابع عضویت نداریم، بنابراین محاسبه مسائل فازی به واحد های بازه ای تقلیل یافته است.

اگر $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ و $[y] = [\underline{y}, \bar{y}]$ بازه باشند و $@ \in \{+, -, \times, \div\}$ آنگاه

$$[x]@ [y] = \{x@y \mid x \in [x], y \in [y]\}. \quad (1.1)$$

با توجه به نتیجه مستقیمی که از تعریف ۱.۱ بدست می آید روابط ۲.۱، ۳.۱، ۴.۱ و ۵.۱ نتیجه می شود

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (2.1)$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (3.1)$$

$$[x] \times [y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y})], \quad (4.1)$$

$$[x] \div [y] = [\underline{x}, \bar{x}] \times [\frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{\underline{y}}] \quad y \neq 0. \quad (5.1)$$

فرض کنید معادله خطی به صورت $ax = b$ باشد در این صورت می توان معادلات زیر را نتیجه گرفت که برای مقادیر a و b باید $a \neq 0$ برقرار باشد

$$x = \frac{b}{a}, ax - b = 0.$$

اگر به جای مقادیر b و a مقادیر بازه ای را در $ax = b$ جایگزین کنیم به جواب بازه ای $\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}, \bar{x} = \frac{\bar{b}}{\underline{a}}$ می رسم اما با جایگزینی در $x = \frac{b}{a}$ و استفاده از رابطه ۵.۱ جواب بازه ای به شکل $\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}, \bar{x} = \frac{\bar{b}}{\underline{a}}$ بدست می آید که به بازه ای قراردادی معروف است اما گسترش بازه ای از معادله $ax = b$ ممکن است به صورت بازه ای معکوس بدست آید بنابراین برای بدست آوردن بازه های کم پهنا به گسترش معادله $ax - b = 0$ می پردازیم که در نتیجه آن به رابطه $\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}, \bar{x} = \frac{\bar{b}}{\underline{a}}$ خواهیم رسید که در تمام وضعیت ها نتیجه یک بازه ای معکوس است بنابراین به معادله $ax - b = 0$ به گونه ای دیگر خواهیم پرداخت در ابتدا نیاز به معرفی بازه ای صفر داریم.

مقدار معمول صفر می تواند به عنوان نتیجه ای از یک رابطه $a - a$ باشد که a در آن می تواند هر مقداری باشد پس بازه ی صفر^۱ را می توان به عنوان نتیجه ای از عملکرد $[a] - [a]$ تعریف کرد که $[a]$ در آن یک بازه است. برای هر بازه $[a]$ از رابطه ۱۰.۱ و ۳.۱ نتیجه زیر برقرار است

$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{a}, \bar{a}] = [\underline{a} - \bar{a}, \bar{a} - \underline{a}] = [-(\bar{a} - \underline{a}), \bar{a} - \underline{a}].$$

بعلاوه در هر حالتی نتیجه جایگزینی بازه $[a] - [a]$ یک بازه شامل صفر است. با کمک این تعریف و گسترش بازه ای از معادله $ax - b = 0$ رابطه ۶.۱ نتیجه می شود

$$[\underline{a}, \bar{a}][\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [-y, y]. \quad (۶.۱)$$

رابطه ۶.۱ دستگاه زیر را نتیجه می دهد

$$\begin{cases} \underline{ax} - \bar{b} = -y, \\ \bar{ax} - \underline{b} = y. \end{cases} \quad (۷.۱)$$

با جمع معادلات دستگاه در رابطه ۷.۱ به رابطه ۸.۱ می رسیم

$$\underline{ax} + \bar{ax} - \underline{b} - \bar{b} = 0. \quad (۸.۱)$$

اگر در رابطه ۸.۱ فرض شود که $\underline{x} = \bar{x}$ است می توان به $x_m = \frac{\underline{b} + \bar{b}}{\underline{a} + \bar{a}}$ و نتایج زیر رسید

$$[\underline{x}] = [\frac{\underline{b}}{\underline{a}}, x_m], [\bar{x}] = [x_m, \frac{\bar{b}}{\bar{a}}].$$

برای کم کردن پهنای بازه می توان با توجه به تغییراتی که بر روی کران چپ از $\underline{x}$ و کران راست از $\bar{x}$ در رابطه ۸.۱ می دهیم رابطه ۹.۱ را نتیجه بگیریم. بنابراین جواب را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\bar{x}_{min}^U = \min(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}, \frac{\underline{b} + \bar{b}}{\underline{a} + \bar{a}} - \frac{\underline{ab}}{\bar{a}^2}), \underline{x}_{max}^L = \max(\frac{\underline{b}}{\underline{a}}, \frac{\underline{b} + \bar{b}}{\underline{a} + \bar{a}} - \frac{\bar{ab}}{\underline{a}^2}). \quad (۹.۱)$$

افزایش از صفر تا یک متناظر با کاهش پهنای بازه از مقدار ماکسیمال به صفر است در نتیجه مقادیر α ممکن است به عنوان α -برش های بازه ای به صورت جواب فازی (مثلی) از ۶.۱ به صورت رابطه ۱۰.۱ باشد.

$$\tilde{x} = \{\underline{x}_{max}^L, \frac{\underline{b} + \bar{b}}{\underline{a} + \bar{a}}, \bar{x}_{min}^U\}. \quad (۱۰.۱)$$

جوابهای فازی نتیجه شده را می توان به جوابهای بازه ای از روش های غیر فازی شناخته شده به صورت رابطه ۱۱.۱ تبدیل کرد.

$$\underline{X}_{def} = \frac{\int_0^1 \underline{X}(\alpha) d\alpha}{\int_0^1 d\alpha}, \quad \bar{X}_{def} = \frac{\int_0^1 \bar{X}(\alpha) d\alpha}{\int_0^1 d\alpha}. \quad (۱۱.۱)$$

^۱Zero interval

ج. کریمی

شکل ساده ی این روابط به صورت رابطه ۱۲.۱ است

$$X_{def} = \frac{\bar{b}}{\underline{a}} - \frac{y_{max} + y_{min}}{2\underline{a}}, \quad \bar{X}_{def} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} + \frac{y_{max} + y_{min}}{2\bar{a}} \quad (12.1)$$

جوابهای نهایی بدست آمده بازه هایی کم پهنا و دقیق تر از روش های پیشین هستند در واقع می توان گفت

$$[X_{def}, \bar{X}_{def}] \subset [\underline{x}^L_{max}, \bar{x}^U_{min}] \subset [\underline{x}, \bar{x}].$$

۲. دست آورد های پژوهش

از روش بدست آمده می توان در بدست آوردن جوابهای دقیق از مسائل فازی بهره گرفت

مثال ۱.۲. فرض کنید $A = [14, 30, 44, 60]$ و $C = [25, 50, 74, 99]$ اعداد فازی دوزنقه ای باشند در این صورت با توجه به روش بیان شده می توان به جواب های زیر رسید [۱].

$$\begin{aligned} X_0 &= \{1/04, 1/67, 1/82\}, \\ X_{0.5} &= \{1/19, 1/67, 1/87\}, \\ X_1 &= \{1/40, 1/67, 1/85\}. \end{aligned}$$

این روش برای معادلات خطی بازه ای نیز کاربرد دارد به طور مثال برای مسئله ورودی - خروجی لونتیف [۲] می توان جوابهای زیر را نتیجه گرفت. [۱]

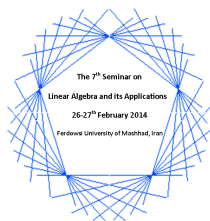
$$\begin{aligned} &\{[28285, 28563], [228227, 230326], [5926, 6112], \\ &[9287, 9523], [23977, 24378], [18767, 20695], \end{aligned}$$

که با توجه به جوابهای بدست آمده از روش های پیشین که به شکل زیر است جوابهایی دقیق تر می باشد.

$$\begin{aligned} &\{[27940, 28913], [226211, 232376], [5815, 6224] \\ &[9079, 9735], [23647, 24686], [17797, 21696]\}. \end{aligned}$$

مراجع

۱. ج. کریمی، (۱۳۹۲). ”روشی جدید برای حل معادلات فازی وبازه ای خطی”. پایان نامه ی کارشناسی ارشد. دانشگاه دامغان، دانشکده علوم ریاضی.
2. W. Leontief. Quantitative input-output relation in the economic system of the United States, Review of Economics and Statistics 18 (1936), 100–125.
3. P. Sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case, Information Sciences 179 (2009), 925–937.
4. F. E. Briggs, On problems of estimation in Leontief models, Econometrica 25 (1975), 411–455.
5. J.J. Buckley, Y. Qu, Solving linear and quadratic fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems 38 (1990), 43–59.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

ماتریس‌های قطری ناپذیر

سهراب عفتی^۱، حمید کمالی^{۲*}، و امین منصوری^۳

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۱s-effati@um.ac.ir

^۲kamalihamid2@gmail.com

^۳am.ma7676@yahoo.com

چکیده. در این مقاله به دنبال روشی جدید برای پیدا کردن توان‌های بالای ماتریس‌های قطری ناپذیر هستیم. تا اکنون محاسبه این توان‌های بالا توسط فرم‌های ژوردان امکان‌پذیر بوده است. در این جا با ارائه روشی جدید، دنباله‌ای بازگشتی از مقادیر ویژه ماتریس بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم چگونه می‌توان توان‌های بالای ماتریس‌های قطری ناپذیر و در حالت کلی هر ماتریس مربعی را با سرعت بالاتر نسبت به آنچه تاکنون وجود داشته است محاسبه نمود.

۱. پیش‌گفتار

بسیاری از مسائل مهم در جبرخطی و یا علوم دیگر در گرو ماتریس‌هاست. لذا ماتریس‌ها نقش مهمی در جبرخطی و به طبع آن در بسیاری از علوم کاربردی، مهندسی و حتی ریاضیات محض و کاربردی که با ماتریس سروکار دارند موثر است. پس نیاز به داشتن ابزار مناسب برای محاسبات ماتریسی از اهمیت بالایی برخوردار است. در این میان ماتریس‌هایی که به صورت قطری تبدیل شوند، بسیار خوش‌رفتار (به مفهوم محاسبات) هستند. برای ماتریس‌هایی که قطری نمی‌شوند کار کمی سخت‌تر است و نیاز به محاسبات بیشتری است. برای محاسبه توان بالای یک ماتریس قطری‌پذیر کار سختی وجود نخواهد داشت. اما اگر ماتریس قطری‌پذیر نباشد، فرم ژوردان وجود دارد ([۳، ۲] را ببینید) که می‌توان با استفاده از این ابزار توان‌های بالای این نوع ماتریس‌ها را محاسبه کرد.

از آنجایی که محاسبه فرم‌های ژوردان یک ماتریس نیاز محاسبات زیادی دارد، لذا در این چکیده سعی می‌شود تا راهی جدید برای محاسبه توان‌های بالای این نوع ماتریس‌ها بدست دهد. بدین منظور دنباله‌ای تکراری ارائه می‌شود که در نهایت می‌توان توان بالای این ماتریس به راحتی محاسبه شود. ثابت می‌کنیم که این دنباله‌ها فقط تابعی از مقادیر ویژه متمایز و ناصفر ماتریس A است.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 15A18; Secondary 15A22.

واژگان کلیدی. ماتریس قطری ناپذیر، دنباله بازگشتی، چندجمله‌ای مینیمال، مقادیر ویژه ماتریس.
* سخنران

۲. مقدمات

در این بخش تعریف و قضیه‌ای از [۱] آورده می‌شود که در بخش بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

تعریف ۱.۰.۲. دنباله‌ای مانند a_n را در نظر بگیرید که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$a_n = f(n, a_1, \dots, a_{n-1})$$

که در آن f تابعی است که ارتباط جمله‌های قبلی دنباله و عدد n را با a_n مشخص می‌کند. عبارت فوق را یک رابطه بازگشتی می‌نامیم.

قضیه ۲.۰.۲. فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ در رابطه بازگشتی

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_m a_{n-m} = 0$$

صدق کند که c_0 و c_m مخالف صفر هستند و $1 \leq m \leq n$. در این صورت اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ریشه‌های متمایز معادله

$$c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m = 0$$

باشند که درجه تکرار λ_i برابر m_i است، آنگاه

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{11} + \alpha_{12}n + \dots + \alpha_{1m_1}n^{m_1-1})\lambda_1^n \\ & + (\alpha_{21} + \alpha_{22}n + \dots + \alpha_{2m_2}n^{m_2-1})\lambda_2^n \\ & + \vdots \\ & + (\alpha_{k1} + \alpha_{k2}n + \dots + \alpha_{km_k}n^{m_k-1})\lambda_k^n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

که در آن α_{ij} ها مقادیر ثابتی هستند و با توجه به شرایط اولیه رابطه بازگشتی تعیین می‌گردند.

۳. نتایج اصلی

فرض کنیم A ماتریسی مربعی و دلخواه که چندجمله‌ای مینیمال آن به صورت زیر باشد.

$$m(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

بنا به تعریف چندجمله‌ای مینیمال، $m(A) = 0$ و در حقیقت داریم:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} + \dots + (-a_1)A + (-a_0)I.$$

با فرض $b_i = -a_i$ برای $i = 0, 1, \dots, n-1$ داریم:

$$A^n = b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I. \quad (1.3)$$

اکنون برای هر $m \in \mathbb{N}$ و $m \geq 0$ فرض کنیم

$$A^m = p_{n-1}(m)A^{n-1} + p_{n-2}(m)A^{n-2} + \dots + p_1(m)A + p_0(m)I, \quad (2.3)$$

که در آن هر $p_i(m)$ ، $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ دنباله‌ای از اعداد مختلط است که به ضرایب چندجمله‌ای مینیمال A بستگی دارد. با ضرب طرفین (۲.۳) در A داریم:

$$A^{m+1} = p_{n-1}(m)A^n + p_{n-2}(m)A^{n-1} + \dots + p_1(m)A^2 + p_0(m)A, \quad (3.3)$$

با جایگذاری (۱.۳) در (۳.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A^{m+1} = & (b_{n-1}p_{n-1}(m) + p_{n-2}(m))A^{n-1} + (b_{n-2}p_{n-1}(m) + p_{n-3}(m))A^{n-2} \\ & + \dots + (b_1p_{n-1}(m) + p_0(m))A + b_0p_{n-1}(m)I. \end{aligned}$$

و از طرفی طبق (۲.۳)،

$$A^{m+1} = p_{n-1}(m+1)A^{n-1} + p_{n-2}(m+1)A^{n-2} + \dots + p_1(m+1)A + p_0(m+1)I. \quad (۴.۳)$$

از برابر قرار دادن رابطه (۳.۳) و (۴.۳) داریم:

$$p_{n-1}(m+1) = b_{n-1}p_{n-1}(m) + p_{n-2}(m),$$

$\vdots$

$$p_{n-i}(m+1) = b_{n-i}p_{n-1}(m) + p_{n-i-1}(m),$$

$\vdots$

$$p_2(m+1) = b_2p_{n-1}(m) + p_1(m),$$

$$p_1(m+1) = b_1p_{n-1}(m) + p_0(m),$$

$$p_0(m+1) = b_0p_{n-1}(m).$$

و با توجه به این که $p_i(n) = b_i$ خواهیم داشت:

$$p_0(m) = b_0p_{n-1}(m-1),$$

$$p_1(m) = b_1p_{n-1}(m-1) + b_0p_{n-1}(m-2),$$

$$p_2(m) = b_2p_{n-1}(m-1) + b_1p_{n-1}(m-2) + b_0p_{n-1}(m-3),$$

$\vdots$

(۵.۳)

$$p_i(m) = b_i p_{n-1}(m-1) + \dots + b_1 p_{n-1}(m-i) + b_0 p_{n-1}(m-i-1),$$

$\vdots$

$$p_{n-1}(m) = b_{n-1}p_{n-1}(m-1) + \dots + b_1p_{n-1}(m-n-1) + b_0p_{n-1}(m-n),$$

از رابطه آخر و این که $b_i = -a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) داریم:

$$p_{n-1}(m) + a_{n-1}p_{n-1}(m-1) + \dots + a_1p_{n-1}(m-n-1) + a_0p_{n-1}(m-n) = 0.$$

چندجمله‌ای مشخصه دنباله بازگشتی فوق همان چندجمله‌ای مینیمال A است، یعنی

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

حال با توجه به (۱.۲) از قضیه ۲.۲ کافی است قرار دهیم $a_n = p_{n-1}(m)$ ، که مسأله (۱.۲) همان

چندجمله‌ای مقادیر ویژه ماتریس A است که در آن λ_i ها مقادیر ویژه با مرتبه تکرار m_i است.

اکنون برای محاسبه α_{ij} ها از

$$p_{n-1}(0) = p_{n-1}(1) = \dots = p_{n-1}(n-2) = 0,$$

$$p_{n-1}(n-1) = 1,$$

$$p_{n-1}(n) = b_{n-1}.$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین جمله عمومی $p_{n-1}(m)$ و دیگر $p_i(m)$ بدست می‌آیند و در نتیجه هر توانی

از ماتریس A قابل محاسبه است.

مثال ۱۰.۳. فرض کنید ماتریس قطری ناپذیر زیر مفروض است.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

چند جمله‌ای سرشت‌نما H به صورت $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ و مقادیر ویژه آن برابر ۱ و -1 است که مرتبه تکرار هر کدام ۲ می‌باشد. رابطه (۳.۳) برای این ماتریس به صورت زیر است:

$$A^{m+1} = p_2(m)A^3 + (2p_2(m) + p_1(m))A^2 + p_0(m)A - p_3(m)I.$$

اکنون $p_i(m+1)$ ها باید در روابط زیر صدق کنند:

$$p_2(m+1) = p_2(m),$$

$$p_2(m+1) = 2p_2(m) + p_1(m),$$

$$p_1(m+1) = p_0(m),$$

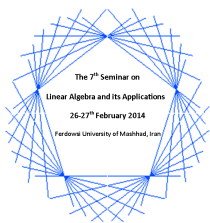
$$p_0(m+1) = -p_3(m).$$

از رابطه‌های (۴.۳) و دستگاه (۵.۳) و ساده‌سازی به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} A^m &= \frac{m}{4}(A^3 + A^2 - A - I) + \frac{(-1)^m m}{4}(-A^3 + A^2 + A + I) \\ &+ \frac{(-1)^m}{4}(A^3 - 3A + 2I) + \frac{1}{4}(-A^3 + 3A + 2I). \end{aligned}$$

مراجع

۱. م. میرزاویری، شمردنی‌ها را بشمار!، انتشارات سخن گستر، ۱۳۸۶.
۲. ک. هافمن، ر. کنزی، جبرخطی، ترجمه جمشید فرشیدی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰.
3. W. K. Nicholson, *Linear algebra with application*, PWS publishing company, Boston, 1993.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

مشخصه‌سازی جدیدی از فضاهاى ضرب داخلی با مثلثات

فاطمه مقبلی^۱ و الهام حسینی^۲

موسسه آموزش عالی خیام، دانشکده علوم پایه

^۱ fateme.moghbeli@gmail.com

^۲ elhamhosseini2012@gmail.com

چکیده. در این مقاله ویژگی‌هایی که فضای نرم‌دار را به فضای ضرب داخلی تبدیل می‌کند را بررسی می‌نماییم و با استفاده از فاصله زاویه‌ای و فاصله زاویه انحرافی مشخصه‌ای دیگر از فضای ضرب داخلی را نیز بیان می‌کنیم. همچنین با استفاده از مشخصه ی اویلر-لاگرانژ مشخصه‌ی جدیدی را به کمک مثلثات ارائه می‌دهیم.

۱. پیش‌گفتار

اولین مشخصه‌سازی هندسی فضاهاى ضرب داخلی را فرشه^۱ [۲] در سال ۱۹۳۵ بررسی نمود، همچنین جردن و فن نویمان^۲ [۲] نشان دادند که فضای نرم‌دار X ، یک فضای ضرب داخلی است، اگر و فقط اگر قانون متوازی‌الاضلاع برقرار باشد. در سال ۱۹۶۴، ویلیامز^۳ و دانکل^۴ مشخصه‌سازی جدیدی را برای فضای ضرب داخلی به کمک فاصله زاویه‌ای معرفی کردند که به صورت نامساوی زیر است.

$$\alpha[x, y] \leq \frac{\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 46C15; Secondary 46B20.
واژگان کلیدی. فاصله زاویه‌ای، قانون متوازی‌الاضلاع، فضای ضرب داخلی، فاصله زاویه‌ای انحرافی، مثلثات

^۱Frechet

^۲Neumann

^۳Williams

^۴Dunkl

و در این نامساوی عدد ۴ با عدد ۲ قابل جایگزین می‌باشد، که کرک^۵ و اسمایلی^۶ آن را نشان دادند. مصلحیان و راسیاس^۷ [۴] به کمک مشخصه‌ی اوایلر-لاگرانژ فضای نرم‌دار را به فضای ضرب داخلی تبدیل کردند. دهقان [۳] با استفاده از فاصله‌ی زاویه‌ای به تازگی مشخصه دیگری را نیز اثبات کرد. او نشان داد که اگر $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار حقیقی خطی باشد، آنگاه فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ ، فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\alpha[x, y] \leq \beta[x, y].$$

جدیدترین دست آورد مربوط به دان استفان^۸ می‌باشد. او با استفاده از مشخصه اوایلر-لاگرانژ مشخصه‌ی جدیدی را برای تبدیل فضای نرم‌دار به ضرب داخلی ارائه نمود. مشخصه اوایلر-لاگرانژ را در گزاره زیر مطرح می‌کنیم.

گزاره ۱.۱. فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ ، یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر

$$\|ax + by\|^2 + \|bx - ay\|^2 = (a^2 + b^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

$$(a, b \in \mathbb{R}^+), (x, y \in X).$$

برهان. به نتیجه‌ی ۲.۲ [۴] مراجعه کنید. $\square$

گزاره ۲.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ ، یک فضای نرم‌دار باشد، در این صورت فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ ، فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\|x \cos \alpha + y \sin \alpha\|^2 + \|y \cos \alpha - x \sin \alpha\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}), (x, y \in X).$$

برهان. ابتدا مشخصه اوایلر-لاگرانژ را به $a^2 + b^2$ تقسیم می‌کنیم، در تساوی به دست آمده، به وضوح عدد حقیقی $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد که $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. برای ادامه اثبات به گزاره ۱.۲ [۱] مراجعه کنید. $\square$

لم ۳.۱. مجموعه $\{(\cos n\alpha, \sin n\alpha) | n \in \mathbb{N}\}$ در $(0, 1)$ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$ چگال است.

لم ۴.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ ، یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ که $f(x) = \|x\|$ پیوسته است.

قضیه ۵.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ ، یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت این فضا، یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$ وجود داشته باشد که

$$\|x \cos \alpha + y \sin \alpha\|^2 + \|y \cos \alpha - x \sin \alpha\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2; \quad (1.1)$$

$$(x, y \in X).$$

^۵Kirk

^۶Smiley

^۷Rassias

^۸Dan Stefan Marinescu

برهان. ابتدا فرض کنیم که فضای نرم‌دار $(X, \| \cdot \|)$ ، یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت با توجه به گزاره ۲۰.۱، (۱.۱) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ همواره برقرار است. بنابراین $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$ حالت خاصی از آن می‌باشد که در این حالت هم نیز رابطه صدق می‌کند. حال فرض کنیم که $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$ وجود دارد که در (۱.۱) صدق می‌کند و $(X, \| \cdot \|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. با جایگذاری x با $x \cos \alpha + y \sin \alpha$ و y با $y \cos \alpha - x \sin \alpha$ داریم

$$\begin{aligned} & \| x \cos \alpha + y \sin \alpha \|^2 + \| y \cos \alpha - x \sin \alpha \|^2 \\ &= \| (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \cos \alpha + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \sin \alpha \|^2 \\ &+ \| (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \cos \alpha - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sin \alpha \|^2 \\ &= \| x(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2y \sin \alpha \cos \alpha \|^2 + \| y(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2x \sin \alpha \cos \alpha \|^2 \\ &= \| x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \|^2 + \| y \cos 2\alpha - x \sin 2\alpha \|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \|^2 + \| y \cos 2\alpha - x \sin 2\alpha \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2; \\ & (x, y \in X). \end{aligned} \quad \text{پس} \quad (2.1)$$

با استفاده از استقرای ریاضی، فرض کنیم عددی طبیعی مثل k وجود دارد که در (۲.۱) صدق می‌کند. پس

$$\| x \cos k\alpha + y \sin k\alpha \|^2 + \| y \cos k\alpha - x \sin k\alpha \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

حال برای $k+1$ اثبات می‌کنیم. برای اثبات کافی است x را با $x \cos k\alpha + y \sin k\alpha$ و y را با $y \cos k\alpha - x \sin k\alpha$ جایگزین کنیم. داریم

$$\begin{aligned} & \| x \cos k\alpha + y \sin k\alpha \|^2 + \| y \cos k\alpha - x \sin k\alpha \|^2 \\ &= \| (x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) \cos \alpha + (y \cos k\alpha - x \sin k\alpha) \sin \alpha \|^2 \\ &+ \| (y \cos k\alpha - x \sin k\alpha) \cos \alpha - (x \cos k\alpha + y \sin k\alpha) \sin \alpha \|^2 \\ &= \| x(\cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha) + y(\sin k\alpha \cos \alpha + \cos k\alpha \sin \alpha) \|^2 \\ &+ \| y(\cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha) - x(\sin k\alpha \cos \alpha + \cos k\alpha \sin \alpha) \|^2 \\ &= \| x \cos(k+1)\alpha + y \sin(k+1)\alpha \|^2 + \| y \cos(k+1)\alpha - x \sin(k+1)\alpha \|^2 \\ &\quad \text{بنابراین رابطه‌ی زیر به ازای هر } n \in \mathbb{N}^* \text{ درست است.} \\ & \| x \cos n\alpha + y \sin n\alpha \|^2 + \| y \cos n\alpha - x \sin n\alpha \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2. \end{aligned}$$

ف. مقبلی و ا. حسینی

حال با به کار بردن لم ۳.۱ دنباله ای مانند $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی وجود دارد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos a_n \alpha, \sin a_n \alpha) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

لذا داریم

$$\|x \cos a_n \alpha + y \sin a_n \alpha\|^2 + \|y \cos a_n \alpha - x \sin a_n \alpha\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

حال اگر n را به بینهایت میل دهیم و از لم ۴.۱ استفاده کنیم، داریم

$$\frac{\|x + y\|^2}{2} + \frac{\|x - y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$(x, y \in X).$$

رابطه اخیر همان قانون متوازی الاضلاع می باشد، پس $(X, \|\cdot\|)$ ، یک فضای ضرب داخلی است. $\square$

۲. دست آوردهای پژوهش

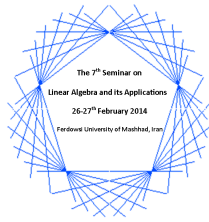
در این مقاله رابطه‌ی جدیدی را به کمک مثلثات برای مشخصه‌سازی فضاهاى ضرب داخلی که تکمیل کننده‌ی نامساوی‌های قبلی است را بررسی کردیم. فضای نرم‌دار در صورتی که در نامساوی‌های بیان شده صدق کند، قابل تبدیل به فضای ضرب داخلی می‌باشد.

سپاس‌گزاری

با سپاس فراوان از جناب دکتر مصلحیان که ما را در انجام این کار یاری رساندند.

مراجع

1. D.S. Marinescu, M.Monea, M.Opincariu and M.Stroe, *A characterization of the inner product spaces involving trigonometry*, Ann.Fuunct.Anal. 4 (2013), no. 1, 109–113.
2. F. Dadipour and M.S. Moslehian, *An approach to operator Dunkl-Williams inequality*, Publ. Math. Debrecen 79 (2011), no. 1-2, 109–118.
3. H. Dehghan, *A characterization of inner product spaces related to the skew-angular distance*, 1-6.Mat. Zametki, 93 (2013), no. 4, 549–554.
4. M. S. Moslehian and J. M. Rassias, *A characterization of inner product spaces concerning an Euler-Lagrange identity*, Commun. Math.Anal. 8 (2010), no. 2, 16–21.



چکیده مبسوط پوسترهای هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن
۷-۸ اسفند ۱۳۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد

مقایسه چند روش محاسبه تجزیه تاکاگی ($SSVD$)

پرویز سرگلزائی^۱ و پروین یگانه^{۲*}

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان
^۱p.yegane92@yahoo.com ; ^۲sargolzaei@hamoon.usb.ac.ir

چکیده. در این مقاله سه روش برای محاسبه تجزیه تاکاگی ($SSVD$) ماتریس های متقارن مختلط ارائه می شود. روش ها عبارتند از: روش تجزیه دوگانه، روش تقسیم و تسخیر و روش QR ضمنی. لازم به ذکر است محاسبات بر روی ماتریس های متقارن مختلط خاصی به نام ماتریس های هنکل انجام می گیرد. محاسبات و مقایسه این سه روش نشان دهنده نامناسبی روش QR ضمنی و برتری روش تقسیم و تسخیر در اندازه های بزرگ ماتریس هنکل بر روش تجزیه دوگانه می باشد.

۱. مقدمه

در حل بسیاری از مسائل نظری و عملی تجزیه های ماتریسی نقشی اساسی ایفا می کنند. منظور از تجزیه یک ماتریس، تبدیل آن به حاصل ضرب دو یا چند ماتریس با ساختاری ساده تر از ماتریس اولیه می باشد و هدف از این کار بهره جستن از خواص ماتریس های حاصل از تجزیه، در پیش برد حل مسائل می باشد. یکی از تجزیه های مفید در جبرخطی، مسئله تجزیه مقدار تکین و همچنین حالت های خاص این تجزیه می باشد. تجزیه تاکاگی یا تجزیه مقدار تکین متقارن ($SSVD$) شکل خاصی از تجزیه مقدار تکین می باشد. این تجزیه روی ماتریس های متقارن مختلط اعمال می شود. مزیت تجزیه تاکاگی این است که تقارن رادر نظر می گیرد و در نتیجه موجب صرفه جویی در محاسبات و ذخیره سازی است.

تعریف ۱.۱. برای هر ماتریس متقارن شکل خاصی از تجزیه مقدار تکین که تجزیه مقدار تکین متقارن ($SSVD$) یا تجزیه تاکاگی نامیده می شود، وجود دارد. فرض کنید A یک ماتریس متقارن باشد آنگاه تجزیه

$$A = U\Sigma U^T$$

که U یک ماتریس یکانی و Σ ماتریس مقدار تکین قطری است، تجزیه تاکاگی نامیده می شود. ستون های U یک مجموعه یکا متعامد از بردارهای ویژه $AA^H (= AA^H)$ و درایه های قطری Σ ریشه های دوم نامنفی از مقادیر ویژه متناظر $AA^H (= AA^H)$ هستند.

2010 Mathematics Subject Classification. 15A18; 65F20, 65F25, 65F50.

واژگان کلیدی. ماتریس هنکل، تجزیه تاکاگی، تجزیه دوگانه، روش تقسیم و تسخیر.
* سخنران

۲. روش های محاسبه تجزیه تاکاگی (SSVD)

الگوریتم های مختلفی برای اجرای SSVD وجود دارد از جمله: روش ژاکوبی، روش تجزیه دوگانه (Twist)، روش تقسیم و تسخیر (DAC) و روش QR ضمنی (IQR). در این مقاله سه روش اخیر مورد بررسی قرار می گیرد.

۱.۲. روش تجزیه دوگانه

الگوریتم این روش دو مرحله را شامل می شود. ابتدا ماتریس متقارن به ماتریس سه قطری T تبدیل شده و سپس SSVD ماتریس سه قطری حساب می شود. در سه قطری سازی از روش لانزوس استفاده می شود، یعنی ساختن یک ماتریس سه قطری بلوکی و سپس سه قطری. می دانیم که بردارهای تکین چپ T بردارهای ویژه ماتریس $S = TT^H$ هستند. روش تکراری توان معکوس راهی موثر برای محاسبه بردارهای ویژه می باشد، اگر λ تقریب خوبی از مقادیر ویژه S باشد. روش توان معکوس شامل حل دستگاه های خطی با ماتریس ضرایب $S - \lambda I$ است، پس مسئله را طوری فرمولبندی می کنیم که دستگاه های خطی را موثرتر و پایدارتر حل کنیم. [۵]

با توجه به [۵] ابتدا تجزیه LDLH ماتریس S را محاسبه می کنیم:

$$S = \hat{L} \hat{D} \hat{L}^H \quad (۱.۲)$$

که $\hat{L}$ پایین مثلثی واحد و $\hat{D}$ قطری است. $S - \lambda I$ را به دو روش زیر تجزیه می کنیم:

$$S - \lambda I = LD_L L^H = U D_U U^H \quad (۲.۲)$$

دو تجزیه بالا می توانند از تجزیه (۱.۲) با مقایسه درایه هایشان بدست آیند. با ترکیب دو تجزیه (۲.۲) تجزیه دوگانه را از ماتریس انتقال یافته به صورت زیر می سازیم:

$$S - \lambda I = N_k D_k N_k^H$$

۲.۲. روش تقسیم و تسخیر

در این روش ماتریس سه قطری

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

را به دو زیر ماتریس که هرکدام اندازه های نصف ماتریس T دارند، تقسیم می کنیم:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & b_m e_m e_1^T \\ b_m e_1 e_m^T & T_2 \end{bmatrix}$$

رابطه بین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $T_i T_i^H$ و $T T^H$ را بدست می آوریم. پس اگر تجزیه های مقدار ویژه

$$T_2 T_2^H = U_2 \Sigma_2^2 U_2^H, \quad T_1 T_1^H = U_1 \Sigma_1^2 U_1^H$$

از ماتریس های $T_1 T_1^H$ و $T_2 T_2^H$ موجود باشند، می توانیم تجزیه مقدار ویژه TT^H را با استفاده از چهار اصلاح رتبه یک پیدا کنیم. [۴]

۳.۲. روش QR ضمنی

۱.۳.۲. تکرار QR متقارن

در گام اول این تکرار، ماتریس A با استفاده از تبدیلهای تشابهی به ماتریس سه قطری متقارن $T = PAP^T$ تبدیل می شود.

گام دوم: تکرار QR تک انتقالی را در مورد T با انتقال ویلکسون w اعمال می کند: قرار می دهیم $T_1 = T$ ، w را محاسبه کنید و برای $k = 1, 2, \dots$ تا برقراری همگرایی انجام می دهیم.

$$T_k - wI = Q_k R_k, \quad T_{k+1} = R_k Q_k + wI$$

محاسبه T_{k+1} از روی T_k بدون تشکیل صریح ماتریس $T_k - wI$ معروف به QR ضمنی می باشد. [۱]

۳. مثال

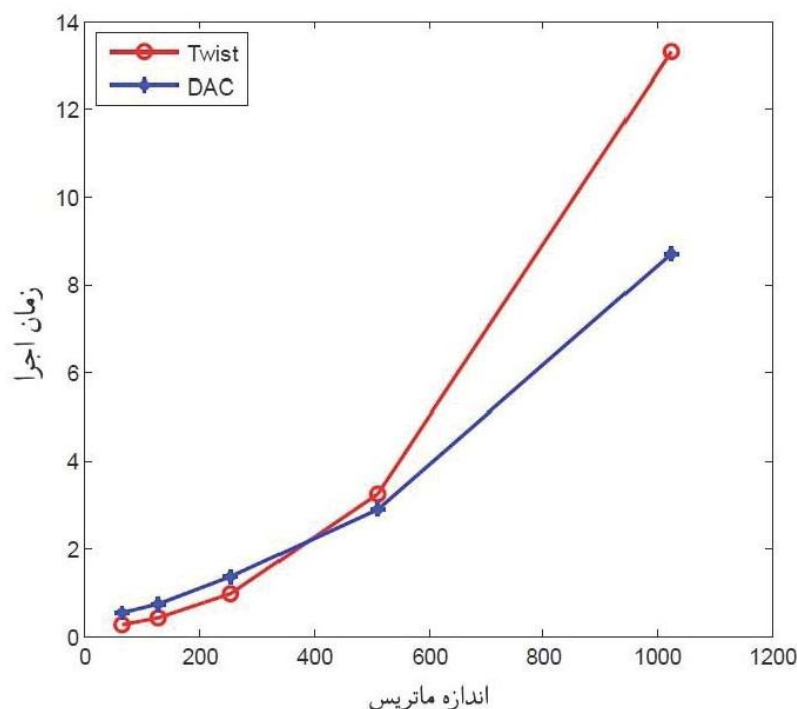
روش های ارائه شده در بالا را روی اندازه های مختلف ماتریس هنکل بررسی می کنیم. ماتریس های هنکل مختلط ماتریس های متقارن مختلط خاصی هستند که از پردازش سیگنال و آمارشناسی بدست می آیند. یک ماتریس هنکل $n \times n$ به شکل زیر است:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n-1} \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۳. با انتخاب چند اندازه از ماتریس هنکل، زمان اجرای سه روش را در جدول ۱ با هم مقایسه می کنیم. نمودار مقایسه ای نیز در شکل ۱ نشان داده شده است. نتایج عددی با استفاده از برنامه نویسی نرم افزار (MATLAB) حاصل شده است.

جدول ۱: زمان اجرای سه روش

روش $Twist$	روش DAC	روش IQR	اندازه ماتریس
۰/۲۳	۰/۵۴	۰/۷۷	۶۴
۰/۴۰۳	۰/۷۳	۲/۶۶	۱۲۸
۰/۹۵	۱/۳۷	۹/۹۰۹	۲۵۶
۳/۲۲	۲/۸۹	۴۳/۱۰۹	۵۱۲
۱۳/۳۰۱	۸/۷۲	۲۱۲/۵۳	۱۰۲۴



شکل ۱: نمودار مقایسه زمان اجرای روش DAC و $Twist$

۴. نتیجه گیری

الگوریتم QR ضمنی زمان اجرای بالایی دارد برخلاف اینکه خطاهای خوبی بدست می دهد. در دو روش تجزیه دوگانه و تقسیم و تسخیر روند ترتیبی مناسبی دنبال نمی شود و برای اندازه های کوچک ماتریس هنکل روش تجزیه دوگانه بهتر عمل می کند درحالیکه برای اندازه های بزرگ روش تقسیم و تسخیر زمان بهتری بدست می آورد.

مراجع

1. B.N. Datta, *Numerical liner algebra and applications*, Books/Cole, Pacific Groge, CA, 1995.
2. F.T. luk and S. Qiao, *A fast singular value algorithm for square Hankel matrices*, contemporary Mathematics, American Mathematical Society. 323 (2003), 169-177.
3. Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, Boston: PWS., 1996.
4. W. Xu and S. Qiao, *A divide-and-conquer method for the Takagi factorization*, McMaster University Hamilton, Ont., Canada. 30 (2008), 142-153.
5. W. Xu and S. Qiao, *A fast symmetric SVD algorithm for square Hankel matrices*, Linear Algebra and its Applications. 428 (2008), 550-563.