

ششمین سمینار بین المللی  
جبر خطی و کاربردهای آن

۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰ دانشگاه اراک

8-9 June 2011 - Arak University

مجموعه مقالات ششمین سمینار بین المللی

# جبر خطی و کاربردهای آن

Proceeding of the Sixth International Seminar on

## Linear Algebra & It's Applications

www.slaa6.com  
info@sla6.com

اراک - میدان شریعتی - دانشگاه اراک - دانشکده علوم  
گروه ریاضی - کدپستی ۸۷۹-۳۸۱۵۶ - تلفکس: ۰۸۶۱۴۱۷۳۴۱۶



قطب جبرخطی و بهینه  
سازی (کرمان)



پژوهشگاه دانش های  
بنیادی



دانشگاه اراک



انجمن ایرانی تحقیق  
در عملیات



انجمن ریاضی  
ایران



قطب آنالیز روی  
ساختارهای جبری (مشهد)



۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰  
دانشگاه اراک

The Sixth International Seminar  
On Linear Algebra & It's Applications  
8 - 9 June 2011 - ARAK UNIVERSITY

همزمان با چهلمین سال تاسیس دانشگاه اراک



معاونت علمی و فناوری  
ریاست جمهوری



بنام خداوند جان و خرد

---

---

چکیده مبسوط مقالات و چکیده ی پوسترهای

ششمین سمینار بین المللی

**جبر خطی و کاربردهای آن**

---

---

۱۸ و ۱۹ خرداد ۱۳۹۰

دانشگاه اراک

دانشکده علوم – گروه ریاضی

**Extended Abstract of**

**6<sup>th</sup> Seminar of Linear Algebra  
and its Applications**

**8-9 June 2011 – Arak University**

چکیده مبسوط مقالات و چکیده ی پوسترهای ششمین سمینار بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن

---

تدوین کننده : دکتر داود علی محمدی، دکتر علی محمد نظری، سید نوراله موسوی

مجری: گروه ریاضی دانشگاه اراک

زمان برگزاری: ۱۸ و ۱۹ خرداد ۱۳۹۰

مکان برگزاری: دانشکده علوم – دانشگاه اراک

---

## پیش گفتار

یکی از رخداد های مهم علمی کشور، برگزاری دو سالانه سمینار جبر خطی و کاربردهای آن است. خداوند دانا و توانا را سپاسگزاریم که همزمان با چهلمین سال تأسیس دانشگاه اراک توفیق برگزاری ((ششمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن)) را نصیب برگزار کنندگان نمود. بدین وسیله مقدم دانش پژوهان و اندیشمندان ارزشمند جبر خطی و مدعوین محترم را گرامی می دارد. توفیقات روز افزون برای اعتلای مقام دانش ریاضی کشور عزیزمان ایران را آرزومند است.

در این سمینار ۱۵۱ مقاله به زبان های فارسی و انگلیسی دریافت شد. پس از داوری تعداد ۷۱ مقاله به صورت سخنرانی تخصصی (۲۰ دقیقه ای) و تعداد ۳۰ مقاله به صورت پوستر پذیرفته شده اند که در زمان برگزاری سمینار ارائه می شوند. ۵ سخنرانی عمومی (۵۰ دقیقه ای) توسط سخنرانان مدعو نیز در برنامه سمینار در نظر گرفته شده است.

از سخنرانان محترم مدعو پروفیسور آندو، پروفیسور داسیلوا، پروفیسور ماریا لوسیلیا، پروفیسور رجبعلی پور، پروفیسور جعفریان و آقای دکتر یاحقی که دعوت ما را پذیرفتند صمیمانه تشکر می نماید. از اعضای محترم کمیته علمی و داوران محترم که در ارزشیابی مقالات صمیمانه و بیدریغ همکاری فرموده اند، از ارائه دهندگان محترم مقالات به صورت سخنرانی و پوستر و سایر شرکت کنندگان محترم نهایت سپاس گزاری را دارد.

وظیفه خود می دانم که از آقای دکتر صادقی سرابی رئیس محترم دانشگاه، آقای دکتر علیرضا مدقالچی رئیس محترم انجمن ریاضی ایران، آقای دکتر حمیدرضا مومنی معاون محترم پژوهشی و فناوری دانشگاه و اعضای محترم کمیته های مختلف سمینار صمیمانه تشکر نمایم.

داود علیمحمدی

دبیر علمی سمینار

H. R. Afshin, M. Zangiabadi	
Properties of Sign-real Spectral Radius .....	1
G. Aghamollaei	
Generalized numerical ranges.....	6
M. Ahmadinia , Z. Mohsenzadeh	
Numerical solution of impulsive differential equations with fixed time by Orthonormal Polynomials .....	11
M. Ahmadnasab , N. Mozafari	
Bounding the departure from normality of the iteration matrices for some special coefficient matrices of linear systems .....	16
M. Ahmadnasab , F. Babalou	
A comparative study of SVD-QR method with iterative refinement for solving symmetric .....	20
F. Akbarzadeh A. Armandnejad	
Majorization and M-convex sets .....	25
A. Alijani , M. A. Dehghan	
G-Frames in Hilbert $c^*$ -Modules .....	28
D. Ali mohamadi , M. Mayghani , M. Izadi	
Unital endomorphism of certain natural uniform sub algebras of the extended disk algebra .....	33
A. Alipanah	
A numerical technique for solving population balance integro- differential equation	
36	
H. Almasieh	
Numerical Solution of Nonlinear Time Varing systems .....	40
A. Azad	
The application of cyclic matrices in general linear groups .....	45
M. dana	
Two minimal Residual Methods for linear Polynomial in unitary Matrix .....	48
M. Dana , P. Piriaei ,N. Heidarian	
Aweighted Drazin invers and application .....	52



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## PROPERTIES OF SIGN-REAL SPECTRAL RADIUS

H.R.AFSHIN<sup>1</sup> AND M.ZANGIABADI<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. The sign-real spectral radius for square real matrices introduced in [S.M. Rump, 1997, Theorems of PerronFrobenius type for matrices without sign restrictions, Linear Algebra Appl. 266 142.] . In this note We investigate and derive various characterizations, and properties of it. In certain aspects our quantity shows similar behavior to the Perron root of a nonnegative matrix.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

We use standard notation from matrix theory. In particular,  $Q_{kn}$ , denotes the set of  $k$ -tuples of strictly increasing integers out of  $\{1, \dots, n\}$ . For  $A \in M_n(\mathbf{R})$  and  $\mu \in Q_{kn}$ ,  $A[\mu] \in M_n(\mathbf{R})$  denotes the principal submatrix of  $A$  consisting of rows  $i \in \mu$  and columns  $j \in \mu$ . In [1] a new quantity for real matrices is defined, namely the sign-real spectral radius. For a real matrix  $A$ , the quantity  $\rho_0(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ is a real eigenvalue of } A\}$  is called the real spectral radius of  $A$ . If  $A$  has no real eigenvalues,  $\rho_0(A) = 0$  by definition. Denote by  $S$  the set of signature matrices, i.e. the diagonal matrices with diagonal entries equal to either  $+1$  or  $-1$ . The sign-real spectral radius of a real matrix  $A$  is defined by

$$\rho_0^S(A) = \max_{S \in \varphi} \rho_0(SA)$$

that the sign-real spectral radius is interesting in itself and, in certain aspects, shows similar behavior to the Perron root of a nonnegative matrix: for example, the inheritance property on going to principal submatrices, the identical characterization of  $\rho_0^S(A) = 0$ , and especially the max-min characterizations. Moreover  $\rho_0^S(A)$  is proved to be always

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 15A48 ; Secondary 15A18.

*Key words and phrases*. Sign-real spectral radius; Signature matrices; Perron-Frobenius theory.

\* Speaker.

a simple eigenvalue of some  $SA$  unless  $A$  is permutationally similar to a strictly upper triangular matrix

## 2. MAIN RESULTS

The sign-real spectral radius of the real  $n \times n$  matrix  $A$  has the following properties (see [1, Lemma 2.1]):

1. If  $A^T$  denotes the transpose of the matrix  $A$  signature matrices  $S_1, S_2 \in \varphi$  a permutation matrix  $P$  and a nonsingular diagonal matrix  $D$  then
 
$$\rho_0^S(A) = \rho_0^S(A^T) = \rho_0^S(S_1AS_2) = \rho_0^S(P^TAP) = \rho_0^S(D^{-1}AD),$$

$$\rho_0^S(DA) = \rho_0^S(AD),$$

$$\rho_0^S(\alpha A) = |\alpha| \rho_0^S(A) \text{ for } \alpha \in \mathbf{R}.$$
2. if there exists a matrix  $C \in M_n(\mathbf{R})$ ,  $\text{rank} C = 1$  with  $C_{ij} := \text{sign}(A_{ij})$  for  $A_{ij} \neq 0$  and  $C_{ij} \in \{-1, 1\}$  for  $A_{ij} = 0$  then  $\rho_0^S(A) = \rho(|A|)$ .
3. If  $A$  is a triangular matrix and  $A_{ii}$  are the diagonal entries of the matrix  $A$ , then
 
$$\rho_0^S(A) = \max_i |A_{ii}|.$$

The following further properties of sign-real spectral radius will be used in the proof of Theorem 2.12 (see [1])

**Lemma 2.1.** *For every orthant there exists some signature matrix  $S$  such that  $SA$  has an eigenvector in that orthant corresponding to a real nonnegative eigenvalue, i.e.,*

$$\forall T \in \varphi \quad \exists S \in \varphi \quad \exists 0 \neq x \in \mathbf{R}^n :$$

$$x \geq 0 \quad \text{and} \quad SA.Tx = \lambda.Tx \quad \text{for some} \quad 0 \leq \lambda \in \mathbf{R}$$

for nonsingular  $A$  one has  $\rho_0^S(A) > 0$

Lemma 2.1. shows in particular that  $\rho_0^S(A)$  is always equal to a real eigenvalue of some  $SA$ .

**Lemma 2.2.** *The sign-real spectral radius has the inheritance property, that is, it cannot increase on going to a principal submatrix:*

$$\mu \in Q_{kn} \quad \text{for } 1 \leq k \leq n \quad \implies \quad \rho_0^S(A[\mu]) \leq \rho_0^S(A).$$

**Lemma 2.3.** *for  $A \in M_n(\mathbf{R})$  there exists signature matrices  $S_1, S_2$  and  $0 \neq x \in \mathbf{R}^n$  with  $x \geq 0$  and  $S_1AS_2.x = \rho_0^S(A).x$*

for  $B(\lambda) := \text{adj}(\lambda I - S_1AS_2)$  one has  $B(\rho_0^S(A)) \geq 0$ .

Note that in general we do not have  $\text{adj}B(\lambda) \geq 0$  for  $\lambda > \rho_0^S(A)$  a for nonnegative matrices (see.[3,theorem 3.1]).

**Lemma 2.4.** *For a real matrix  $A \in M_n(\mathbf{R})$   $\rho_0^S(A) = 0$  if and only if  $A$  is permutationally similar to a strictly upper triangular matrix .*

**Corollary 2.5.** *if  $\rho_0^S(A) = 0$  , then  $A$  is nilpotent .*

**Definition 2.6.** let  $A \in M_n(\mathbf{R})$  define the function  $\varphi_A$  from  $\mathbf{R}^n$  to the set of nonnegative numbers by

$$(2.1) \quad \varphi_A(x) := \min_{x_i \neq 0} \left| \frac{(Ax)_i}{x_i} \right|$$

for all nonzero  $x \in \mathbf{R}^n$

**Lemma 2.7.** *let  $A \in M_n(\mathbf{R})$  then*

$$(2.2) \quad \max_{x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0} \min_{x_i \neq 0} \left| \frac{(Ax)_i}{x_i} \right| = \rho_0^S(A) = \max_{S \in \varphi} \inf_{x > 0} \max_i \left| \frac{(ASx)_i}{x_i} \right|.$$

The function  $\varphi_A(x) := \min_{x_i \neq 0} \left| \frac{(Ax)_i}{x_i} \right|$  is basically the Collatz-Wielandt function (see.[2, Chapter 1.3].)

We note the similarity to the corresponding result for nonnegative matrices. For any  $A \in M_n(\mathbf{R})$  ,  $A \geq 0$  we have

$$(2.3) \quad \max_{x \geq 0, x \neq 0} \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \rho(A) = \inf_{x > 0} \max_i \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

As in Perron-Frobenius theory.

**Lemma 2.8.** *For  $A \in M_n(\mathbf{R})$   $n \geq 2$  exactly one of the two following statements is true.*

- (i)  $\rho_0^S(A)$  is a simple eigenvalue of  $SA$  for some  $S \in \varphi$  .
- (ii)  $A$  is permutationally similar to a strictly upper triangular matrix (and therefore  $\rho_0^S(A) = 0$  ).

In classical Perron-Frobenius theory the spectral radius is a simple eigenvalue for irreducible matrices.

**Definition 2.9.** A nonnegative  $n$ -square matrix  $A$ ,  $n > 2$ , is called reducible (decomposable) if it is permutationally to a matrix of the form

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

where  $B$  and  $D$  are square submatrices. Otherwise,  $A$  is irreducible (indecomposable).

**Corollary 2.10.** *Let  $A$  be an irreducible real matrix  $n \times n$  then  $\rho_0^S(A)$  is a simple eigenvalue of  $SA$  for some  $S \in \varphi$ .*

Unlike Perron-Frobenius theory, the eigenvector  $x$  may consist of zero components, even if  $A$  has no zero entry. Consider

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0.8 & -1.2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \rho_0^S(A) = 5 \quad \text{and} \quad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

There is no  $S \in \varphi$  such that  $SA$  has an eigenvector corresponding to an eigenvalue  $+5$  or  $-5$  without zero component, and the eigenvalue  $+5$  or  $-5$  is always simple. However,  $\rho_0^S(A) = \rho_0^S(A[\mu])$ . for  $\mu = (1, 2)$

**Lemma 2.11.** *For  $A \in M_n(\mathbf{R})$  the following are equivalent:*

- (i) *There exists  $\mu \in Q_{n-1,n}$  with  $\rho_0^S(A) = \rho_0^S(A[\mu])$ .*
- (ii) *There exists some  $S \in \varphi$  such that  $SA$  has a left or a right eigenvector to the eigenvalue  $\lambda = \rho_0^S(A)$  with a zero component.*

**Theorem 2.12.** *let  $A \in M_n(\mathbf{R})$  and function  $\varphi_A$  defined in (2.1) then*

- (i) *the function  $\varphi_A$  is homogeneous of degree 0 ;*
- (ii) *if  $x \neq 0$  and  $\rho$  is the largest real number for which*

$$|A| |x| - \rho |x| \geq 0$$

*then  $\rho = \varphi_A(x)$*

- (iii) *if  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $x \neq 0$  and  $y = (I_n + |A|)^{n-1} |x|$  then  $\varphi_A(y) \geq \varphi_A(x)$*

*Proof.* (i) For  $t > 0$  and  $0 \neq x \in \mathbf{R}^n$  we have

$$\varphi_A(tx) = \min_{(tx)_i \neq 0} \left| \frac{(A(tx))_i}{(tx)_i} \right| = \min_{tx_i \neq 0} \left| \frac{t(Ax)_i}{tx_i} \right| = \min_{x_i \neq 0} \left| \frac{(Ax)_i}{x_i} \right| = \varphi_A(x)$$

- (ii) The function of  $\varphi_A(x)$  implies that

$$|A| \cdot |x| - \varphi_A(x) |x| \geq 0$$

and that there exists an integer  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  such that  $x_k \neq 0$  and the  $k$ th coordinate of  $|A| \cdot |x| - \varphi_A(x) |x|$  is 0. Thus if  $c > \varphi_A(x)$  so  $(|A| \cdot |x| - c |x|)_k < 0$  thus the  $k$ th coordinate of  $|A| \cdot |x| - c |x|$  is negative. The result follows.

(iii) We have  $|A| \cdot |x| - \varphi_A(x) |x| \geq 0$  Multiplying both sides by  $(I_n + |A|)^{n-1}$ , we obtain

$$|A| (I_n + |A|)^{n-1} \cdot |x| - \varphi_A(x) (I_n + |A|)^{n-1} |x| \geq 0$$

, since  $A$  and  $(I_n + |A|)^{n-1}$  commute, that is,  $|A| y - \varphi_A(x) y \geq 0$  But by part (ii),  $\varphi_A(y)$  is the largest number satisfying  $|A| y - \varphi_A(y) y \geq 0$  Hence

$$\varphi_A(y) \geq \varphi_A(x)$$

□

**Theorem 2.13.** *let  $C$  be a complex matrix,  $A \in M_n(\mathbf{R})$ ,  $|C| \leq |A|$  then for every eigenvalue  $t$  of  $C$ ,*

$$|t| \leq \rho_0^S(A)$$

*Proof.* let  $Cy = ty$  where  $y \neq 0$  then  $|C| |y| \geq |t| |y|$  by triangle inequality. But  $|C| \leq |A|$  and therefore

$$(2.5) \quad |A| |y| \geq |C| |y| \geq |t| |y|$$

Hence by Theorem 2.12  $|t| \leq \varphi_A(|y|)$  where  $\varphi_A$  is defined in (2.1) and by lemma 2.7

$$(2.6) \quad |t| \leq \varphi_A(|y|) \leq \rho_0^S(A)$$

□

## REFERENCES

1. S.M. RUMP, *Theorems of PerronFrobenius type for matrices without sign restrictions*, Linear Algebra Appl. 266 (1997) 142.
2. H. MINT, *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York, 1988.
3. A. BERMAN AND R. J. PLEMMONS, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM Classics Appl. Math., Philadelphia, 1994.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY OF RAFSANJAN, P. O. BOX 518, RAFSANJAN, IRAN.

*E-mail address:* afshin@vru.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY OF RAFSANJAN, P. O. BOX 518, RAFSANJAN, IRAN.

*E-mail address:* zangiabadi7831054@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## GENERALIZED NUMERICAL RANGES

GHOLAMREZA AGHAMOLLAEI\*

ABSTRACT. Let  $A$  and  $C$  be two  $n \times n$  complex matrices. In this note, by a simple proof, we show that the  $C$ -numerical range of  $A$  is convex whenever  $C$  is Hermitian. We also introduce a new generalization of the numerical range of matrix polynomials, and we investigate some algebraic and geometrical properties of this notion.

### 1. INTRODUCTION

Let  $M_n$  be the algebra of all  $n \times n$  complex matrices, and  $\mathcal{U}_n$  be the group of  $n \times n$  unitary matrices. For  $A, C \in M_n$ , the  $C$ -numerical range of  $A$  is defined as:

$$W_C(A) = \{ \operatorname{tr}(CU^*AU) : U \in \mathcal{U}_n \}.$$

Westwick in 1975, [9], by using the Morse theory, proved that  $W_C(A)$  is convex whenever  $C$  is Hermitian. Later Poon in 1980, [6], give another proof of this result. In section 2 of this note, we give a simple proof of this result.

Suppose that

$$(1.1) \quad P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + A_1 \lambda + A_0$$

is a matrix polynomial, where  $A_i \in M_n$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ),  $A_m \neq 0$  and  $\lambda$  is a complex variable. The numbers  $m$  and  $n$  are referred to as the *degree* and the *order* of  $P(\lambda)$ , respectively. Matrix polynomials arise in many applications and their spectral analysis is very important when studying linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, see [5] and its references. The matrix polynomial  $P(\lambda)$ , as in (1.1),

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 15A60; Secondary 15A18.

*Key words and phrases*.  $C$ -numerical range, matrix polynomial.

\* Speaker.

is called a *monic matrix polynomial* if  $A_m = I$ . A scalar  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  is an *eigenvalue* of  $P(\lambda)$  if the system  $P(\lambda_0)x = 0$  has a nonzero solution  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ . This solution  $x_0$  is known as an *eigenvector* of  $P(\lambda)$  corresponding to  $\lambda_0$ , and the set of all eigenvalues of  $P(\lambda)$  is said to be the *spectrum* of  $P(\lambda)$ . So,  $\sigma[P(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(P(\mu)) = 0\}$ . The (*classical*) *numerical range* of  $P(\lambda)$ , as in (1.1), is the set:

$$W[P(\lambda)] := \{\mu \in \mathbb{C} : x^* P(\mu)x = 0 \text{ for some nonzero } x \in \mathbb{C}^n\},$$

which is closed and contains  $\sigma[P(\lambda)]$ ; see [5] for more information. The numerical range of matrix polynomials plays an important role in the study of overdamped vibration systems with a finite number of degrees of freedom, and it is also related to the stability theory; see e.g., [5]. In section 2 of this note, we introduce a new generalization of the numerical range of matrix polynomials, and we investigate some algebraic and geometrical properties of this notion. In the last few years, the generalization of the numerical range of matrix polynomials has attracted the attention, many interesting results have been obtained; see e.g., [1, 7, 8].

## 2. $C$ -NUMERICAL RANGE OF MATRICES

Let  $A \in M_n$ . The *classical numerical range* of a matrix  $A \in M_n$  is defined as  $W(A) := \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$ , which has been studied extensively for many decades. It is useful in studying and understanding matrices and operators, see [3], and has many applications in numerical analysis, differential equations, systems theory, etc. One generalization of the classical numerical range of matrices, due to Goldberg and Straus [2], is the notion of  $C$ -numerical range of matrices which is stated in previous section. This notion is related to optimization problems, and has important applications in quantum control and quantum information. Now, we state some important properties of the  $C$ -numerical range of matrices.

**Proposition 2.1.** *Let  $A, C \in M_n$ . Then the following assertions are true:*

- (i)  $W_C(A)$  is a compact and connected set in  $\mathbb{C}$ ;
- (ii)  $W_C(\alpha I + \beta A) = \alpha \operatorname{tr}(C) + \beta W_C(A)$ , where  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
- (iii)  $W_{V^*CV}(U^*AU) = W_C(A) = W_A(C)$ , where  $U, V \in \mathcal{U}_n$ ;
- (iv) If  $C = qE_{11} + \sqrt{1 - |q|^2}E_{12}$ , where  $q \in \mathbb{C}$  with  $|q| \leq 1$  and  $E_{ij} \in M_n$  has 1 in  $(i, j)$ -position and 0 elsewhere, then  $W_C(A) = W_q(A) := \{x^*Ay : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\}$ ; and

(v)  $W_C(A)$  is star-shaped with respect to star-center  $\frac{\text{tr}(A)}{n} \frac{\text{tr}(C)}{n}$ , here a nonempty subset  $S$  of a real linear space is said to be star-shaped with respect to star-center  $s \in S$  if  $[s, x] \subseteq S$ , whenever  $x \in S$ , where  $[s, x]$  denotes the line segment  $\{(1-t)s + tx : 0 \leq t \leq 1\}$ .

*Remark 2.2.* The set  $W_q(A)$  in Proposition 2.1(iv), is called the  $q$ -numerical range of  $A \in M_n$ . It is a generalization of the classical numerical range of  $A$ ; namely:  $W_1(A) = W_{E_1 1}(A) = W(A)$ . For more information, see [4].

Let  $E$  and  $F$  be two Hermitian matrices. Suppose that  $\prec$  denotes the majorization. It is known that  $\lambda(E + F) \prec \lambda(E) + \lambda(F)$ , where  $\lambda(X)$  is the vector of eigenvalues of any Hermitian matrix  $X \in M_n$ . Also, if  $\lambda(E) \prec \lambda(F)$ , then  $W_E(A) \subseteq W_F(A)$  for any  $A \in M_n$  [2]. Now, we state the our main result of this section.

**Theorem 2.3.** *Let  $A, C \in M_n$ , and  $C$  be Hermitian. Then  $W_C(A)$  is convex.*

*Proof.* Let  $\lambda, \mu \in W_C(A)$  and  $0 \leq t \leq 1$  be given. So, there exist  $U, V \in \mathcal{U}_n$  such that  $\lambda = \text{tr}(CU^*AU)$  and  $\mu = \text{tr}(CV^*AV)$ . Thus,

$$(1-t)\lambda + t\mu = \text{tr}([(1-t)UCU^* + tVCV^*]I^*AI) \in W_{(1-t)UCU^* + tVCV^*}(A).$$

Since  $(1-t)UCU^* + tVCV^*$  is Hermitian and  $\lambda((1-t)UCU^* + tVCV^*) \prec (1-t)\lambda(C) + t\lambda(C) = \lambda(C)$ ,  $W_{(1-t)UCU^* + tVCV^*}(A) \subseteq W_C(A)$ . Hence,  $(1-t)\lambda + t\mu \in W_C(A)$ , and the proof is complete.  $\square$

### 3. $C$ -NUMERICAL RANGE OF MATRIX POLYNOMIALS

Let  $P(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$  be a matrix polynomial as in (1.1). In this section, we introduce a new generalization of  $W[P(\lambda)]$ .

**Definition 3.1.** Let  $P(\lambda)$  be a matrix polynomial as in (1.1). For a given matrix  $C \in M_n$ , the  $C$ -numerical range of  $P(\lambda)$  is defined and denoted by

$$W_C[P(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{tr}(CU^*P(\mu)U) = 0 \text{ for some } U \in \mathcal{U}_n\}.$$

If  $\text{tr}(C) = 0$ , then, by Proposition 2.1(v),  $W_C(P(\mu))$  is star-shaped with respect to star-center  $0 = \frac{\text{tr}(P(\mu))}{n} \frac{\text{tr}(C)}{n}$  for all  $\mu \in \mathbb{C}$ . So,  $W_C[P(\lambda)] = \mathbb{C}$ . **Hence, to avoid trivial consideration, we shall assume that  $\text{tr}(C) \neq 0$  in this section.**

For the special case  $P(\lambda) = \lambda I - \text{tr}(C)A$ , where  $A \in M_n$ , we have  $W_C[P(\lambda)] = W_C(A)$ . Hence, the  $C$ -numerical range of matrix polynomials can be considered as a generalization of the  $C$ -numerical range of matrices.

Let  $q \in \mathbb{C}$  with  $|q| \leq 1$  be given. Assume that  $P(\lambda)$  is a matrix polynomial as in (1.1). The  $q$ -numerical range of  $P(\lambda)$  is defined, see [7], as

$$W_q[P(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : x^* P(\mu) y = 0 \text{ for some nonzero vectors } x, y \in \mathbb{C}^n \text{ with } x^* y = q\},$$

which is a generalization of  $W[P(\lambda)]$ , namely,  $W_1[P(\lambda)] = W[P(\lambda)]$ . Now, set  $C = qE_{11} + \sqrt{1 - |q|^2}E_{12} \in M_n$ . Then, by Proposition 2.1(iv), we have  $W_C[P(\lambda)] = W_q[P(\lambda)]$ . Hence, the  $C$ -numerical range of matrix polynomials is a new generalization of the  $q$ -numerical range (consequently, the numerical range) of matrix polynomials.

It is clear that  $W_C[P(\lambda)]$  is a closed set in  $\mathbb{C}$ , but need not be bounded; see e.g., [5, Example 1] for  $C = E_{11} \in M_n$ . Here, for the boundedness of the  $C$ -numerical range of matrix polynomials, we state the following theorem.

**Theorem 3.2.** *Let  $C \in M_n$ , and  $P(\lambda)$  be a matrix polynomial as in (1.1). If  $0 \notin W_C(A_m)$ , then  $W_C[P(\lambda)]$  is bounded.*

We consider two vectors  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ . The vector  $x$  is obtained from  $y$  by pinching if there exist  $1 \leq i, j \leq n$  (not equal), and  $0 \leq t \leq 1$  such that  $x_i = ty_i + (1 - t)y_j$ ,  $x_j = (1 - t)y_i + ty_j$  and  $x_k = y_k$  for  $k \neq i, j$ . We say that  $x \prec\prec y$  if  $x$  is obtained from  $y$  by a succession of a finite number of pinchings. For more information about these notions, see [2].

**Proposition 3.3.** *Let  $P(\lambda)$  be a matrix polynomial as in (1.1), and  $C_1, C_2 \in M_n$  be two normal matrices with the vectors of eigenvalues  $\lambda(C_1)$  and  $\lambda(C_2)$ , respectively. Then  $W_{C_1}[P(\lambda)] \subseteq W_{C_2}[P(\lambda)]$  if one of the following holds:*

- (i)  $\lambda(C_1) \prec\prec \lambda(C_2)$ ;
- (ii)  $C_1$  and  $C_2$  are Hermitian matrices, and  $\lambda(C_1) \prec \lambda(C_2)$ .

In view of symmetry, we state the following proposition.

**Proposition 3.4.** *Let  $C \in M_n$ , and  $P(\lambda)$  be a matrix polynomial as in (1.1). Then the following assertions are true:*

- (i) *If all the powers of  $\lambda$  in  $P(\lambda)$  are even (or all of them are odd), then  $W_C[P(\lambda)]$  is symmetric with respect to the origin;*
- (ii) *If all entries of the matrices  $C, A_0, A_1, \dots, A_m$  lie on a line in the complex plain passing through origin, then  $W_C[P(\lambda)]$  is symmetric with respect to the real axis.*

## REFERENCES

1. GH. AGHAMOLLAIE AND A. SALEMI, *Polynomial numerical hulls of matrix polynomials, II*, Linear and Multilinear Algebra, 59 (2011), 291-302.

2. M. GOLDBERG AND E.G. STRAUS, *Elementary inclusion relations for generalized numerical ranges*, Linear Algebra Appl., 18 (1977), 1-24.
3. R. HORN AND C. JOHNSON, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridg University Press, New York, 1991.
4. C.K. LI, P.P. MEHTA AND L. RODMAN, *A generalized numerical range: The range of a constrained sesquilinear form*, Linear and Multilinear Algebra, 37 (1994), 24-49.
5. C.K. LI AND L. RODMAN, *Numerical range of matrix polynomials*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 15 (1994), 1256-1265.
6. Y.T. POON, *Another proof of a result of Westwick*, Linear and Multilinear Algebra, 9 (1980), 35-37.
7. P. PSARRAKOS AND P. VLAMOS, *The  $q$ -numerical range of matrix polynomials*, Linear and Multilinear Algebra, 47 (2000), 1-9.
8. A. SALEMI AND GH. AGHAMOLLAEI, *Polynomial numerical hulls of matrix polynomials*, Linear and Multilinear Algebra, 55 (2007), 219-228.
9. R. WESTWICK, *A theorem on numerical range*, Linear and Multilinear Algebra, 2 (1975), 311-315.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAR UNIVERSITY OF KERMAN, P. O. Box 76169-14111, KERMAN, IRAN.

*E-mail address:* aghamollaei@uk.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## NUMERICAL SOLUTION OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FIXED TIME BY ORTHONORMAL POLYNOMIALS

M. AHMADINIA<sup>1\*</sup> AND Z. MOHSENZADEH<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** There are many bases of orthogonal polynomials that each one is specified by its inner product indeed, its weight function. In this talk we use Chebyshev, Laguerre, Hermite and Legendre polynomials to approximate the solution of Impulsive differential equation with fixed time by collocation method (linear system), and compare the results. Finally, some experiments are given.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Many evolution processes are subject to short term perturbations which act instantaneously in the form of impulses. Thus, the study of impulsive differential equations provides a natural description of observed evolution processes of several real word problems in medicine, biology, physics, engineering, etc. We introduce some basic knowledge of system with impulsive effect at fixed instants of time, considering the following system

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq t_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, \\ x(t_0^+) = x_0, \end{cases}$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34A37; Secondary 05E35.

*Key words and phrases.* Impulsive differential equations; Collocation method; Basis of orthogonal polynomials.

\* Speaker.

where  $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  is an open subset and  $t_k < t_{k+1}$  and with  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ , as usual  $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-)$ ,  $x(t^+)$  and  $x(t^-)$  denote the right and left limits of  $x$  at  $t$  respectively.

**Definition 1.1.** The function  $x(t)$ ,  $t \in (t_0, b)$  is said to be the solution of the system (1.1), if the following conditions are satisfied:

- (1)  $x(t_0^+) = x_0$ ,  $(t, x(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$  for  $t \in (t_0, b)$ ,
- (2) for  $t \in (t_0, b)$ ,  $t \neq t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , the function  $x(t)$  is differentiable and  $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$ ,
- (3) the function  $x(t)$  is left continuous in  $(t_0, b)$ , if  $t \in (t_0, b)$  and  $t = t_k$ ,  $t \neq b$  then  $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$ .

**Theorem 1.2.** If  $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  is continuous in  $(t_k, t_{k+1}] \times \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} f(t, y)$  is finite and exists and  $f$  is locally Lipschitz continuous with respect to  $x$  in  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ , then the solution  $x(t)$  of problem (1.1) is unique.

Proof of theorem, see [1-2].

In this paper, we consider the following impulsive differential equation

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = \alpha x, & t \neq k, t > 0, \\ \Delta x = \beta x, & t = k, \\ x(0^+) = x_0, \end{cases}$$

where  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $1 + \beta \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . This Problem studied in [3] by Ran, Liu and Zhu. They solved the problem by multistep methods and they focus on Runge-Kutta method. We solve the problem by collocation method with different orthonormal bases and present some advantages.

Problem (1.2), in  $(0, \infty)$ , has a unique solution

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} (1 + \beta)^{[t]}$$

where  $[t]$  denote the greatest-integer function of  $t$ . So, it is easy to obtain the following theorem.

**Theorem 1.3.** The solution  $x \equiv 0$  of Eq.(1,2) is asymptotically stable ( $x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ ) if and only if  $|(1 + \beta)e^\alpha| < 1$ .

## 2. THE METHOD

Consider the following linear combination

$$u(t) := \sum_{k=0}^n c_k P_k(t),$$

$\{P_k\}_{k=0}^\infty$  is an orthonormal polynomials basis and  $c_k$ 's are  $n+1$  unknown coefficients, we choose  $n-1$  points  $t_1, \dots, t_{n-1}$  in the domain and require  $u(t)$  to satisfy the differential equation (1.2) at just these  $n-1$  points, these points are called collocation points, and  $u(t)$  is called approximate solution of collocation method (with orthonormal basis) which satisfies initial condition. We have to solve the following system

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k (\dot{P}_k(t_j) - \alpha P_k(t_j)) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \sum_{k=0}^n c_k P_k(0) &= x_0. \end{aligned}$$

## 3. MAIN RESULTS

In this section, we use first and second kind of Chebyshev polynomial (with weight functions  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  and  $\sqrt{1-x^2}$  respectively), Legendre polynomial (with weight function  $(1-x)^a(1+x)^b$  when  $a, b$  are greater than  $-1$ ), Laguerre polynomial (with weight function  $e^{-x}x^a$  standard form  $a = 0$ ) and Hermite polynomial (with weight function  $e^{-x^2}$ ) as collocation polynomials. See [4]. We solve the system (1.2) by different values of  $\alpha, \beta, x_0$  by collocation method and compare them with Runge-Kutta method as a powerful multi step method. The following examples will be helpful to describe the main results of this paper.

**Example 3.1.**

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = 1.2x, & t \neq k, t > 0, \\ \Delta x = -0.9x, & t = k, \\ x(0^+) = 1, \end{cases}$$

**Example 3.2.**

$$(3.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = -3.9x, & t \neq k, t > 0, \\ \Delta x = 10x, & t = k, \\ x(0^+) = 3, \end{cases}$$

We consider  $m = 10$ ,  $m$  is the number of mesh points in all orthonormal bases and also the number of steps in Runge-Kutta method. The tables show some advantages of the collocation method with orthonormal bases. The error in the Runge-Kutta method is accumulated at the end of last subinterval(impulsive equation is defined on interval which has finite number of subintervals with impulses at the boundary of subintervals). The error of the collocation method (the maximum error) will be risen at the first subinterval.

Table 1: Collocation error of problem(2,1)

<i>Basis</i>	<i>Error</i>	<i>Speed(s)</i>	<i>Cond number</i>
<i>ChebT</i>	$1.2e - 10$	2.15	$3.70283e + 21$
<i>ChebU</i>	$1.2e - 10$	1.88	$6.9899e + 21$
<i>Hermite</i>	$1.2e - 10$	2.47	$6.5540e + 21$
<i>Legendre</i>	$1.2e - 10$	2.37	$2.3258e + 21$
<i>Laguerre</i>	$1.2e - 10$	2.06	$3.5269e + 14$

Table 2: Collocation error of problem(2,2)

<i>Basis</i>	<i>Error</i>	<i>Speed(s)</i>	<i>Cond number</i>
<i>ChebT</i>	$2.5e - 6$	1.97	$4.9867e + 22$
<i>ChebU</i>	$2.5e - 6$	1.96	$4.9775e + 22$
<i>Hermite</i>	$2.5e - 6$	1.92	$3.1226e + 22$
<i>Legendre</i>	$2.5e - 6$	2.98	$1.6563e + 22$
<i>Laguerre</i>	$2.5e - 6$	2.03	$1.14119e + 15$

Table 3: Runge-kutta error of problems(2,1)

$3 - LobattoIIIB$	$2 - RadauIA$
$1.68e - 007$	$1.22e - 004$

Table 4: Runge-kutta error of problems(2,2)

$2 - LobattoIIIB$	$3 - Gauss$
$1.22e - 004$	$3.67e - 010$

## REFERENCES

1. X.L. FU, B.Q. YAN, *Introduction to the Impulsive Differential System*, Scientific Publishers, 2005.
2. V. LAKSHMIKANTHAM, D.D. BAINOV, P.S. SIMENOV, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
3. X.J. RAN, M.Z. LIU, Q.Y. ZHU, Numerical methods for impulsive differential equation , *Math. Comput. Modelling*,48 (2008), 46-55.

4. J. STOER AND R. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed, Springer-Verlag, New Yourk, 1993.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF QOM, P. O. BOX 37185-3766, QOM, IRAN.  
*E-mail address:* m-ahmadinia@qom.ac.ir & mahdiahmadinia72@gmail.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF QOM, P. O. BOX 37185-3766, QOM, IRAN.  
*E-mail address:* reihaneh.mohsenzadeh@gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## BOUNDING THE DEPARTURE FROM NORMALITY OF THE ITERATION MATRICES FOR SOME SPECIAL COEFFICIENT MATRICES OF LINEAR SYSTEMS

MORAD AHMADNASAB<sup>1\*</sup> AND NABI MOZAFARI<sup>2</sup>

ABSTRACT. Let  $Ax = b$  for  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  and  $b \in \mathbb{C}^n$  be a linear system and  $x^{(0)}$ ,  $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + d$  be one of Jacobi's or Gauss-Seidel's iteration formula for solving the linear system. In this work, we introduce some bounds on the departure from normality of the iteration matrices  $T$  for some special coefficient matrices  $A$ .

### 1. INTRODUCTION

In exact arithmetic, the sequence  $\{x^{(k)}\}$  produced by the successive iteration

$$(1.1) \quad x^{(0)}, \quad x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + d,$$

is converging for any  $x^{(0)}$  if and only if  $\rho(T) < 1$  where  $\rho(T)$  is the spectral radius of  $T$ . However, it is shown [3] that for certain matrices  $T$ , the condition  $\rho(T) < 1$  is not enough for the convergence of the sequence (1.1) in finite precision arithmetic. The phenomenon is attributed to the conjunction of the nonnormality of  $T$  and the finite precision of the computer arithmetic [1]. A large variety of the efforts including (but not limited to) Henrici (1962), Wilkinson (1965), Parlett (1974), Van der Sluis (1975), Chatelin (1988, 1993), Chaitin-Chatelin and Frayssé (1996), Ipsen (2003) and Gheorghiu (2003) could be listed concerning the relation between the condition of a matrix and its departure from normality, i. e., the measure of either  $\nu(T) = \|TT^* - T^*T\|$  or  $\Delta(T) = \|N\|$ , where  $N$  is the strictly triangular part of the Schur form  $T = D + N$  associated with  $T$ .

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65G10; 65G30, 65N12.

*Key words and phrases.* Iterative linear system solvers, finite precision arithmetic, diagonally dominant matrix, irreducible matrix, symmetric positive definite, nonnormality.

\* Speaker.

In this paper, as a part of an ongoing work, we introduce some bounds on the departure from normality of both Jacobi's iteration matrix  $T_J$  and Gauss-Seidel's iteration matrix  $T_{GS}$  for some special coefficient matrices  $A$ . We leave the question about the cases which causes higher nonnormality of iteration matrices for future research. Here, we measure the departure from normality of matrix  $T$  by  $\nu(T) = \|TT^* - T^*T\|$ . An example will be presented to demonstrate what are proved in the theories.

## 2. MAIN RESULTS

The measure of nonnormality of the iteration matrices is crucial in convergence of the iterative linear system solvers [1]. So in this section, we bound the departure from normality of some iteration matrices associated with some special coefficient matrices  $A$ . More specifically, we bound the departure from normality of the iteration matrix  $T$  when the coefficient matrix  $A$  in  $Ax = b$  is one of 1) diagonally dominant, 2) irreducible and weakly row diagonally dominant or 3) symmetric positive definite.

We assume that reader is familiar enough with Jacobi's iterative method and Gauss-Seidel's iterative method, but we just recall the definitions of Jacobi's iteration matrix and Gauss Seidel's Iteration matrix. Let write  $A = D - L - U$  where  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ ,  $-L$  is strictly lower triangular part of  $A$ , and  $-U$  is strictly upper triangular part of  $A$ . Then Jacobi's iteration matrix is  $T_J = D^{-1}(D - A)$ , and Gauss Seidel's Iteration matrix is  $T_{GS} = (D - L)^{-1}U$ .

**Definition 2.1.** The  $n \times n$  matrix  $A$  is said to be *strictly row diagonally dominant* when  $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$  holds for each  $i = 1, \dots, n$ .  $A$  is strictly column diagonally dominant when  $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$  holds for each  $j = 1, \dots, n$ .

**Theorem 2.2.** *If  $A$  is strictly row diagonally dominant, the departure from normality (defined by infinity-norm) of both  $T_J$  and  $T_{GS}$  are bounded by 2.*

*Proof.* When  $A$  is strictly row diagonally dominant, the assertion of Theorem 6.2 in [2] ensures that  $\|T_{GS}\|_\infty \leq \|T_J\|_\infty < 1$ . And as we have  $\nu(T)_\infty = \|TT^* - T^*T\|_\infty \leq 2\|T\|_\infty^2$ , therefore  $\nu(T)_\infty \leq 2\|T\|_\infty^2 < 2$  where  $T$  stands for either  $T_J$  or  $T_{GS}$ .  $\square$

**Remark 2.3.** If we use the 1-norm, the same bounds as those of Theorem 2.2 exist for the departure from normality of  $T$  when  $A$  is strictly column diagonally dominant.

**Definition 2.4.**  $A$  is an *irreducible* matrix if there is no permutation matrix  $P$  such that

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

**Definition 2.5.** The matrix  $A$  is said to be a *weakly row diagonally dominant*, if for all  $i$ ,  $|a_{ii}| \geq \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$  with strict inequality at least once.

Although for any operator norm, one has  $\rho(T) \leq \|T\|$ , but in general, the difference between  $\|T\|$  and  $\rho(T)$  may be arbitrary large. Nevertheless given any  $\varepsilon > 0$ , it is shown in [2], Lemma 6.5, that there is an operator norm  $\|\cdot\|_{\varepsilon, T}$  such that  $\rho(T) \leq \|T\|_{\varepsilon, T} \leq \rho(T) + \varepsilon$ . Here  $\varepsilon > 0$  could be arbitrary small which means that there are some operator norms on  $T$  whose sizes are almost equal to those of  $\rho(T)$  but for each case we would like to provide an explicit bound even though they are not so sharp. The instruction for building such an operator norm is the following [2]:

**Algorithm 2.6.** Building up an operator norm  $\|\cdot\|_{T, \varepsilon}$  with the property that for any  $\varepsilon > 0$ ,  $\|T\|_{T, \varepsilon} < \rho(T) + \varepsilon$

- (1) Calculate the Jordan form of  $T$  such that  $J = V^{-1}TV$ ,
- (2) For an arbitrary but fixed  $\varepsilon > 0$ , let  $D_\varepsilon = \text{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$ ,
- (3) Define  $\|T\|_{\varepsilon, T} = \|\hat{J}\|_\infty$  where  $\hat{J} = D_\varepsilon^{-1}JD_\varepsilon$ .

Now, for example, for a given  $T$  with  $\rho(T) < 1$ , if we choose  $\varepsilon > 0$  such that  $\rho(T) + \varepsilon < 1$ , then we can get an operator norm with the property  $\|T\|_{\varepsilon, T} < 1$ .

**Theorem 2.7.** Given  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  is irreducible and weakly row diagonally dominant, there are some operator norms  $\|\cdot\|_{\varepsilon, T}$  such that both  $\nu_{\varepsilon, T}(T_J)$  and  $\nu_{\varepsilon, T}(T_{GS})$  are less than 2 where  $\nu_{\varepsilon, T}(T) = \|TT^* - T^*T\|_{\varepsilon, T}$ .

*Proof.* We prove the assertion related to the Jacobi's iteration matrix. The argument for the case of Gauss-seidel's iteration matrix is the same. For the mentioned matrices  $A$ , we have  $\rho(T_J) < 1$  [4]. On the other side, one can apply Algorithm 2.6 and choose  $\varepsilon > 0$  to get an operator norm  $\|\cdot\|_{\varepsilon, T_J}$  with the desired property  $\|T_J\|_{\varepsilon, T_J} < 1$ . Therefore  $\nu_{\varepsilon, T}(T_J)$  defined using this operator norm is less than 2.  $\square$

**Definition 2.8.** The symmetric matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is called *symmetric positive definite*, if

$$x^T Ax > 0, \text{ for } 0 \neq x \in \mathbb{R}^n.$$

**Theorem 2.9.** Given  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is symmetric positive definite, there is an operator norm  $\|\cdot\|_{\varepsilon, T}$ , such that  $\nu_{\varepsilon, T}(T) = \|TT^* - T^*T\|_{\varepsilon, T}$  is less than 2 for  $T = T_{GS}$ .

*Proof.* For a symmetric positive definite matrix, it is known [2] that  $\rho(T_{GS}) < 1$ . Now, we choose  $\varepsilon > 0$  such that  $\rho(T_{GS}) + \varepsilon < 1$ . Then applying Algorithm 2.6 results in an operator norm  $\|\cdot\|_{\varepsilon, T_{GS}}$  such that  $\rho(T_{GS}) \leq \|T_{GS}\|_{\varepsilon, T_{GS}} \leq \rho(T_{GS}) + \varepsilon < 1$ . So, using this norm, we have  $\nu_{\varepsilon, T}(T_{GS}) < 2$ .  $\square$

**Example 2.10.** The matrix  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$  is both strictly diagonal dominant and symmetric positive definite and we have  $\nu_\infty(T_J) = 0$ ,  $\|T_J\|_\infty = 0.8$ ,  $\nu_\infty(T_{GS}) = 0.62$ , and  $\|T_{GS}\|_\infty = 0.6$  which support the bound introduced in Theorem 2.2. Since  $A$  is symmetric positive definite too, so we can approach to make (and to bound) the special operator norm in Theorem 2.9. First, we calculate the Jordan form of  $T_{GS}$  such that  $J = V^{-1}T_{GS}V$ . Then we define  $D_\varepsilon = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$ . Now, for  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\|T_{GS}\|_{\varepsilon, T_{GS}} = \|\hat{J}\|_\infty = 0.4$  where  $\hat{J} = D_\varepsilon^{-1}JD_\varepsilon$ . Therefore, using the new operator norm, we have  $\nu_{\varepsilon, T_{GS}}(T_{GS}) < 2 \times (0.4)^2 = 0.32 < 2$ .

## REFERENCES

1. F. CHAITIN-CHATELIN AND S. GRATTON, *Convergence in finite precision of successive iteration methods under high nonnormality*, BIT, **36:3** (1996) 455-469.
2. J. W. DEMMEL, *Applied numerical linear algebra*, Siam, Philadelphia, 1997.
3. S. HAMMARLING AND J. H. WILKINSON, *The practical behaviour of linear iterative methods with particular reference to SOR*, Technical Report NAC **69**, NPL, Teddington, 1976.
4. R. S. VARGA, *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN, P. O. BOX 416, SANANDAJ, IRAN.  
E-mail address: M.Ahmadnasab@uok.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN, P. O. BOX 416, SANANDAJ, IRAN.  
E-mail address: N.Mozafari2009@gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## A COMPARATIVE STUDY OF SVD-QR METHOD WITH ITERATIVE REFINEMENT FOR SOLVING SYMMETRIC POSITIVE DEFINITE GENERALIZED EIGENPROBLEMS

MORAD AHMADNASAB<sup>1\*</sup> AND FATEMEH BABALOU<sup>1</sup>

**ABSTRACT.** Given a generalized eigenvalue problem  $Ax = \lambda Bx$  for  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Under the assumption that both of  $A$  and  $B$  are symmetric and one of them is symmetric positive definite, we study some properties of a symmetric version of SVD-QR reduction method and contrast it with Cholesky-QR method. Our study shows the ability of SVD-QR in providing comparable accurate solutions. Beside, for some special problems in this area, the possibility of choosing and applying an appropriate version of SVD-QR method illustrates its flexibility which results in the solutions with less need to apply an iterative refinement.

### 1. INTRODUCTION

The symmetric definite generalized eigenvalue problem

$$(1.1) \quad Ax = \lambda Bx,$$

where  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are symmetric and  $B$  is positive definite, arises in many applications in science and engineering [2]. The QZ algorithm [5] can be used to solve (1.1). This method is numerically stable but it does not exploit the special structure of the problem and so does not necessarily produce real eigenpairs in floating point arithmetic. A standard method, apparently first suggested by Wilkinson, begins by computing the Cholesky factorization, optionally with complete pivoting. A version of this reduction method which uses the

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 15A18; 15A22, 65F15.

*Key words and phrases.* Matrix pencils, symmetric positive definite generalized eigenvalue problem, singular value decomposition, Cholesky-QR method, SVD-QR method.

\* Speaker.

QR algorithm for solving the resulted standard eigenvalue problem is known as Cholesky-QR method [3]. For some interesting works on symmetric positive definite generalized eigenproblems, SPDGEP, see [3] and references therein where they studied and compared the behavior of Cholesky-QR method and Cholesky-Jacobi method and see [4] for more recent publications on enclosing all eigenpairs of SPDGEP.

In this paper, we introduce a symmetric version of SVD-QR reduction method, namely symmetric SVD-QR, for solving SPDGEP. The basic SVD-QR method for the first time was introduced in [1]. This method needs the nonsingularity of one of  $A$  or  $B$ , the fact that is guaranteed by positive definiteness of either  $A$  or  $B$ . Our main goal is to display the good accuracy obtained by symmetric SVD-QR method, for some problems, compared with some known methods from the literature such as Cholesky-QR method. In addition, we exemplify the flexibility that this family of SVD basis offers to some SPDGEP problems whose both matrices  $A$  and  $B$  are nonsingular. Numerical examples are presented showing the efficiency of the proposed method.

## 2. MAIN RESULTS

In this section, we first introduce a modification of SVD-QR which is suitable for solving some SPDGEP with  $A$  symmetric positive definite and  $B$  symmetric. Then another version of this method, suitable for the problems with  $A$  symmetric and  $B$  symmetric positive definite will be presented shortly. Here we consider, merely, small or moderate SPDGEP problems. For more explanations on how the method works, refer to [1].

**Algorithm 2.1.** When  $A$  is symmetric positive definite and  $B$  is symmetric.

1. Use the SVD of matrix  $B$  to write it in the form  $B = U_B V_B^T$  as explained in [1],
2. Solve  $AC = U_B$  for  $C$  using Cholesky factorization,
3. Use the QR algorithm to compute the eigenvalues  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, r_B$  of  $V_B^T C = M$ , where  $r_B$  is the rank of  $B$
4. The set of finite eigenvalues of SPDGEP is  $sp(A, B) = \{\lambda_i = 1/\mu_i ; 0 \neq \mu_i \in \sigma(M)\}$ .

We denote this version of our method by SSVDQR1. The error introduced by this reduction method can be proportional to  $\|V_B^T\| \|A^{-1}\| \|U_B\|$ .

Now, let  $Ax = \lambda Bx$  be an SPDGEP with  $B$  symmetric positive definite and  $A$  symmetric. An appropriate version of SVD-QR for this case can be driven from Algorithm 2.1 by changing the role of  $A$  and  $B$ , and introducing the set of finite eigenvalues of this

SPDGEP by the union of the eigenvalues of the matrix  $M$  and a set of  $n - r_A$  zeros where  $r_A$  is the rank of  $A$ . We denote this version of the method by SSVDQR2.

When  $A$  (resp.  $B$ ) is nonsingular, then the lower rank matrix  $B$  (resp.  $A$ ), the better performance of the corresponding version of the method [1]. The new feature is that, we discuss and solve a more complete set of generalized eigenvalue problems with  $A$  symmetric and  $B$  symmetric positive definite and vice versa.

### 3. NUMERICAL EXPERIMENTS

We use  $e(\hat{\lambda}) = \frac{|\lambda - \hat{\lambda}|}{|\lambda|}$ , as the forward error of the computed eigenvalue  $\hat{\lambda}$  where the exact  $\lambda$  means what is obtained by MATLAB's Symbolic Math Toolbox. To evaluate the backward error, we use the explicit expression  $\eta(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \frac{\|r\|}{(|\hat{\lambda}| \|B\| + \|A\|)\|\hat{x}\|}$ , where  $r = \hat{\lambda}B\hat{x} - A\hat{x}$  is the residual [3].

**Example 3.1.** We consider an example which was adapted in [3] to show that it is possible for the Cholesky-Jacobi method to be stable when Cholesky-QR method with and without

pivoting is unstable. Let  $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \delta \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ ,  $B = \text{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon, 1)$ , where  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 10^{-3}$ , and  $\varepsilon = 10^{-11}$ . Here  $\text{cond}(A) = 1.50e+6$  and  $\text{cond}(B) = 1.00e+11$ .

(a) We solved the problem  $Ax = \lambda Bx$  by SSVDQR1 method and also by Matlab version of the Cholesky-QR method. Table 1 displays good forward and backward errors of the solutions obtained by SSVDQR1. It is well known that when  $B$  is ill-conditioned, numerical stability can be lost in the Cholesky-based method [3]. Here the first two smallest eigenvalues of the pencil  $A - zB$  produced by the Cholesky-QR method show poor forward and backward errors, so we use the iterative refinement introduced in the Algorithm 4.1 in [3] to improve the accuracy of the solution. Table 2 shows the forward and backward errors before and after iterative refinement of the solutions of Cholesky-QR method. We denote by *it*, the necessary number of iterations to get the acceptable forward and backward errors.

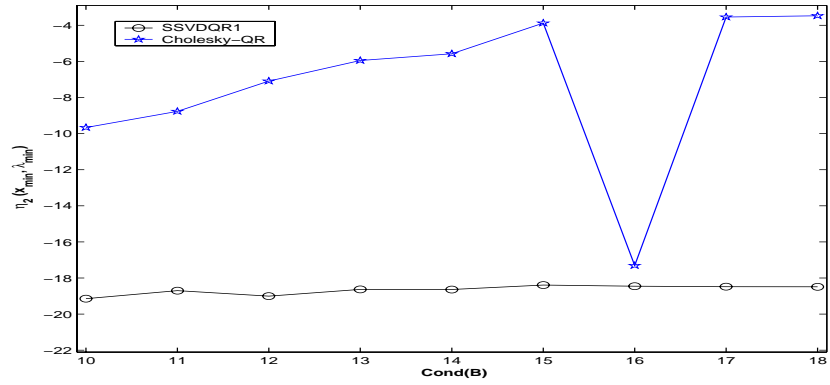
(b) For the same matrices  $A$  and  $B$ , the same numbers  $\alpha$  and  $\delta$ , let consider a range of  $\varepsilon$  from  $10^{-10}$  to  $10^{-18}$ . Figure 1 displays the logarithmic scale of condition number of  $B$  against the logarithmic scale of backward error  $\eta_2(\tilde{x}_{min}, \tilde{\lambda}_{min})$  for the eigenvalue  $\tilde{\lambda}_{min}$  of minimal modulus. The Cholesky-QR method performs unstably for most of the matrices  $B$  in the figure, while SSVDQR1 displays excellent stability.

TABLE 1. Forward and backward errors of the solutions obtained by SSVDQR1 for Example 3.1 (a).

$\lambda$	$e(\hat{\lambda})$	$\eta(\hat{x}, \hat{\lambda})$
-1.99e-06	1.48e-15	2.01e-19
1.00	2.22e-16	3.31e-17
1.00e+11	1.52e-16	3.14e-27
3.00e+11	0	1.48e-27

TABLE 2. Forward and backward errors of the solutions produced by Cholesky-QR method for Example 3.1 (a) before and after iterative refinement.

$\lambda$	Before refinement		After refinement		
	$e(\hat{\lambda})$	$\eta(\hat{x}, \hat{\lambda})$	it	$e(\hat{\lambda})$	$\eta(\hat{x}, \hat{\lambda})$
-1.99e-06	2.53e-06	1.69e-09	1	6.45e-12	4.30e-18
1.00	5.07e-06	8.97e-07	1	2.22e-16	4.56e-15

FIGURE 1.  $\log_{10}(\text{Cond}(B))$  versus  $\log_{10}(\eta_2(x_{\min}, \lambda_{\min}))$  for Example 3.1 (b).

(c) For the same matrices  $A$  and  $B$ , the same numbers  $\alpha$ ,  $\delta$ , and  $\varepsilon$  as those of the case (a), if we solve the new problem  $Bx = \lambda Ax$  using SSVDQR1, then the forward errors and the backward errors are poor for some of the eigenvalues and eigenpairs respectively: note that for these kinds of problems the error can be proportional to  $\|B^{-1}\|$  and here it is  $\|B^{-1}\| = 10^{18}$ . It is interesting to remark that for this latter case, the second version of our method, that is the SSVDQR2, produces extremely good forward errors and backward errors and there is no need to any refinement. On the other side, since  $A$  is not positive definite, the Cholesky-QR (and even the Cholesky-Jacobi) method is not applicable. The idea of finding the finite nonzero eigenvalues of  $A - zB$  as the reciprocal of the finite eigenvalues of the pencil  $B - zA$  does not seem to be advantageous because as we have

already seen, for the problem  $Ax = \lambda Bx$  of this example, Cholesky-QR does not obtain accurate results.

#### REFERENCES

1. M. AHMADNASAB, *An order reduction method for computing the finite eigenvalues of regular matrix pencils*, CERFACS Technical Report TR/PA/08/23, 2008. available at <http://www.cerfacs.fr/6-26646-Technical-Reports-2008.php>.
2. B. N. DATTA, *Numerical Linear Algebra and Applications*, Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1995.
3. P. I. DAVIES, N. J. HIGHAM, AND F. TISSEUR, *Analysis of the Cholesky method with iterative refinement for solving the symmetric definite generalized eigenproblem*, SIAM J. Matrix. Anal., **23** (2001), pp. 472 - 493.
4. S. MIYAJIMA, T. OGITA, S. M. RUMP, S. OISHI, *Fast verification for all eigenpairs in symmetric positive definite generalized eigenvalue problems*, Reliable Computing, **14** (2010), pp. 24 - 45.
5. C. B. MOLER AND G. W. STEWART, *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal., **10** (1973), pp. 241 - 256.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN, P. O. BOX 416, SANANDAJ, IRAN.  
*E-mail address:* M.Ahmadnasab@uok.ac.ir  
*E-mail address:* fa\_babalou@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## MAJORIZATION AND M-CONVEX SETS

F. AKBARZADEH<sup>1\*</sup> AND A. ARMANDNEJAD<sup>2</sup>

ABSTRACT. In this article a class of polytopes associated with majorization, gw and gs-majorization is studied and a connection to discrete convexity is established.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The  $i$ th largest components in a vector  $x \in \mathbb{R}^n$  is denoted by  $x_{[i]}$ . For vectors  $x, v \in \mathbb{R}^n$  we say that  $x$  is majorized by  $v$ , and write  $x \prec_m v$ , whenever  $\sum_{j=1}^k x_{[j]} \leq \sum_{j=1}^k v_{[j]}$  for  $k = 1, 2, \dots, n$  with equality for  $k = n$ . It is well known that  $x \prec_m v$  if and only if there exists a doubly stochastic matrix  $D$  such that  $x = Dv$ . A complex matrix  $A \in M_n$  is g-row stochastic if  $Ae = e$  where  $e = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$ . A complex matrix  $D \in M_n$  with the property that  $D$  and  $D^t$  are g-row stochastic matrices is said to be g-doubly stochastic. For  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , we say that  $y$  is gs-majorized (respectively gw-majorized) by  $x$  and write  $y \prec_{gs} x$  (respectively  $y \prec_{gw} x$ ) if  $y = Rx$  for some g-doubly (respectively g-row) stochastic matrix  $R$ . The following propositions give some equivalent conditions for  $\prec_{gs}$  and  $\prec_{gw}$  on  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.1.** [2, Proposition 2.1] *Let  $x$  and  $y$  be two distinct vectors in  $\mathbb{R}^n$ . Then,  $y \prec_{gs} x$  if and only if  $x \notin \text{span}\{e\}$  and  $\text{tr}(x) = \text{tr}(y)$ .*

**Proposition 1.2.** [1, Lemma 2.2] *Let  $x \in \mathbb{R}^n$ . Then  $y \prec_{gw} x$  for every  $y \in \mathbb{R}^n$  if and only if  $x \notin \text{span}\{e\}$ .*

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15B36 ; Secondary 15A39.

*Key words and phrases.* Majorization; g-majorization and M-convex sets.

\* Speaker.

A majorization permutahedron  $\mathbf{M}_\alpha(v)$  is a polytope associated with a majorization  $x \prec_\alpha v$  (here  $\alpha \in \{\mathbf{m}, \mathbf{gw}, \mathbf{gs}\}$ ) in  $\mathbb{R}^n$  defined by  $\mathbf{M}_\alpha(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \prec_\alpha v\}$ . For a set  $V$ ,  $\mathcal{P}(V)$  denotes the class of all subsets of  $V$ . Put  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , a function  $\rho$  from the class  $\mathcal{P}(V)$  into  $\mathbb{R}$  is called submodular if  $\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$  for each  $X, Y \subseteq V$ .

**Example 1.3.** For  $x \in \mathbb{R}^n$  the function  $x : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $x(s) = \sum_{j \in s} x_j$  is a submodular function.

For each submodular function  $\rho$  the base polyhedron associated with  $\rho$  is the following set:

$$B(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(s) \leq \rho(s), \forall s \in \mathcal{P}(V) \text{ and } x(V) = \rho(V)\}.$$

For a vector  $v \in \mathbb{R}^n$  define  $\text{supp}^+(v) = \{j : v_j > 0\}$  and  $\text{supp}^-(v) = \{j : v_j < 0\}$ . A nonempty set  $B$  of integers in  $\mathbb{Z}^n$  is said to be an M-convex set if for each  $x, y \in B$  and  $i \in \text{supp}^+(x - y)$ , there exists  $j \in \text{supp}^-(x - y)$  such that  $x - e_i + e_j \in B$  and  $y + e_i - e_j \in B$ .

The following propositions describe the relationship between the M-convex sets and submodular set functions.

**Proposition 1.4.** [4, Proposition 4.14] *Let  $\rho$  be an integer-valued submodular set function. Then  $B := B(\rho) \cap \mathbb{Z}^n$  is M-convex.*

**Proposition 1.5.** [4, Proposition 4.1] *For an M-convex set  $B$  we have  $x(V) = y(V)$  for any  $x, y \in B$ .*

## 2. M-CONVEXITY OF $\mathbf{M}_\alpha(v) \cap \mathbb{Z}^n$

In this section we investigate the M-convexity of  $\mathbf{M}_\alpha(v) \cap \mathbb{Z}^n$  for every  $\alpha \in \{\mathbf{m}, \mathbf{gw}, \mathbf{gs}\}$ .

**Definition 2.1.** For a vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , the set of integral vectors in  $\mathbf{M}_\alpha(v)$  is denoted by  $\mathbf{M}_\alpha^I(v)$ . In fact  $\mathbf{M}_\alpha^I(v) = \mathbf{M}_\alpha(v) \cap \mathbb{Z}^n$ .

Here we give a necessary and sufficient condition for M-convexity of  $\mathbf{M}_m(v)$ . Let  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  and  $v \in \mathbb{R}^n$ . Define the set function  $\rho_v : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  by  $\rho_v(s) = \sum_{j=1}^{|s|} v[j]$  for every  $\phi \neq s \subseteq V$  and  $\rho_v(\phi) = 0$ .

**Theorem 2.2.** [3, Theorem 1] *Let  $v \in \mathbb{R}^n$ . Then  $\rho_v$  is submodular and  $\mathbf{M}_m(v) = B(\rho_v)$ . Therefore  $\mathbf{M}_m(v)$  is a base polyhedron.*

**Corollary 2.3.** [3, Corollary 2] *If  $v$  is integral, then  $\mathbf{M}_m^I(v)$  is M-convex.*

Now, we show that for every vector  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{M}_{gs}^I(v)$  is M-convex.

**Theorem 2.4.** *For a vector  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{M}_{gs}^I(v)$  is M-convex.*

*Proof.* It is clear that for every  $x, y \in \mathbf{M}_{gs}^I(v)$ ,  $i \in \text{supp}^+(x - y)$  and  $j \in \text{supp}^-(x - y)$  we have  $\text{tr}(x - e_i + e_j) = \text{tr}(x) - \text{tr}(e_i) + \text{tr}(e_j) = \text{tr}(x) - 1 + 1 = \text{tr}(x) = \text{tr}(v)$ . So  $x - e_i + e_j \in \mathbf{M}_{gs}^I(v)$ , and similarly  $y + e_i - e_j \in \mathbf{M}_{gs}^I(v)$ . Therefore  $\mathbf{M}_{gs}^I(v)$  is M-convex.  $\square$

The following result shows that when  $\mathbf{M}_{gw}^I(v)$  is M-convex.

**Theorem 2.5.** *Let  $v \in \mathbb{R}^n$ . Then  $\mathbf{M}_{gw}^I(v)$  is M-convex if and only if  $v \in \text{span}\{e\}$ .*

*Proof.* Let  $v \in \text{span}\{e\}$ . So  $\mathbf{M}_{gw}(v) = \{v\}$ , and hence  $\mathbf{M}_{gw}^I(v) = \{v\}$  or  $\phi$ . Therefore  $\mathbf{M}_{gw}^I(v)$  is M-convex.

Now suppose that  $v \notin \text{span}\{e\}$ , therefore  $\mathbf{M}_{gw}^I(v) = \mathbb{Z}^n$ . We can consider  $x, y \in \mathbb{Z}^n$  such that  $x(V) \neq y(V)$ , so by Proposition 1.5,  $\mathbf{M}_{gw}^I(v)$  is not M-convex.  $\square$

#### REFERENCES

1. A. ARMANDNEJAD AND A. SALEMI, *On linear preservers of lgw-majorization on  $M_{n,m}$* , *Bull. Malaysian Math. Soc.*, ( to appear).
2. A. ARMANDNEJAD, A. SALEMI, *The structure of linear preservers of gs-majorization*, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **32**, No.2 (2006), 31-42 .
3. G. DAHL, *Majorization permutahedra and (0,1) matrices*, *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, (2010), 3265-3271.
4. K.MORUTA, *Discrete Convex Analysis*, *SIAM*, (2003).

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY OF RAFSANJAN, P. O. Box 7713936417, RAFSANJAN, IRAN.

*E-mail address:* akbarzadeh6288@yahoo.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY OF RAFSANJAN, P. O. Box 7713936417, RAFSANJAN, IRAN.

*E-mail address:* armandnejad@mail.vru.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## **\*-G-FRAMES IN HILBERT $C^*$ -MODULES**

A. ALIJANI<sup>1\*</sup> AND M.A. DEHGHAN<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** Certain facts about frames and  $g$ -frames are extended for the new  $g$ -frames in Hilbert  $C^*$ -modules where they are called  $*-g$ -frames. It is shown that  $*-g$ -frames for Hilbert  $C^*$ -modules share several useful properties with  $g$ -frames for Hilbert  $C^*$ -modules. The  $*-g$ -frames are compared with  $g$ -frames by one example. The paper also studies the important operator associated to a given  $*-g$ -frame.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Frames were first introduced in 1952 and their theory was generalized and various generalizations consisting of vectors in Hilbert spaces and Hilbert  $C^*$ -modules were developed. In 2005, the notion of  $g$ -frames was introduced by Sun [5] and afterward, a new extension of frames in Hilbert  $C^*$ -modules,  $*-frames$ , were studied by Alijani and Dehghan [2]. In the new extension, vector bounds are applied instead of real bounds. In this paper we are going to introduce a collection of  $g$ -frames in a Hilbert  $A$ -module that have bounds in the  $C^*$ -algebra  $A$ . The theory of frames in a Hilbert  $C^*$ -module are important because there are many differences between Hilbert  $C^*$ -modules and Hilbert spaces. For example, the Riesz representation theorem and orthogonal complement of subspaces do not extend to Hilbert  $C^*$ -modules. This makes the study of the frames for Hilbert  $C^*$ -modules interesting.

The paper is organized as follows. We continue this section with a review of the basic definitions and notations of Hilbert  $C^*$ -modules, and frames. The concept of  $*-g$ -frames in

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C15; Secondary 47C15, 46L99.

*Key words and phrases.*  $*-g$ -Bessel sequence, Frame,  $g$ -Frame,  $*-g$ -frame,  $*-g$ -frame operator, Hilbert  $C^*$ -module.

\* Speaker.

Hilbert  $C^*$ -modules is introduced in the Main results section. In this section, nontrivial example of such  $*-g$ -frames and corresponding operator associated with a given  $*-g$ -frame are also presented.

Let us recall some definitions and basic properties of  $C^*$ -algebras and Hilbert  $C^*$ -modules that we need in the rest of the paper.

Let  $\mathcal{A}$  be a  $C^*$ -algebra. A pre-Hilbert  $C^*$ -module  $\mathcal{H}$  is a Hilbert  $C^*$ -module or, simply, a Hilbert  $\mathcal{A}$ -module if it is complete with respect to the norm  $\|f\| = \|\langle f, f \rangle\|_{\mathcal{A}}^{\frac{1}{2}}$ .

The  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  itself can be recognized as a Hilbert  $\mathcal{A}$ -module with the inner product  $\langle a, b \rangle = ab^*$ .

Let  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  and  $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  be Hilbert  $\mathcal{A}$ -modules. A (not necessarily linear or bounded) map  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  is said to be adjointable (with respect to the  $\mathcal{A}$ -inner products  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  and  $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ), if there exists a map  $T^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  satisfying  $\langle Tf, g \rangle_2 = \langle f, T^*g \rangle_1$  whenever  $f \in \mathcal{H}$ , and  $g \in \mathcal{K}$ . The map  $T^*$  is called the adjoint of  $T$ . The class of all adjointable maps from  $\mathcal{H}$  into  $\mathcal{K}$  is denoted by  $B_*(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  and the class of all bounded  $\mathcal{A}$ -module maps from  $\mathcal{H}$  into  $\mathcal{K}$  is denoted by  $B_b(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . It is known that  $B_*(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \subseteq B_b(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . We write  $B_*(\mathcal{H})$  and  $B_b(\mathcal{H})$  for  $B_*(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  and  $B_b(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ , respectively. (We avoid the classical notation  $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  which has different usage by operator theorists and frame theorists.)

Throughout the paper, we fix the notations  $\mathcal{A}$  and  $J$  for a given unital  $C^*$ -algebra and a finite or countably infinite index set, respectively. Also, the Hilbert  $\mathcal{A}$ -modules  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}_j$ , for  $j \in J$ , are assumed to be finitely or countably generated.

The remainder of the section introduces some extensions of frames in Hilbert spaces and Hilbert  $C^*$  modules.

A  $g$ -frame for a given separable Hilbert space  $H$  is a family of ordered pairs  $\{(\Lambda_j, K_j) : j \in J\}$  consisting of separable Hilbert spaces  $K_j$  and bounded linear operators  $\Lambda_j : H \rightarrow K_j$  satisfying

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} \|\Lambda_j f\|^2 \leq B\|f\|^2$$

for all  $f \in H$  and some positive constants  $A, B$  independent of  $f$  [5].

Before, the notion of frames for Hilbert spaces had been extended by Frank-Larson [3] to the notion of frames for Hilbert  $\mathcal{A}$ -modules as a family  $\{f_j\}_{j \in J}$  in a Hilbert  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{H}$  satisfying

$$A\langle f, f \rangle \leq \sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle \langle f, f_j \rangle^* \leq B\langle f, f \rangle$$

for all  $f \in \mathcal{H}$  and some positive constants  $A, B$  independent of  $f$ . Parallel to this, Khosravi-Khosravi [4] extended the concept of  $g$ -frames from Hilbert spaces to Hilbert  $C^*$ -modules.

By a  $g$ -frame for a given Hilbert  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{H}$  we mean a family of ordered pairs  $\{(\Lambda_j, \mathcal{K}_j) : j \in J\}$  consisting of Hilbert  $\mathcal{A}$ -modules  $\mathcal{K}_j$  and operators  $\Lambda_j \in B_*(\mathcal{H}, \mathcal{K}_j)$  satisfying

$$A\langle f, f \rangle \leq \sum_{j \in J} \langle \Lambda_j f, \Lambda_j f \rangle \leq B\langle f, f \rangle$$

for all  $f \in \mathcal{H}$  and some positive constants  $A, B$  independent of  $f$ .

## 2. MAIN RESULTS

Now, we are going to define a new version of  $g$ -frames in Hilbert  $C^*$ -modules.

**Definition 2.1.** Let  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}_j$  be Hilbert  $\mathcal{A}$ -modules and  $\Lambda_j \in B_*(\mathcal{H}, \mathcal{K}_j)$  for  $j \in J$ . A  $*$ - $g$ -frame for  $\mathcal{H}$  is a collection of ordered pairs  $\{(\Lambda_j, \mathcal{K}_j) : j \in J\}$  such that

$$(2.1) \quad A\langle f, f \rangle A^* \leq \sum_{j \in J} \langle \Lambda_j f, \Lambda_j f \rangle \leq B\langle f, f \rangle B^*,$$

for all  $f \in \mathcal{H}$  and strictly nonzero elements  $A$  and  $B$  in  $\mathcal{A}$ .

(Throughout the paper, series like (2.1) are assumed to be convergent in the norm sense.)

The numbers  $A$  and  $B$  are called the lower and the upper  $*$ - $g$ -frame bounds, respectively.

*Remark 2.2.* If  $\{(\Lambda_j, \mathcal{K}_j) : j \in J\}$  is a  $*$ - $g$ -frame for the Hilbert  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{H}$  with an upper bound  $B$ , then  $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$  is uniformly bounded by  $\|B\|$ .

The proof is similar to the one given for ordinary  $g$ -frames [1] and can be obtained by using the properties of positive elements in  $C^*$ -algebras.

We mentioned that the set of all of  $g$ -frames in Hilbert  $\mathcal{A}$ -modules can be considered as a subset of  $*$ - $g$ -frames. To illustrate this, let  $\{(\Lambda_j, \mathcal{K}_j) : j \in J\}$  be a  $g$ -frame for the Hilbert  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{H}$  with  $g$ -frame real bounds  $A$  and  $B$ . Note that for  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$(\sqrt{A})1_{\mathcal{A}}\langle f, f \rangle(\sqrt{A})1_{\mathcal{A}} \leq \sum_{j \in J} \langle \Lambda_j f, \Lambda_j f \rangle \leq (\sqrt{B})1_{\mathcal{A}}\langle f, f \rangle(\sqrt{B})1_{\mathcal{A}}.$$

Therefore, every  $g$ -frame for a Hilbert  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{H}$  with real bounds  $A$  and  $B$  is a  $*$ - $g$ -frame for  $\mathcal{H}$  with  $\mathcal{A}$ -valued  $*$ - $g$ -frame bounds  $(\sqrt{A})1_{\mathcal{A}}$  and  $(\sqrt{B})1_{\mathcal{A}}$ .

To throw more light on the subject and understand the use of the concepts, we include an example of nontrivial  $*$ - $g$ -frame and we show that  $\mathcal{A}$ -valued bounds are preferred to real-valued bounds in some cases.

**Example 2.3.** Let  $\mathcal{A} = \ell^\infty$  and let  $\mathcal{H} = \mathcal{C}_0$ , the Hilbert  $\mathcal{A}$ -module of the set of all null sequences equipped with the  $\mathcal{A}$ -inner product

$$\langle (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle = (x_i \overline{y_i})_{i \in \mathbb{N}}.$$

The action of each sequence  $(a_i) \in \mathcal{A}$  on a sequence  $(x_i) \in \mathcal{H}$  is implemented as  $(a_i)(x_i) = (a_i x_i)$ . Let  $j \in J = \mathbb{N}$  and  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (1 + \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ . Define  $\Lambda_j \in B_*(\mathcal{H})$  by

$$\Lambda_j(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (\delta_{ij} a_j x_j)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}.$$

We observe that

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle \Lambda_j x, \Lambda_j x \rangle &= ((1 + \frac{1}{i})^2 x_i \overline{x_i})_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (1 + \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}} \langle x, x \rangle (1 + \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}}, \quad \forall x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Thus  $\{(\Lambda_j, \mathcal{H})\}_{j \in J}$  is a tight  $*$ - $g$ -frame with bounds  $(1 + \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}}$ , (The element  $(1 + \frac{1}{i})_{i \in \mathbb{N}}$  is strictly nonzero in  $\mathcal{A}$ ). But it is not a tight  $g$ -frame for Hilbert  $\ell^\infty$ -module  $\mathcal{C}_0$ . Note that,  $\{(\Lambda_j, \mathcal{H})\}_{j \in J}$  is a  $g$ -frame with optimal lower and upper real bounds 1 and 2, respectively.

*Frame operator* is an important notion in the theory of ordinary frames. The definition of frame operator for  $*$ - $g$ -frames is similar to the definition of  $g$ -frame operators.

**Definition 2.4.** Given a  $*$ - $g$ -frame  $\{(\Lambda_j, \mathcal{K}_j)\}_{j \in J}$  in the Hilbert  $\mathcal{A}$ -module  $H$  with bounds  $(A, B)$ , its corresponding  $*$ - $g$ -frame operator is an operator  $S$  by  $Sf = \sum_{j \in J} \Lambda_j^* \Lambda_j f$  for all  $f \in \mathcal{H}$ .

In this case, the  $*$ - $g$ -frame operator has some properties similar to  $g$ -frame operator and some others is not similar.

**Theorem 2.5.** Let  $\{(\Lambda_j, \mathcal{K}_j)\}_{j \in J}$  be a  $*$ - $g$ -frame for  $\mathcal{H}$  with  $*$ - $g$ -frame operator  $S$  and lower and upper  $*$ - $g$ -frame bounds  $A$  and  $B$ , respectively. Then  $S$  is positive, invertible and adjointable. Also,

$$\|A^{-1}\|^{-2} \leq \|S\| \leq \|B\|^2, \quad f = \sum_{j \in J} \Lambda_j^* \Lambda_j S^{-1} f,$$

are valid for  $f \in \mathcal{H}$ .

*Proof.* Since  $\langle Sf, f \rangle = \sum_{j \in J} \langle \Lambda_j f, \Lambda_j f \rangle$ , for  $f \in \mathcal{H}$ , and the set of positive elements of  $\mathcal{A}$  is closed,  $S$  is a positive element in  $C^*$ -algebra  $B_*(\mathcal{H})$  and  $S$  is also adjointable. We show that  $S$  is invertible. For see this, we use an another operator. By positivity of  $S$ , there

is a positive element  $G$  in  $B_*(\mathcal{H})$  such that  $S = G^*G$ . Let  $\{Gf_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $R_G$  such that  $Gf_n \rightarrow g$  as  $n \rightarrow \infty$ . For  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\|A\langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle A^*\| \leq \|\langle S(f_n - f_m), f_n - f_m \rangle\| = \|G(f_n - f_m)\|^2.$$

Since  $\{Gf_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  is a Cauchy sequence in  $\mathcal{H}$ ,  $\|A\langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle A^*\| \rightarrow 0$  as  $n, m \rightarrow \infty$ . Note that for  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|\langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle\| &= \|A^{-1}A\langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle A^*(A^*)^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\|^2 \|A\langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle A^*\|. \end{aligned}$$

Therefore the sequence  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  is Cauchy in  $H$  and hence there exists  $f \in \mathcal{H}$  such that  $f_n \rightarrow f$  as  $n \rightarrow \infty$ . Again by the definition of  $*g$ -frames, the following inequality holds,

$$\|G(f_n - f)\|^2 \leq \|B\|^2 \|\langle f_n - f, f_n - f \rangle\|.$$

Thus  $\|Gf_n - Gf\| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  implies that  $Gf = g$ . It concludes that  $R_G$  is closed. By a like proof  $G$  is injective. Therefore  $G$  is injective, closed range and self-adjoint and hence  $S$  is invertible. For the rest of the proof, we show the inequality. The definition of  $*g$ -frames implies that  $\langle f, f \rangle \leq A^{-1}\langle Sf, f \rangle (A^*)^{-1}$  and  $\langle Sf, f \rangle \leq B\langle f, f \rangle B^*$ , and then

$$\|A^{-1}\|^{-2} \|\langle f, f \rangle\| \leq \|\langle Sf, f \rangle\| \leq \|B\|^2 \|\langle f, f \rangle\|, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

If we take supremum on all  $f \in \mathcal{H}$ , where  $\|f\| \leq 1$ , then  $\|A^{-1}\|^{-2} \leq \|S\| \leq \|B\|^2$ . In the end, for  $f \in \mathcal{H}$ , we obtain  $f = SS^{-1}f = \sum_{j \in J} \Lambda_j^* \Lambda_j S^{-1}f$ .  $\square$

## REFERENCES

1. A. ALIJANI AND M. A. DEGHAN, 'G-frames and their duals in Hilbert  $C^*$ -modules', *Bulletin Iranian Math. Soc.*, (2011), to appear.
2. A. ALIJANI AND M. A. DEGHAN, ' $*g$ -frames in Hilbert  $C^*$ -modules', (2011), preprint.
3. M. FRANK AND D. R. LARSON, 'Frames in Hilbert  $C^*$ -modules and  $C^*$ -algebra', *J. Operator theory*, 48 (2002), 273-314.
4. A. KHOSRAVI AND B. KHOSRAVI, 'Fusion frames and  $g$ -frames in Hilbert  $C^*$ -modules', *Int. J. Wavelet Multiresolution and Information Processing*, 6 (3) (2008), 433-446.
5. W. SUN, 'G-frames and  $g$ -Riesz bases', *J. Math. Anal. Appl.*, 322 (2006), 437-452.

<sup>1,2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY, P. O. BOX 518, RAFSAJAN, IRAN.

*E-mail address:* aligany@vru.ac.ir

*E-mail address:* dehghan@vru.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## UNITAL ENDOMORPHISMS OF CERTAIN NATURAL UNIFORM SUBALGEBRAS OF THE EXTENDED DISK ALGEBRA

DAVOOD ALIMOHAMMADI<sup>1\*</sup>, MALIHEH MAYGHANI<sup>2</sup> AND MARYAM IZADI<sup>3</sup>

ABSTRACT. Let  $\Omega$  be a domain in the complex plane such that  $\Omega \subseteq \mathbb{D}$  and let  $K = \overline{\Omega}$ , where  $\mathbb{D}$  is the open unit disk  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . We take  $A(\overline{\mathbb{D}}, K) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : f|_K \in A(K)\}$ , where  $A(K)$  is the algebra of continuous complex-valued functions on  $K$  which are analytic on  $\text{int}(K)$ . It is known that  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  is a natural uniform algebra on  $\overline{\mathbb{D}}$ . In this note we study endomorphisms of certain natural uniform subalgebras of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  and investigate necessary and sufficient conditions for which these endomorphisms to be compact.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $B$  be a unital commutative semi-simple Banach algebra with the maximal ideal space  $\mathcal{M}(B)$ . If  $T$  is a unital endomorphism of  $B$ , then there exists a continuous map  $\varphi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(B)$  such that  $\widehat{Tf} = \widehat{f} \circ \varphi$  for all  $f \in B$ . In fact  $\varphi$  is equal to the adjoint  $T^*$  restricted to  $\mathcal{M}(B)$  (see [3]). If  $B$  is a natural Banach function algebra on a compact hausdorff space  $X$ , then every unital endomorphism  $T$  of  $B$  is continuous and has the form  $Tf = f \circ \varphi$  for some continuous self-map  $\varphi$  of  $X$ . If  $X$  is a compact plane set and  $B$  contains the coordinate function  $Z$ , then obviously  $\varphi = TZ$  and so  $\varphi \in B$ . If  $B$  is a natural uniform algebra on compact plane set  $X$  and  $T$  is a unital endomorphism of  $B$ , then  $\|T\| \leq 1$ .

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46J10; Secondary 46J15.

*Key words and phrases*. Analytic functions, Banach function algebras, Compact endomorphisms.

\* Speaker.

**Definition 1.1.** Let  $K$  and  $X$  be compact plane set such that  $K \subseteq X$ . We take  $A(X, K) = \{f \in C(X) : f|_K \in A(K)\}$ , where  $A(K)$  is the algebra of all continuous complex-valued function on  $K$  which are analytic on  $\text{int}(K)$ .

It is known that  $A(X, K)$  is a natural uniform algebra on  $X$ .

H.Kamowitz in [2] showed that if  $T$  is a unital endomorphism of the disk algebra  $A(\overline{\mathbb{D}})$ ,  $T$  is compact if and only if  $T$  is induced by a self-map  $\varphi$  of  $\overline{\mathbb{D}}$  in  $A(\overline{\mathbb{D}})$  such that  $\varphi$  is constant or  $\|\varphi\|_{\overline{\mathbb{D}}} < 1$ . F.Behrouzi and H.Mahyar in [1] studied endomorphisms of certain subalgebras of  $A(\overline{\mathbb{D}})$  and investigated necessary and sufficient for which these endomorphisms to be compact.

In this note we study endomorphisms of certain subalgebra of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$ , where  $K = \overline{\Omega}$  and  $\Omega$  is a domain which is contained in open unit disk  $\mathbb{D}$ . Also, we investigate necessary and sufficient conditions for which these endomorphisms to be compact. Our results are generalized of some results were given in [1] and [2].

## 2. MAIN RESULTS

We first give a sufficient condition for which a self-map  $\varphi$  of  $\overline{\mathbb{D}}$  induces an endomorphism of a subalgebra  $B$  of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  which is a natural Banach function algebra on  $\overline{\mathbb{D}}$ .

**Proposition 2.1.** *Let  $\Omega$  be a domain in the complex plane which is contained in  $\mathbb{D}$  and let  $K = \overline{\Omega}$ . Let  $B$  be a subalgebra of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  which is a natural Banach function algebra on  $\overline{\mathbb{D}}$  under a norm. If  $\varphi \in B$  and  $\varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \Omega$ , then  $\varphi$  induces an endomorphism of  $B$ .*

**Proposition 2.2.** *Let  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ , where  $0 < r < 1$ . Then there exists a self-map  $\varphi$  of  $\overline{\mathbb{D}}$  with  $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  such that  $\varphi$  does not induce any endomorphism of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$ .*

We now give a sufficient condition for which a unital endomorphism of a uniform subalgebra  $B$  of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  be compact.

**Theorem 2.3.** *Let  $\Omega$  be a domain in the complex plane which is contained in  $\mathbb{D}$  and let  $K = \overline{\Omega}$ . Let  $B$  be a natural uniform subalgebra of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$ . If  $\varphi \in B$  such that  $\varphi$  is constant or  $\varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \Omega$ , then  $\varphi$  induces a unital compact endomorphism of  $B$ .*

In the following result we give a necessary condition for which a unital endomorphism  $T$  of a uniform subalgebra  $B$  of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  be compact.

**Theorem 2.4.** *Let  $\Omega$  be a domain in the complex plane which is contained in  $\mathbb{D}$  and let  $K = \overline{\Omega}$ . Let  $B$  be a natural uniform subalgebra of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  such that  $Z^m \in B$  for some*

positive integer  $m$ . If  $T$  is a unital compact endomorphism of  $B$ , then  $T$  is induced by a self-map  $\varphi$  of  $\overline{\mathbb{D}}$  such that  $\varphi$  is constant on  $K$  or  $\varphi(K) \subseteq \mathbb{D}$ .

We now show that if  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  where  $0 < r \leq 1$  and  $\varphi = TZ$  is one-to-one on  $\text{int}(K)$ , it must be  $\varphi(K) \subseteq \text{int}(K)$ . For giving this result we need the following lemma.

**Lemma 2.5.** *Let  $\Omega$  be a domain in the complex plane and let  $\varphi$  be an one-to-one analytic complex-valued function on  $\Omega$ . If  $f$  is a continuous complex-valued function on  $\varphi(\Omega)$  such that  $f \circ \varphi$  is a analytic function on  $\Omega$ , then  $f$  is an analytic function on  $\varphi(\Omega)$ .*

**Theorem 2.6.** *Let  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ , where  $0 < r \leq 1$ . Suppose that  $T$  is a unital endomorphism of  $A(\overline{\mathbb{D}}, K)$  and  $\varphi = TZ$ . If  $T$  is compact and  $\varphi$  is one-to-one on  $\text{int}(K)$ , then  $\varphi(K) \subseteq \text{int}(K)$ .*

## REFERENCES

1. F. BEHROUZI AND H. MAHYAR, *Compact endomorphisms of certain subalgebras of the disk algebra*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **30**(1)(2004), 1-11.
2. H. KAMOWITZ, *Compact operators of the form  $uC_\varphi$* , Pacific J. Math. **80**( 1979), 205-211.
3. H. KAMOWITZ, *Compact endomorphisms of Banach algebras*, Pacific J.Math. **89**(1980), 313-325.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY, P. O. Box 38156-8-8349, ARAK, IRAN.  
E-mail address: d-alimohammadi@araku.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY, P. O. Box 38156-8-8349, ARAK, IRAN.  
E-mail address: m-meighany@arshad.araku.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY, P. O. Box 38156-8-8349, ARAK, IRAN.  
E-mail address: m.izadi62@gmail.com



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## A NUMERICAL TECHNIQUE FOR SOLVING POPULATION BALANCE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

AMJAD ALIPANAH <sup>1</sup>

ABSTRACT. In this paper, triangular orthogonal functions (TF's) method is applied as a basis in collocation method, to solve the population balance integro-differential equation, which arise in the description of particle-size distribution of a continuous, mixed-suspension, mixed product removal crystallizer with taking account of the effect of particle breakage. To demonstrate the validity of this method obtained results have been compared with other methods.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Population balance equations are rather complicated, so they are often analyzed in terms of the moments of the number density function. The method of weighted residual [3], Vorobyev's method, Adams-Moulton-Shell method, Block pulse method, Shifted Legendre [1] method and Wavelet- Galerkin [2] method have been used to approximate the solution of population balance equations. In this paper, the method of triangular orthogonal functions (TF's) [4, 5, 6] is used to solve the population balance equation described which arise in the description of particle-size distribution of a continuous, mixed-suspension, mixed product removal crystallizer with taking account of the effect of particle breakage.

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65Z05; Secondary 65M70, 41A30.

*Key words and phrases*. Triangular orthogonal functions, Population balance integro-differential equation, Collocation method.

\* Speaker.

## 2. ORTHOGONAL TRIANGULAR FUNCTIONS

A set of triangular functions (TF's) [4, 5, 6],  $\Psi_m(t)$  containing  $m$  functions on the semi-open interval  $[0, T)$  is given by

$$\Psi_m(t) = \mathbf{T1}(t) + \mathbf{T2}(t),$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{T1}(t) &= [T1_0(t), T1_1(t), \dots, T1_i(t), \dots, T1_{(m-1)}(t)]^T, \\ \mathbf{T2}(t) &= [T2_0(t), T2_1(t), \dots, T2_i(t), \dots, T2_{(m-1)}(t)]^T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

The  $i$ th component of the vector  $\mathbf{T1}(t)$  is defined as

$$T1_i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(t-ih)}{h}, & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.2)$$

and the  $i$ th component of the vector  $\mathbf{T2}(t)$  is defined as

$$T2_i(t) = \begin{cases} \frac{(t-ih)}{h}, & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.3)$$

where  $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$  and  $h = \frac{T}{m}$ .

We note that the elements  $T1_i(t)$  and  $T2_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, (m-1)$  are mutually disjoint, thereby condition of orthogonality for TF's is given as

$$\int_0^T T1_i(t)T1_j(t)dt = \frac{h}{3}\delta_{i,j}, \quad \int_0^T T2_i(t)T2_j(t)dt = \frac{h}{3}\delta_{i,j},$$

where  $\delta_{i,j}$  is the Kronecker delta. In general, a function  $f \in L^2[0, T)$  may be expanded into  $m$ -term TF's series as

$$\begin{aligned} f(t) &\simeq [a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{m-1}] \mathbf{T1}_m(t) + [b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_{m-1}] \mathbf{T2}_m(t) \\ &= A^T \mathbf{T1}_m(t) + B^T \mathbf{T2}_m(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

where, the components of vectors  $A$  and  $B$  are given as follows

$$a_i = f(ih), \quad b_i = f((i+1)h), \quad i = 0, 1, \dots, (m-1). \quad (2.5)$$

### 3. THE POPULATION BALANCE DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this Section, we discuss on the solution of population balance integro-differential equation by TF's. A continuous mixed suspension, mixed product removal crystallizer operating at steady state can be described by a stretched differential and integro-differential equations.

For the binary uniform breakage model

$$(3.1) \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} + (1 + \kappa\tau^q)y(\tau) = \kappa \int_0^1 \left[ \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^q y\left(\frac{\tau}{\theta}\right) + \left(\frac{\tau}{\theta-1}\right)^q y\left(\frac{\tau}{\theta-1}\right) \right] d\theta, \quad 0 \leq \tau \leq b.$$

In the above equation,  $y$  and  $\tau$  are the dimensionless number density function and the dimensionless crystal size, and  $\kappa$  and  $q$  are empirical constants. Also  $b$  is the dimensionless maximum crystal size within the crystallizer. The initial condition of  $y(\tau)$  is,

$$(3.2) \quad y(0) = 1.$$

Equation (3.1) is normalized by changing the independent variable  $\tau = bt$  to the following equations:

$$(3.3) \quad \frac{1}{b} \frac{dy(t)}{dt} + (1 + \kappa b^q t^q)y(t) - 2\kappa b^q t \int_t^\infty z^{q-2} y(z) dz = 0.$$

Note that Eq. (3.3) is a linear integro-differential equation.

**3.1. Numerical Results.** Since there is no exact solution for Eq. (3.3), the method of TR's is compared with The method of weighted residual [3], Shifted Legendre technique [1] and Wavelet-Galerkin method [2]. We solve Eq. (3.3) for  $\kappa = \frac{0.5}{81}$ ,  $b = 6.1$  and  $q = 4$ . Also numerical results for  $m = 256$  and  $512$  are given in Table 1.

All computations in this section have been performed by Maple 7 with 32-digit arithmetic.

Table 1: Numerical results of Eq. (3.1) by triangular functions for  $\kappa = \frac{0.5}{81}$  and  $b = 6.1$ .

$t$	$m = 256$	$m = 512$	$SLM[1]$	$WGM[2]$	$MW$
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.00000
0.2	0.8191159	0.8191039	0.81909	—	0.8191

0.25	0.7793877	0.7793724	———	0.751078	——
0.5	0.6086274	0.6085970	0.6085871	0.589568	0.6085
1.0	0.3743327	0.3742944	0.3742819	0.360626	0.3743
1.5	0.2332566	0.2332201	0.2332079	0.220917	0.2332
2.0	0.1461565	0.1461256	0.1461153	0.133500	0.1461
2.5	$0.897779 \times 10^{-1}$	$0.897556 \times 10^{-1}$	$0.897477 \times 10^{-1}$	$0.77125 \times 10^{-1}$	0.8972
3.0	$0.514459 \times 10^{-1}$	$0.514299 \times 10^{-1}$	$0.514245 \times 10^{-1}$	$0.402498 \times 10^{-1}$	0.5141
3.5	$0.254505 \times 10^{-1}$	$0.254416 \times 10^{-1}$	$0.254385 \times 10^{-1}$	$0.172186 \times 10^{-1}$	0.2545
4.0	$0.976645 \times 10^{-2}$	$0.976216 \times 10^{-2}$	$0.507987 \times 10^{-2}$	$0.507987 \times 10^{-2}$	0.9701
4.5	$0.253146 \times 10^{-2}$	$0.252934 \times 10^{-2}$	$0.252858 \times 10^{-2}$	$0.665560 \times 10^{-2}$	0.2529
5.0	$0.372999 \times 10^{-3}$	$0.372073 \times 10^{-3}$	$0.371718 \times 10^{-3}$	$0.739025 \times 10^{-4}$	0.3700
5.5	$0.253467 \times 10^{-4}$	$0.251331 \times 10^{-4}$	$0.462496 \times 10^{-4}$	$0.224699 \times 10^{-4}$	0.4565
6.0	$0.6216 \times 10^{-6}$	$0.6039 \times 10^{-6}$	$0.576900 \times 10^{-6}$	$0.495014 \times 10^{-6}$	0.5746

## REFERENCES

1. R.Y CHANG AND M.L. WANG, *Shifted Legendre function approximation of differential equations; Application to crystalization Processes*, J. Chem. Engng, **8** (1984), 117-125.
2. MING-QUAYER CHEN, CHYI HWANG AND YEN-PINO SHIH, *A Wavelet-Galerkin method for solving population balance equations*, Computers Chem. Engng, **20(2)** (1996), 131-145.
3. P.N. Singh and D. Ramkrishna, Solution of population balance equations by WRM, *Comput. Chem. Engng*, **1** (1977), 23-31.
4. A. DEB, G. SARKAR AND A. SENGUPTA, *Triangular orthogonal functions for the analysis of continuous time systems*, Elsevier, New Delhi, 2007.
5. E. BABOLIAN, Z. MASOURI, S. HATAMZADEH-VARMAZYARB, *Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations via direct method using triangular functions*, Computers and Mathematics with Applications, **58** (2009) 239-247.
6. A. DEB, A. DASGUPTA, G. SARKAR, *A new set of orthogonal functions and its application to the analysis of dynamic systems*, Journal of the Franklin Institute, **343** (2006) 1-26.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KURDISTAN, PASDARAN STR., P. O. BOX 416, SANANDAJ, IRAN.

E-mail address: A.Alipanah@uok.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR TIME VARYING SYSTEMS

H. ALMASIEH\*

**ABSTRACT.** A numerical method based on orthogonal triangular functions ( $TF$ )s is proposed to approximate the solution of nonlinear time-varying systems. The proposed method is considered the expansion of the nonlinear optimal trajectory and optimal control in the system, using ( $TF$ )s. These ( $TF$ )s together with the operational matrices of integration and product are presented and applied to reduce the solution of nonlinear time-varying systems to the solution of algebraic equations.

### 1. INTRODUCTION

Time-varying systems are a very important class of systems whose control and optimization have been of interest to many investigators. Orthogonal functions have received considerable attention in dealing with various problems of dynamic systems. The solution of time-varying delay systems have been considered by hybrid functions in [1]. Deb *et al* in [2] have applied ( $TF$ )s to analysis of dynamic systems. Optimal control of time-varying systems has been presented in [3]. Also a collocation type method for linear quadratic optimal control problems has been considered in [4]. In this paper, We review some properties of  $TF$ s. Then we will employ  $TF$ s to solve the nonlinear time-varying systems.

### 2. REVIEW OF TRIANGULAR FUNCTIONS ( $TF$ )s

**Definition 2.1.** Let  $\psi_i(t)$  be the  $i$ th component of an  $m$ -set of  $BPF$ s, we introduce

$$(2.1) \quad \psi_i(t) = T1_i(t) + T2_i(t),$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37N35 ; 93C10.

*Key words and phrases.* Nonlinear Functions, Time-varying Systems, Triangular Functions.

\* Speaker.

where  $T1_i(t)$  and  $T2_i(t)$  are the  $i$ th components of two  $m$ -sets of triangular functions ( $TF$ )s over the interval  $[0, T)$  as the following form

$$(2.2) \quad T1_i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(t-ih)}{h}, & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(2.3) \quad T2_i(t) = \begin{cases} \frac{(t-ih)}{h}, & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1), [2]$ .

**2.1. Function Approximation by  $TF$ s.** Assume  $f(t)$  be an  $\mathcal{L}^2[0, T)$  function, the expansion of  $f^n(t)$  in terms of  $TF$ s can be defined as follows

$$(2.4) \quad \begin{aligned} f^n(t) &\simeq \sum_{i=0}^{m-1} [f_i^n T1_i(t) + f_{i+1}^n T2_i(t)] \\ &= F^{1nT} \mathbf{T1}(t) + F^{2nT} \mathbf{T2}(t), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

where, the constant coefficients are the samples of function as

$$(2.5) \quad f_i = f(ih),$$

where  $i = 0, 1, \dots, m$ .

For each function  $f(t, s) \in \mathcal{L}^2([0, T) \times [0, T))$ , we can rewrite the  $TF$  expansion as

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f(t, s) &= \mathbf{T1}^T(t) F^{11} \mathbf{T1}(s) + \mathbf{T1}^T(t) F^{12} \mathbf{T2}(s) \\ &\quad + \mathbf{T2}^T(t) F^{21} \mathbf{T1}(s) + \mathbf{T2}^T(t) F^{22} \mathbf{T2}(s), \end{aligned}$$

where  $F^{11}$ ,  $F^{12}$ ,  $F^{21}$  and  $F^{22}$  are  $m \times m$  matrices and can be obtained easily as follows:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (F^{11})_{ij} &= f(ih, jh), \\ (F^{12})_{ij} &= f(ih, (j+1)h), \\ (F^{21})_{ij} &= f((i+1)h, jh), \\ (F^{22})_{ij} &= f((i+1)h, (j+1)h), \end{aligned}$$

where  $i, j = 0, 1, \dots, m-1$ , [5].

**2.2. Multiplication of TFs.** It is obviously that

$$\mathbf{T1}(t)\mathbf{T2}^T(t) \simeq 0,$$

and

$$\mathbf{T2}(t)\mathbf{T1}^T(t) \simeq 0.$$

Also we know that

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \int_0^T \mathbf{T1}(t)\mathbf{T1}^T(t)dt &= \int_0^T \mathbf{T2}(t)\mathbf{T2}^T(t)dt = \frac{h}{3}I, \\ \int_0^T \mathbf{T1}(t)\mathbf{T2}^T(t)dt &= \int_0^T \mathbf{T2}(t)\mathbf{T1}^T(t)dt = \frac{h}{6}I, \end{aligned}$$

where  $I$  is  $m \times m$  identity matrix, [3].

Also, if  $A$  be an  $m \times m$  matrix, we have

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{T1}^T(t)A\mathbf{T1}(t) &\simeq \bar{A}^T\mathbf{T1}(t), \\ \mathbf{T2}^T(t)A\mathbf{T2}(t) &\simeq \bar{A}^T\mathbf{T2}(t), \end{aligned}$$

where  $\bar{A}$  is an  $m$ -vector such that its elements are equivalent with the diagonal elements of  $A$ , [2].

**2.3. Operational Matrices of Integration.** The operational matrices for integration have given by Deb in [2]

$$(2.10) \quad \int_0^s T1(\tau)d\tau = \int_0^s T2(\tau)d\tau = P_1T1(s) + P_2T2(s),$$

where

$$(2.11) \quad P_1 = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Now we expand the numerical solution of nonlinear time-varying by orthogonal triangular functions.

## 3. PROBLEM STATEMENT

Nonlinear time varying dynamic systems are characterized in general by

$$(3.1) \quad \dot{x}(t) = f(t, s, x(s), u(s)), \quad x(0) = x_0,$$

where  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  is a state vector and the vector function  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  is the control function. Eq.(3.1) can be written as

$$(3.2) \quad x(t) = x_0(t) + \int_0^t f(t, s, x(s), u(s)) ds.$$

Suppose the kernel in Eq.(3.2) may be written in a nonlinear case as follows

$$(3.3) \quad f(t, s, x(s), u(s)) = g(t, s)[x(s)]^p + h(t, s)[u(s)]^q, \quad p, q \geq 1,$$

by using Eqs.(2.4) and (2.6), the Eq.(3.3) can be expanded as

$$(3.4) \quad \begin{aligned} g(t, s)[x(s)]^p + h(t, s)[u(s)]^q &\simeq \mathbf{T1}^T(t)\hat{\Omega}_1\mathbf{T1}(s) + \mathbf{T1}^T(t)\hat{\Omega}_2\mathbf{T2}(s) \\ &+ \mathbf{T2}^T(t)\hat{\Omega}_3\mathbf{T1}(s) + \mathbf{T2}^T(t)\hat{\Omega}_4\mathbf{T2}(s), \end{aligned}$$

where

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \hat{\Omega}_1 &= G11\hat{X}^{1p} + H11\hat{U}^{1q}, \\ \hat{\Omega}_2 &= G12\hat{X}^{2p} + H12\hat{U}^{2q}, \\ \hat{\Omega}_3 &= G21\hat{X}^{1p} + H21\hat{U}^{1q}, \\ \hat{\Omega}_4 &= G22\hat{X}^{2p} + H22\hat{U}^{2q}, \end{aligned}$$

and  $\hat{X}^{1p}$  and  $\hat{X}^{2p}$  are diagonal matrices with the elements as  $\{x_i^p\}_{i=0}^{m-1}$  and  $\{x_i^p\}_{i=1}^m$ ,  $\hat{U}^{1q}$  and  $\hat{U}^{2q}$  are diagonal matrices with the elements as  $\{u_i^q\}_{i=0}^{m-1}$  and  $\{u_i^q\}_{i=1}^m$ , respectively, which are defined in Eq.(2.5).

Now, by using Eqs.(2.9) and (2.10), we expand Eq.(3.2) in terms of  $TF$ s as the following

$$(3.6) \quad X_1^T\mathbf{T1}(t) + X_2^T\mathbf{T2}(t) = X_0^T\mathbf{T1}(t) + X_0^T\mathbf{T2}(t) + \varpi_1^T\mathbf{T1}(t) + \varpi_2^T\mathbf{T2}(t),$$

where

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \varpi_1 &= P_1^T(\hat{\Omega}_1^T + \hat{\Omega}_2^T), \\ \varpi_2 &= P_2^T(\hat{\Omega}_3^T + \hat{\Omega}_4^T). \end{aligned}$$

Equating the like coefficients of  $\mathbf{T1}(t)$  and  $\mathbf{T2}(t)$  in Eq.(3.6), we obtain a new equation as the following

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Lambda_1^*(X_1, U_1) &= X_1 - \varpi_1 - X_0 = 0, \\ \Lambda_2^*(X_1, U_1) &= X_2 - \varpi_2 - X_0 = 0. \end{aligned}$$

There exists a system of linear algebraic equations which can be solved for the coefficients  $\{x_i^p\}_{i=0}^m$  and  $\{u_i^q\}_{i=0}^m$  in Eq.(3.8).

#### 4. CONCLUSION

A numerical method based on  $TF$ s is developed to obtain the solution of nonlinear time-varying systems. The main objectives of this paper are as follows:

- (i) We used  $TF$ s to reduce the solution of nonlinear time-varying systems to the solution of algebraic equations without using any projection method.
- (ii) These  $TF$ s evolved from a simple dissection of  $BPF$ s and they yield a piecewise linear solution of nonlinear time-varying systems with less computational errors.
- (iii) The constant coefficients in the expansion of  $TF$ s are the samples of function and unlike other bases, we do not require any integration.

#### REFERENCES

1. H. R. MARZBAN AND M. RAZZAGHI, *Solution of time-varying delay systems by hybrid functions*, Mathematics and Computers in Simulation, 64, 2004, 597-607.
2. A. DEB, A. DASGUPTA AND G. SARKAR, *A new set of orthogonal functions and its application to the analysis of dynamic systems*, Journal of the Franklin Institute, 343, 2006, 1-26.
3. K. MALEKNEJAD AND H. ALMASIEH, *Optimal control of Volterra integral equations via triangular functions*, Mathematical and Computer Modelling, 53, 2011, 1902-1909.
4. G. N. ELNAGAR AND M. RAZZAGHI, *A collocation-type method for linear quadratic optimal control problems*, Optimal control applications & Methods, 18, 1997, 227-235.
5. E. BABOLIAN, H. R. MARZBAN AND M. SALMANI, *Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind*, Applied Mathematics and computations, 201, 1-2, 2008, 452-464.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ISLAMIC AZAD UNIVERSITY, KHORASGAN(ISFAHAN) BRANCH, ISFAHAN, IRAN.

*E-mail address:* h.almasieh@khuishf.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## THE APPLICATION OF CYCLIC MATRICES IN GENERAL LINEAR GROUPS

AZIZOLLAH AZAD

**ABSTRACT.** Let  $F$  be a finite field of size  $q = p^m$ , where  $p$  is prime number. The general linear group  $GL(n, q)$  is the group of invertible  $n \times n$  matrices with entries in  $F$  under matrix multiplication. A matrix  $g$  in  $GL(n, q)$  is called a cyclic matrix if its characteristic polynomial is equal to its minimal polynomial. This work we tries to determined elements of  $GL(n, q)$  which are cyclic. Moreover, we show that every cyclic matrix in general linear group has abelian centralizer.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $G = GL(n, q)$  general linear group. We call a subset  $N$  of  $G$  a set of pairwise non-commuting elements if  $XY \neq YX$  for any distinct elements  $X, Y$  in  $N$ . If  $|N| \geq |M|$  for any other subset of pairwise non-commuting elements  $M$  in  $G$ , then  $N$  is said to be a maximal subset of pairwise non-commuting elements. In a finite general linear group  $GL(n, q)$  the class of cyclic matrices plays an important role both algorithmically (see [4]), and in representation theory (for the recognition of irreducible representations). This paper uncovers a new role in which cyclic matrices help to determine the maximum size of a set of pairwise non-commuting elements of  $GL(n, q)$ .

### 2. MAIN RESULTS

In this section we introduce Singer generators and he following is an example of a definition.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20D60; Secondary 00X00, 00X00.

*Key words and phrases.* general linear group, cyclic matrix

\* Speaker.

**Definition 2.1.** An element  $A \in GL(n, q)$  is cyclic if its characteristic polynomial is equal to its minimal polynomial.

**Example 2.2.** Let  $J(f)$  denote the companion matrix for the polynomial  $f$

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & & \cdots & a_d \end{pmatrix}$$

and let

$$J_m(f) = \begin{pmatrix} J(f) & I_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(f) & I_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & J(f) & I_d \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J(f) \end{pmatrix}$$

with  $m$  diagonal blocks  $J(f)$ . By construction the characteristic polynomial of the block matrix  $J_m(f)$  equals  $f^m$ . Also, [2, Example 1, page 140] shows that  $f^m$  is the minimum polynomial of  $J_m(f)$ . Therefore  $J_m(f)$  is a cyclic matrix.

If  $A$  is a cyclic matrix, then (see [3, Theorem 2.1(3)]) the centralizer of  $A$ ,  $C_{GL(n, q)}(A)$  is abelian and we have  $|C_{GL(n, q)}(A)| \leq q^n$ .

**Definition 2.3.** Let  $V$  be the  $n$ -dimensional vector space  $k^n$  over the field  $k$  of size  $q$ . Let  $\mathcal{A}_n(q)$  be the set of abelian subgroups  $A$  of  $GL(n, q)$  such that the  $A$ -module  $V$  has a decomposition  $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  into indecomposable  $A$ -modules satisfying the following properties:

- 1-  $A = A_1 \times \cdots \times A_r$ , where  $A_i \subseteq GL(V_i)$ ;
- 2- for  $i = 1, \dots, r$ , we have  $A_i = C_{GL(V_i)}(a_i)$ , for some element  $a_i \in GL(V_i)$  such that  $V_i$  is an indecomposable  $\langle a_i \rangle$ -module.

**Theorem 2.4.** Let  $G = GL(n, q)$ . There exist matrices  $X$  and  $Y$  in  $G$  such that  $|C_G(X)| = (q - 1)^n$  and  $|C_G(Y)| = q^n - 1$ .

**Theorem 2.5.** Let  $A \in GL(n, q)$  be a cyclic matrix. Then  $(q - 1)^n \leq |C_G(A)| = q^n - 1$ .

**Theorem 2.6.** Let  $A \in GL(n, q)$ . Then the following equivalent:

- (a):  $A$  is cyclic;

- (b): Each  $n \times n$  matrix  $B$  over  $F_q$  such that  $A \times B = B \times A$  is of the form  $Y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$ ;
- (c):  $C_G(A)$  is abelian.

## REFERENCES

1. A. AZAD, C. E. PRAEGER, *Bull. Austral. Math. Soc.* Maximal sets of pairwise noncommuting elements of finite three-dimensional general linear groups, 2009.
2. I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
3. P. M. NEUMANN AND C. E. PRAEGER, *J. London Math. Soc.*, Cyclic matrices over finite fields, 1995.
4. P. M. NEUMANN, C. E. PRAEGER, *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.* Cyclic matrices and the MEATAXE, de Gruyter, Berlin, 2001.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES, ARAK UNIVERSITY, ARAK 38156-8-8349, IRAN.

*E-mail address:* a-azad@araku.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## TWO MINIMAL RESIDUAL METHODS FOR LINEAR POLYNOMIALS IN UNITARY MATRICES

MANSOUR DANA

**ABSTRACT.** Two minimal residual methods for solving linear systems of the form  $(\alpha U + \beta I)x = b$  where  $U$  is a unitary matrix, are compared numerically. The first method uses conventional Krylov subspaces, while the second involves generalized Krylov subspaces. Experiments favor the second method if  $|\alpha| > |\beta|$ . Moreover, the greater the ratio  $|\alpha|/|\beta|$ , the higher the superiority of the second method.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

In [1], the authors proposed the minimal residual method, called MINRES-N, for solving linear systems with normal coefficient matrices whose spectra are located on algebraic curves of a low order  $k$ . Unlike the well-known GMRES algorithm based on conventional Krylov subspaces, MINRES-N applies the minimum residual principle to the so-called generalized Krylov subspaces. For the system of linear equations

$$(1.1) \quad Ax = b$$

with a normal  $n$ -by- $n$  matrix  $A$ , the generalized Krylov subspaces are spans of the initial segments of the generalized power sequence

$$(1.2) \quad b, Ab, A^*b, A^2b, AA^*b, A^{*2}b, A^3b, \dots$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A18; Secondary 15A21.

*Key words and phrases.* Krylov subspace methods, minimal residual methods, normal matrices, unitary matrices.

\* Mansour Dana.

MINRES-N specialized for the case  $k = 2$  is called MINRES-N2. This case was examined in close detail in [1]. A more precise description of the matrix class for which MINRES-N2 was designed is as follows: these are normal matrices satisfying an equation of the form

$$(1.3) \quad c_{11}A^2 + 2c_{12}AA^* + c_{22}AA^{*2} + 2c_{10}A + 2c_{10}A + 2c_{20}A^* + c_{00}I_n = 0,$$

where at least one of the coefficients  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ , and  $c_{22}$  is nonzero. The computer implementation of MIN RESN2 is different for the cases

$$|c_{11}| + |c_{22}| \neq 0$$

and

$$(1.5) \quad c_{11} = c_{22} = 0$$

The former case was considered in [1], and the latter was examined in [2]. In particular, equations of form (1.3) with additional conditions (1.5) hold for unitary matrices and for linear polynomials in such matrices. The numerical comparison of MINRES-N2 and GMRES conducted in [2] revealed the considerable superiority of our method. This result was expected a priori. Indeed, the arithmetic work performed at a step of MINRES-N2 is  $O(n)$  and is independent of the index  $m$  of this step; by contrast, in GMRES, the arithmetic work per step is  $O(mn)$ . It would be more fair to compare MINRES-N2 with a minimal residual method that works in conventional Krylov subspaces but is specially designed for matrices of the form  $A = \alpha U + \beta I$ , where  $U$  is a unitary matrix. Indeed, such a method exists (see [3]) and has given rise to a renewed discussion of matrix classes for which methods governed by recursions of fixed length (independent of the order  $n$ ) can be constructed. For brevity, methods possessing this property are called economical. We use the method proposed in [3] (the JR method) as a good example for recalling the history of economical methods (see Section 2). The JR method is described in Section 3. The computational scheme of MINRES-N2 is briefly recalled in Section 4. In the concluding section, Section 5, we present the results of a numerical comparison between the JR method and MINRES-N2.

## 2. MAIN RESULTS

**Definition 2.1.** Let  $A$  be a given  $n$ -by- $n$  matrix. We fix a vector  $x$  and consider the power sequence

$$(2.1) \quad x, Ax, A^2x, \dots, A^{m_1}x.$$

The span of vectors (2.1) is called the  $m$ th Krylov subspace generated by  $A$  and  $x$ .

**Definition 2.2.** It is well known that a matrix  $A \in Mn(C)$  is normal if and only if the Hermitian adjoint  $A^*$  can be represented as a polynomial in  $A$ :

$$(2.2) \quad A^* = p(A)$$

We say that  $A$  is an  $s$ -normal matrix if relation (2.2) holds for a polynomial  $p$  of degree  $s$ .

**Theorem 2.3.** *Let  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , where  $n > s + 2$ . Then,  $A$  belongs to the class  $CG(s)$  if and only if either  $A$  is an  $s$ -normal matrix or the degree  $d(A)$  of its minimal polynomial does not exceed  $s + 2$ .*

**Theorem 2.4.** *Let  $A$  be an  $s$ -normal matrix. Then,*

- (1) *if  $s > 1$ , then  $A$  has at most  $s^2$  distinct eigenvalues;*
- (2) *if  $s = 1$ , then  $A$  has the form*

$$(2.3) \quad A = \alpha H + \beta I_n,$$

*where  $H$  is Hermitian and  $\alpha$  are complex scalars.*

**Definition 2.5.** A normal matrix  $A$  is said to be  $(l, k)$ -normal if there exist polynomials  $p_l(z)$  and  $q_k(Z)$  of degrees  $l$  and  $k$ , respectively, such that

$$(2.4) \quad A^* q_k(A) = p_l(A).$$

**Theorem 2.6.** *Let  $A$  be an  $(l, k)$ -normal matrix. Assume that  $l$  and  $k$  are minimal integers for which relation (2.4) holds. Then,*

- (1) *if  $l > k + 1$ , then  $d(A) \leq l^2$ ;*
- (2) *if  $l = k + 1$ , then  $d(A) \leq l^2$  or  $l = 1, k = 0$ ;*
- (3) *if  $1 < k$  and the constant term  $\beta_0$  of  $q_k(Z)$  is nonzero, then  $d(A) \leq k^2 + 1$ ;*
- (4) *if  $l < k - 1$  and  $\beta_0 = 0$ , then  $d(A) \leq k^2$ ;*
- (5) *if  $l = k - 1$  and  $\beta_0 = 0$ , then  $d(A) \leq k^2$  or  $l = 0, k = 1$ ;*
- (6) *if  $l = k$ , then  $d(A) \leq k^2 + 1$  or  $l = k = 1$ .*

## REFERENCES

1. M. DANA, A. G. ZYKOV, AND KH. D. IKRAMOV, *A Minimal Residual Method for a Special Class of Linear Systems with Normal Coefficients Matrices*, Comput. Math. Math. Phys. 45, 18541863, 2005.
2. M. DANA AND KH. D. IKRAMOV, *A Minimal Residual Method for Linear Polynomials in Unitary Matrices*, Comput. Math. Math. Phys. 46, 930936, 2006.
3. T. BARTH AND T. MANTEUFFEL, *Multiple Recursion Conjugate Gradient Algorithms. Part I: Sufficient Conditions*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 21, 768796, 2000.

4. F. JAGELS AND L. REICHEL, *A Fast Minimal Residual Algorithm for Shifted Unitary Matrices*, Numer. Linear. Algebra Appl. 1, 555570, 1994.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN, P. O. BOX 416, SANANDAJ, IRAN.  
*E-mail address:* `mansourdana44@gmail.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## A WEIGHTED DRAZIN INVERSE AND APPLICATIONS

MANSOOR. DANA <sup>1</sup> , PARISA. PIRIAEI <sup>2\*</sup> AND NEDA. HEIDARIAN <sup>3\*</sup>

**ABSTRACT.** In this paper the notation of the ClineGreville  $W$ -weighted Drazin inverse of a rectangular matrix is extended to bounded linear operators between Banach spaces. We give new characterizations of the  $W$ -weighted Drazin inverse, and we study the perturbations and the continuity of the  $W$ -weighted Drazin inverse.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The main theme of this paper can be described as a study of a weighted Drazin inverse for bounded linear operators between Banach spaces. This inverse is an extension of the ClineGreville [1]  $W$ -weighted Drazin inverse of a rectangular matrix.

Fix  $W \in B(X, Y)$ . For  $A, B \in B(X, Y)$ , define the  $W$ -product of  $A$  and  $B$  by  $A * B = AWB$ . Also, for  $A \in B(X, Y)$ , denote the  $W$ -product of  $A$  with itself  $m$  times by  $A^{*m}$ . Let  $A, B \in B(X, Y), W \in B(X, Y)$  and let  $A$  be  $W$ -Drazin invertible. Then  $AW$  and  $WA$  are Drazin invertible, and set  $k_1 = i(AW)$  and  $k_2 = i(WA)$ . Hence  $X = N((WA)^{k_2}) \oplus R((WA)^{k_2})$  and  $Y = N((AW)^{k_1}) \oplus R((AW)^{k_1})$ . Let us consider the equation  $WAWx = b$ ,  $b \in R((WA)^{k_2})$  given. with  $x \in Y$  to be found. Let us remark that  $R(A_{d,W}) = R((AW)^{k_1}) = R((AW)_d)$ ,  $R((WA)^{k_2}) = R((WA)_d)$ , and that  $x \in R((AW)^{k_1})$ , namely  $x = A_{d,W}b$  satisfies. We study the sensitivity of the solution  $x$  to variation in the data  $b$  and  $A$ , provided that  $b \in R((WA)^{k_2})$  and  $x \in R(A_{d,W})$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A05 Secondary 47A53, 15A09.

*Key words and phrases.* Weighted Drazin inverse; Bounded operator; Banach space; Perturbation; Continuity.

\* Parisa. Piriaei .

## 2. MAIN RESULTS

**Definition 2.1.** Let us recall that if  $S$  is an algebraic semigroup (or associative ring), then an element  $a \in S$  is said to have a Drazin inverse, or  $a$  is Drazin invertible [2] if there exists  $x \in S$  such that

$$a^m = a^{m+1}x \quad \text{for some non-negative integer } m, \quad (1.1)$$

$$x = ax^2 \quad \text{and} \quad ax = xa. \quad (1.2)$$

If  $a$  has a Drazin inverse, then the smallest non-negative integer  $m$  in (1.1) above is called the (Drazin) index  $i(a)$  of  $a$ . It is well known that there is at most one  $x$  such that Eqs (1.1) and (1.2) hold. The unique  $x$  is denoted by  $a_d$  and called the Drazin inverse of  $a$ .

**Example 2.2.** Let  $A$  be the Banach algebra of all complex-valued functions continuous on the set  $[0, 1] \cup [2, 3]$  equipped with supremum norm. Define  $a$  by  $a(t) = 0$  if  $t \in [0, 1]$ ,  $a(t) = t$  if  $t \in [2, 3]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Then  $a$  is Drazin invertible with  $a_d$  defined by  $a_d(t) = 0$  if  $t \in [0, 1]$ ,  $a_d(t) = \frac{1}{t}$  if  $t \in [2, 3]$ .

**Theorem 2.3.** *Theorem (1.1): Let  $X$  and  $Y$  be Banach spaces,  $A \in B(X, Y)$ , and  $W \in B(X, Y)$ . Then the following conditions are equivalent:*

(i)  $A$  is  $W$ -Drazin invertible, that is the equations:

$$(i.1) \quad (AW)^{k+1}XW = (AW)^k \quad \text{for some non-negative integer } k,$$

$$(i.2) \quad XWAWX = X,$$

$$(i.3) \quad AWX = XWA$$

have a solution  $X \in B(X, Y)$ .

(ii)  $AW$  is Drazin invertible,

(iii)  $WA$  is Drazin invertible,

(iv)  $\text{asc}(AW) = p < \infty$ ,  $R((AW)^{p+k})$  is closed for some  $k \leq 1$ , and  $\text{des}(WA) < \infty$ .

(v)  $\text{asc}(WA) = q < \infty$ ,  $R((WA)^{q+L})$  is closed for some  $L \leq 1$ , and  $\text{des}(AW) < \infty$ .

If any of the five conditions is satisfied, then the above three Eqs. (i.1)-(i.3) have a unique solution, and  $X = A^D = A_{d,W} = A(WA)_d^2 = (AW)_d^2 A$ .

**Theorem 2.4.** Let  $A \in B(X, Y)$ ,  $W \in B(X, Y)$ , and let  $A$  be  $W$ -Drazin invertible with  $k = \max(i(AW), i(WA))$ . Then  $A_{d,W} = \tilde{A}^{-1}(AW)^k A$ , where  $\tilde{A} = (AW)^{k+2}|_{R[(AW)^k]}$  is the restriction of  $(AW)^{k+2}$  to  $R[(AW)^k]$ .

**Theorem 2.5.** *Let  $a \in A$  be Drazin invertible, and let  $b \in A$  obey the condition  $(W)$  at  $a$ . Then  $b$  is Drazin invertible,  $bb^D = aa^D$ ,  $b^D = (1 + a^D(b - a))^{-1}a^D = a^D(1 + (b - a)a^D)^{-1}$  and  $i(a) = i(b)$ .*

**Theorem 2.6.** *Let  $A, B \in B(X, Y), W \in B(X, Y)$ , let  $A$  be  $W$ -Drazin invertible and let  $B$  obey the condition  $(W)$  at  $A$ . Then  $B$  is  $W$ -Drazin invertible,  $(BW)(B_{d,W}W) = (AW)(A_{d,W}W)$ ,  $i(BW) = i(AW)$ ,  $Bd,W = (I + A_{d,W}WEW)^{-1}A_{d,W} = A_{d,W}(I + WEWAd,W)^{-1}$ ,  $R(B_{d,W}) = R(A_{d,W})$  and  $N(B_{d,W}) = N(A_{d,W})$ .*

*Remark 2.7.* 1. If  $A \in B(X, Y)$  is a finite-rank operator, then  $AW$  is a finite-rank operator. Thus,  $AW$  is Drazin invertible, and  $A$  is  $W$ -Drazin invertible for each  $W \in B(X, Y)$ . Furthermore, if  $W \in B(Y, X)$  is a finite-rank operator, then each  $A \in B(X, Y)$  is  $W$ -Drazin invertible.

2. Let  $H, K$  be complex Hilbert spaces. If  $A \in B(H, K)$  has closed range, then there exists a unique operator  $A^\dagger \in B(K, H)$  called the Moore-Penrose pseudo inverse of  $A$  which satisfies the following properties:  $AA^\dagger A = A$ ,  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ ,  $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$  and  $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$ . It is well known that  $A^\dagger = A^*(AA^*)^\dagger = (A^*A)^\dagger A^*$ . Furthermore, because  $A^*A$  and  $AA^*$  are self-adjoint operators we obtain  $(A^*A)^\dagger = (A^*A)_d$  and  $(AA^*)^\dagger = (AA^*)_d$ , that is  $A^\dagger = A^*(AA^*)_d = (A^*A)_d A^*$ .

Thus, we obtain  $A^\dagger = A^*(A_{d,A^*}A^*)$ , and the  $A^*$ -weighted Drazin inverse of  $A$  exists if and only if  $R(A)$  is closed, that is if and only if  $A$  has a Moore-Penrose pseudoinverse. In this case  $A_{d,A^*} = A(A^*A)^{\dagger 2} = A(A^*A)^{2\dagger}$ .

**Theorem 2.8.** *Let  $A \in B(X, Y)$ ,  $Z, W \in B(Y, X)$ , let  $A$  be  $W$ -Drazin invertible and let  $b, c \in R((WA)^{k_2})$ . If  $x, y \in R(A_{d,W})$  satisfy  $WAWx = b$  and  $WAWy = c$ , then*

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq k_{d,W}(A) \frac{\|c - b\|}{\|b\|}$$

**Theorem 2.9.** *Let  $A, B \in B(X, Y)$ ,  $W \in B(X, Y)$ , let  $A$  be  $W$ -Drazin invertible and let  $B$  obey the condition  $(W)$  at  $A$ . and let  $b \in R((WA)^{k_2})$ . If  $x, y \in R(A_{d,W})$  satisfy  $WAWx = b$  and  $WBWy = b$ , then*

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq k_{d,W}(A) \frac{\|A_{d,W}W(B - A)W\|}{1 - \|A_{d,W}W(B - A)W\|}$$

**Theorem 2.10.** *Let  $A, B \in B(X, Y)$ ,  $W \in B(X, Y)$ , let  $A$  be  $W$ -Drazin invertible and let  $B$  obey the condition  $(W)$  at  $A$  and let  $b, c \in R((WA)^{k_2})$ . If  $x, y \in R(A_{d,W})$  satisfy*

$WAWx = b$  and  $WBWy = c$ , then

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A_{d,W}\|}{1 - \|A_{d,W}W(B - A)W\|} \times (\|A_{d,W}W(B - A)W\|\|b\| + \|c - b\|)$$

#### REFERENCES

1. R.E. CLINE, T.N.E. GREVILLE, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. 29 (1980).
2. M.P. DRAZIN, *Pseudo inverse in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly 65 (1958).
3. J.J. KOLIHA, V. RAKOCEVIC, *Continuity of the Drazin inverse II*, Stud. Math. 131 (1998).
4. Y. WEI, *A characterization and representation of the Drazin inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 17 (1996)

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN , P. O. BOX 416, SANANDAJ , IRAN .  
E-mail address: mansourdana44 @gmail.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN , P. O. BOX 416, SANANDAJ , IRAN.  
E-mail address: piriaei\_parisa64@yahoo.com

<sup>3</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF KURDISTAN , P. O. BOX 416, SANANDAJ , IRAN.  
E-mail address: nheidarian @gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## GENERALIZATIONS OF BOHR INEQUALITY FOR OPERATORS

BAHRAM DASTORIAN<sup>1</sup>

**ABSTRACT.** This paper is focused on the operator inequalities of the Bohr type. a number of generalizations of Bohr inequality for operators in  $\beta(\mathbb{H})$  are established. Moreover, Bohr inequalities are extended to multiple operators and some related inequalities are obtained. show some related operator inequalities by means of operator matrices, and finally we will present a generalization of the operator Bohr inequality for multiple operators.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\beta(\mathbb{H})$  be the space of all bounded linear operators on a complex separable Hilbert space  $H$ . This paper is focused on inequalities of Bohr type. The classical Bohr inequality [1] asserts that

$$|a + b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2$$

for complex numbers  $a, b$  and real numbers  $p, q > 1$  such that  $1/p + 1/q = 1$ . Denote by  $|A|$  the absolute value operator (or modulus) of  $A \in \beta(\mathbb{H})$ :  $|A| = (A^*A)^{1/2}$ , where  $A^*$  is the adjoint operator of  $A$ . We write  $A \geq 0$  if  $A$  is a positive operator, meaning  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  for all  $x \in H$ , and  $A \geq B$  if  $A$  and  $B$  are self-adjoint operators and if  $A - B \geq 0$ . For an  $n \times n$  complex Hermitian (self-adjoint) matrix  $A$ ,  $A \geq 0$  means that  $A$  is a positive matrix, i.e.,  $\langle Ax, x \rangle = x^*Ax$  is nonnegative for all  $x \in \mathbb{C}^n$ . This notion is analogous to the notion of positive operator.  $A \leq 0$  represents that  $-A$  is positive. The condition  $\alpha, \gamma \geq 0$  and

---

*Key words and phrases.* Bohr inequality, Hilbert space operator, Matrix inequality, Operator absolute value .

<sup>1</sup> Speaker.

$\alpha\gamma \geq \beta^2$  can be recognized as positive definiteness of the matrix

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Similarly, the condition  $\alpha, \gamma \leq 0$  and  $\alpha\gamma \geq \beta^2$  is equivalent to positive definiteness of the matrix  $-X$ . we present inequalities through operator matrices. First observe

$$|A + B|^2 = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A|^2 & A^*B \\ B^*A & |B|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$$

Thus, we can associate each absolute value square of the sum of two operators with a  $2 \times 2$  block operator matrix. Writing in symbols, we have

$$|A + B|^2 \mapsto \begin{pmatrix} |A|^2 & A^*B \\ B^*A & |B|^2 \end{pmatrix}$$

And this map is addition-preservative. Furthermore, if for  $A, B, C, D \in \beta(\mathbb{H})$ ,

$$\begin{pmatrix} |A|^2 & A^*B \\ B^*A & |B|^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} |C|^2 & C^*D \\ D^*C & |D|^2 \end{pmatrix}$$

then

$$|A + B|^2 \leq |C + D|^2$$

This suggests that one may convert a problem of absolute value operators to a problem of  $2 \times 2$  operator matrices. On many circumstances the later approach is more transparent and easy to handle. Consider, for instance, the inequality

$$|\alpha A + \beta B|^2 \leq x|A|^2 + y|B|^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y > 0$$

Since

$$|\alpha A + \beta B|^2 \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2|A|^2 & \alpha\beta A^*B \\ \alpha\beta B^*A & \beta^2|B|^2 \end{pmatrix}$$

and

$$x|A|^2 + y|B|^2 \mapsto \begin{pmatrix} x|A|^2 & 0 \\ 0 & y|B|^2 \end{pmatrix}$$

thus if

$$\begin{pmatrix} \alpha^2|A|^2 & \alpha\beta A^*B \\ \alpha\beta B^*A & \beta^2|B|^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x|A|^2 & 0 \\ 0 & y|B|^2 \end{pmatrix}$$

then the above inequality holds. This leads to the condition for above inequality to hold:

$$(x - \alpha^2)(y - \beta^2) \geq \alpha^2\beta^2$$

First of all, we recall Bohr inequality for Hilbert space operators.

**Theorem 1.1.** (*Bohr inequality*). (See [2].) Let  $A, B \in \beta(\mathbb{H})$  and  $p, q > 1$  real numbers such that  $1/p + 1/q = 1$ . Then

$$|A + B|^2 \leq p|A|^2 + q|B|^2$$

*Proof.* Notice that

$$|A + B|^2 \mapsto \begin{pmatrix} |A|^2 & A^*B \\ B^*A & |B|^2 \end{pmatrix}$$

and

$$p|A|^2 + q|B|^2 \mapsto \begin{pmatrix} p|A|^2 & 0 \\ 0 & q|B|^2 \end{pmatrix}$$

Then must

$$\begin{pmatrix} |A|^2 & A^*B \\ B^*A & |B|^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} p|A|^2 & 0 \\ 0 & q|B|^2 \end{pmatrix}$$

This leads to the condition

$$\begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ -1 & q-1 \end{pmatrix} \geq 0$$

that is,

$$p-1 \geq 0, \quad q-1 \geq 0, \quad (p-1)(q-1) \geq 1$$

Then the inequality holds by hypothesis.  $\square$

**Theorem 1.2.** For  $A, B \in \beta(\mathbb{H})$  and  $p, q, s > 0$  such that  $1/p + 1/q = 1/s$ ,

$$s|A + B|^2 \leq p|A|^2 + q|B|^2$$

*Proof.* We must have

$$\begin{pmatrix} p-s & -s \\ -s & q-s \end{pmatrix} \geq 0$$

that is,

$$p-s \geq 0, \quad q-s \geq 0, \quad (p-s)(q-s) \geq s^2$$

Then the inequality holds by hypothesis.  $\square$

**Theorem 1.3.** For  $A, B \in \beta(\mathbb{H})$  and  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $p, q > 0$  such that  $s^2/p + t^2/q = 1$ ,

$$|sA + tB|^2 \leq p|A|^2 + q|B|^2$$

*Proof.* We must have

$$\begin{pmatrix} p - s^2 & -st \\ -st & q - t^2 \end{pmatrix} \geq 0$$

that is,

$$p - s^2 \geq 0, \quad q - t^2 \geq 0, \quad (p - s^2)(q - t^2) \geq (st)^2$$

Then the inequality holds by hypothesis.  $\square$

## 2. BOHR INEQUALITY FOR MULTIPLE OPERATORS

Next we consider operator inequality in more general form. We would like to compare  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i A + \beta_i B|^2$  with  $p|A|^2 + q|B|^2$

**Theorem 2.1.** *Let  $A, B \in \beta(\mathbb{H})$  and  $\alpha_i, \beta_i, p, q \in \mathbb{R}$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Set*

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - p, \quad \Omega = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - q \text{ and } \Theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

*The inequality*

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i A + \beta_i B|^2 \leq p|A|^2 + q|B|^2$$

*holds if  $\Psi \leq 0, \Omega \leq 0$  and  $\Psi\Omega \geq \Theta^2$ .*

*Proof.* Expanding  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i A + \beta_i B|^2$ , we get

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\alpha_i A + \beta_i B|^2 - p|A|^2 - q|B|^2 &= |\alpha_1 A + \beta_1 B|^2 + |\alpha_2 A + \beta_2 B|^2 + \dots + |\alpha_n A + \beta_n B|^2 \\ &\mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1^2 |A|^2 & \alpha_1 \beta_1 A^* B \\ \alpha_1 \beta_1 B^* A & \beta_1^2 |B|^2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_n^2 |A|^2 & \alpha_n \beta_n A^* B \\ \alpha_n \beta_n B^* A & \beta_n^2 |B|^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p|A|^2 & 0 \\ 0 & q|B|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Then must

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - p & \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i & \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - q \end{pmatrix} \leq 0$$

Thus

$$\begin{pmatrix} \Psi & \Theta \\ \Theta & \Omega \end{pmatrix} \leq 0$$

which is equivalent to  $\Psi \leq 0, \Omega \leq 0$  and  $\Psi\Omega \geq \Theta^2$ .  $\square$

**Theorem 2.2.** *Let  $A, B \in \beta(\mathbb{H})$  and  $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Set*

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \quad \Omega_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2, \quad \Theta_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i,$$

$$\Psi_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad \Omega_2 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2, \quad \Theta_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

*If  $\Psi_1 \geq \Psi_2, \Omega_1 \geq \Omega_2$  and  $\Theta_1 = \Theta_2$ , then*

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i A + \beta_i B|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\lambda_i A + \mu_i B|^2$$

*Proof.* we must have

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_2 & \Theta_1 - \Theta_2 \\ \Theta_1 - \Theta_2 & \Omega_1 - \Omega_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Then the inequality holds by hypothesis.  $\square$

**Theorem 2.3.** *Let  $A_i \in \beta(\mathbb{H})$  and  $\alpha_i, p_i \in \mathbb{R}$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Define  $X = (x_{ij})$  where*

$$x_{ij} = \begin{cases} \alpha_i^2 - p_i, & i = j \\ \alpha_i \alpha_j, & i \neq j \end{cases}$$

*If  $X \leq 0$ , then*

$$|\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n p_i |A_i|^2$$

*Proof.* If

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_i^2 - p_i & \alpha_i \alpha_j \\ \alpha_j \alpha_i & \alpha_j^2 - p_j \end{pmatrix}$$

Note that  $X_{ij}$  is just the principal submatrix of  $X$  determined by deleting all but  $i$ th and  $j$ th row and column. Thus if  $X$  is negative semidefinite, which occurs if and only if all principal submatrices of  $X$  are negative semidefinite, then inequality holds.  $\square$

## REFERENCES

1. H. BOHR, *Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen I*, Acta Math. 45 (1924) 29127.
2. P. CHANSANGIAM, P. HEMCHOTE, P. PANTARAGPHONG, *Generalizations of Bohr inequality for Hilbert space operators*, J. Math. Anal. Appl. 356 (2009) 525536.
3. F. ZHANG, *On the Bohr inequality of operators*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 12641271.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, YASOUJ UNIVERSITY, YASOUJ, IRAN.

*E-mail address:* bahramdastorian@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## FROM QUASI-MONOTONE OPERATOR TO MONOTONE OPERATOR

ALI FARAJZADEH\*

ABSTRACT. In this paper, we show that for a given convex subset  $K$  of a topological vector space  $X$  and a multi-valued map  $T : K \rightarrow X^*$ , if there exists a nonempty subset  $S$  of  $X^*$  with surjective property on  $K$  and  $T + w$  is quasimonotone for each  $w \in S$ , then  $T$  is monotone.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $X$  be a real topological vector space,  $X^*$  its dual space, and  $K \subseteq X$  be nonempty. A multivalued map  $T : K \rightarrow X^*$  is called

(i) **monotone** if

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle, \forall x^* \in T(x), y^* \in T(y).$$

(ii) **pseudomonotone** ([1]) if

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \forall x^* \in T(x), y^* \in T(y).$$

(ii) **quasimonotone** ([1]) if

$$\langle x^*, y - x \rangle > 0 \Rightarrow \langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \forall x^* \in T(x), y^* \in T(y).$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 49J40, 90C33.

*Key words and phrases.* Quasimonotone, Gateaux differentiable map, surjective property .

\* Speaker.

It is clear that a monotone map is pseudomonotone, while a pseudomonotone map is quasimonotone. The converse is not true. If  $T$  is pseudomonotone ( respective, quasimonotone) and  $w \in X^*$ , then  $T + w$  is not pseudomonotone (respective, quasimonotone) in general. In the case of a single-valued, linear map  $T$  defined on the whole space  $\mathfrak{R}^n$ , it is known that if  $T + w$  is quasimonotone, then  $T$  is monotone [2]. Many authors ( see, e.g., [4, 5]) extend this result for a nonlinear Gateaux differentiable map defined on a convex subset  $K$  ( of a Hilbert space) with nonempty interior. Very recently, Hadjisavvas [3] extends the above result to multivalued maps defined on a convex subset of a real topological vector space with no assumption of differentiability or even continuity on the map  $T$ , and the domain of  $T$  need not have a nonempty interior. In this paper, we first introduce surjectivity of a subset of  $X^*$  on a segment of  $K$ . By using this concept we can extend the results obtained in [3]. Before stating the main result, we recall some definitions.

**Definition 1.1.** We say that  $S \subseteq X^*$  is surjective on the line segment  $[x, y] \subset K$  whenever the following equality holds,

$$S.(x - y) = \{\langle x^*, x - y \rangle : x^* \in S\} = \mathfrak{R}.$$

**Definition 1.2.** Let  $K \subseteq X$  be convex and  $S \subseteq X^*$ . We say that  $S$  is surjective on  $K$  if for every  $x \in K$  there exists  $y \in K$  such that  $S$  is surjective on  $[x, y]$ .

**Definition 1.3.** ([3]). Given  $v \in X^*$  and a convex subset  $K$  of  $X$ , the element  $v$  is called perpendicular to  $K$  if  $v$  is constant on  $K$ , i.e.,

$$\langle v, x \rangle = \langle v, y \rangle, \quad \forall x, y \in K.$$

Also the straight line  $S = \{u + tv : t \in \mathfrak{R}\}$ , where  $u, v \in X^*$  with  $v \neq 0$ , is said to be perpendicular to  $K$  if  $v$  is perpendicular to  $K$ .

*Remark 1.4.* If  $K \subseteq X$  is nonempty convex and  $u, v \in X^*$  with  $v$  is not perpendicular to  $K$  then the straight line  $S = \{u + tv : t \in \mathfrak{R}\}$  is perpendicular to  $K$ . Indeed, let  $x \in K$  be an arbitrary member of  $K$ . There exists  $y \in K$  such that  $c = v(x - y) \neq 0$ . For each  $a \in \mathfrak{R}$ , define  $t = \frac{a - u(x - y)}{c}$  hence  $a = (tu + v)(x - y)$ . This means  $S$  has surjective property. Hence every set satisfies in Definition 3 has the property cited in Definition 3. The simple example  $X = \mathfrak{R}^2$ ,  $S = \{(x, x) : x \in \mathfrak{R}\}$  and  $K = \{(x, x^2) : x \in \mathfrak{R}\}$  shows that the converse does not hold. In the other words the set  $S$  has surjective property but it is not a straight line.

## 2. MAIN RESULTS

**Lemma 2.1.** *Let  $X$  be a real topological vector space,  $K$  be nonempty and convex subset of  $X$  and  $T : X \rightarrow X$  be a multivalued map. Assume  $x, y \in K$ ,  $S \subseteq X^*$  has surjective property on line segment  $[x, y]$  and  $T + w$  quasimonotone on  $[x, y]$ , for all  $w \in S$ . Then  $T$  is monotone on  $[x, y]$ .*

Now we are ready to present the main result which improves Theorem 1 in [3].

**Theorem 2.2.** *Let  $X$  be a real topological vector space,  $K$  be nonempty and convex subset of  $X$  and  $T : X \rightarrow X$  be a multivalued map. Assume  $S \subseteq X^*$  has surjective property on  $K$  and  $T + w$  quasimonotone for all  $w \in S$ . Then  $T$  is monotone on  $K$ .*

## REFERENCES

1. S. KARAMARDIAN, S. SCHAIBLE, *Seven kinds of monotone maps*, J. Optim. Theory Appl., **66** (1990) 37-46.
2. S. KARAMARDIAN, S. SCHAIBLE, J.P. CROUZEIX, *Characterizations of generalized monotone maps*, J. Optim. Theory Appl., **76** (1993) 399-413.
3. N. HADJISAVVAS, *TRANSLATIONS OF QUASIMONOTONE MAPS AND MONOTONICITY*, Appl. Math. Lett., **19** (2006) 913-915.
4. **Y. He** , *A relationship between pseudomonotone and monotone mappings*, Appl. Math. Lett., **17** (2004) 459-461.
5. G. ISAC, D. MOTREANU, *Pseudomonotonicity and quasimonotonicity by translations versus monotonicity in Hilbert spaces*, Austral. J. Math. Anal., **1** (2004) 1-8.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, RAZI UNIVERSITY, KERMANSHAH, 67149, IRAN.

*E-mail address:* ali-ff@razi.ac.ir, faraj1348@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ON THE SUMMATION OF POWERS OF GRAPH EIGENVALUES

G. H. FATH-TABAR

ABSTRACT. Suppose  $G$  is a graph and  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are the eigenvalues of  $G$ . The  $k$ -th spectral moments  $M_k(G)$  of  $G$  is defined as the summation of  $\lambda_i^k$ ,  $1 \leq i \leq n$ . In this paper,  $M_k(G)$ ,  $1 \leq k \leq 8$  for regular graph are presented.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $G$  be a graph and  $\{v_1, \dots, v_n\}$  be the set of all vertices of  $G$ . The adjacency matrix of  $G$  is a 0, 1-matrix  $A(G) = [a_{ij}]$ , where  $a_{ij}$  is the number of edges connecting  $v_i$  and  $v_j$ . The spectrum of  $G$  is the set of eigenvalues of  $A(G)$ , together with their multiplicities. It is a well-known fact in algebraic graph theory that a graph of order  $n$  has exactly  $n$  real eigenvalues  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . The basic properties of graph eigenvalues can be found in the famous book of Cvetkovic, Doob and Sachs [2]. Throughout this paper our notation is standard and can be taken from the standard books on graph theory [2, 4]. A bipartite graph is a graph whose vertices can be divided into two disjoint sets  $U$  and  $V$  such that every edge connects a vertex in  $U$  to one in  $V$  [4]. Equivalently, a bipartite graph is a graph that does not contain any odd-length cycles. A walk is a sequence of graph vertices and graph edges such that the graph vertices and graph edges are adjacent. A closed walk is a walk in which the first and the last vertices are the same. Finally, for a real number  $x$ ,  $[x]$  denotes the greatest integer  $\leq x$  and the number of zero eigenvalues of a graph  $G$  is denoted by  $n_0(G)$ . Here, the  $k$ -th spectral moment of  $G$ ,  $M_k(G)$ , is defined as  $M_k(G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ , where  $k \geq 0$ . By a result in algebraic graph theory if  $G$  has exactly  $m$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 05C12, 05A15, 05A20, 05C05.

*Key words and phrases.* Inequality.

Speaker.

edges and  $t$  triangles,  $A(G) = [a_{ij}]$  and  $A^k(G) = [b_{ij}]$  then the number of walks from  $u$  to  $v$  with length  $k$  is  $b_{uv}$  [1].

## 2. MAIN RESULTS

The aim of this section is to prove the main results of this paper. The first theorem has a easy proof and you can see in all algebraic graph theory books.

**Theorem 2.1.** *Let  $G$  be a graph. Then  $M_k(G)$  represents the number of closed walks of length  $k$  in  $G$ . In particular,  $M_2(G) = 2m$  and  $M_4(G) = 2Zg_1(G) - 2m + 8q(G)$ , where  $q(G)$  is the number of quadrangles in  $G$ . Moreover, if  $G$  is bipartite then  $M_{2k-1}(G) = 0$ , for each positive integer  $k$ .*

*Proof.* For proof of this theorem, See [3]. □

**Theorem 2.2.** *Suppose  $G$  is a bipartite  $r$ -regular graph containing  $q = q(G)$  quadrangles and  $h = h(G)$  hexagons. Then  $M_6(G) = 2nr - 6nr^2 + 5nr^3 - 48q + 48qr + 12h$ .*

*Proof.* Every closed walk of length 6 in  $G$  is constructed from one edge, a path of length 2, a path of length 3, a star  $S_4$ , a hexagon, a quadrangle or a splice of a quadrangle and an edge. By a simple counting procedure, it is not difficult to prove the number of such closed walks are  $2m = nr$ ,  $6nr(r-1)$ ,  $3nr(r-1)^2$ ,  $12n\binom{r}{3} = 2nr(r-1)(r-2)$ ,  $12h$ ,  $48q$  or  $48q(r-2)$ , respectively. Thus,  $M_6(G) = 2nr - 6nr^2 + 5nr^3 - 48q + 48qr + 12h$ , as desired. □

**Theorem 2.3.** *Suppose  $G$  is a bipartite  $r$ -regular graph without quadrangles with a common vertex. Then  $M_8(G) = 8r + 1056q + 16o - 800h - 13nr + 16nr^2 + 4r^2 - 8nr^3 + 6nr^4 + 448hr + 208qr^2 - 816qr - 20r^3 + 8r^4$ , where  $o = o(G)$  is the number of octagons in  $G$ .*

*Proof.* Every closed walk of length 8 in  $G$  is constructed from one edge, a path of length 2, a path of length 3, a path of length 4, a star  $S_4$ , splice of a star  $S_4$  and  $K_2$  by identifying a pendant of  $S_4$  and a vertex of  $K_2$ , a star  $S_5$ , a quadrangle, splice of a quadrangle by  $K_2$ , splice of a quadrangle and a path of length 2 by identifying the vertex of degree 2 in the path and one vertex of quadrangle, splice of  $K_2$  and a graph constructed from the splice of a quadrangle and  $K_2$  such that two new vertices of degree 3 are adjacent, splice of  $K_2$  and a graph constructed from the splice of a quadrangle and  $K_2$  such that two new vertices of degree 3 are not adjacent, splice of a quadrangle and a path of length 2 by identifying a pendant of the path and one vertex in quadrangle, a hexagon, splice of a hexagon by  $K_2$ , an octagon. By a counting procedure, it is not difficult to prove the number of such closed

walks are  $2m = nr$ ,  $14nr(r-1)$ ,  $16nr(r-1)^2$ ,  $[4nr(r-1)^3 - 8q]$ ,  $72n\binom{r}{3}$ ,  $48n\binom{r}{3}(r-1)$ ,  $48n\binom{r}{4}$ ,  $264q$ ,  $448(r-2)q$ ,  $48(r-2)(r-3)q$ ,  $64(r-2)^2q$ ,  $32(r-2)^2q$ ,  $64(r-1)(r-2)q$ ,  $96h$ ,  $96(r-2)h$  and  $16o$ , respectively. Thus,  $M_8(G) = 8r + 1056q + 16o - 800h - 13nr + 16nr^2 + 4r^2 - 8nr^3 + 6nr^4 + 448hr + 208qr^2 - 816qr - 20r^3 + 8r^4$ , which completes the proof.  $\square$

#### REFERENCES

1. A. R. Ashrafi and G. H. Fath-Tabar, Bounds on the Estrada index of  $ISR(4, 6)$ -fullerenes, *Appl. Math. Lett.* **24** (2011), 337-339.
2. D. Cvetkovic, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of Graphs-Theory and Application*, third ed., Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg, Leipzig, 1995.
3. I. Gutman and N. Trinajstić, Graph Theory and Molecular Orbitals. Total  $\pi$ Electron Energy of Alternant Hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett.* **17** (1972), 535-538.
4. H. Zhao and Y. Jia, On the Estrada Index of Bipartite Graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **61** (2009), 495-501.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STATISTICS AND COMPUTER SCIENCE, UNIVERSITY OF KASHAN,  
87317-51167, KASHAN, I. R. IRAN.

*E-mail address:* `fathtabar@kashanu.ac.ir`



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## ON THE NILPOTENCY CLASS OF THE AUTOMORPHISM GROUP OF SOME FINITE ABELIAN 2-GROUPS

S. FOULADI<sup>1\*</sup> AND F. MAHMOODI<sup>2</sup>

ABSTRACT. Let  $G$  be the direct product of two cyclic groups of orders 2 and  $2^m$ , where  $m > 1$ . By considering  $\text{Aut}(G)$ , the group of all automorphisms of  $G$ , as a group of matrices, we show that the nilpotency class of  $\text{Aut}(G)$  is equal to 2.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

There is a well-known result about the automorphism group of a finite  $p$ -group which states that for a finite non-cyclic  $p$ -group  $G$ ,  $\text{Aut}(G)$  is nilpotent if and only if  $\text{Aut}(G)$  is also a  $p$ -group, see [6, Theorem 1]. Moreover in [4] some results about the nilpotency class of the automorphism group of some finite  $p$ -groups is given.

Under some conditions, the group of all automorphisms of finite  $p$ -groups can be considered as a group of matrices such that the entries are homomorphisms, see [1, Theorem 3.2].

In this paper by using the above method, we find the nilpotency class of the automorphism group of some finite abelian 2-groups. In particular, Let  $H$  be a cyclic group of order 2 and  $K$  be a cyclic group of order  $2^m$ , where  $m > 1$ . By considering  $\text{Aut}(H \times K)$  as a group of matrices, first we see that  $\text{Aut}(H \times K)$  has the same order as  $H \times K$  and so is a 2-group. Then we show that the nilpotency class of  $\text{Aut}(H \times K)$  is equal to 2.

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 20D15, Secondary 20D45.

*Key words and phrases*. Automorphism group, Nilpotency class, Finite abelian 2-group .

\* Speaker.

## 2. NOTATION AND BASIC RESULTS

In this section we give the notation that are used throughout the paper and give some basic results that are needed for the main results of the paper.

Let  $G$  and  $L$  be groups. The set of all homomorphisms from  $G$  to  $L$  is denoted by  $\text{Hom}(G, L)$ . If  $\alpha \in \text{Hom}(G, L)$  and  $x$  is an element of  $G$ , we write  $\alpha(x)$  for the image of  $x$  under  $\alpha$ . The nilpotency class of a group  $G$  is shown by  $cl(G)$ . The center of a group  $G$  is denoted by  $Z(G)$  and the derived subgroup of  $G$  is shown by  $G'$ . Also  $\mathbb{Z}_n$  is the cyclic group of order  $n$ .

Now we state following lemmas that will be used the sequel.

**Lemma 2.1.** [2, Lemma C] *Let  $A$ ,  $C$  and  $U$  be abelian groups.*

- (i)  $\text{Hom}(A, U) \cong \text{Hom}(U, A)$ .
- (ii) *If  $B$  is a subgroup (quotient) of  $A$ , then  $\text{Hom}(B, U)$  is a subgroup (quotient) of  $\text{Hom}(A, U)$ .*
- (iii)  $\text{Hom}(A \times C, U) \cong \text{Hom}(A, U) \times \text{Hom}(C, U)$ .
- (iv)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$ , where  $d = \gcd(m, n)$ .

**Lemma 2.2.** *Let  $G \cong \mathbb{Z}_{p^m}$ , where  $m \geq 1$ .*

- (i) *If  $p$  is odd, then  $\text{Aut}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^{m-1}(p-1)}$ .*
- (ii) *If  $p = 2$ , then  $\text{Aut}(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{m-2}}$ , for  $m > 1$  and  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2) = 1$ .*

*Proof.* It follows from [5, iii.2.m. Theorem, p.83]. □

by [3] we note that if  $G$  and  $L$  are arbitrary groups and  $\theta, \phi \in \text{Hom}(G, L)$ , then the map  $\theta + \phi$  from  $G$  to  $L$  defined by  $(\theta + \phi)(g) = \theta(g)\phi(g)$  is again a homomorphism if  $\text{Im}\theta$  and  $\text{Im}\phi$  commute. We define the homomorphism  $0$  by  $0(x) = 1$  for all  $x$  in  $G$ .

Now we state the following theorem which plays an important role in our proof of the main theorem.

**Theorem 2.3.** [1, Theorem 3.2] *Let  $G = H \times K$ , where  $H$  and  $K$  have no common direct factor. then  $\text{Aut}(G) \cong \mathcal{A}$ , where*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{array}{ll} \alpha \in \text{Aut}(H), & \beta \in \text{Hom}(K, Z(H)) \\ \gamma \in \text{Hom}(H, Z(K)), & \delta \in \text{Aut}(K) \end{array} \right\}$$

*In particular  $|\text{Aut}(G)| = |\text{Aut}(H)||\text{Aut}(K)||\text{Hom}(H, Z(K))||\text{Hom}(K, Z(H))|$ .*

By the above theorem we see that  $\mathcal{A}$  is a group under matrix multiplication:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

where the sum of homomorphisms is defined as above and the multiplication of homomorphisms is the functional composition.

Also we can consider any automorphism  $\theta$  of  $H \times K$  as a matrix  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  and for any  $(h, k) \in H \times K$ , we have  $\theta(h, k) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(h)\beta(k) \\ \gamma(h)\delta(k) \end{pmatrix}$ .

Therefore in order to proof our theorem we use  $\mathcal{A}$  instead of the group of all automorphisms.

For the rest of the paper we fix our notation as below:

Let  $H = \langle x \rangle$  and  $K = \langle y \rangle$  be cyclic groups of order 2 and  $2^m$  respectively, where  $m > 1$ . We define the homomorphism  $\beta$  from  $K$  to  $H$  by  $\beta(y) = x$  and the homomorphism  $\gamma$  from  $H$  to  $K$  by  $\gamma(x) = y^{2^{m-1}}$ . Moreover the identity automorphism is denoted by 1 also we let  $A, B, C$  and  $D$  as below:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \delta \in \text{Aut}(K) \right\}, \\ B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \delta \in \text{Aut}(K) \right\}, \\ C &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \delta \in \text{Aut}(K) \right\}, \\ D &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \delta \in \text{Aut}(K) \right\}. \end{aligned}$$

### 3. MAIN RESULTS

In this section we show that the nilpotency class of the automorphism group of  $H \times K$  is equal to 2.

**Lemma 3.1.** *We have  $\text{Aut}(H \times K) \cong \mathcal{A}$  and so  $|\text{Aut}(H \times K)| = |H \times K| = 2^{m+1}$ .*

*Proof.* We see that  $H$  and  $K$  have no common direct factor. Therefore we can complete the proof by using Theorem 2.3, Lemma 2.1 and Lemma 2.2.  $\square$

By the above lemma we see that  $\text{Aut}(H \times K)$  is also a 2-group. Therefore  $\text{Aut}(H \times K)$  is nilpotent and so we can find the nilpotency class of  $\text{Aut}(H \times K)$ .

**Lemma 3.2.** *Let  $G = H \times K$ . Then any element of  $\mathcal{A}$  belongs to one of the sets  $A, B, C$  or  $D$ .*

*Proof.* By Lemma 3.1,  $\text{Aut}(G) \cong \mathcal{A}$ . Also  $\text{Aut}(H) = 1$  and  $|\text{Hom}(K, Z(H))| = |\text{Hom}(H, Z(K))| = 2$  by Lemma 2.1. This yields that any element of  $\mathcal{A}$  is  $\begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ \gamma' & \delta \end{pmatrix}$ , where  $\beta' \in \{\beta, 0\}$ ,  $\gamma' \in \{\gamma, 0\}$  and  $\delta \in \text{Aut}(K)$ , completing the proof.  $\square$

**Lemma 3.3.** *for any  $\delta \in \text{Aut}(K)$ , we have*

- (i)  $\beta\gamma = 0$ ,
- (ii)  $\beta\delta = \beta$ ,
- (iii)  $\delta\gamma = \gamma$ ,
- (iv)  $\gamma\beta + \gamma\beta = 0$ ,
- (v)  $\gamma + \gamma = \beta + \beta = 0$ .

*Proof.* (i) Since  $m > 1$ , we have  $\beta\gamma(x) = \beta(y^{2^{m-1}}) = x^{2^{m-1}} = 1$  or equivalently  $\beta\gamma = 0$ .

(ii) We may assume that  $\delta(y) = y^i$ , where  $(i, 2) = 1$ . Since  $i = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ), we see that  $\beta\delta(y) = \beta(y^i) = x^i = x$ , as desired.

(iii) We have  $\delta\gamma(x) = \delta(y^{2^{m-1}}) = y^{i2^{m-1}}$ , where  $\delta(y) = y^i$  and  $(i, 2) = 1$ . Since  $i = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ), we conclude that  $y^{i2^{m-1}} = y^{2^{m-1}}$ , which completes the proof.

(iv) This is obvious by considering the following equation

$$(\gamma\beta + \gamma\beta)(y) = \gamma\beta(y)\gamma\beta(y) = \gamma(x)\gamma(x) = y^{2^{m-1}}y^{2^{m-1}} = y^{2^m} = 1.$$

(v) This is the same as (iv).  $\square$

**Lemma 3.4.** *We have*

- (i) *the inverse of any element  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in A$  is  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$ ,*
- (ii) *the inverse of any element  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in B$  is  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta^{-1} \end{pmatrix}$ ,*
- (iii) *the inverse of any element  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in C$  is  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$ ,*

(iv) the inverse of any element  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in D$  is  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & \delta' \end{pmatrix}$ , where  $\delta(y) = y^i$ ,  $\delta'(y) = y^j$ ,  $(i, 2) = (j, 2) = 1$  and  $2^{m-1} + ij \equiv 1 \pmod{2^m}$ .

*Proof.* (i) We see that  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta + \beta\delta^{-1} \\ 0 & \delta\delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  by Lemma 3.3 (ii), (v).

(ii), (iii) are the same as (i).

(iv) We have  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \beta\gamma & \beta + \beta\delta' \\ \gamma + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma\beta + \delta\delta' \end{pmatrix}$  by Lemma 3.3. Moreover  $\gamma\beta + \delta\delta' = 1$  since  $2^{m-1} + ij \equiv 1 \pmod{2^m}$ .  $\square$

**Theorem 3.5.** We have  $Z(\mathcal{A}) = C$ ,  $|Z(\mathcal{A})| = 2^{m-1}$  and  $|\mathcal{A}'| = 2$ .

**Corollary 3.6.** The nilpotency class of  $\text{Aut}(H \times K)$  is equal to 2.

*Proof.* By Lemma 3.1,  $\text{Aut}(H \times K) \cong \mathcal{A}$  and is of order  $2^{m+1}$ . Therefore  $|\mathcal{A}/Z(\mathcal{A})| = 4$  by Theorem 3.5 and so  $\mathcal{A}' \leq Z(\mathcal{A})$ . Consequently  $cl(\mathcal{A}) = 2$ .  $\square$

## REFERENCES

- [1] J. N. S Bidwell, M. J. Curran and D. J. McCaughan, Automorphisms of direct products of finite groups, *Arch. Math.* **86** (2006), 481-489.
- [2] M. J. Curran and D. J. McCaughan, Central automorphisms that are almost inner, *Comm. Algebra* **29**(5) (2001), 2081-2087.
- [3] H. Fitting, Über die direkten produktzerlegungen einer gruppe in direkt unzerlegbare faktorn, *math. Z.* **39** (1934), 16-30.
- [4] S. Fouladi and R. Orfi, On the nilpotency class of the automorphism group of some finite  $p$ -groups, *Bull. Iran. Math. Soc.* (to be appear).
- [5] E. Schenkman, *Group theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
- [6] John H. Ying, On finite groups whose automorphism groups are nilpotent, *Arch. Math.* **29**(1) (1977), Num.1,41-44.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY , ARAK, IRAN.  
E-mail address: s-fouladi@araku.ac.ir

<sup>2</sup>DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY , ARAK, IRAN.  
E-mail address: f-mahmodi@arshad.araku.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## GENERALIZED INVERSE EIGENVALUE PROBLEM USING PRESCRIBED MIXED EIGENDATA

K. GHANBARI<sup>1</sup> AND F. PARVIZPOUR<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. In this paper we consider a generalized inverse eigenvalue problem  $J_n X = \lambda C_n X$ , where  $J_n$  is a Jacobi matrix and  $C_n$  is a nonsingular diagonal matrix that may be indefinite. Let  $J_k$  be  $k \times k$  leading principal submatrix of  $J_n$ . Given  $C_n$ , two vectors  $X_2 = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)^T$ ,  $Y_2 = (y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n-k}$ , two distinct real numbers  $\lambda, \mu$ , we construct a Jacobi matrix  $J_n$  and two vectors  $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ ,  $Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T \in \mathbb{R}^k$  such that  $J_n X = \lambda C_n X$ , and  $J_n Y = \mu C_n Y$ , where  $X = (X_1^T, X_2^T)^T$  and  $Y = (Y_1^T, Y_2^T)^T$ .

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

A tridiagonal symmetric matrix of the form

$$J_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

with positive (or negative) off-diagonal entries, is called a Jacobi matrix. The standard IEP is to construct a Jacobi matrix  $J_n$  by a complete set of eigenvalues or a set of eigenvalues and partial information of eigenvectors. The standard IEP involves the eigenvalue problem of the form

$$(1.1) \quad J_n X = \lambda X.$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 35P15; Secondary 58G25.

*Key words and phrases*. Inequality.

\* Speaker.

Most versions of the standard IEP have been collected by Gladwell [3]. The generalized inverse eigenvalue problem (GIEP) involves the eigenvalue problem of the form

$$(1.2) \quad J_n X = \lambda C_n X,$$

where  $C_n = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$  is a prescribed nonsingular definite or indefinite matrix. Atkinson [1] considered GIEP when  $C_n$  is positive definite. Ghanbari [2] studied GIEP by using m-functions, when  $C_n$  is indefinite. Z.Peng and X.Han [4] studied the standard IEP to construct a Jacobi matrix  $J_n$  by using ordered defective eigenpairs and a leading principal submatrix. Now it is natural to ask how to solve the GIEP version of this problem. We generalized this work to GIEP (1.2), where  $C_n = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$  is a non-singular matrix. If  $C_n$  is a positive definite diagonal matrix, then  $C_n = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2) = D^2$ . In this case we may transform the equation  $J_n X = C_n X$  to  $\hat{J}_n Y = \lambda Y$ , where  $\hat{J} = D^{-1} J_n D^{-1}$  which is a Jacobi matrix, and  $Y = DX$ . If  $C_n$  is indefinite, this transformation is impossible. This is the main reason that we study GIEP to answer this complication. Therefore we state the main problem of the paper as follows.

**Problem A.** Given a  $k \times k$  Jacobi matrix  $J_k$ , a non-singular matrix  $C_n = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , real number  $\lambda$ ,  $\mu (\lambda \neq \mu)$ , and real vectors  $X_2 = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $Y_2 = (y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n-k}$ , where  $(1 \leq k \leq n-1)$ , find real vectors  $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ ,  $Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T \in \mathbb{R}^k$ , and an  $n \times n$  Jacobi matrix  $J_n$  such that  $J_k$  is  $k \times k$  leading principal submatrix of  $J_n$  and  $(\lambda, X)$ ,  $(\mu, Y)$  are eigenpairs of  $(J_n, C_n)$ , where  $X = (X_1^T, X_2^T)^T$ ,  $Y = (Y_1^T, Y_2^T)^T$ .

## 2. MAIN RESULTS

Let  $\sigma(J_n, C_n)$  be the set of eigenvalues of the pair  $(J_n, C_n)$  i.e a numbers  $\lambda$  such that  $J_n X = \lambda C_n X$  has a nontrivial solution. The same notation applies for  $\sigma(J_k, C_k)$ ,  $(1 \leq k \leq n-1)$ , where  $(J_k, C_k)$  is the  $k \times k$  principal minor of the pair  $(J_n, C_n)$ . We denote the corresponding trailing minor by  $(\tilde{J}_{n-k}, \tilde{C}_{n-k})$ .

**Definition 2.1.** Let  $\alpha$  and  $\beta$  real numbers, define  $\varphi_0(\alpha) = 1$ ,

$$(2.1) \quad \varphi_i(\alpha) = \det(\alpha C_i - J_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

and

$$(2.2) \quad \phi_i(\alpha, \beta) = \frac{1}{c_i} \begin{vmatrix} \varphi_{i-1}(\alpha) & \varphi_i(\alpha) \\ \varphi_{i-1}(\beta) & \varphi_i(\beta) \end{vmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

We need the following Theorem from [3].

**Theorem 2.2.** Suppose that the vector  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  is an eigenvector corresponding to the eigenvalue  $\lambda$  of the pair  $(J_n, C_n)$ , where  $J_n$  is the  $n \times n$  Jacobi matrix and  $C_n = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , then

- (1)  $x_1 x_n \neq 0$ ,
- (2) If  $x_i = 0$ , then  $x_{i-1} x_{i+1} < 0$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ),
- (3)  $x_i = \frac{x_1 \varphi_{i-1}(\lambda)}{b_1 b_2 \dots b_{i-1}}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ).

Using Theorem 2.2 and some algebraic calculations shows that,

**Theorem 2.3.** Considering the notations of the Problem A and Theorem 2.2, we have

- (1) If  $\lambda \notin \sigma(J_k, C_k)$ , then  $x_{k+1} \neq 0$  and

$$(2.3) \quad X_1 = \frac{b_k x_{k+1}}{\varphi_k(\lambda)} \left[ \prod_{j=1}^{k-1} b_j, \varphi_1(\lambda) \prod_{j=2}^{k-1} b_j, \dots, \varphi_{k-1}(\lambda) \right]^T$$

- (2) If  $\lambda \in \sigma(J_k, C_k)$ , then  $x_{k+1} = 0$  and

$$(2.4) \quad X_1 = \frac{z}{b_1 b_2 \dots b_{k-1}} \left[ \prod_{j=1}^{k-1} b_j, \varphi_1(\lambda) \prod_{j=2}^{k-1} b_j, \dots, \varphi_{k-1}(\lambda) \right]^T,$$

where  $z$  is an arbitrary nonzero real number.

**Definition 2.4.** Let  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  and  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , we define

$$(2.5) \quad D_i = \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}, \quad d_i = \sum_{j=i+1}^n c_j x_j y_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

**Theorem 2.5.** If the following conditions are satisfied, then Problem A has an unique solution,

- (1)  $\frac{(\lambda - \mu) X_2^T \tilde{C}_{n-k} Y_2 \varphi_k(\lambda) \varphi_k(\mu)}{c_k x_{k+1} y_{k+1} \phi_k(\lambda, \mu)} > 0$ ,
- (2)  $(\lambda - \mu) \frac{d_i}{D_i} > 0$  ( $i = k+1, k+2, \dots, n-1$ ).

*Proof.* Since condition (1) holds, all the values of  $\varphi_k(\lambda)$ ,  $\varphi_k(\mu)$ ,  $x_{k+1}$ ,  $y_{k+1}$ ,  $X_2^T Y_2$  and  $c_k \phi_k(\lambda, \mu) + (\mu - \lambda)\sigma$  are not equal to zero. Thus

$$(2.6) \quad \frac{c_k b_k^2 x_{k+1} y_{k+1} \phi_k(\lambda, \mu)}{(\mu - \lambda) \varphi_k(\lambda) \varphi_k(\mu)} + X_2^T \tilde{C}_{n-k} Y_2 = 0$$

therefore

$$(2.7) \quad b_k = \left( \frac{(\lambda - \mu) X_2^T \tilde{C}_{n-k} Y_2 \varphi_k(\lambda) \varphi_k(\mu)}{c_k x_{k+1} y_{k+1} \phi_k(\lambda, \mu)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Since  $\varphi_k(\lambda) \varphi_k(\mu) \neq 0$ , then  $\lambda, \mu \notin \sigma(J_k, C_k)$ , by Theorem 2.3,  $x_{k+1} y_{k+1} \neq 0$  and

$$(2.8) \quad X_1 = \frac{b_k x_{k+1}}{\varphi_k(\lambda)} \left[ \prod_{j=1}^{k-1} b_j, \varphi_1(\lambda) \prod_{j=2}^{k-1} b_j, \dots, \varphi_{k-1}(\lambda) \right]^T,$$

$$(2.9) \quad Y_1 = \frac{b_k y_{k+1}}{\varphi_k(\mu)} \left[ \prod_{j=1}^{k-1} b_j, \varphi_1(\mu) \prod_{j=2}^{k-1} b_j, \dots, \varphi_{k-1}(\mu) \right]^T.$$

Moreover we have

$$(2.10) \quad \begin{aligned} a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1} x_{i+2} &= \lambda c_{i+1} x_{i+1} - b_i x_i \\ a_{i+1} y_{i+1} + b_{i+1} y_{i+2} &= \mu c_{i+1} y_{i+1} - b_i y_i, \quad (i = k, k+1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} a_n x_n &= \lambda c_n x_n - b_{n-1} x_{n-1} \\ a_n y_n &= \mu c_n y_n - b_{n-1} y_{n-1} \end{aligned}$$

Eliminating  $a_i (i = k+1, k+2, \dots, n-1)$  from (2.10) and (2.11), we have

$$(2.12) \quad b_i D_i = (\lambda - \mu) d_i, \quad (i = k+1, k+2, \dots, n-1).$$

Eq. (2.12) and condition (2) imply that  $b_i > 0$  exists uniquely and can be expressed as

$$(2.13) \quad b_i = (\lambda - \mu) \frac{d_i}{D_i}, \quad (i = k+1, k+2, \dots, n-1).$$

Since  $D_i \neq 0 (i = k+1, k+2, \dots, n-1)$ ,  $a_i (i = k+1, k+2, \dots, n-1)$  exists uniquely, and  $x_i$  and  $y_i$  are not equal to zero simultaneously, we have from (2.10) that

$$(2.14) \quad a_i = \begin{cases} c_i \lambda - \frac{b_{i-1} x_{i-1} + b_i x_{i+1}}{x_i}, & x_i \neq 0 \\ c_i \mu - \frac{b_{i-1} y_{i-1} + b_i y_{i+1}}{y_i}, & x_i = 0 \end{cases} \quad (i = k+1, k+2, \dots, n-1)$$

From (2.11) and  $x_n y_n \neq 0$ ,  $a_n$  can be expressed as

$$(2.15) \quad \begin{aligned} a_n &= c_n \lambda - b_{n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n}, \\ a_n &= c_n \mu - b_{n-1} \frac{y_{n-1}}{y_n}. \end{aligned}$$

□

## REFERENCES

1. Atkinson F V 1964, Discrete and continuous Boundary Problems (New York: Academic).
2. K.Ghanbari, m-functions and inverse generalized eigenvalue problem, *Inverse problems* **17** (2001) 211-217
3. G.M.L. Gladwell, Inverse Problems in Vibration, Kluwer Academic Publishers, 2004.
4. Z.Y.Peng and X.L.Han, Constructing Jacobi matrixes with prescribed ordered defective eigenpairs and a principal submatrix, *J.Computational and Applied mathematics* 175(2005) 321-333.
5. S.F. Xu, On the Jacobi matrix inverse eigenvalue problem with mixed given data, *SIAM J. Matrix Anal.Appl.* 17 (1996) 632639.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAHAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, P. O. Box 5331711111, TABRIZ, IRAN.

*E-mail address:* `kghanbari@sut.ac.ir`

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAHAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, P. O. Box 5331711111, TABRIZ, IRAN.

*E-mail address:* `fardin2709@yahoo.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## INVERSE EIGENVALUE PROBLEMS FOR PENTADIAGONAL MATRICES

K.GHANBARI<sup>1</sup> AND H.MIRZAEI<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. In this paper, we propose an algorithm for constructing a pentadiagonal matrix with given prescribed three spectra.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $H$  be a block tridiagonal matrix of the form

$$(1.1) \quad H = \begin{pmatrix} A_1 & B_1^T & & & \\ B_1 & A_2 & B_2^T & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & B_{s-1} & A_s \end{pmatrix}$$

Where  $A_1, \dots, A_s$  are symmetric matrices in  $S_p$ ,  $B_i$  are upper triangular matrices in  $M_p$  and  $n = ps$ . If  $p = 2$  then  $H$  is a pentadiagonal matrix. In this case  $H$  is of the form

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35P15, 58G25.

*Key words and phrases.* Inverse eigenvalue problem, block tridiagonal matrix, pentadiagonal matrix.

\* Speaker.

The pentadiagonal case occurs in the inverse problem for vibrating beams, the pentadiagonal matrix giving the stiffness matrix of the beam has a very special form; certain terms in it must be positive, and others entries must be negative, we will not be concerned with these matters of sing(see[2]). Boley and colub[1] proposed an inverse eigenvalue problem for a general symmetric matrix of the form(1.1) with given spectral data  $\sigma(H) = (\lambda_i)_1^n, \sigma(H_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$  and  $\sigma(H_{1,2}) = (\nu_i)_1^{n-2}$ , where  $\sigma(H)$  denote spectra of matrix  $H$ ,  $H_i$  obtained by deleting the  $i$ -th row and column of  $H$  and  $H_{i,j}$  obtained from  $H$  by knocking off the  $i$ -th row and  $i$ -th column and  $j$ -th row and  $j$ -th column of  $H$  respectively. In this paper, we construct a pentadiagonal matrix  $H$  with given spectral data  $\sigma(H) = (\lambda_i)_1^n, \sigma(H_{m+1}) = (\mu_i)_1^{n-1}$  and  $\sigma(H_{m+1,m+2}) = (\nu_i)_1^{n-2}$ .

## 2. MAIN RESULTS

Let  $H_{m+1}$  and  $H_{m+1,m+2}$  be a matrices of the form

$$H_{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b}_m & 0 \\ \mathbf{b}_m^T & a_{m+2} & \mathbf{c}_{m+2}^T \\ 0 & \mathbf{c}_{m+2} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, H_{m+1,m+2} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

where  $B$  and  $C$  are pentadiagonal matrix of order  $m$  and  $p$  respectively that  $m+p+2 = n$ ,  $\mathbf{b}_m^T = (0, \dots, 0, c_m)$  and  $\mathbf{c}_{m+2}^T = (b_{m+2}, c_{m+2}, 0, \dots, 0)$ . Express the eigenvalue problem for  $H_{m+1}$  in terms of the normalised eigenvectors  $(y_j)_1^m$  and  $(z_j)_1^p$  of  $B$  and  $C$ , respectively. Thus if  $X = [x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{n-1}]$  be eigenvector of  $H_{m+1}$  then we can write  $X$  as follows

$$(2.1) \quad X = \begin{pmatrix} Y & & \\ & 1 & \\ & & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ x_{m+1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{pmatrix}, \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_m], \quad Z = [z_1, z_2, \dots, z_p]$$

The eigenvalue problem becomes

$$\begin{pmatrix} \lambda - \sigma_1 & & & -s_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & \lambda - \sigma_m & -s_m & & & \\ -s_1 & \cdots & -s_m & \lambda - a_{m+2} & -t_1 & \cdots & -t_p \\ & & & -t_1 & \lambda - \eta_1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -t_p & & & \lambda - \eta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ x_{m+1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{pmatrix} = 0$$

where  $\sigma_i$  and  $\eta_i$  are eigenvalues of matrices  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$ , in  $H_{m+1,m+2}$  respectively and

$$(2.2) \quad s_i = c_m y_{m,i} \quad , \quad t_j = b_{m+2} z_{1,j} + c_{m+2} z_{2,j}$$

Thus

$$\{a_{m+2} - \lambda_i + \sum_{j=1}^m \frac{s_j^2}{\lambda_i - \sigma_j} + \sum_{k=1}^p \frac{t_k^2}{\lambda_i - \nu_k}\} x_{m+1,i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

**Lemma 2.1.** *If all  $(\nu_i)_1^{n-2}$  and  $(\mu_i)_1^{n-1}$  are distinct then  $x_{m+1,i} \neq 0; i = 1, 2, \dots, n-1$ .*

By lemma 2.1 we have

$$a_{m+2} - \lambda + \sum_{j=1}^m \frac{s_j^2}{\lambda - \sigma_j} + \sum_{k=1}^p \frac{t_k^2}{\lambda - \nu_k} = -\frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_m(\lambda)Q_p(\lambda)},$$

where  $P_{n-1}(\lambda)$ ,  $P_m(\lambda)$  and  $Q_p(\lambda)$  are characteristic polynomials of matrices  $H_{m+1}$ ,  $B$  and  $C$ , respectively. This yields

$$s_j^2 = -\frac{P_{n-1}(\sigma_j)}{P'_m(\sigma_j)Q_p(\sigma_j)} \quad , \quad t_k^2 = -\frac{P_{n-1}(\nu_k)}{P_m(\nu_k)Q'_p(\nu_k)}$$

Now  $c_m^2$  and  $y_{m,i}$  may be computed from (2.2) and from trace formula we can compute  $a_{m+2}$  and  $a_{m+1}$ .

Now we consider eigenvalue problem for matrix  $H$ . Thus if  $X = [x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]$  be eigenvector of  $H$  then we can write  $X$  of the form (2.1) with  $I_2$  (identity matrix) instead

of 1 and eigenvalue problem becomes as follows

$$\begin{pmatrix} \lambda - \sigma_1 & & & -h_1 & -s_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \\ & & \lambda - \sigma_m & -h_m & -s_m & & & \\ -h_1 & \cdots & -h_m & \lambda - a_{m+1} & -b_{m+1} & -d_1 & \cdots & -d_p \\ -s_1 & \cdots & -s_m & -b_{m+1} & \lambda - a_{m+2} & -t_1 & \cdots & -t_p \\ & & & -d_1 & -t_1 & \lambda - \eta_1 & & \\ & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & -d_p & -t_p & & & \lambda - \eta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{pmatrix} = 0$$

where

$$h_i = c_{m-1}y_{m-1,i} + b_my_{m,i} \quad , \quad d_i = c_{m+1}z_{1,i}$$

Thus for  $i = 1, 2, \dots, n$  we have

$$\begin{cases} (a_{m+1} - \lambda_i + \sum_{j=1}^m \frac{h_j^2}{\lambda_i - \sigma_j} + \sum_{k=1}^p \frac{d_k^2}{\lambda_i - \nu_k})x_{m+1,i} + (b_{m+1} + \sum_{j=1}^m \frac{h_j s_j}{\lambda_i - \sigma_j} + \sum_{k=1}^p \frac{d_k t_k}{\lambda_i - \nu_k})x_{m+2,i} = 0 \\ (b_{m+1} + \sum_{j=1}^m \frac{h_j s_j}{\lambda_i - \sigma_j} + \sum_{k=1}^p \frac{d_k t_k}{\lambda_i - \nu_k})x_{m+1,i} + (a_{m+2} - \lambda_i + \sum_{j=1}^m \frac{s_j^2}{\lambda_i - \sigma_j} + \sum_{k=1}^p \frac{t_k^2}{\lambda_i - \nu_k})x_{m+2,i} = 0 \end{cases}$$

**Lemma 2.2.** *If all  $(\lambda_i)_1^n$  and  $(\nu_i)_1^{n-2}$  are distinct then  $(x_{m+1,i}, x_{m+2,i}) \neq 0; i = 1, 2, \dots, n-1$ .*

By lemma 1.2 the determinant of the system above must be zero and we can compute  $h_j$  and  $d_k$ . With known  $h_j$  and  $d_k$  we derive  $z_1, y_{m-1}$  and elements of matrix which follow in  $m+1$ -th and  $m+2$ -th rows and columns.

With  $y_m, y_{m-1}, z_1$  and  $z_2$  matrices  $B$  and  $C$  in  $H_{m+1, m+2}$  can be computed by using the block lanczos algorithm (see [2]). Summarizing the previous results we come to the main theorem as follows

**Theorem 2.3.** *Combining conditions of lemma 2.1 and lemma 2.2 we can construct a pentadiagonal matrix  $H$  by three prescribed spectra.*

## REFERENCES

1. Boley. D and Golub, G.H. A survey of matrix inverse eigenvalue problems.(1987) [29],3,595-622.
2. Gladwell. M.L, Inverse Problems in Vibration 2nd edn.2004 (Dordrecht: Kluwer)

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAHAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, TABRIZ, IRAN.  
E-mail address: kghanbari@sut.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAHAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, TABRIZ, IRAN.  
E-mail address: hanifmirzaei@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## GRÜSS TYPE INEQUALITIES IN BANACH \*-MODULES

A. G. GHAZANFARI<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. We obtain some further generalization of the Grüss type inequalities in inner product modules over unital Banach \*-algebras for  $C^*$ -seminorms and positive linear functionals.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\mathcal{A}$  be a \*-algebra. A seminorm  $\gamma$  on  $\mathcal{A}$  is a real-valued function on  $\mathcal{A}$  such that for  $a, b \in \mathcal{A}$  and  $\lambda \in \mathbb{C}$ :  $\gamma(a) \geq 0$ ,  $\gamma(\lambda a) = |\lambda|\gamma(a)$ ,  $\gamma(a + b) \leq \gamma(a) + \gamma(b)$ . A seminorm  $\gamma$  on  $\mathcal{A}$  is called a  $C^*$ -seminorm if it satisfies the  $C^*$ -condition:  $\gamma(a^*a) = (\gamma(a))^2$  ( $a \in \mathcal{A}$ ). By Sebestyen's theorem [1, Theorem 38.1] every  $C^*$ -seminorm  $\gamma$  on a \*-algebra  $\mathcal{A}$  is submultiplicative, i.e.,  $\gamma(ab) \leq \gamma(a)\gamma(b)$  ( $a, b \in \mathcal{A}$ ), and by [3, Section 39, Lemma 2 (i)]  $\gamma(a) = \gamma(a^*)$ . For every  $a \in \mathcal{A}$ , the spectral radius of  $a$  is defined to be  $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)\}$ .

**Definition 1.1.** Let  $\mathcal{A}$  be a \*-algebra. A semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module (or semi-inner product \*-module) is a complex vector space which is also a right  $\mathcal{A}$ -module  $X$  with a sesquilinear semi-inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathcal{A}$ , fulfilling

$$\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a \quad (\text{right linearity})$$

$$\langle x, x \rangle \in \mathcal{A}^+ \quad (\text{positivity})$$

for  $x, y \in X$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Furthermore, if  $X$  satisfies the strict positivity condition

$$x = 0 \quad \text{if} \quad \langle x, x \rangle = 0, \quad (\text{strict positivity})$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46L08, 46H25; Secondary 26D99, 46C99.

*Key words and phrases*. Banach \*-modules, Grüss inequality,

\* Speaker.

then  $X$  is called an inner product  $\mathcal{A}$ -module (or inner product  $*$ -module).

Let  $\gamma$  be a seminorm or a positive linear functional on  $\mathcal{A}$  and  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ). If  $\Gamma$  is a seminorm on a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module  $X$ , then  $(X, \Gamma)$  is said to be a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

If  $\Gamma$  is a norm on an inner product  $\mathcal{A}$ -module  $X$ , then  $(X, \Gamma)$  is said to be a pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

A pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module which is complete with respect to its norm is called a Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

Since  $\langle x + y, x + y \rangle$  and  $\langle x + iy, x + iy \rangle$  are self adjoint, therefore we get the following Corollary.

**Corollary 1.2.** *If  $X$  is a semi-inner product  $*$ -module then the following symmetry condition holds:*

$$\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle \quad \text{for } x, y \in X. \quad (\text{symmetry})$$

**Example 1.3.** (a) Let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra and  $\gamma$  a positive linear functional or a  $C^*$ -seminorm on  $\mathcal{A}$ . It is known that  $(\mathcal{A}, \gamma)$  is a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module over itself with the inner product defined by  $\langle a, b \rangle := a^*b$ , in this case  $\Gamma = \gamma$ .  
 (b) Let  $\mathcal{A}$  be a hermitian Banach  $*$ -algebra and  $\rho$  be the Pták function on  $\mathcal{A}$ . If  $X$  is a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module and  $P(x) = (\rho(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ), then  $(X, P)$  is a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.  
 (c) Let  $\mathcal{A}$  be a  $A^*$ -algebra and  $|\cdot|$  be the auxiliary norm on  $\mathcal{A}$ . If  $X$  is an inner product  $\mathcal{A}$ -module and  $|x| = |\langle x, x \rangle|^{1/2}$  ( $x \in X$ ), then  $(X, |\cdot|)$  is a pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.  
 (d) Let  $\mathcal{A}$  be a  $H^*$ -algebra and  $X$  (a semi-inner product) an inner product  $\mathcal{A}$ -module. Since  $\text{tr}$  is a positive linear functional on  $\tau(\mathcal{A})$  and for every  $x \in X$  we have  $\text{tr}(\langle x, x \rangle) = \| |x| \|^2$  therefore  $(X, \| |\cdot| \|)$  is a (semi-Hilbert) pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

## 2. MAIN RESULTS

We assume, unless stated otherwise, throughout this section that  $\mathcal{A}$  is a unital Banach  $*$ -algebra. The following Lemma 2.1 is a version of [3, Lemma 2.1] for a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module and the following Lemma 2.3 is a version of ([3, Lemma 2.4]) for an inner product  $\mathcal{A}$ -module.

**Lemma 2.1.** *Let  $X$  be a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module, and  $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Then*

$$\text{Re} \langle \alpha y - x, x - \beta y \rangle \geq 0$$

if and only if

$$\left\langle x - \frac{\alpha + \beta}{2}y, x - \frac{\alpha + \beta}{2}y \right\rangle \leq \frac{1}{4}|\alpha - \beta|^2 \langle y, y \rangle.$$

**Lemma 2.2.** *Let  $X$  be an inner product  $\mathcal{A}$ -module and  $x, y, e \in X$ . If  $\langle e, e \rangle$  is idempotent, then  $e \langle e, e \rangle = e$ , and therefore*

$$\langle e, e \rangle \langle e, x \rangle = \langle e, x \rangle, \quad \langle x, e \rangle = \langle x, e \rangle \langle e, e \rangle.$$

**Lemma 2.3.** *Let  $X$  be an inner product  $\mathcal{A}$ -module and  $\gamma$  be a  $C^*$ -seminorm or a positive linear functional on  $\mathcal{A}$  and  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ). If  $x, e \in X$  and  $\langle e, e \rangle$  is an idempotent then*

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, x \rangle$$

and

$$\gamma(\langle x, x \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, x \rangle) \leq \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \Gamma(x - \lambda e)^2.$$

**Lemma 2.4.** *Let  $X$  be an inner product  $\mathcal{A}$ -module,  $\gamma$  be a  $C^*$ -seminorm on  $\mathcal{A}$  and  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ). If  $x, y, e \in X$ ,  $\langle e, e \rangle$  is idempotent and  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$  are real or complex numbers such that*

$$\Gamma\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}e\right) \leq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|, \quad \Gamma\left(y - \frac{\lambda + \mu}{2}e\right) \leq \frac{1}{2}|\lambda - \mu|$$

hold, then one has the inequality

$$\gamma(\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle) \leq \frac{1}{4}|\alpha - \beta||\lambda - \mu|.$$

Furthermore, if there is a non zero element  $f$  in  $X$  such that  $\langle e, f \rangle = 0$  and  $\Gamma(f) \neq 0$ , then the constant  $\frac{1}{4}$  is best possible.

**Theorem 2.5.** *Let  $X$  be an inner product  $\mathcal{A}$ -module,  $\gamma$  a  $C^*$ -seminorm on  $\mathcal{A}$  and  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ). If  $x, y, e \in X$ ,  $\langle e, e \rangle$  is idempotent and  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$  are real or complex numbers such that*

$$\Gamma\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}e\right) \leq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|, \quad \Gamma\left(y - \frac{\lambda + \mu}{2}e\right) \leq \frac{1}{2}|\lambda - \mu|$$

hold, then one has the inequality

$$(2.1) \quad \gamma(\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle) \\ \leq \frac{1}{4} |\alpha - \beta| |\lambda - \mu| - \left( \frac{1}{4} |\alpha - \beta|^2 - \Gamma \left( x - \frac{\alpha + \beta}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left( \frac{1}{4} |\lambda - \mu|^2 - \Gamma \left( y - \frac{\lambda + \mu}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Furthermore, if there is a non zero element  $f$  in  $X$  such that  $\langle e, f \rangle = 0$  and  $\Gamma(f) \neq 0$  then the constant  $\frac{1}{4}$  is best possible.

Similarly for a positive linear functional  $\varphi$ , the following theorem holds.

**Theorem 2.6.** *Let  $X$  be an inner product  $\mathcal{A}$ -module,  $\varphi$  a positive linear functional  $\mathcal{A}$  and  $\Phi(x) = (\varphi(\langle x, x \rangle))^{\frac{1}{2}}$  ( $x \in X$ ). If  $x, y, e \in X$ ,  $\langle e, e \rangle$  is idempotent and  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$  are real or complex numbers such that*

$$\Phi \left( x - \frac{\alpha + \beta}{2} e \right) \leq \frac{1}{2} |\alpha - \beta| \Phi(e), \quad \Phi \left( y - \frac{\lambda + \mu}{2} e \right) \leq \frac{1}{2} |\lambda - \mu| \Phi(e)$$

hold, then one has the inequality

$$(2.2) \quad |\varphi(\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle)| \\ \leq \frac{1}{4} |\alpha - \beta| |\lambda - \mu| \Phi(e)^2 - \left( \frac{1}{4} |\alpha - \beta|^2 \Phi(e)^2 - \Phi \left( x - \frac{\alpha + \beta}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left( \frac{1}{4} |\lambda - \mu|^2 \Phi(e)^2 - \Phi \left( y - \frac{\lambda + \mu}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Furthermore, if there is a non zero element  $f$  in  $X$  such that  $\langle e, f \rangle = 0$  and  $\Phi(f) \neq 0$ , then the constant  $\frac{1}{4}$  is best possible.

*Remark 2.7.* If in the above theorem  $\varphi$  is a state on  $\mathcal{A}$  then, obviously, inequality (2.2) becomes the following:

$$(2.3) \quad |\varphi(\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle)| \\ \leq \frac{1}{4} |\alpha - \beta| |\lambda - \mu| - \left( \frac{1}{4} |\alpha - \beta|^2 - \Phi \left( x - \frac{\alpha + \beta}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left( \frac{1}{4} |\lambda - \mu|^2 - \Phi \left( y - \frac{\lambda + \mu}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Now Put  $G = \langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$ ,  $G_x = \langle x, x \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, x \rangle$ ,  $G_y = \langle y, y \rangle - \langle y, e \rangle \langle e, y \rangle$  and  $R(x) = (r \langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ . By inequality (3.4) in [4] we have

$$\varphi(GG^*) \leq \varphi(G_x) r(G_y).$$

Therefore we may obtain another refinement of [5, Theorem 5.1]:

For every positive linear functional  $\varphi$  on  $\mathcal{A}$  we have

$$\varphi(GG^*) \leq \frac{1}{4} |\alpha - \beta| |\lambda - \mu| - \left( \frac{1}{4} |\alpha - \beta|^2 - \Phi \left( x - \frac{\alpha + \beta}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left( \frac{1}{4} |\lambda - \mu|^2 - R \left( y - \frac{\lambda + \mu}{2} e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

and we know that there is a state  $\varphi$  on the  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  such that  $\varphi(GG^*) = \|GG^*\| = \|G\|^2$ .

## REFERENCES

1. F. F. BONSALL and J. DUNCAN, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.
2. R.S DORAN and V.A. BELFI, *Characterization of  $C^*$ -Algebras*, Dekker, New York, 1986.
3. S. S. DRAGOMIR, *Advances in Inequalities of the Schwarz, Grüss and Bessel Type in Inner Product Spaces*, Nova Science publishers Inc., New York, 2005.
4. A. G. GHAZANFARI, S. S. DRAGOMIR, *Schwarz and Grüss type inequalities for  $C^*$ -seminorms and positive linear functionals on Banach  $*$ -modules*, Linear Algebra and Appl. **434** (2011), 944-956.
5. D. ILIŠEVIĆ and S. VAROŠANEC, *Grüss type inequalities in inner product modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **133**(11)(2005), 3271-3280.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LORESTAN UNIVERSITY, P. O. Box 465, KHAMABAD, IRAN.  
E-mail address: ghazanfari.amir@gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## SCHWARZ TYPE INEQUALITIES IN SEMI-INNER PRODUCT MODULES

A. G. GHAZANFARI<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. Let  $\mathcal{A}$  be a proper  $H^*$ -algebras or a unital Banach  $*$ -algebra,  $\gamma$  a  $C^*$ -seminorm or a positive linear functional on  $\mathcal{A}$  and  $X$  be a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module. We define a real function  $\Gamma$  on  $X$  by  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  and show that the Schwarz inequality holds, therefore  $(X, \Gamma)$  is a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

A proper  $H^*$ -algebra is a complex Banach  $*$ -algebra  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  where the underlying Banach space is a Hilbert space with respect to the inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  satisfying the properties  $\langle ab, c \rangle = \langle b, a^*c \rangle$  and  $\langle ba, c \rangle = \langle b, ca^* \rangle$  for all  $a, b, c \in \mathcal{A}$ . A  $C^*$ -algebra is a complex Banach  $*$ -algebra  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  such that  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  for every  $a \in \mathcal{A}$ . If  $\mathcal{A}$  is a proper  $H^*$ -algebra or a  $C^*$ -algebra and  $a \in \mathcal{A}$  is such that  $\mathcal{A}a = 0$  or  $a\mathcal{A} = 0$  then  $a = 0$ .

For a proper  $H^*$ -algebra  $\mathcal{A}$ , the trace class associated with  $\mathcal{A}$  is  $\tau(\mathcal{A}) = \{ab : a, b \in \mathcal{A}\}$ . For every positive  $a \in \tau(\mathcal{A})$  there exists the square root of  $a$ , that is, a unique positive  $a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{A}$  such that  $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$ , the square root of  $a^*a$  is denoted by  $|a|$ . There are a positive linear functional  $tr$  on  $\tau(\mathcal{A})$  and a norm  $\tau$  on  $\tau(\mathcal{A})$ , related to the norm of  $\mathcal{A}$  by the equality  $tr(a^*a) = \tau(a^*a) = \|a\|^2$  for every  $a \in \mathcal{A}$ .

Let  $\mathcal{A}$  be a proper  $H^*$ -algebra or a  $C^*$ -algebra. A semi-inner product module over  $\mathcal{A}$  is a right module  $X$  over  $\mathcal{A}$  together with a generalized semi-inner product, that is with a mapping  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $X \times X$ , which is  $\tau(\mathcal{A})$ -valued if  $\mathcal{A}$  is a proper  $H^*$ -algebra, or  $\mathcal{A}$ -valued if  $\mathcal{A}$  is a  $C^*$ -algebra, having the following properties:

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46L08, 46H25; Secondary 26D99, 46C99.

*Key words and phrases*. Semi-inner product modules, Schwarz inequality,  $C^*$ -seminorms.

\* Speaker.

- (i)  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$  for all  $x, y, z \in X$ ,
- (ii)  $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$  for  $x, y \in X, a \in \mathcal{A}$ ,
- (iii)  $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$  for all  $x, y \in X$ ,
- (iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  for  $x \in X$ .

We shall say that  $X$  is a semi-inner product  $H^*$ -module if  $\mathcal{A}$  is a proper  $H^*$ -algebra and that  $X$  is a semi-inner product  $C^*$ -module if  $\mathcal{A}$  is a  $C^*$ -algebra.

If, in addition,

- (v)  $\langle x, x \rangle = 0$  implies  $x = 0$ ,

then  $X$  is called an inner product module over  $\mathcal{A}$ . The absolute value of  $x \in X$  is defined as the square root of  $\langle x, x \rangle$  and it is denoted by  $|x|$ .

In this paper we obtain a version for the Schwarz inequality in semi-inner product modules over proper  $H^*$ -algebras and unital Banach  $*$ -algebras.

## 2. MAIN RESULTS

Let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra. A seminorm  $\gamma$  on  $\mathcal{A}$  is a real-valued function on  $\mathcal{A}$  such that for  $a, b \in \mathcal{A}$  and  $\lambda \in \mathbb{C}$ :  $\gamma(a) \geq 0$ ,  $\gamma(\lambda a) = |\lambda|\gamma(a)$ ,  $\gamma(a + b) \leq \gamma(a) + \gamma(b)$ . A seminorm  $\gamma$  on  $\mathcal{A}$  is called a  $C^*$ -seminorm if it satisfies the  $C^*$ -condition:  $\gamma(a^*a) = (\gamma(a))^2$  ( $a \in \mathcal{A}$ ). By Sebestyen's theorem [1, Theorem 38.1] every  $C^*$ -seminorm  $\gamma$  on a  $*$ -algebra  $\mathcal{A}$  is submultiplicative, i.e.,  $\gamma(ab) \leq \gamma(a)\gamma(b)$  ( $a, b \in \mathcal{A}$ ), and we know that  $\gamma(a) = \gamma(a^*)$ . For every  $a \in \mathcal{A}$ , the spectral radius of  $a$  is defined to be  $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)\}$ .

The Pták function  $\rho$  on  $*$ -algebra  $\mathcal{A}$  is defined to be  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ , where  $\rho(a) = (r(a^*a))^{1/2}$ . This function has important roles in Banach  $*$ -algebras, for example, on  $C^*$ -algebras,  $\rho$  is equal to the norm and on hermitian Banach  $*$ -algebras  $\rho$  is the greatest  $C^*$ -seminorm. By utilizing properties of the spectral radius and the Pták function, V. Pták [4] showed in 1970 that an elegant theory for Banach  $*$ -algebras arises from the inequality  $r(a) \leq \rho(a)$ .

This inequality characterizes hermitian (and symmetric) Banach  $*$ -algebras, and further characterizations of  $C^*$ -algebras follow as a result of Pták theory.

Let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra. We define  $\mathcal{A}^+$  by

$$\mathcal{A}^+ = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^* a_k : n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathcal{A} \text{ for } k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

and call the elements of  $\mathcal{A}^+$  positive.

The set  $\mathcal{A}^+$  of positive elements is obviously a convex cone (i.e., it is closed under convex combinations and multiplication by positive constants). Hence we call  $\mathcal{A}^+$  the positive

cone. By definition, zero belongs to  $\mathcal{A}^+$ . It is also clear that each positive element is hermitian.

We recall that a Banach  $*$ -algebra  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  is said to be an  $A^*$ -algebra provided there exists on  $\mathcal{A}$  a second norm  $|\cdot|$ , not necessarily complete, which is a  $C^*$ -norm. The second norm will be called an auxiliary norm.

**Definition 2.1.** Let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra. A semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module (or semi-inner product  $*$ -module) is a complex vector space which is also a right  $\mathcal{A}$ -module  $X$  with a sesquilinear semi-inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathcal{A}$ , fulfilling

$$\begin{aligned} \langle x, ya \rangle &= \langle x, y \rangle a & (\text{right linearity}) \\ \langle x, x \rangle &\in \mathcal{A}^+ & (\text{positivity}) \end{aligned}$$

for  $x, y \in X$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Furthermore, if  $X$  satisfies the strict positivity condition

$$x = 0 \quad \text{if} \quad \langle x, x \rangle = 0, \quad (\text{strict positivity})$$

then  $X$  is called an inner product  $\mathcal{A}$ -module (or inner product  $*$ -module).

Let  $\gamma$  be a seminorm or a positive linear functional on  $\mathcal{A}$  and  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ). If  $\Gamma$  is a seminorm on a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module  $X$ , then  $(X, \Gamma)$  is said to be a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

If  $\Gamma$  is a norm on an inner product  $\mathcal{A}$ -module  $X$ , then  $(X, \Gamma)$  is said to be a pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

A pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module which is complete with respect to its norm is called a Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

Since  $\langle x + y, x + y \rangle$  and  $\langle x + iy, x + iy \rangle$  are self adjoint, therefore we get the following Corollary.

**Corollary 2.2.** *If  $X$  is a semi-inner product  $*$ -module then the following symmetry condition holds:*

$$\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle \quad \text{for } x, y \in X. \quad (\text{symmetry})$$

**Example 2.3.** (a) Let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra and  $\gamma$  a positive linear functional or a  $C^*$ -seminorm on  $\mathcal{A}$ . It is known that  $(\mathcal{A}, \gamma)$  is a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module over itself with the inner product defined by  $\langle a, b \rangle := a^*b$ , in this case  $\Gamma = \gamma$ .

(b) Let  $\mathcal{A}$  be a hermitian Banach  $*$ -algebra and  $\rho$  be the Pták function on  $\mathcal{A}$ . If  $X$  is a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module and  $P(x) = (\rho(\langle x, x \rangle))^{1/2}$  ( $x \in X$ ), then  $(X, P)$  is a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

- (c) Let  $\mathcal{A}$  be a  $A^*$ -algebra and  $|\cdot|$  be the auxiliary norm on  $\mathcal{A}$ . If  $X$  is an inner product  $\mathcal{A}$ -module and  $|x| = |\langle x, x \rangle|^{1/2} (x \in X)$ , then  $(X, |\cdot|)$  is a pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.
- (d) Let  $\mathcal{A}$  be a  $H^*$ -algebra and  $X$  (a semi-inner product) an inner product  $\mathcal{A}$ -module. Since  $\text{tr}$  is a positive linear functional on  $\tau(\mathcal{A})$  and for every  $x \in X$  we have  $\text{tr}(\langle x, x \rangle) = \| |x| \|^2$  therefore  $(X, \| |\cdot| \|)$  is a (semi-Hilbert) pre-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

If  $X$  is a semi-inner product  $C^*$ -module, then the following Schwarz inequality holds:

$$(2.1) \quad \|\langle x, y \rangle\|^2 \leq \|\langle x, x \rangle\| \|\langle y, y \rangle\| \quad (x, y \in X).$$

(e.g. [5, Lemma 15.1.3]).

If  $X$  is a semi-inner product  $H^*$ -module, then there are two forms of the Schwarz inequality: for every  $x, y \in X$

$$(2.2) \quad \text{tr}(\langle x, y \rangle)^2 \leq \text{tr}(\langle x, x \rangle) \text{tr}(\langle y, y \rangle) \quad (\text{the weak Schwarz inequality}),$$

$$(2.3) \quad \tau(\langle x, y \rangle)^2 \leq \tau(\langle x, x \rangle) \tau(\langle y, y \rangle) \quad (\text{the strong Schwarz inequality}).$$

First Saworotnow proved the strong Schwarz inequality, but the direct proof of that for a semi-inner product  $H^*$ -module can be found in [3].

Now let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra,  $\varphi$  a positive linear functional on  $\mathcal{A}$  and  $X$  be a semi-inner  $\mathcal{A}$ -module. We can define a sesquilinear form on  $X \times X$  by  $\sigma(x, y) = \varphi(\langle x, y \rangle)$ ; the Schwarz inequality for  $\sigma$  implies that

$$(2.4) \quad |\varphi(\langle x, y \rangle)|^2 \leq \varphi(\langle x, x \rangle) \varphi(\langle y, y \rangle).$$

**Theorem 2.4.** *Let  $\mathcal{A}$  be a  $*$ -algebra and  $X$  be a semi-inner product  $\mathcal{A}$ -module. If  $\gamma$  is a  $C^*$ -seminorm on  $\mathcal{A}$  and  $\Gamma(x) = (\gamma(\langle x, x \rangle))^{1/2} \quad (x \in X)$  then the Schwarz inequality holds, that is*

$$(2.5) \quad (\gamma(\langle x, y \rangle))^2 \leq \gamma(\langle x, x \rangle) \gamma(\langle y, y \rangle).$$

Therefore  $\Gamma(x + y) \leq \Gamma(x) + \Gamma(y)$  for every  $x, y \in X$ . Thus  $\Gamma$  is a seminorm on  $X$  and  $(X, \Gamma)$  is a semi-Hilbert  $\mathcal{A}$ -module.

*Proof.* [2] □

**Remark 2.5.** Let  $\varphi$  be a positive linear functional on a unital Banach  $*$ -algebra  $\mathcal{A}$ ,  $X$  a semi-inner  $\mathcal{A}$ -module and  $x, y \in X$ . Put  $a := \langle x, x \rangle$ ,  $b := \langle y, y \rangle$ ,  $c := \langle x, y \rangle$ , and let  $\lambda$  be an arbitrary real number. Then

$$(2.6) \quad 0 \leq \langle x - y\lambda c^*, x - y\lambda c^* \rangle = a - 2\lambda cc^* + \lambda^2 cb c^*.$$

From (2.6) and [1, Proposition (22.7)] we have

$$\begin{aligned} 2\lambda cc^* &\leq a + \lambda^2 cbc^*, \quad \text{therefore} \quad 2\lambda\varphi(cc^*) \leq \varphi(a + \lambda^2 cbc^*) = \varphi(a) + \lambda^2\varphi(cbc^*) \\ &\leq \varphi(a) + \lambda^2\varphi(cc^*)r(b). \end{aligned}$$

Thus for all  $\lambda \in \mathbf{R}$  inequality  $0 \leq \lambda^2\varphi(cc^*)r(b) - 2\lambda\varphi(cc^*) + \varphi(a)$  holds. So the discriminant  $\varphi(cc^*)^2 - \varphi(cc^*)\varphi(a)r(b) = \varphi(cc^*)(\varphi(cc^*) - \varphi(a)r(b)) \leq 0$ . This implies that

$$(2.7) \quad \varphi(cc^*) \leq \varphi(a)r(b) \quad \text{or} \quad \varphi(\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle) \leq \varphi(\langle x, x \rangle)r(\langle y, y \rangle).$$

Now suppose that  $X$  is a semi-inner product  $C^*$ -module on  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  and  $a, b, c$  are as above. There is a state  $\varphi$  on  $\mathcal{A}$  such that  $\varphi(cc^*) = \|cc^*\| = \|c\|^2$ . Using inequality (2.7) we have

$$\|c\|^2 = \varphi(cc^*) \leq \varphi(a)r(b) \leq \|a\|\|b\|.$$

Therefore (2.7) is a refinement of Schwarz's inequality for semi-inner product  $C^*$ -modules [5, Lemma 15.1.3].

#### REFERENCES

1. R.S DORAN and V.A. BELFI, *Characterization of  $C^*$ -Algebras*, Dekker, New York, 1986.
2. A. G. GHAZANFARI, S. S. DRAGOMIR, *Schwarz and Grüss type inequalities for  $C^*$ -seminorms and positive linear functionals on Banach  $*$ -modules*, Linear Algebra and Appl. **434** (2011), 944-956.
3. L. MOLNÁR, *A note on the strong Schwarz inequality in Hilbert  $A$ -modules*, Publ. Math. Debrecen, **40** (1992), 323-325.
4. V. PTÁK, *On the spectral radius in Banach algebras with involution*, Bull. London Math. Soc., **2**(1970), 327-334.
5. N. E. WEGGE-OLSEN,  *$K$ -theory and  $C^*$ -algebras- A Friendly Approach*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LORESTAN UNIVERSITY, P. O. BOX 465, KHORAMABAD, IRAN.  
E-mail address: ghazanfari.amir@gmail.com



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## ON THE EIGENVALUES OF INTEGRAL EQUATIONS USING A MESHLESS METHOD BASED ON RADIAL BASIS FUNCTIONS

A. GOLBABAI<sup>1</sup>, E. MOHEBIANFAR<sup>2\*</sup>, H. RABIEI<sup>3</sup>

**ABSTRACT.** In this paper, a meshless method based on radial basis functions is used to find the eigenvalues of integral equations. The approach leads to a generalized eigenvalue system  $Ax = \lambda Bx$  which is solved numerically. To confirm the efficiency of the method, two examples are solved and it will be showed that the numerical results are in good agreement with exact solutions. The role of the shape parameter is investigated for these examples.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The eigenvalue problem of linear operators is of central importance for all vibration problems of physics and engineering. The vibrations of elastic structures, the flutter problems of aerodynamics, the stability problem of electric networks, the atomic and molecular vibrations of particle physics, are all aspects of the same fundamental problem. So, much thought has been devoted to the designing of some efficient methods by which the eigenvalues of a given linear operator can be found. That operator may be a linear Fredholm kernel function.

Consider the second kind integral equation of the form

$$(1.1) \quad f(x) = g(x) + \lambda(Hf)(x), \quad \Omega = [a, b],$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 45C05.

*Key words and phrases.* Generalized eigenvalue system; Integral equations; Radial basis functions; Shape parameter.

\* Speaker.

where

$$(Hf)(x) = \int_a^b k(x, t)f(t)dt.$$

In this equation the eigenvalue  $\lambda$  and the eigenfunction  $f$  are unknown, and the functions  $g$  and  $k$  are given. Equation (1.1) may have no non-zero eigenvalues, a finite number, or denumerably infinite number of eigenvalues. For example a Volterra kernel has no non-zero eigenvalues [1], or a Symmetric kernel that is nonnull (i.e. that is not identically zero) has at least a real eigenvalue [1, 2].

The method of radial basis functions (RBFs) is a well-known family of meshless methods [3, 4]. These functions have been used for solving various kinds of problems but rarely used for eigenvalue problems [5]. A radial basis function  $\Phi = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2)$  depends only on the distance between  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  and a fixed point,  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$ . This property implies that the radial basis functions  $\Phi$  are radially symmetric about  $\mathbf{x}^*$ . Some well-known RBFs are listed in Table 1 where  $r$  is the Euclidean distance between  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$  and any  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , i.e.  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2$  and  $c$  is a shape parameter.

**Table 1 :** Some well-known RBFs.

Name	$\phi(r)$
Cubic	$r^3$
Gaussian	$\exp(-r^2 c^2)$
Multiquadric (MQ)	$\sqrt{r^2 + c^2}$
Inverse multiquadric (IMQ)	$(\sqrt{r^2 + c^2})^{-1}$

## 2. MAIN RESULTS

In this section, we describe our method to find the approximate eigenvalues of Eq. (1.1). We know that if the eigenvalues of Eq. (1.1) exist then they are equal to the eigenvalues of the following equation

$$(2.1) \quad f(x) = \lambda(Hf)(x),$$

By substituting  $f(x)$  with its approximation  $\sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x)$  we have

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \alpha_j H\phi_j(x).$$

where  $\phi_j(x) = \phi(\|x - x_j\|_2)$  for  $j = 1, 2, \dots, N$  and  $\{x_j\}_{j=1}^N$  are called centers.

To obtain  $H\phi_j(x)$ , we can use different numerical integration methods. So,  $H\phi_j(x)$  can

be substituted by its approximation

$$(2.3) \quad H\phi_j(x) = \int_a^b k(x, t)\phi_j(t)dt \simeq \sum_{i=1}^N w_i k(x, t_i)\phi_j(t_i) = I(x, x_j),$$

where  $\{w_i\}_{i=1}^N$  and  $\{t_i\}_{i=1}^N$  are the wights and nodes of composite trapezoidal method. By substituting (2.3) in (2.2) we get

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x) = \lambda \sum_{j=1}^N \alpha_j I(x, x_j).$$

To obtain the unknown coefficients  $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ , we can use collocation method. So, Collocating (2.4) at the centers gives the following generalized eigenvalue system

$$(2.5) \quad A\alpha = \lambda B\alpha$$

where  $A = [\phi_j(x_i)]_{N \times N}$ ,  $B = [I(x_i, x_j)]_{N \times N}$  and  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$ .

To show the efficiency of the method, we present two examples and approximate their eigenvalues using multiquadric function. The numerical results are presented in Table 2 and Table 3. In these tables,  $\varepsilon_r$  denotes to the relative error between the exact and numerical solutions.

**Example 2.1.** Consider the integral equation [2]:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) f(t) dt,$$

with the exact eigenvalues  $\lambda_1 = 3/2$  and  $\lambda_2 = 5/2$ .

**Table 2 :** Numerical results for Examples 2.1 using  $c = 1$ .

Exact solution	$\lambda_1 = 1.5$		$\lambda_2 = 2.5$	
N	App. values	$\varepsilon_r$	App. values	$\varepsilon_r$
20	1.4917356	0.0055096	2.4547184	0.0181126
40	1.4980301	0.0013132	2.4890947	0.0043621
80	1.4995222	0.0003185	2.4973307	0.0010677
160	1.4998877	0.0000748	2.4993396	0.0002641
320	1.4999703	0.0000198	2.4998462	0.0000615

**Example 2.2.** Consider the integral equation [2]:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 e^x e^t f(t) dt,$$

with the exact eigenvalue  $\lambda = 2/(e^2 - 1) \simeq 0.3130353$ .

**Table 3 :** Numerical results for Examples 2.2 using  $c = 1$ .

Exact solution	$\lambda = 0.3130353$	
N	App. values	$\varepsilon_r$
20	0.3127464	0.0009228
40	0.3129667	0.0002191
80	0.3130186	0.0000533
160	0.3130312	0.0000130
320	0.3130343	0.0000031

One of the most important features of RBFs is the shape parameter ( $c$ ) which causes a tradeoff between error and stability. The choice of the optimal shape parameter has been a hot topic in the literature. So, the relation between relative error and shape parameter is shown in Figure 1 for examples 1.

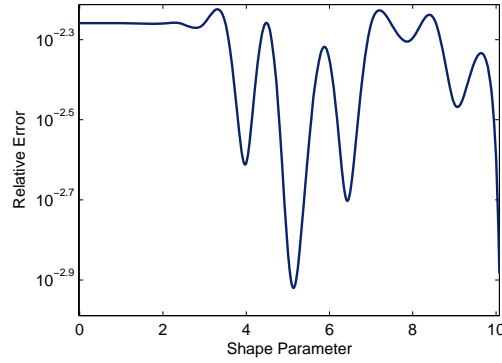


Fig. 1. Relative error between exact solution ( $\lambda_1 = 1.5$ ) and its approximation for various shape parameters ( $c$ ) using 20 uniform points.

## REFERENCES

- [1] L. M. Delves, J. L. Mohamed. Computational Methods for Integral Equations, Department of Statistics and Computational Mathematics, University of Liverpool, Cambridge University Press, (1985).
- [2] Ram P. Kanwal, Linear Integral Equations Theory and Technique, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, Academic Press (1971).
- [3] M. D. Buhmann, Radial Basis Functions: Theory and Implementations, University of Giessen, Cambridge University Press, (2004).
- [4] Holger Wendland, Scattered Data Approximation, Cambridge University Press (2005).
- [5] E. E. Hart, S. J. Cox, K. Djidjeli, V. O. Kubytskyi, Solving an eigenvalue problem with a periodic domain using radial basis functions, Engineering Analysis with Boundary Elements, 33 (2009), 258-262.

<sup>1</sup> SCHOOL OF MATHEMATICS, IRAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, P. O. BOX 16846-13114, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* golbabai@iust.ac.ir

<sup>2</sup> SCHOOL OF MATHEMATICS, IRAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, P. O. BOX 16846-13114, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* ehsanmath.iust@gmail.com

<sup>3</sup> SCHOOL OF MATHEMATICS, IRAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, P. O. BOX 16846-13114, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* hrabiei@mathdep.iust.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## COMPUTING MINIMAL POLYNOMIAL OF PARAMETRIC MATRICES

AMIR HASHEMI<sup>1</sup>, BENYAMIN M.-ALIZADEH<sup>2\*</sup> AND MAHDI DEHGHANI DARMIAN<sup>3</sup>

**ABSTRACT.** In this paper, we study the minimal polynomial of a parametric matrix. Using the concept of Gröbner systems for parametric ideals, we introduce the notion of a minimal polynomial system for a parametric matrix, i.e. we decompose the space of parameters into a finite set of cells, and for each cell we give the corresponding minimal polynomial of the matrix. We also present an algorithm for computing this system.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

It is well known from the Cayley Hamilton theorem that any matrix over real numbers satisfies its characteristic equation. i.e., for any matrix  $A_{n \times n}$  over real numbers, if  $f(s) = \det(sI_r - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_n$ , then  $f(A) = 0$ . There is another polynomial known as the minimal polynomial, say  $m(s)$ , such that  $m(A) = 0$ . This is the least degree monic polynomial which satisfies the equation  $m(A) = 0$ . The reason behind the interest in computing the minimal polynomial of a matrix is its applications in solving a system of polynomial equations, polynomial factorization, cryptography, effective Galois theory, etc. A classical approach to compute the minimal polynomial of a matrix  $A_{n \times n}$  is to determine the first matrix  $A^k$  for which  $\{I, A, A^2, \dots, A^k\}$  is linearly dependent. Let  $k$  be the smallest positive integer such that  $A^k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i$ , then the minimal polynomial of  $A$  is  $m(s) = s^k - \alpha_{k-1}s^{k-1} - \dots - \alpha_1s - \alpha_0$ . The Gram-Schmidt orthogonalization

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 13p10; Secondary 00X00, 00X00.

*Key words and phrases.* Minimal Polynomial, Parametric Matrix, Minimal Polynomial System, Gröbner System.

\* Speaker.

procedure with the standard inner product is the perfect theoretical tool for determining  $k$  and the  $\alpha_i$ 's (see [3], page 643).

In this paper we are interested only in parametric matrices. Many problems in engineering and science can be modeled by appropriate operations on parametric matrices, and have to be repeatedly solved for different values of parameters. In this direction, the minimal polynomial of a parametric matrix may have a wide range of applications. For example, we can solve the problem of diagonalizability of a parametric endomorphism (on a finitedimensional vector space) using the minimal polynomial of the corresponding matrix (which is a parametric matrix): It is diagonalizable if and only if its minimal polynomial factors completely (over the base field) into distinct linear factors. But, the minimal polynomial of a parametric matrix has not, to our knowledge been studied in the literature. The following example shows that the traditional minimal polynomial may not be used for such a matrix.

**Example 1.1.** Let  $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & c & a-1 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$  where  $a, b$  and  $c$  are parameters

. By computing the minimal polynomial of  $A$  by the traditional way, the result may be  $m(s) = s^3 + (1 - 2a - b)s^2 + (a^2 + 2ab - a - b)s - a^2b + ab$  which is of degree equal 3 for each evaluation of parameters. But in fact, if we substitute  $a = 1, b = 0$  and  $c = 4$  in  $A$ , the real minimal polynomial is  $m(s) = s^2 - s$  which is of degree 2.

In fact, one may be interested in finding for what parameters values, the minimal polynomial of the abovematrix is of degree 2 and for what values it is of degree 3; more specially, one may be also interested in finding out the structure of the solution space. For this purpose, we introduce the notion of minimal polynomial system for a parametric matrix, and we present an algorithm for computing it. In doing so, we use the idea of Gröbner systems.

We remark first the concept of Gröbner bases and for more details we refer to [1]. Let  $R = \mathbb{K}[x]$  be the polynomial ring over the field  $\mathbb{K}$  on the variables  $x = x_0, \dots, x_n$ .

Below, we denote a monomial  $x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n} \in R$  by  $x^\alpha$  where  $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^{n+1}$  is a sequence of non-negative integers. A monomial ordering on  $R$  is a total order  $\prec$  on the set of all monomials which has the following two properties:

- 1) It is multiplicative; i.e.,  $x^\alpha \prec x^\beta$  implies  $x^{\alpha+\gamma} \prec x^{\beta+\gamma}$  for all  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^{n+1}$ .
- 2) The constant monomial is the smallest; i.e.,  $1 \prec x^\alpha$  for all  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ .

A classic example of a monomial ordering is the lexicographical monomial ordering, denoted by  $\prec_{lex}$ . For two monomials  $x^\alpha, x^\beta \in R$ , we have  $x^\alpha \prec_{lex} x^\beta$  if the left most

non-zero entry of  $\alpha - \beta$  is positive. Let  $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  be the ideal of  $R$  generated by the polynomials  $f_1, \dots, f_k$ . Also let  $f \in R$  and  $\prec$  be a monomial ordering on  $R$ . The leading monomial of  $f$  is the greatest monomial (with respect to  $\prec$ ) appearing in  $f$ , and we denote it by  $LM(f)$ . The leading monomial ideal of  $I$  is defined to be  $LM(I) = \langle LM(f) | f \in I \rangle$ . A finite subset  $\{g_1, \dots, g_k\} \subset I$  is called a Gröbner basis for  $I$  w.r.t.  $\prec$  if  $LM(I) = \langle LM(g_1), \dots, LM(g_k) \rangle$ .

Now consider  $S = \mathbb{K}[a, x]$  where  $\mathbb{K}$  is an arbitrary field,  $a = a_1, \dots, a_m$  is a sequence of parameters and  $x = x_0, \dots, x_n$  is a sequence of variables. Let  $\prec_x$  be a monomial ordering on the variables and  $\prec_a$  be a monomial ordering involving the parameters. The compatible elimination product of  $\prec_x$  and  $\prec_a$  is an ordering on  $S$ , denoted by  $\prec_{x,a}$  which is defined as follows: For all  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$  and  $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^m$ ,  $x^\alpha a^\gamma \prec_{x,a} x^\beta a^\delta \iff x^\alpha \prec_x x^\beta$  or  $(x^\alpha = x^\beta \text{ and } a^\gamma \prec_a a^\delta)$ .

**Definition 1.2.** Let  $F \subset S = \mathbb{K}[a, x]$  be a finite set of parametric polynomials. Let also  $G = \{(G_i, N_i, W_i)\}_{i=1}^\ell$  be a finite triple set where  $N_i, W_i \subset \mathbb{K}[a]$  and  $G_i \subset S$  are finite for  $i = 1, \dots, \ell$ . The set  $G$  is called a Gröbner system for  $\langle F \rangle$  w.r.t.  $\prec_{a,x}$  if for any  $i$  and for any homomorphis  $\sigma : \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}'$ , where  $\mathbb{K}'$  is an extension of  $\mathbb{K}$  we have

- $\sigma(G_i) \subset \mathbb{K}'[x]$  is a Gröbner basis for  $\sigma(\langle F \rangle) \subset \mathbb{K}'[x]$  w.r.t.  $\prec_x$
- $\sigma(p) = 0 \ \forall p \in N_i \subset K[a]$
- $\sigma(q) \neq 0 \ \forall q \in W_i \subset K[a]$

We call  $\{(G_i, N_i, W_i)\}_{i=1}^\ell$  a reduced Gröbner system, if all  $G_i$ 's are reduced Gröbner basis, with corresponding conditions.

Montes in [4] has proposed DISPGB; an efficient algorithm to compute a Gröbner system of a parametric polynomial ideal. We have implemented this algorithm in MAPLE 12.

## 2. MAIN RESULTS

In this section we introduce the concept of minimal polynomial system, like the Gröbner system and we describe an algorithm to compute it. Then we use this concept to compute the minimal polynomial of parametric matrices.

**Definition 2.1.** Let  $A$  be a matrixs over  $\mathbb{K}[a]$ , where  $\mathbb{K}$  is a field and  $a = a_1, \dots, a_n$  is a sequence of parameters. Let also  $s$  be a variable and  $M = \{(m_i, N_i, W_i)\}_{i=1}^\ell$  be a finite triple set where  $N_i, W_i \subset \mathbb{K}[a]$  and  $m_i \in \mathbb{K}[a, s]$  are some polynomials for  $i = 1, \dots, \ell$ . The set  $M$  is called a minimal polynomial system for  $A$  if for any  $i$  and for any homomorphis  $\sigma : \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}'$ , where  $\mathbb{K}'$  is an extension of  $\mathbb{K}$  we have

- $\sigma(m_i) \subset \mathbb{K}[x]$  is the minimal polynomial of  $\sigma(A)$
- $\sigma(p) = 0 \ \forall p \in N_i \subset \mathbb{K}[a]$
- $\sigma(q) \neq 0 \ \forall q \in W_i \subset \mathbb{K}[a]$

We call  $N_i$  and  $W_i$ , the null and non-null conditions respectively.

**Example 2.2.** Let  $A$  be the matrix of Example 1.1. The following triples show a minimal polynomial system for this matrix. Let us consider the element  $(s^2 - s, \{c - 4, b, a - 1\}, \{\})$  of this system. Thus, for each values of  $a, b, c \in \mathbb{K}$  satisfying the null conditions  $\{c - 4, b, a - 1\}$  and the non-null conditions (which is empty), the minimal polynomial of  $A$  is equal to  $s^2 - s$ . For instance, the specialization  $a = 1, b = 0$  and  $c = 4$  satisfies the null conditions, and therefore  $s^2 - s$  is the minimal polynomial of  $A$  for this specialization.

$$\begin{aligned}
& (x^3 + (1 - b - 2a)x^2 + (-a + a^2 - b + 2ab)x - a^2b + ab, \{\}, \{b, 2b + 1, b + 1, a - b - 1\}) \\
& (x^3 + (2 - 2a)x^2 + (a^2 - 3a + 1)x - a + a^2, \{b + 1\}, \{a, -1 - a + a^2, a - 1\}) \\
& (x^3 - x, \{b + 1, a - 1\}, \{\}) \\
& (x^3 - \frac{2}{a}x^2 - \frac{2}{a}x + 1, \{b + 1, -1 - a + a^2\}, \{a\}) \\
& (x^3 + (-2a + 1)x^2 + (-a + a^2)x, \{b\}, \{a - 1, a^2 - 3a + 1\}) \\
& (x^3 - \frac{3a-1}{a-1}x^2 + \frac{3a-1}{a-1}x, \{b, a^2 - 3a + 1\}, \{a - 1\}) \\
& (x^3 + (-2a + \frac{3}{2})x^2 + (a^2 - 2a + \frac{1}{2})x - (\frac{1}{2})a + (\frac{1}{2})a^2, \{2b + 1\}, \{2a - 1, 1 - 4a + 2a^2, 2a - 3\}) \\
& (x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}, \{2b + 1, 2a - 3\}, \{\}) \\
& (x^3 + \frac{1}{4} - \frac{12a-2}{2a-1}x^2 + \frac{1}{4}\frac{4a-1}{2a-1}, \{2b + 1, 1 - 4a + 2a^2\}, \{2a - 1\}) \\
& (x^3 + (-3b - 1)x^2 + (3b^2 + 2b)x - b^3 - b^2, \{a - b - 1\}, \{b, b + 1, 2b + 1, c - 4\}) \\
& (x^3 + 2x^2 + x, \{b + 1, a\}, \{c - 4\}) \\
& (x^3 - x^2, \{b, a - 1\}, \{c - 4\}) \\
& (x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}, \{2b + 1, 2a - 1\}, \{c - 4\}) \\
& (x^2 + (-1 - 2b)x + b + b^2, \{c - 4, a - b - 1\}, \{b, b + 1, 2b + 1\}) \\
& (x^2 + x, \{c - 4, b + 1, a\}, \{\}) \\
& (x^2 - x, \{c - 4, b, a - 1\}, \{\}) \\
& (x^2 - \frac{1}{4}, \{c - 4, 2b + 1, 2a - 1\}, \{\})
\end{aligned}$$

Now a natural question remains yet that how one can compute a minimal polynomial system for a parametric matrix. We answer this question by the following theorem. Based on this theorem, we present MINPOLSYS algorithm to compute a minimal polynomial system for a parametric matrix.

**Theorem 2.3.** *Let  $A$  be an  $n \times n$  parametric matrix over  $\mathbb{K}[a]$  where  $\mathbb{K}$  is a field and  $a = a_1, \dots, a_m$  be a sequence of parameters. Let  $x = x_0, \dots, x_n$  be a sequence of variables and  $f(s) = x_n s_n + x_{n-1} s_{n-1} + \dots + x_0$ . Furthermore, let  $F \subset \mathbb{K}[a, x]$  be a set of  $n^2$  equations*

derived from  $f(A) = 0$  and  $G = \{(G_i, N_i, W_i)\}_{i=1}^\ell$  be a Gröbner system for  $\langle F \rangle$  w.r.t.  $\prec_{a,x}$  with  $a_m \prec_{lex} \cdots \prec_{lex} a_1$  and  $x_n \prec_{lex} \cdots \prec_{lex} x_0$ . For any  $i$ , if  $d_i = |G_i|$  then substituting  $x_{d_i} = 1$  and  $x_{d_i+1} = \cdots = x_n = 0$  in  $G_i$  and substituting the solution of the equations corresponding to this new polynomials in  $f(s)|_{x_{d_i}=1, x_{d_i+1}=\cdots=x_n=0}$ , we get a polynomial  $m_i(s)$  which is the minimal polynomial of  $A$  corresponding to the condition sets  $N_i$  and  $W_i$ .

---

Algorithm 1 MINPOLYSYS

---

**REQUIRE**  $A_{n \times n}$  a parametric matrix over  $\mathbb{K}[a]$

**ENSURE** A minimal polynomial system of  $A$

$I := \langle \sum_{k=0}^n x_k A^k[i, j] \mid i, j = 1, \dots, n \rangle$

$G :=$  The reduced Gröbner system of  $I$  w.r.t.  $\prec_{a,x}$

minpolysys :=  $\{\}$

**FOR**  $\{G_i, N_i, W_i\} \in G$  **DO**

$d := |G_i|$

$G'_i := G_i|_{x_d=1, x_{d+1}=\cdots=x_n=0}$

Let  $(x_0, \dots, x_{d-1})$  be the unique solution of the system corresponding to  $G'_i$

$m := s^d + \sum_{i=0}^{d-1} x_i s^i$

minpolysys := minpolysys  $\cup \{m, N_i, W_i\}$

**END FOR**

**RETURN** minpolysys

---

REFERENCES

1. T. BECKER AND V. WEISPFENNING, *Gröbner bases, a computational approach to commutative Algebra*, Springer, Verlag Newyork, Inc, 1993.
2. M. MANUBENS AND A. MONTES, Minimal canonical comprehensive Gröbner systems, *J. Symbolic Comput.*, **44/5**, pages 463-478, 2009.
3. C. D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
4. A. MONTES, A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters, *J. Symbolic Comput.*, **33/1-2**, pages 183-208, 2002.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, ISFAHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, ISFAHAN, 84156-83111, IRAN.

*E-mail address:* <sup>1</sup>amir.hashemi@cc.iut.ac.ir

*E-mail address:* <sup>2</sup>b.alizadeh@math.iut.ac.ir

*E-mail address:* <sup>3</sup>mahdi\_math\_63@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## WHEN IS THE NUMERICAL RANGE OF A NILPOTENT MATRIX CIRCULAR?

M. T. HEYDARI<sup>1</sup> AND F. LOTFI<sup>2\*</sup>

**ABSTRACT.** The problem formulated in the title is investigated. The case of nilpotent matrices of size at most 4 allows a unitary treatment. The numerical range of a nilpotent matrix  $M$  of size at most 4 is circular if and only if the traces  $\text{tr} M^* M^2$  and  $\text{tr} M^* M^3$  are null. The situation becomes more complicated as soon as the size is 5. The conditions under which a  $5 \times 5$  nilpotent matrix has circular numerical range are thoroughly discussed.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\varphi$  be a holomorphic self-map of the unit disc  $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . The function  $\varphi$  induces the *composition operator*  $C_\varphi$ , defined on the space of holomorphic functions on  $\mathbb{U}$  by  $C_\varphi f = f \circ \varphi$ . The restriction of  $C_\varphi$  to various Banach spaces of holomorphic functions on  $\mathbb{U}$  has been an active subject of research for more than three decades and it will continue to be for decades to come (see [5], [6] and [1]). Let  $H^2$  denote the *Hardy space* of analytic functions on the open unit disc with square summable Taylor coefficients. In recent years the study of composition operators on the the Hardy space has received considerable attention.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A12; Secondary 46K10, 15A42, 14H50.  
*Key words and phrases.* Nilpotent matrix; Numerical range

\* Speaker.

## 2. MAIN RESULTS

An elliptic automorphism  $\varphi$  of  $\mathbb{U}$  that does not fix the origin must have the form  $\varphi = \alpha_p \circ \rho_w \circ \alpha_p$ , for some fixed  $p \in \mathbb{U} - \{0\}$  and  $w \in \partial\mathbb{U}$ . If we wish to show this dependence of  $\varphi$  on  $p$ , we will denote the elliptic automorphism  $\alpha_p \circ \rho_w \circ \alpha_p$  by  $\varphi_p$ .

For each nonnegative integer  $n$  let

$$b_n(z) := \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-pz} (\alpha_p(z))^n,$$

be the Guyker basis of the Hardy space  $H^2$  (see [2] for more detail).

We are going to find the matrix representation of the composition operator  $C_{\varphi_p}$  with respect to  $\{b_n\}$ . By a simple computation, it follows that

$$(C_{\varphi_p} b_n)(z) = \frac{w^n(1-wp^2-p(1-w)z)}{1-p^2} b_n(z).$$

Hence, for nonnegative integer  $n$  and  $m$ ,

$$\langle C_{\varphi_p} b_n, b_m \rangle = \frac{w^n(1-wp^2)}{1-p^2} \langle b_n, b_m \rangle - \frac{p(1-w)w^n}{1-p^2} \langle zb_n, b_m \rangle.$$

In [2] Guyker established that the matrix representation for  $C_{\varphi_p}$  relative to  $\{b_n\}$  is lower triangular with diagonal entries  $[1, \varphi_p'(p), \varphi_p'(p)^2, \dots]$ . So we need to determine matrix entries on and below the matrix diagonal. If  $n = m$ ,  $\langle zb_m, b_m \rangle = p$ .

Now let  $m > n$ . We have

$$\begin{aligned} \langle (1-pz)b_{n+1}, b_m \rangle &= \langle (1-pz) \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-pz} (\alpha_p(z))^{n+1}, b_m \rangle \\ &= \langle (p-z)b_n, b_m \rangle \\ &= p \langle b_n, b_m \rangle - \langle zb_n, b_m \rangle. \end{aligned}$$

Hence we have the following recursion formula

$$\langle zb_n, b_m \rangle = p \langle b_n, b_m \rangle + p \langle zb_{n+1}, b_m \rangle - \langle b_{n+1}, b_m \rangle.$$

By solving this recursion formula we have

$$\begin{aligned} \langle zb_n, b_m \rangle &= (p)^{m-n-1} (p \langle zb_m, b_m \rangle - 1) \\ &= (p^2 - 1) p^{m-n-1}, \end{aligned}$$

and hence

$$\langle C_{\varphi_p} b_n, b_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } m < n; \\ w^n, & \text{if } m = n; \\ w^n(1-w)p^{m-n}, & \text{if } m > n. \end{cases}$$

Therefore the matrix representation of the composition operator  $C_{\varphi_p}$  with respect to the Guyker basis  $\{b_n\}$  of  $H^2$  is

$$C_{\varphi_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p & w & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p^2 & w(1-w)p & w^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p^3 & w(1-w)p^2 & w^2(1-w)p & w^3 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p^4 & w(1-w)p^3 & w^2(1-w)p^2 & w^3(1-w)p & w^4 & 0 & \dots \\ (1-w)p^5 & w(1-w)p^4 & w^2(1-w)p^3 & w^3(1-w)p^2 & w^4(1-w)p & w^5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Hence the  $(i, j)$  element of this matrix is:

$$a_{i,j}^{(p)} := \begin{cases} w^{j-1} & \text{if } i = j; \\ w^{j-1}(1-w)p^{i-j} & \text{if } i > j; \\ 0 & \text{if } i < j. \end{cases}$$

where the indices  $i, j$  vary over the positive integers.

#### REFERENCES

1. C. C. Cowen and B. D. Maccluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
2. J. Guyker, on reducing subspaces of composition operators, , Acta Sci. Math. (Szeged) 53. (1989), 369376.
3. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
4. W. Rudin, *Real and complex analysis*. Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
5. J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, 1993.
6. R. K. Singh and J. S. Manhas, *Composition operators on function spaces*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLLEGE OF SCIENCES, YASOUJ UNIVERSITY, YASOUJ, 75914, IRAN  
E-mail address: heydari@mail.yu.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## MATRIX REPRESENTATION OF A COMPOSITION OPERATOR ON HARDY SPACE

M. T. HEYDARI\*

ABSTRACT. Let  $\varphi$  be an elliptic automorphism of the unit disc  $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . The function  $\varphi$  induces the *composition operator*  $C_\varphi$ , defined on hardy space  $H^2$  by  $C_\varphi f = f \circ \varphi$ . Then we can find an orthogonal basis such that the matrix representation  $C_\varphi$  is lower triangular in this basis.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\varphi$  be a holomorphic self-map of the unit disc  $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . The function  $\varphi$  induces the *composition operator*  $C_\varphi$ , defined on the space of holomorphic functions on  $\mathbb{U}$  by  $C_\varphi f = f \circ \varphi$ . The restriction of  $C_\varphi$  to various Banach spaces of holomorphic functions on  $\mathbb{U}$  has been an active subject of research for more than three decades and it will continue to be for decades to come (see [5], [6] and [1]). Let  $H^2$  denote the *Hardy space* of analytic functions on the open unit disc with square summable Taylor coefficients. In recent years the study of composition operators on the the Hardy space has received considerable attention.

### 2. MAIN RESULTS

An elliptic automorphism  $\varphi$  of  $\mathbb{U}$  that does not fix the origin must have the form  $\varphi = \alpha_p \circ \rho_w \circ \alpha_p$ , for some fixed  $p \in \mathbb{U} - \{0\}$  and  $w \in \partial\mathbb{U}$ . If we wish to show this dependence of  $\varphi$  on  $p$ , we will denote the elliptic automorphism  $\alpha_p \circ \rho_w \circ \alpha_p$  by  $\varphi_p$ . In particular

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47B38; Secondary 47B06.

*Key words and phrases*. composition operator; elliptic automorphism; Guyker basis

\* Speaker.

we assume that  $0 < p < 1$ .

For each nonnegative integer  $n$  let

$$b_n(z) := \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-pz} (\alpha_p(z))^n,$$

be the Guyker basis of the Hardy space  $H^2$  (see [2] for more detail).

We are going to find the matrix representation of the composition operator  $C_{\varphi_p}$  with respect to  $\{b_n\}$ . By a simple computation, it follows that

$$(C_{\varphi_p} b_n)(z) = \frac{w^n(1-wp^2-p(1-w)z)}{1-p^2} b_n(z).$$

Hence, for nonnegative integer  $n$  and  $m$ ,

$$\langle C_{\varphi_p} b_n, b_m \rangle = \frac{w^n(1-wp^2)}{1-p^2} \langle b_n, b_m \rangle - \frac{p(1-w)w^n}{1-p^2} \langle zb_n, b_m \rangle.$$

In [2] Guyker established that the matrix representation for  $C_{\varphi_p}$  relative to  $\{b_n\}$  is lower triangular with diagonal entries  $[1, \varphi_p'(p), \varphi_p'(p)^2, \dots]$ . So we need to determine matrix entries on and below the matrix diagonal. If  $n = m$ ,  $\langle zb_n, b_m \rangle = p$ .

Now let  $m > n$ . We have

$$\begin{aligned} \langle (1-pz)b_{n+1}, b_m \rangle &= \langle (1-pz) \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-pz} (\alpha_p(z))^{n+1}, b_m \rangle \\ &= \langle (p-z)b_n, b_m \rangle \\ &= p \langle b_n, b_m \rangle - \langle zb_n, b_m \rangle. \end{aligned}$$

Hence we have the following recursion formula

$$\langle zb_n, b_m \rangle = p \langle b_n, b_m \rangle + p \langle zb_{n+1}, b_m \rangle - \langle b_{n+1}, b_m \rangle.$$

By solving this recursion formula we have

$$\begin{aligned} \langle zb_n, b_m \rangle &= (p)^{m-n-1} (p \langle zb_m, b_m \rangle - 1) \\ &= (p^2 - 1) p^{m-n-1}, \end{aligned}$$

and hence

$$\langle C_{\varphi_p} b_n, b_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } m < n; \\ w^n, & \text{if } m = n; \\ w^n(1-w)p^{m-n}, & \text{if } m > n. \end{cases}$$

Therefore the matrix representation of the composition operator  $C_{\varphi_p}$  with respect to the Guyker basis  $\{b_n\}$  of  $H^2$  is

$$C_{\varphi_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p & w & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p^2 & w(1-w)p & w^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p^3 & w(1-w)p^2 & w^2(1-w)p & w^3 & 0 & 0 & \dots \\ (1-w)p^4 & w(1-w)p^3 & w^2(1-w)p^2 & w^3(1-w)p & w^4 & 0 & \dots \\ (1-w)p^5 & w(1-w)p^4 & w^2(1-w)p^3 & w^3(1-w)p^2 & w^4(1-w)p & w^5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Hence the  $(i, j)$  element of this matrix is:

$$a_{i,j} := \begin{cases} w^{j-1} & \text{if } i = j; \\ w^{j-1}(1-w)p^{i-j} & \text{if } i > j; \\ 0 & \text{if } i < j. \end{cases}$$

where the indices  $i, j$  vary over the positive integers.

#### REFERENCES

1. C. C. COWEN AND B. D. MACCLUER, *Composition operators on spaces of analytic functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
2. J. GUYKER, *on reducing subspaces of composition operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 53. (1989), 369376.
3. R. A. HORN, C. R. JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
4. W. RUDIN, *Real and complex analysis*. Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
5. J. H. SHAPIRO, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, 1993.
6. R. K. SINGH AND J. S. MANHAS, *Composition operators on function spaces*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLLEGE OF SCIENCES, YASOUJ UNIVERSITY, YASOUJ, 75914, IRAN  
E-mail address: heydari@mail.yu.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## CONDITIONAL MULTIPLICATION OPERATORS ON $L^2(\Sigma)$

M. R. JABBARZADEH

**ABSTRACT.** In this paper we provide a necessary and sufficient condition for the conditional multiplication operators to have closed range. Moreover, spectrum of these type operators on  $L^2(\Sigma)$  investigated in the sense of conditional expectation operators and matrix theory respectively.

### 1. Introduction and Preliminaries

Let  $(X, \Sigma, \mu)$  be a complete  $\sigma$ -finite measure space. For any complete  $\sigma$ -finite subalgebra  $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$  and  $1 \leq p \leq \infty$ , the  $L^p$ -space  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$  is abbreviated to  $L^p(\mathcal{A})$  where  $\mu|_{\mathcal{A}}$  is the restriction of  $\mu$  to  $\mathcal{A}$ . Also its norm is denoted by  $\|\cdot\|_p$  on which  $L^p(\mathcal{A})$  is a Banach subspace of  $L^p(\Sigma)$ . Given a  $B \in \Sigma$ . We shall abbreviate the space  $L^p(B, \Sigma_B, \mu|_{\Sigma_B})$  to  $L^p(B)$  on which  $\Sigma_B = \{B \cap C : C \in \Sigma\}$ .

We denote the linear space of all complex-valued  $\Sigma$ -measurable functions on  $X$  by  $L^0(\Sigma)$ . The support of a measurable function  $f$  is defined by  $\sigma(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ . Equalities and inequalities between measurable functions and also equality between sets can be interpreted as the almost everywhere sense, and the set of measure zero, respectively. For each nonnegative  $f \in L^0(\Sigma)$  or  $f \in L^p(\Sigma)$ , by the Radon-Nikodym theorem, there exists a unique measurable function  $E(f)$  with the following conditions:

- (i)  $E(f)$  is  $\mathcal{A}$ -measurable and integrable,

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47B20; Secondary 47B38.

*Key words and phrases.* Conditional multiplication operator, conditional expectation, closed range, spectrum, compact.

(ii) If  $F$  is any  $\mathcal{A}$ -measurable set for which  $\int_F f d\mu$  exists, we have the functional relation

$$\int_F f d\mu = \int_F E(f) d\mu.$$

Now associated with every complete  $\sigma$ -finite subalgebra  $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ , the mapping  $E : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\mathcal{A})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , uniquely defined by the assignment  $f \mapsto E(f)$ , is called the *conditional expectation operator with respect to  $\mathcal{A}$* . The mapping  $E$  is a linear operator and, in particular, it is a contraction operator. In case  $p = 2$ , it is the orthogonal projection of  $L^2(\Sigma)$  onto  $L^2(\mathcal{A})$ . The role of this operator is important in this note and we list here some of its useful properties:

- If  $f$  is an  $\mathcal{A}$ -measurable function, then  $E(fg) = fE(g)$ .
- $|E(f)|^p \leq E(|f|^p)$ .
- If  $f \geq 0$  then  $E(f) \geq 0$ ; if  $f \leq 0$  then  $E(f) \leq 0$ .
- $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$ , for each  $f \in L^p(\Sigma)$ .
- $E(|f|^2) = |E(f)|^2$  if and only if  $f \in L^0(\mathcal{A})$ .

For more details on the properties of  $E$  see [4].

Recall that an  $\mathcal{A}$ -atom of the measure  $\mu$  is an element  $A \in \mathcal{A}$  with  $\mu(A) > 0$  such that for each  $F \in \Sigma$ , if  $F \subseteq A$  then either  $\mu(F) = 0$  or  $\mu(F) = \mu(A)$ . A measure space  $(X, \Sigma, \mu)$  with no atoms is called non-atomic measure space. It is well-known fact that every  $\sigma$ -finite measure space  $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$  can be partitioned uniquely as  $X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup B$ , where  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  is a countable collection of pairwise disjoint  $\mathcal{A}$ -atoms and  $B$ , being disjoint from each  $A_n$ , is non-atomic (see [6]).

Let  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}$  be Hilbert spaces. The set of all bounded linear operators from  $\mathcal{K}$  into  $\mathcal{H}$  is denoted by  $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ . For  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ , the null-space and the range of  $A$  are denoted by  $\mathcal{N}(A)$  and  $\mathcal{R}(A)$ , respectively. If  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , the spectrum of  $A$  is denoted by  $\text{Sp}(A)$ .

Let  $u \in L^0(\Sigma) \cap \mathcal{D}(E)$ , where  $\mathcal{D}(E)$  denotes the domain of  $E$ . The mapping  $T_u : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\Sigma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , defined by

$$T_u(f) = uE(f) + fE(u) - E(u)E(f)$$

is called the *conditional multiplication operator* induced by a weight function  $u$ . Note that if  $u$  is an  $\mathcal{A}$ -measurable function or  $\mathcal{A} = \Sigma$ , i.e.  $E = I$ , then  $T_u = M_u$ , where  $M_u$  is a multiplication operator. These operators were initially introduced in [3] by A. Lambert and T. G. Lucas where, some operator properties of them are also studied in [2].

## 2. Characterization of Conditional multiplication operators

In this section we present a necessary and sufficient condition for the operator  $T_u : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\Sigma)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , for which it has closed range. Also we investigate under what conditions the operator  $T_u$  on the Hilbert space  $L^2(\Sigma)$  is compact. Moreover the spectrum of  $T_u$  on  $L^2(\Sigma)$  is studied.

Although the following theorem is stated in [3], however, we rewrite them by the language of operator matrices .

**Theorem 2.1.** *An operator  $T_u : L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$  is bounded if and only if  $E(|u|^2) \in L^\infty(\mathcal{A})$ .*

**Theorem 2.2.** *Let  $T_u$  be a bounded linear operator on  $L^2(\Sigma)$ . Then  $T_u$*

*(a) is normal if and only if  $u \in L^\infty(\mathcal{A})$ .*

*(b) is self-adjoint if and only if  $u \in L^\infty(\mathcal{A})$  is real-valued.*

**Proof.** (a) It is not difficult to verify that

$$(2.1) \quad [T_u^* T_u] = \begin{bmatrix} M_{|E(u)|^2} + EM_{|u-E(u)|^2} & EM_{(\bar{u}-\overline{E(u)})E(u)} \\ M_{\overline{E(u)}(u-E(u))} & M_{|E(u)|^2} \end{bmatrix}$$

and

$$(2.2) \quad [T_u T_u^*] = \begin{bmatrix} M_{|E(u)|^2} & M_{E(u)} EM_{\bar{u}-\overline{E(u)}} \\ M_{\overline{E(u)}(u-E(u))} & M_{u-E(u)} EM_{\bar{u}-\overline{E(u)}} + M_{|E(u)|^2} \end{bmatrix}.$$

At first glance it can be readily inferred that the matrices (2.1) and (2.2) are equal (entrywise equality) whenever  $u = E(u)$ , i.e.,  $u \in L^0(\mathcal{A})$ . Therefore, by Theorem 2.1 we get that  $\|u\|_\infty \leq \sqrt{\|E(|u|^2)\|_\infty} < \infty$ . Hence,  $T_u$  is normal if and only if  $u \in L^\infty(\mathcal{A})$ .

(b) By the equality of the  $T_u$  and  $T_u^*$  matrices, we conclude that  $u \in L^\infty(\mathcal{A})$ , and  $u$  is real-valued. Hence the proof is complete.

**Lemma 2.3.** *Let  $T_u : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\Sigma)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , be a bounded linear operator. Then  $\mathcal{N}(T_u) = L^p(X \setminus S)$ , where  $S = \sigma(E(u))$ .*

**Proof.** For given non-zero  $f \in L^p(\Sigma)$ , let  $f \in \mathcal{N}(T_u)$ . Then  $uE(f) + fE(u) - E(u)E(f) = 0$ . Taking the conditional expectation  $E$  of both sides equation, gives

$E(u)E(f) = 0$ . Thus  $S \cap \sigma(E(f)) = \emptyset$ . But  $\sigma(f) \subseteq \sigma(E(f))$ , therefore  $S \cap \sigma(f) = \emptyset$  which implies that  $f \notin L^p(S)$ . Consequently,  $f \in L^p(X \setminus S)$ , since  $L^p(\Sigma) = L^p(S) \oplus L^p(X \setminus S)$ .

Conversely, let  $f \in L^p(X \setminus S)$ . Then  $fE(u) = 0$  which implies that  $E(u)E(f) = 0$ . Thus  $\int_{\sigma(u)} |E(f)|^p d\mu \leq \int_S |E(f)|^p d\mu = 0$ , which yields  $uE(f) = 0$ . So that  $T_u f = 0$  i.e.,  $f \in \mathcal{N}(T_u)$ .

**Theorem 2.4.** *Suppose  $T_u : L^p(\Sigma) \rightarrow L^p(\Sigma)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , is a bounded linear operator. Then  $T_u$  has closed range if and only if  $E(|u|) \geq \delta$  a.e. on  $S = \sigma(E(u))$  for some  $\delta > 0$ .*

Conversely, suppose  $E(|u|) \geq \delta$  a.e. on  $S$  and  $\{T_u f_n\}_{n=0}^\infty$  be an arbitrary sequence in  $\mathcal{R}(T_u)$  such that  $\|T_u f_n - g\|_p \rightarrow 0$  for some  $g \in L^p(\Sigma)$ . Hence

$$E(T_u f_n) = E(u)E(f_n) \xrightarrow{L^p} E(g).$$

By our assumption,  $E(1/|u|) \leq 1/\delta$  a.e. on  $S$ . Therefore, we have

$$\left| \frac{E(g)}{E(u)} \chi_S \right| \leq |E(g)| E\left(\frac{1}{|u|}\right) \chi_S \leq \frac{|E(g)|}{\delta} \chi_S.$$

This follows that  $\frac{E(g)}{E(u)} \chi_S \in L^p(\Sigma)$ . Consequently,

$$E(f_n) \xrightarrow{L^p} \frac{E(g)}{E(u)} \chi_S$$

and so

$$f_n \xrightarrow{L^p} \left\{ g + E(g) - \frac{uE(g)}{E(u)} \right\} \frac{\chi_S}{E(u)} := f.$$

Thus  $T_u f_n \xrightarrow{L^p} T_u f$  and hence  $g = T_u f$ , which implies that  $T_u$  has closed range.

**Lemma 2.5.** *Let  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}$  be separable Hilbert spaces. Suppose that  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$  and  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ . If  $A$  and  $B$  are normal operators, then*

$$Sp\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = Sp(A) \cup Sp(B).$$

**Proof.** See [1].

**Theorem 2.6.** *For a bounded linear operator  $T_u : L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$  we have*

$$Sp(T_u) \cup \{0\} = \text{ess rang}\{E(u)\} \cup \{0\}.$$

**Proof.** Let  $S^c = X \setminus \sigma(E(u)) \neq \emptyset$ . Since  $L^2(S^c, \mathcal{A}_{S^c}, \mu|_{\mathcal{A}_{S^c}}) \subseteq N(T_u^*)$ , then  $\overline{\mathcal{R}(T_u)} = \mathcal{N}(T_u^*)^\perp \subseteq L^2(S, \mathcal{A}_S, \mu|_{\mathcal{A}_S})$ . Hence,  $T_u$  is not onto and so  $0 \in \text{Sp}(T_u)$ . On the other hand, a moment's consideration of the matrix of  $T_u^*$  represented in (??) and Lemma 2.5 show that  $\text{Sp}(T_u) = \overline{\text{Sp}(T_u^*)} = \overline{\text{Sp}(M_{\overline{E(u)}})} = \text{ess rang } E(u)$ .

**Example 2.7.** Let  $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\mu$  be the Lebesgue measure on the  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  consisting of all Lebesgue measurable subsets of  $X$ . Moreover, suppose  $\mathcal{A}$  is the  $\sigma$ -subalgebra generated by the all symmetric intervals about origin. For given a  $f \in L^2(\Sigma)$ , then under the above hypotheses,  $E(f)$  is just equal to the even part of  $f$  namely,  $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$  (see [3]). Define  $u(x) = x^2 + \sin x + 1$ . Then we have

$$T_u f = \left(\frac{1}{2} \sin x + x^2 + 1\right) f(x) + \frac{1}{2} \sin x f(-x),$$

$$T_u^* f = \left(\frac{1}{2} \sin x + x^2 + 1\right) f(x) - \frac{1}{2} \sin x f(-x),$$

and  $E(|u|) \geq 1$  on  $X$ . Hence by the previous results  $T_u$  is bounded, one to one and has closed range while it is neither normal nor compact operator on  $L^2(\Sigma)$ .

## REFERENCES

- [1] Du, H. K., Jin, P.: Perturbation of spectrums of  $2 \times 2$  operator matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 761-766.
- [2] Jabbarzadeh, M. R., Khalil Sarbaz, S.: Lambert multipliers between  $L^p$  spaces, Czechoslovak Mathematical Journal, to appear.
- [3] Lambert, A., Lucas, Thomas G.: Nagata's principle of idealization in relation to module homomorphisms and conditional expectations, Kyungpook Math. J. **40** (2000), 327-337.
- [4] Rao, M. M.: Conditional measure and applications, Marcel Dekker, New York, 1993.
- [5] Singh, R. K., Kumar, A.: Compact composition operators, J. Austral. Math. Soc. **28** (1979), 309-314.
- [6] Zaanen, A. C.: Integration, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1967.

M. R. JABBARZADEH

*E-mail address:* mjabbar@tabrizu.ac.ir

FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TABRIZ, P. O. BOX: 5166615648, TABRIZ, IRAN



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## A COLLOCATION METHOD FOR THE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL BURGER'S EQUATIONS

R. JALILIAN<sup>1</sup> AND F. HATAMI<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. In this paper, we develop a collocation method based on cubic B-spline to the solution of one-dimensional Burger's equations  $\varepsilon u_{xx} = u_t + uu_x$  subject to appropriate initial and Dirichlet boundary conditions, where  $\varepsilon > 0$  is a small positive constant. We developed a new two-level three-point scheme of order  $O(k^2 + h^2)$ .

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Consider the following one-space dimensional nonlinear parabolic equation ,

$$(1.1) \quad \varepsilon u_{xx} = u_t + uu_x \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T],$$

subject to the initial condition ,

$$(1.2) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

and boundary conditions ,

$$(1.3) \quad u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad t \geq 0,$$

where  $\varepsilon = \frac{1}{\Re}$ , and  $\Re$  is the Reynolds number characterizing the size of viscosity. The numerical solution of nonlinear parabolic equation both in cartesian and polar coordinates are of great importance in problems of viscous fluid flow and heat transfer.

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65XX; Secondary 41a15, 65L20.

*Key words and phrases*. B-spline method, Burgers equation; Convergence, Nonlinear parabolic equation.

\* Speaker.

## 2. TEMPORAL DISCRETIZATION

Let us consider a uniform mesh  $\Delta$  with the grid points  $\lambda_{i,j}$  to discretize the region  $\Omega = [0, 1] \times (0, T]$ . Each  $\lambda_{i,j}$  is the vertices of the grid point  $(x_i, t_j)$  where  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  and  $t_j = jk$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  and  $h$  and  $k$  are mesh sizes in the space and time directions respectively.

First we use the following finite difference approximation to discretize the time variable with uniform step size  $k$ ,

$$(2.1) \quad u_t^n \cong \frac{\delta_t}{k(1 - \gamma\delta_t)} u^n$$

where  $\delta_t u^n = u^n - u^{n-1}$ ,  $u^n = u(x, t_n)$  and  $u^0 = u(x, 0) = f(x)$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ). We suppose that  $\phi(x, t_n, u^n, u_x^n) = u^n u_x^n$ . Substituting the above approximation into equation (1.1) and discretizing in time variable we have

$$(2.2) \quad \varepsilon u_{xx}^n = \frac{\delta_t}{k(1 - \gamma\delta_t)} u^n + \phi(x, t_n, u^n, u_x^n).$$

Simplifying the above equation we have :

$$(2.3) \quad \varepsilon k(1 - \gamma\delta_t) u_{xx}^n = \delta_t u^n + k(1 - \gamma\delta_t) \phi(x, t_n, u^n, u_x^n).$$

Now observe that we can write equation (2.3) in the following form

$$(2.4) \quad -\varepsilon u_{xx}^* + p^*(x) u^* + \phi^*(x, u^*, u_x^*) = q^*(x),$$

with boundary condition

$$(2.5) \quad u^*(0) = \alpha(t_n), \quad u^*(1) = \beta(t_n),$$

where  $u^* \equiv u^n$  and ,

$$\begin{cases} p^*(x) = \frac{1}{(1-\gamma)k}, \\ q^*(x) = \frac{\varepsilon\gamma}{1-\gamma} u_{xx}^{n-1} + \frac{1}{(1-\gamma)k} u^{n-1} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \phi(x, t_n, u^{n-1}, u_x^{n-1}) \\ \phi^*(x, u^*, u_x^*) = \phi(x, t_n, u^n, u_x^n). \end{cases}$$

Thus now in each time level we have a nonlinear ordinary differential equation in the form of (2.4) with the boundary conditions (2.5) which we solve it using B-spline collocation method.

**Theorem 2.1.** *The above time discretization process that we use to discretize equation (1.1) in time variable is uniformly convergent of the second order.*

Suppose that  $e_i = u^i - u(t_i)$  be the local truncation error at  $i$ th level time in (2.4) then we have :

$$\|e_i\| \leq C_i k^3$$

where  $C_i$  is some finite constant.

*Proof.* Using equation (2.1) and replacing  $\gamma = \frac{1}{2}$  the above result is straight forward.  $\square$

**Theorem 2.2.** *Let  $E_{n+1}$  be the global error in time discretizing process then we have :*

$$\|E_{n+1}\| \leq Ck^2, \quad t \leq T/k$$

where  $C$  is some finite constant.

*Proof.* The global truncation error in  $(n+1)$ th level is  $E_{n+1} = \sum_{i=1}^n e_i$  thus we have :

$$\|E_{n+1}\| = \left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n C_i k^3 \leq nC'k^3 \leq C'n(T/n)k^2 = Ck^2,$$

where  $C = C'T$ .  $\square$

### 3. B-SPLINE COLLOCATION METHOD

In this section we use B-spline collocation method to solve (2.4) with the boundary conditions (2.5) in each time level. Let  $\Delta^* = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$  be the partition in  $[0, 1]$ . B-splines are the unique nonzero splines of smallest compact support with knots at  $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ . We define the cubic B-spline for  $i = -1, 0, \dots, N+1$  by the following relation:

(3.1)

$$B_{3,i} = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It can be easily seen that the set of functions  $\Omega = \{B_{-1}(x), B_0(x), \dots, B_{N+1}(x)\}$  are linearly independent on  $[a, b]$  thus  $\Theta = \text{Span}(\Omega)$  is a subspace of  $C^2[0, 1]$ , and  $\Theta$  is  $N+3$  dimensional. Let us consider that  $S^*(x) \in \Theta$  be the B-spline approximation to the exact solution of problem (2.4), thus we can write  $S^*(x)$  in the following form :

$$(3.2) \quad S^*(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i^* B_i(x),$$

where  $c_i^*$  are unknown real coefficients and  $B_i(x)$  are cubic B-spline functions. By forcing  $S^*(x)$  to satisfy the collocation equations plus the boundary conditions, we have

$$(3.3) \quad LS^*(x_i) = q^*(x_i), \quad 0 \leq i \leq N$$

$$S^*(x_0) = \alpha(t_n) \quad , \quad S^*(x_N) = \beta(t_n)$$

where  $Lu^* \equiv -\varepsilon u_{xx}^* + p^*(x)u^* + \phi^*(x, u^*, u_x^*)$ .

Substituting (3.2) into (3.3) and using the properties of B-spline function we have :

$$\begin{aligned} & \frac{-6\varepsilon}{h^2}(c_{i-1}^* - 2c_i^* + c_{i+1}^*) + p^*(x_i)(c_{i-1}^* + 4c_i^* + c_{i+1}^*) + \\ & \phi^*(x_i, (c_{i-1}^* + 4c_i^* + c_{i+1}^*), \frac{3}{h}(c_{i+1}^* - c_{i-1}^*)) = q^*(x_i), \quad 0 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Simplifying the above relation leads to the following system of  $(N-1)$  non-linear equations in  $(N+3)$  unknowns:

$$(3.4) \quad (-6\varepsilon + h^2 p_i^*)c_{i-1}^* + (12\varepsilon + 4h^2 p_i^*)c_i^* + (-6\varepsilon + h^2 p_i^*)c_{i+1}^* + h^2 \phi_i^* = h^2 q_i^*, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

where  $p_i^* = p^*(x_i)$ ,  $q_i^* = q^*(x_i)$  and  $\phi_i^* = \phi^*(x_i, (c_{i-1}^* + 4c_i^* + c_{i+1}^*), \frac{3}{h}(c_{i+1}^* - c_{i-1}^*))$ .

Thus to solve the system and obtaining a unique solution to  $C^* = (c_{-1}^*, c_0^*, \dots, c_N^*, c_{N+1}^*)$  we need to obtain two extra equations using the boundary conditions and eliminate  $c_{-1}^*$  and  $c_{N+1}^*$ . Using the first boundary condition we have :

$$u(0, t_n) = S^*(0) = \alpha(t_n) = c_{-1}^* + 4c_0^* + c_1^*,$$

Now eliminating  $c_{-1}^*$  from the above equation and substituting into equation (3.4) for  $i = 0$  we have :

$$(-6\varepsilon + h^2 p_0^*)(\alpha(t) - 4c_0^* - c_1^*) + (12\varepsilon + 4h^2 p_0^*)c_0^* + (-6\varepsilon + h^2 p_0^*)c_1^* + h^2 \phi_0^* = h^2 q_0^*.$$

Simplifying the above equation we obtain the following relation for the first boundary ,

$$(3.5) \quad 36\varepsilon c_0^* + h^2 \phi_0^* = h^2 q_0^* + (6\varepsilon - h^2 p_0^*)\alpha(t_n), \quad \text{for } i=0$$

where

$$\phi_0^* = \phi^*(x_0, \alpha(t_n), \frac{3}{h}(c_1^* - c_{-1}^*)) = \phi^*(x_0, \alpha(t_n), \frac{3}{h}(4c_0^* + 2c_1^* - \alpha(t_n))).$$

Similarly, eliminating  $c_{N+1}^*$  from the last equation (3.4) for  $i = N$ , we find

$$(3.6) \quad 36\varepsilon c_N^* + h^2 \phi_N^* = h^2 q_N^* + (6\varepsilon - h^2 p_N^*)\beta(t), \quad \text{for } i=N$$

where

$$\begin{aligned} \phi_N^* &= \phi^*(x_N, u(x_N), u_x(x_N)) = \phi^*(x_N, \beta(t), \frac{3}{h}(c_{N+1}^* - c_{N-1}^*)) \\ &= \phi^*(x_N, \beta(t), -\frac{3}{h}(4c_N^* + 2c_{N-1}^* - \beta(t))). \end{aligned}$$

**Acknowledgements:** Financial assistance of Ilam university is greatly appreciated.

#### REFERENCES

1. R.K. MOHANTY, *An implicit high accuracy variable mesh scheme for 1-D non-linear singular parabolic partial differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 186(2007)219-229.
2. J. RASHIDINIA, M. GHASEMI, R. JALILIAN, *Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2010) 1866-1878.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ILAM UNIVERSITY, P. O. BOX 69315-516, ILAM, IRAN.  
E-mail address: rezajalilian72@gmail.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ISLAMIC AZAD UNIVERSITY OF KERMANSHAH, IRAN.  
E-mail address: hatami.fatemeo39@gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## UPPER BOUND FOR NORM OF INVERSE SOME BAND MATRICES WITH APPLICATION IN NON-POLYNOMIAL SPLINE

R. JALILIAN<sup>1</sup>

**ABSTRACT.** We present a sixth-order non-polynomial spline method for the solutions of two-point boundary value problem  $u^{(4)} + f(x, u) = 0$ ,  $u(a) = \alpha_1$ ,  $u''(a) = \alpha_2$ ,  $u(b) = \beta_1$ ,  $u''(b) = \beta_2$ , in off step points. Numerical method of sixth-order with end conditions of the order 6 is derived. upper bound for norm of inverse five-diagonal matrix are derived. The convergence analysis of the method has been discussed.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Consider the special nonlinear fourth-order boundary value problem given by

$$(1.1) \quad u^{(4)} + f(x, u) = 0, a < x < b, a, b, x \in \mathbb{R},$$

with the functional and second-order derivative boundary conditions

$$(1.2) \quad u(a) = \alpha_1, u''(a) = \alpha_2, u(b) = \beta_1, u''(b) = \beta_2.$$

It is assumed that  $f(x, u)$  is real and continuous on  $[a, b]$ , and  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$  are finite real constants. We introduce the set of grid points in the interval  $[a, b]$

$$x_0 = a, \quad x_{l-\frac{1}{2}} = a + (l - \frac{1}{2})h, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad x_N = b.$$

Non-polynomial quintic spline function  $S_l(x)$  which interpolates  $u(x)$  at the mesh points  $x_{l-\frac{1}{2}}, l = 1, 2, \dots, N$ , depends on a parameter  $\tau$  and reduces to ordinary quintic spline

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34C12; Secondary 15A09, 65F05, 65L10.

*Key words and phrases.* Band matrix; Non-polynomial spline; Boundary formula; Convergence analysis.

\* Speaker.

$S_l(x)$  in  $[a, b]$  as  $\tau \rightarrow 0$ .

For each segment  $[x_{l-\frac{1}{2}}, x_{l+\frac{1}{2}}]$ ,  $l = 1, 2, \dots, N-1$ , the quintic spline  $S_l(x)$ , is defined as

$$(1.3) \quad S_l(x) = \sum_{i=0}^3 a_{li}(x - x_l)^i + e_l \sin \tau(x - x_l) + f_l \cos \tau(x - x_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots, N,$$

where  $a_{li}$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ),  $e_l$  and  $f_l$  are constants and also  $\tau$  is free parameter. To derive expression for the coefficients, we first denote:

$$(1.4) \quad S_l(x_{l\pm\frac{1}{2}}) = u_{l\pm\frac{1}{2}}, \quad S_l''(x_{l\pm\frac{1}{2}}) = M_{l\pm\frac{1}{2}}, \quad S_l^{(4)}(x_{l\pm\frac{1}{2}}) = F_{l\pm\frac{1}{2}}.$$

From algebraic manipulation we can obtain the coefficients. Using the continuity of first and third derivatives at  $(x_l, u_l)$ , that are  $S'_{l-1}(x_l) = S'_l(x_l)$  and  $S'''_{l-1}(x_l) = S'''_l(x_l)$ , we obtain the following relations: The elimination of  $M_l$ 's gives

$$(1.5) \quad u_{l-\frac{5}{2}} - 4u_{l-\frac{3}{2}} + 6u_{l-\frac{1}{2}} - 4u_{l+\frac{1}{2}} + u_{l+\frac{3}{2}} = h^4[\alpha(F_{l-\frac{5}{2}} + F_{l+\frac{3}{2}}) + \beta(F_{l-\frac{3}{2}} + F_{l+\frac{1}{2}}) + \gamma F_{l-\frac{1}{2}}], \quad l = 3(1)N - 2,$$

## 2. END CONDITION

To obtain the unique solution of the nonlinear system (1.5) we need four more equations. By using Taylor series and method of undetermined coefficients the boundary formulas associate with boundary conditions for the sixth-order method can be determine as follows. In order to obtain the six-order boundary formula we define the following identities

$$(2.1) \quad c_0 u_0 + \sum_{j=1}^3 c_j u_{j-\frac{1}{2}} + \lambda h^2 u_0'' + \rho_0 h^4 u_0^{(4)} + h^4 \sum_{j=1}^5 \rho_j u_{j-\frac{1}{2}}^{(4)} + t_1^* = 0,$$

$$(2.2) \quad c'_0 u_0 + \sum_{j=1}^4 c'_j u_{j-\frac{1}{2}} + \lambda' h^2 u_0'' + h^4 \sum_{j=1}^6 \rho'_j u_{j-\frac{1}{2}}^{(4)} + t_2^* = 0,$$

$$(2.3) \quad c'^*_0 u_N + \sum_{j=1}^4 c'^*_j u_{N-j+\frac{1}{2}} + \lambda'^* h^2 u_N'' + h^4 \sum_{j=1}^6 \rho'^*_j u_{N-j+\frac{1}{2}}^{(4)} + t'^*_{N-1} = 0,$$

$$(2.4) \quad c^*_0 u_N + \sum_{j=1}^3 c^*_j u_{N-j+\frac{1}{2}} + \lambda^* h^2 u_N'' + h^4 \rho^*_0 u_N^{(4)} + h^4 \sum_{j=1}^5 \rho^*_j u_{N-j+\frac{1}{2}}^{(4)} + t'^*_N = 0.$$

### 3. CONVERGENCE ANALYSIS

In this section, we investigate the convergence analysis of the method. The equations (1.5) along with boundary condition (2.1)-(2.4) yields nine diagonal nonlinear system of equations, and may be written in matrix form as

$$(3.1) \quad A_0 U^{(1)} + h^4 B f^{(1)}(U^{(1)}) = R^{(1)},$$

$P$  is monotone three diagonal matrix defined by

$$(3.2) \quad p_{ij} = \begin{cases} 3 & i = j = 1, N, \\ 2 & i = j = 2, 3, \dots, N-1, \\ -1 & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Theorem 4.1** Let  $\Lambda$  be the  $N \times N$  matrix

$$(3.3) \quad \lambda_{ij} = \begin{cases} \xi & i = j = 1, N, \\ x & i = j = 2, 3, \dots, N-1, \\ -1 & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

sufficient conditions on  $\xi$  and  $x$  so that  $\Lambda^{-1} \geq 0$  is  $\xi > r$  where

$r = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ , ( $x \geq 2$ ). Consequently the matrix  $P$  which is special case of the matrix  $\Lambda$  for  $\xi = 3$  and  $x = 2$  is monotone matrix. Thus the matrix  $A_0 = P^2$ , is a monotone matrix. By using [1] the symmetric matrix  $A_0$ , is irreducible and monotone and also

$$(3.4) \quad \|A_0^{-1}\| \leq \frac{[5(b-a)^4 + 10(b-a)^2 h^2 + 9h^4]}{384h^4}.$$

$$(3.5) \quad A_0 \bar{U}^{(1)} + h^4 B f^{(1)}(\bar{U}^{(1)}) = R^{(1)} + t^{(1)},$$

where the vector  $\bar{U}^{(1)} = u(x_{l-\frac{1}{2}})$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ , is the exact solution and  $t^{(1)} = [t_{\frac{1}{2}}^{(1)}, t_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \dots, t_{N-\frac{1}{2}}^{(1)}]^T$ , is the vector of order  $N$  of local truncation errors.

From (3.1) and (3.5) we have:

$$(3.6) \quad [A] E^{(1)} = [A_0 + h^4 B F_k(U^{(1)})] E^{(1)} = t^{(1)},$$

**Lemma 4.1** If  $M$  is a square matrix of order  $N$  and  $\|M\| < 1$ , then  $(I + M)^{-1}$  exist and  $\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1 - \|M\|)}$ .

where

$$E^{(1)} = \bar{U}^{(1)} - U^{(1)} = [e_{\frac{1}{2}}^{(1)}, e_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \dots, e_{N-\frac{1}{2}}^{(1)}]^T,$$

TABLE 1. Maximum absolute errors in solution.

$m$	In [2]	In [2]	In [3]	In [3]	Our method
3	$1.9 \times 10^{-4}$	$3.7 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-7}$
4	$4.6 \times 10^{-5}$	$2.9 \times 10^{-7}$	$8.3 \times 10^{-7}$	$8.3 \times 10^{-7}$	$1.1 \times 10^{-9}$
5	$1.1 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-8}$	$5.4 \times 10^{-8}$	$5.4 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-11}$

**Lemma 4.2** The matrix  $[A_0 + h^4 B F_k(U^{(1)})]$  in (3.6) is nonsingular, provided  $Y < \frac{1981808640}{5306209\lambda}$ , where  $\lambda = [5(b-a)^4 + 10(b-a)^2 h^2 + 9h^4]$  and  $Y = \max |\frac{\partial f_l^{(1)}}{\partial u_l^{(1)}}|$ ,  $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}$ . (The norm referred to is the  $L_\infty$  norm). We give alternative method in the theorem 4.2 to show that the matrix  $[A = A_0 + h^4 B F_k(U^{(1)})]$  is monotone.  $\square$

**Theorem 4.2** If  $Y < \frac{1981808640}{5306209\lambda}$ , then the matrix  $A$  given by (3.6) is monotone where  $\lambda = 5(b-a)^4 + 10(b-a)^2 h^2 + 9h^4$ .

**Theorem 4.3** Let  $u(x_{l-\frac{1}{2}})$  be the exact solution of the boundary value problem (1.1) with boundary conditions (1.2) and we assume  $u_{l-\frac{1}{2}}$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$  be the numerical solution obtained by solving the nonlinear system (3.1). Then we have

$$\|E^{(1)}\| \equiv O(h^6), \text{ (provided } Y < \frac{1981808640}{5306209\lambda}, \alpha = \frac{-1}{720}, \beta = \frac{31}{180}, \gamma = \frac{79}{120} \text{)}.$$

#### 4. NUMERICAL RESULTS

In this section we present the results obtained by applying the numerical method discussed in pervious sections to the following two-point boundary-value problem. Consider the differential equation

$$(4.1) \quad u^{(4)} - 6e^{4u} = -\frac{12}{(1+x)^4}, 0 < x < 1,$$

with the boundary conditions:

$$(4.2) \quad u(0) = 0, u(1) = \ln(2), u''(0) = -1, \quad u''(1) = \frac{-1}{4}.$$

The analytical solution is  $u(x) = \ln(1+x)$ .

**Acknowledgements:** Financial assistance of Ilam university is greatly appreciated.

#### REFERENCES

1. R. USMANI, *The Use of Quartic Splines in the Numerical Solution of a Fourth-Order Boundary Value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 44(1992)187-199.

2. E. H. TWIZELL, *A fourth-order extrapolation method for special nonlinear fourth-order boundary value problems*, Communications in Applied Numerical Methods, 2(1986)593-602.
3. R. P. AGARWAL AND G. AKRIVIS, *Boundary value problems occurring in plate deflection theory*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 8(1982)145-154.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ILAM UNIVERSITY, P. O. BOX 69315-516, ILAM, IRAN.

*E-mail address:* rezajalilian72@gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## GENERALIZATION OF THE HSS METHOD FOR SYLVESTER MATRIX EQUATIONS

MOHAMMAD KHORSAND<sup>1</sup>

ABSTRACT. In this paper, we propose some new algorithms based on Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for solving a class of Sylvester equations  $AX + XB = C$ , where both coefficient matrices  $A$  and  $B$  are (non-Hermitian) positive semi-definite, and at least one of them is positive definite, and obtain some HSS-like iterations for solving Sylvester equations. Some numerical examples illustrating the effectiveness of these algorithms are presented.

### 1. INTRODUCTION

Consider the Sylvester matrix equation

$$(1.1) \quad AX + XB = C$$

where  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $X$  and  $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Equation (1.1) can be written as

$$(1.2) \quad \hat{A}\hat{x} = \hat{c}$$

where the matrix  $\hat{A}$  is of dimension  $nm \times nm$  and is given by

$$(1.3) \quad \hat{A} = I_m \otimes A + B^T \otimes I_n$$

where  $\otimes$  denotes the Kronecker product ( $A \otimes B = [a_{ij}B]$ ) and

$$\begin{aligned} \hat{c} &= (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{n2}, \dots, c_{nn}) \\ \hat{x} &= (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{nn}). \end{aligned}$$

Of course, this is a numerically poor way to determine the solution  $X$  of the Sylvester

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 15A24, 15A30, 15A69.; Secondary 65F10, 65F30, 65F50.

*Key words and phrases*. Sylvester equations, HSS iterations .

equation (1.1), as the system of linear equations (1.2) is costly to solve and can be ill-conditioned. In this paper, we generalize the Hermitian and skew-Hermitian splitting iterations for Sylvester equations.

## 2. HSS METHOD FOR SYLVESTER EQUATIONS

Hermitian and skew-Hermitian splitting (HSS) iteration method was firstly proposed by Bai, Golub and Ng [1] for non-Hermitian positive definite linear system (1.2) as follows: *Given an initial guess  $x^{(0)}$ , for  $k = 1, 2, \dots$ , until  $\{x^{(k)}\}$  convergence, compute*

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\alpha I_{nm} + \hat{H})\hat{x}^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I_{nm} - \hat{S})\hat{x}^{(k)} + \hat{c} \\ (\alpha I_{nm} + \hat{S})\hat{x}^{(k+1)} = (\alpha I_{nm} - \hat{H})\hat{x}^{(k+\frac{1}{2})} + \hat{c} \end{cases}$$

where  $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^*)$  and  $\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{A}^*)$  are Hermitian and skew-Hermitian parts of matrix  $\hat{A}$  and  $\alpha$  is a given positive constant. Substituting  $\hat{A}$  from (1.3) in  $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^*)$  and  $\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{A}^*)$  and using the Kronecker product's properties we have

$$(2.2) \quad \hat{H} = I_m \otimes H_A + H_{B^T} \otimes I_n$$

$$(2.3) \quad \hat{S} = I_m \otimes S_A + S_{B^T} \otimes I_n$$

where  $H_A, S_A, H_B, S_B$  are Hermitian and skew-Hermitian parts of  $A$  and  $B$  respectively. Also, one can easily see that  $H_{B^T}^T = H_B$  and  $S_{B^T}^T = S_B$ . By relations (2.2), (2.3)

$$(2.4) \quad (\alpha I_{nm} + \hat{H})\hat{x} \equiv (\alpha I_n + H_A)X + XH_B$$

$$(2.5) \quad (\alpha I_{nm} - \hat{S})\hat{x} \equiv (\alpha I_n - S_A)X - XS_B.$$

Substituting (2.4) and (2.5) in the first equation of the system (2.1) one obtains

$$(\alpha I_n + H_A)X + XH_B = (\alpha I_n - S_A)X - XS_B + C.$$

Similarly for the second equation in (2.1) we obtain the following system, equivalent to (2.1), as

$$(2.6) \quad \begin{cases} (\alpha I_n + H_A)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}H_B = (\alpha I_n - S_A)X^{(k)} - X^{(k)}S_B + C \\ (\alpha I_n + S_A)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}S_B = (\alpha I_n - H_A)X^{(k+\frac{1}{2})} - X^{(k+\frac{1}{2})}H_B + C \end{cases}$$

Similarly, changing the parentheses order in (2.4) and (2.5) we will have

$$(2.7) \quad \begin{cases} H_A X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\alpha I_m + H_B) = -S_A X^{(k)} + X^{(k)}(\alpha I_m - S_B) + C \\ S_A X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\alpha I_m + S_B) = -H_A X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\alpha I_m - H_B) + C \end{cases}$$

which is equivalent to the system (2.1). It is easy to show that the following system is equivalent to (2.1), (2.6) and (2.7).

(2.8)

$$\begin{cases} (\frac{\alpha}{2}I_n + H_A)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\frac{\alpha}{2}I_m + H_B) = (\frac{\alpha}{2}I_n - S_A)X^{(k)} + X^{(k)}(\frac{\alpha}{2}I_m - S_B) + C \\ (\frac{\alpha}{2}I_n + S_A)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\frac{\alpha}{2}I_m + S_B) = (\frac{\alpha}{2}I_n - H_A)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\frac{\alpha}{2}I_m - H_B) + C \end{cases}$$

Now suppose that in Sylvester equation (1.1) both coefficient matrices  $A$  and  $B$  are (non-Hermitian) positive semi-definite, and at least one of them is positive definite. It is easy to show that the coefficient matrix  $\hat{A}$  in system (1.2) is positive definite, and so by Theorem 2.2 in [1] the HSS iteration (2.1) converges to the solution of the system (1.2) and this yields that all systems (2.6), (2.7) and (2.8) converge to the solution of Sylvester equation (1.1). Therefore we can state the following theorem:

**Theorem 2.1.** *Suppose that  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  and  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$  are (non-Hermitian) positive semi-definite, and at least one of them is positive definite. Let  $H_A = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ,  $S_A = \frac{1}{2}(A - A^*)$ ,  $H_B = \frac{1}{2}(B + B^*)$ ,  $S_B = \frac{1}{2}(B - B^*)$  are Hermitian and skew-Hermitian parts of  $A$  and  $B$  respectively, and let  $\alpha$  be a positive constant. Then each of the HSS iterations (2.6), (2.7) and (2.8) converge to the solution of Sylvester equation (1.1) with the same convergence rate and iteration matrix*

$$\hat{M}(\alpha) = (\alpha I + \hat{S})^{-1}(\alpha I - \hat{H})(\alpha I + \hat{H})^{-1}(\alpha I - \hat{S})$$

with  $\hat{H}$  and  $\hat{S}$  as in (2.2) and (2.3). Furthermore its spectral radius is bounded by

$$\sigma(\alpha) \equiv \max_{\hat{\lambda}_i \in \Lambda(\hat{H})} \left| \frac{\alpha - \hat{\lambda}_i}{\alpha + \hat{\lambda}_i} \right|,$$

where  $\Lambda(\hat{H})$  is the spectral set of the matrix  $\hat{H}$ .

Now we obtain the optimal values of parameter  $\alpha$  and upper bound  $\sigma(\alpha)$  of  $\rho(\hat{M}(\alpha))$  as follows.

**Corollary 2.2.** *Suppose that  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  and  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$  are (non-Hermitian) positive semi-definite, and at least one of them is positive definite. Let  $H_A, S_A, H_B$  and  $S_B$  are Hermitian and skew-Hermitian parts of  $A$  and  $B$  respectively. Let, for simplicity,  $\lambda(\hat{H}) = \hat{\lambda}$ ,  $\lambda(H_A) = \lambda$ ,  $\lambda(H_B) = \mu$  denote the eigenvalues. Also, let  $\lambda_{\min}$  and  $\lambda_{\max}$  denote the minimum and maximum value of the eigenvalues of matrices respectively, and let  $\alpha$  be a positive constant. Then*

$$\alpha^* \equiv \arg \min_{\alpha} \left\{ \max_{\hat{\lambda}_{\min} \leq \hat{\lambda} \leq \hat{\lambda}_{\max}} \left| \frac{\alpha - \hat{\lambda}}{\alpha + \hat{\lambda}} \right| \right\} = \sqrt{(\lambda_{\max} + \mu_{\max})(\lambda_{\min} + \mu_{\min})}, \text{ and}$$

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\max} + \mu_{\max}}{\lambda_{\min} + \mu_{\min}}} - 1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\max} + \mu_{\max}}{\lambda_{\min} + \mu_{\min}}} + 1} < 1.$$

*Proof.* It is easy to show that  $\lambda(I_m \otimes H_A) = \lambda(H_A)$  and  $\lambda(H_{B^T} \otimes I_n) = \lambda(H_B)$ . Moreover  $\frac{\alpha - \hat{\lambda}_{\max}}{\alpha + \hat{\lambda}_{\max}} \geq \frac{\alpha - (\lambda_{\max} + \mu_{\max})}{\alpha + (\lambda_{\max} + \mu_{\max})}$  and  $\frac{\alpha - \hat{\lambda}_{\min}}{\alpha + \hat{\lambda}_{\min}} \leq \frac{\alpha - (\lambda_{\min} + \mu_{\min})}{\alpha + (\lambda_{\min} + \mu_{\min})}$ . Now we have

$$(2.9) \quad \sigma(\alpha) = \max_{\hat{\lambda}_i \in \Lambda(\hat{H})} \left| \frac{\alpha - \hat{\lambda}_i}{\alpha + \hat{\lambda}_i} \right| = \max \left\{ \left| \frac{\alpha - \hat{\lambda}_{\min}}{\alpha + \hat{\lambda}_{\min}} \right|, \left| \frac{\alpha - \hat{\lambda}_{\max}}{\alpha + \hat{\lambda}_{\max}} \right| \right\}.$$

If  $\alpha^*$  is such a minimum point of the upper bound  $\sigma(\alpha)$  of  $\rho(\hat{M}(\alpha))$  then it must satisfy  $\alpha^* - \hat{\lambda}_{\max} < 0$  and  $\alpha^* - \hat{\lambda}_{\min} > 0$ , therefore

$$\sigma(\alpha) = \max \left\{ \frac{\alpha - \hat{\lambda}_{\min}}{\alpha + \hat{\lambda}_{\min}}, -\frac{\alpha - \hat{\lambda}_{\max}}{\alpha + \hat{\lambda}_{\max}} \right\} \leq \max \left\{ \frac{\alpha - (\lambda_{\min} + \mu_{\min})}{\alpha + (\lambda_{\min} + \mu_{\min})}, -\frac{\alpha - (\lambda_{\max} + \mu_{\max})}{\alpha + (\lambda_{\max} + \mu_{\max})} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha^* - (\lambda_{\min} + \mu_{\min})}{\alpha^* + (\lambda_{\min} + \mu_{\min})} = \frac{(\lambda_{\max} + \mu_{\max}) - \alpha^*}{(\lambda_{\max} + \mu_{\max}) + \alpha^*} \Rightarrow \alpha^* = \sqrt{(\lambda_{\max} + \mu_{\max})(\lambda_{\min} + \mu_{\min})}$$

and the optimal value of upper bound of  $\rho(\hat{M}(\alpha))$  is obtained as follows:

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\alpha^* - \hat{\lambda}_{\min}}{\alpha^* + \hat{\lambda}_{\min}} \leq \frac{\sqrt{(\lambda_{\max} + \mu_{\max})(\lambda_{\min} + \mu_{\min})} - (\lambda_{\min} + \mu_{\min})}{\sqrt{(\lambda_{\max} + \mu_{\max})(\lambda_{\min} + \mu_{\min})} + (\lambda_{\min} + \mu_{\min})} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_{\max} + \mu_{\max}}{\lambda_{\min} + \mu_{\min}}} - 1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\max} + \mu_{\max}}{\lambda_{\min} + \mu_{\min}}} + 1} < 1.$$

□

### 3. IHSS METHOD FOR SYLVESTER EQUATIONS

If we solve the system (2.1) approximately then we will have IHSS (inexact HSS) iterations. Define the residual of Sylvester equations (1.1) by  $R = C - AX - XB$ . By solving the first equation of (2.1) approximately, and considering (2.2) one can obtain

$$(\alpha I_{nm} + \hat{H})z^{(k)} = r^{(k)} \Rightarrow (\alpha I_m \otimes I_n + I_m \otimes H_A + H_{B^T} \otimes I_n)Z^{(k)} = R^{(k)}.$$

The previous equation can be written as the following equivalent alternative systems

$$(3.1) \quad (\alpha I_n + H_A)Z^{(k)} + Z^{(k)}H_B = R^{(k)}$$

$$(3.2) \quad H_A Z^{(k)} + Z^{(k)}(\alpha I_m + H_B) = R^{(k)}$$

$$(3.3) \quad \left(\frac{\alpha}{2}I_n + H_A\right)Z^{(k)} + Z^{(k)}\left(\frac{\alpha}{2}I_m + H_B\right) = R^{(k)}$$

Similarly, by solving the second equation of (2.1) approximately, alternative systems

$$(3.4) \quad (\alpha I_n + S_A)Z^{(k+\frac{1}{2})} + Z^{(k+\frac{1}{2})}S_B = R^{(k+\frac{1}{2})}$$

$$(3.5) \quad S_A Z^{(k+\frac{1}{2})} + Z^{(k+\frac{1}{2})}(\alpha I_m + S_B) = R^{(k+\frac{1}{2})}$$

$$(3.6) \quad \left(\frac{\alpha}{2}I_n + S_A\right)Z^{(k+\frac{1}{2})} + Z^{(k+\frac{1}{2})}\left(\frac{\alpha}{2}I_m + S_B\right) = R^{(k+\frac{1}{2})}$$

can be obtained. Therefore the IHSS algorithm for Sylvester equations can be written as follows:

**IHSS Method for system  $AX + XB = C$**

1. Compute  $R^{(0)} = C - AX^{(0)} - X^{(0)}B$

2. FOR  $k = 0, 1, 2, \dots$ , until convergence DO
3. solve one of the systems (3.1) or (3.2) or (3.3), with the CG method
4.  $X^{(k+\frac{1}{2})} = X^{(k)} + Z^{(k)}$
5.  $R^{(k+\frac{1}{2})} = C - AX^{(k+\frac{1}{2})} - X^{(k+\frac{1}{2})}B$
6. Solve one of the systems (3.4) or (3.5) or (3.6), with a Krylov-based method
7.  $X^{(k+1)} = X^{(k+\frac{1}{2})} + Z^{(k+\frac{1}{2})}$
8.  $R^{(k+1)} = C - AX^{(k+1)} - X^{(k+1)}B$
9. END DO

The convergence results for IHSS iterations are similar to Theorem 3.1 in [1].

#### 4. NUMERICAL EXPERIMENTS AND CONCLUSION

All numerical experiments presented in this section were computed in double precision with some MATLAB codes on a computer Intel(R) Core(TM)2Duo CPU T7250 2.00 GHz with 2.00 GB RAM memory. All iterations are started from the zero matrix for initial  $X^{(0)}$  and terminated when the current iterate satisfies  $\frac{\|R^{(k)}\|_F}{\|R^{(0)}\|_F} \leq 10^{-10}$ . For each experiment we report number of iterations and CPU time (in parentheses) and compare HSS and IHSS iterations with BCG and CGNE methods. We consider four test problems as follows:

**Problem 1.**  $A = \text{tridiag}(-2, 4, -1)$  and  $B = \text{tridiag}(-1 - \frac{v}{m+1}, 2, -1 + \frac{v}{m+1})$ , with  $v = 10$ .

**Problem 2.**  $A = \text{pentadiag}(1, -16, 30, 16, 1)$  and  $B = \text{hilbert}(5)$ .

**Problem 3.**  $A = \text{tridiag}(-1 - \frac{v}{n+1}, 2, -1 + \frac{v}{n+1})$  and  $B = \text{tridiag}(-1 - \frac{v}{m+1}, 2, -1 + \frac{v}{m+1})$ , with  $v = 10$ . In all of these problems we consider  $m = 5$  and  $n = 100$ .

The results of the previous problems are given in the following table:

Method	Problem 1	Problem 2	Problem 3
BCG	76(0.019)	25(0.003)	65(0.015)
CGNE	67(0.021)	11(0.015)	96(0.042)
HSS	20(0.072)	7(0.052)	32(0.151)
IHSS	20(0.020)	7(0.015)	32(0.079)

**Problem 4.**  $A = \text{tridiag}(-2, 4, -1)$  and  $B = A^T$ . The results of this problem are given in the following table. We can see that HSS and IHSS iterations have some advantages over BCG and CGNE iterations, especially when  $n$  is small or  $m \ll n$ ; because in this case the number of HSS and IHSS iterations is less than other methods and CPU time has not significant difference.

Method	n=8	n=16	n=32	n=64	n=128	n=256
BCG	23(0.015)	31(0.021)	46(0.031)	55(0.109)	39(0.531)	38(4.102)
CGNE	31(0.015)	55(0.016)	68(0.033)	71(0.141)	71(0.873)	70(6.489)
HSS	22(0.015)	25(0.016)	26(0.124)	26(0.561)	26(3.494)	26(27.456)
IHSS	22(0.005)	25(0.012)	26(0.046)	26(0.327)	26(1.825)	26(13.571)

## REFERENCES

1. Z. Z. Bai, G. H. Golub and M. K. NG, *Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24 (2003) 603-626.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ISLAMIC AZAD UNIVERSITY, ALIGOUDARZ BRANCH, ALIGOUDARZ, IRAN.

*E-mail address:* khorsandzak@yahoo.com



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## QUASI-DETERMINANT OF NON-SQUARE MATRICES

M. MABUDI<sup>1\*</sup> AND A. H. SANATPOUR<sup>2</sup>

ABSTRACT. In this paper, inspiring the rook polynomials, the concept of determinant of square matrices is extended suitably to non-square matrices.

### 1. INTRODUCTION

Matrices are widely used in different branches of science and engineering. Determinant of a square matrix is one of the most important concepts in the matrix theory, which is specially used in solving systems of linear equations. In this paper, we extend the concept of determinant of square matrices to non-square matrices. Indeed, for arbitrary natural numbers  $k$  and  $n$ , we associate a real number to a  $k \times n$  matrix  $A_{k \times n}$ , denoted by  $q - \det(A_{k \times n})$ , and call it quasi-determinant of  $A_{k \times n}$ . We also show that the function  $q - \det : M_{k \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$  has the main properties of the well-known determinant function  $\det : M_{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ , where  $M_{k \times n}$  is the set of all  $k \times n$  matrices with real entries. Our proposed method for introducing quasi-determinant is an innovative method inspired by rook movements in the chess game which also yields to some already known concepts like rook polynomials [2]. This method is indeed based on a suitable use of dispersed diagonal method, which can be also used for square matrices.

### 2. MAIN RESULTS

For arbitrary natural numbers  $k$  and  $n$ , the coefficient of  $x^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) in the rook polynomial is defined to be the number of maximum possible ways of placing  $m$  rooks in

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 65F40; Secondary 15A15.

*Key words and phrases.* Determinant, Quasi-Determinant, Non-Square Matrix, Numerical Linear Algebra.

\* Speaker.

a  $k \times n$  chessboard such that none of them threat each other, that is every two rooks are placed in different columns and different rows [1]. Inspiring this idea, next we introduce the concept of quasi-determinant for a  $k \times n$  matrix with real entries. Before stating our procedure we bring some contractions and definitions.

**The Priority Principle:** For natural numbers  $k$  and  $n$ , consider the matrix

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}_{k \times n}$$

as a chessboard with no black squares:

$a_{11}$	$a_{12}$	$\cdots$	$a_{1n}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\cdots$	$a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{k1}$	$a_{k2}$	$\cdots$	$a_{kn}$

1. In each row the priority among the entries is from left to right.
2. In each column the priority among the entries is from up to down.
3. The priority among the columns of the matrix is from left to right.
4. The priority among the rows of the matrix is from up to down.

We study the set of all  $k \times n$  matrices in two groups:

**First Type:** Matrices  $A_{k \times n}$  in which  $k \leq n$ .

**Second Type:** Matrices  $A_{k \times n}$  in which  $k \geq n$ .

Now, we are in the position to introduce our procedure for calculating quasi-determinant of a  $k \times n$  matrix  $A_{k \times n}$ .

**Procedure:** First, we state our procedure for the matrices of the first type ( $k \leq n$ ).

- Step 1.** Put the first rook in the square of  $a_{11}$  and calculate all possible positions of putting  $k-1$  rooks in the chessboard such that none of them threat each other. Considering the Priority Principle, write down the product of entries of each possible positions.
- Step 2.** Do the same procedure described in step 1 by putting the first rook in the square of  $a_{1i}$  ( $2 \leq i \leq n$ ).
- Step 3.** Apply the sign  $+/-$ , alternatively, to all the products obtained in step 1 and 2.

**Step 4.** Consider every two signed product of step 3 in a bracket and apply the sign  $+/-$ , alternatively, to these brackets.

Now, the quasi-determinant of  $A_{k \times n}$  is defined to be the sum of the finally obtained entries in step 4. In order to get the definition of quasi-determinant for the matrices of the second type, do the same procedure as described above with focus on column-operations instead of row-operations.

It must be mentioned that the quasi-determinant of a square matrix  $A_{n \times n}$ , using the above procedure, is equal to the previously known determinant of  $A_{n \times n}$ . This means that the above mentioned procedure leads to a generalization of square determinants. Next, as an example we apply the above mentioned procedure to compute the quasi-determinant of a non-square matrix.

**Example 2.1.** Consider a general  $2 \times 3$  matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

and put it on the board:

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$

Using the Priority Principle, we focus on the row-operations and begin with  $a_{11}$ . Having the Priority Principle in the mind, we place the second rook such that two rooks do not threat each other. So, the only possible positions for the second rook in the board will be  $a_{23}$  and  $a_{22}$ . Therefore, in step 1 we have the products  $a_{11}a_{12}$  and  $a_{11}a_{23}$ . Doing the step 2, we obtain the products  $a_{12}a_{21}$ ,  $a_{12}a_{23}$ ,  $a_{13}a_{21}$  and  $a_{13}a_{22}$ . Applying the signs  $+/-$  of step 3 we obtain

$$+a_{11}a_{22} - a_{11}a_{23} + a_{12}a_{21} - a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21} - a_{13}a_{22}.$$

Finally, applying the brackets of step 4 we get

$$+[a_{11}a_{22} - a_{11}a_{23}] - [a_{12}a_{21} - a_{12}a_{23}] + [a_{13}a_{21} - a_{13}a_{22}],$$

which yields to the value of quasi-determinant of  $A$  as below:

$$q - \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{11}a_{23} - a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21} - a_{13}a_{22}.$$

**Example 2.2.** Consider a general  $3 \times 2$  matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Applying a similar discussion like the one given in Example 2.1, we get:

$$q - \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{11}a_{32} - a_{21}a_{12} + a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12} - a_{31}a_{22}.$$

Next, we show that row (and column) expansion, which is used in computing the determinant of square matrices, can be also used in computing the quasi-determinant of non-square matrices in some cases. Before stating this result, we need to give the following definitions:

**Definition 2.3. (Minor)** For natural numbers  $k$  and  $n$ , the  $(i, j)$ -minor of the matrix  $A_{k \times n}$ , denoted by  $M_{ij}$ , is defined to be the quasi-determinant of the  $(k-1) \times (n-1)$  matrix obtained by removing the  $i^{th}$  row and  $j^{th}$  column of  $A_{k \times n}$ .

**Definition 2.4. (Cofactor)** For natural numbers  $k$  and  $n$ , the  $(i, j)$ -cofactor of the matrix  $A_{k \times n}$ , denoted by  $C_{ij}$ , is  $(-1)^{i+j}$  times the corresponding minor  $M_{ij}$ , that is

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

**Theorem 2.5.** Let  $k$  and  $n$  be natural numbers with  $|k - n| = 1$  and  $A_{k \times n} = (a_{ij})_{k \times n}$  be a  $k \times n$  matrix with real entries. If  $k \leq n$ , then for each  $1 \leq i \leq k$  we have

$$q - \det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Also, if  $k \geq n$  then for each  $1 \leq j \leq n$  we have

$$q - \det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{kj}C_{kj}.$$

The validity of Theorem 2.5 in the general case (of arbitrary natural numbers  $k$  and  $n$ ) is leaved as a question.

*Remark 2.6.* Besides row and column expansion, there are also some other well-known properties of determinant of square matrices which can be proved for the quasi-determinant of non-square matrices. Some of these properties are regarding the following items [2]:

- Multiplying one of the rows of a matrix of the first type by a constant.
- Multiplying one of the columns of a matrix of the second type by a constant.
- Quasi-determinant of the transpose of a non-square matrix.

- Quasi-determinant of upper and lower triangular non-square matrices (after suitably defining these concepts).

*Remark 2.7.* An interesting property of quasi-determinant of non-square matrices is that if  $|k - n| = 1$  then  $q - \det(A_{k \times n})$  is equal to the determinant of the related square matrix obtained by adding one row or one column with all entries equal to 1.

#### REFERENCES

1. RALPH P. GRIMALDI, *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*, Addison Wesley Longman 1999.
2. K. HOFFMAN AND R. KUNZE, *Linear Algebra*, Prentice Hall 2004.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TARBIAT MOALLEM UNIVERSITY, P. O. Box 15618-36314, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* mina.maboudi.math@gmail.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TARBIAT MOALLEM UNIVERSITY, P. O. Box 15618-36314, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* a\_sanatpour@tmu.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## **SOME PROPERTIES OF HANKEL MATRIX WITH APPLICATION IN SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS**

RAHIM MAHMOUDVAND<sup>1</sup> \* AND NADER NAJARI<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** Hankel matrices play an important role in diverse areas of mathematics such as approximation and interpolation theory, theory of moments, stability theory, theory of orthogonal polynomials, system theory. In this paper we study some properties of Hankel matrix and mention to its application in the singular spectrum analysis, which used as a powerful technique in time series analysis.

### **1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES**

In linear algebra, a Hankel matrix, named after Hermann Hankel, is a matrix with constant skew-diagonals. The Hankel matrix is closely related to the Toeplitz matrix (a Hankel matrix is an upside-down Toeplitz matrix) [1]. A Hankel matrix is a matrix, finite or infinite, whose  $i, j$  entry is a function of  $i + j$  [2]. Hankel matrices are an important family of matrices and have various applications in mathematic, physics, engineering, statistics and so on.

Singular Spectrum Analysis (SSA) is a non-parametric powerful technique for time series analysis incorporates the elements of classical time series analysis, multivariate statistics, multivariate geometry, dynamical systems and signal processing ([3]). The aim of SSA is to make a decomposition of the original series into the sum of a small number of independent and interpretable components such as a slowly varying trend, oscillatory components and a structureless noise. A short description of the SSA technique is given in the following (for more information see [3]).

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A18; Secondary 15A03, 47B35.

*Key words and phrases.* Hankel Matrix, Hankelization, Singular Spectrum Analysis.

\* Speaker.

**Definition 1.1.** An  $L \times K$  Hankel matrix  $\mathbf{H}$  is a rectangular matrix of the form:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_K \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_L & h_{L+1} & \dots & h_N \end{bmatrix}.$$

where,  $N = L + K - 1$ .

**1.1. Short Description of SSA.** The basic SSA method consists of two complementary stages: decomposition and reconstruction; each stage include two separate steps. At the first stage we decompose the series and at the second stage we reconstruct the noise free series and use the reconstructed series for forecasting new data points.

*Stage I. Decomposition. 1st step: Embedding.* Embedding is as a mapping that transfers a one-dimensional time series  $Y_T = (y_1, \dots, y_N)$  into the multi-dimensional series  $X_1, \dots, X_K$  with vectors  $X_i = (y_i, \dots, y_{i+L-1})^T \in \mathbf{R}^L$ , where  $L$  ( $2 \leq L \leq N - 1$ ) is the *window length* and  $K = N - L + 1$ . The result of this step is the trajectory matrix

$$(1.1) \quad \mathbf{X} = [X_1, \dots, X_K] = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K}.$$

Note that the trajectory matrix  $\mathbf{X}$  is a Hankel matrix, which means that all the elements along the diagonal  $i + j = \text{const}$  are equal.

**2nd step: SVD.** In this step we perform the SVD of  $\mathbf{X}$ . Denote by  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  the eigenvalues of  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  arranged in the decreasing order ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ) and by  $U_1, \dots, U_L$  the corresponding eigenvectors. The SVD of  $\mathbf{X}$  can be written as  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_L$ , where  $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$  and  $V_i = \mathbf{X}^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$  (if  $\lambda_i = 0$  we set  $\mathbf{X}_i = 0$ ).

*Stage II. Reconstruction. 1st Step: Grouping.* The grouping step corresponds to splitting the elementary matrices into several groups and summing the matrices within each group. Let  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  be a group of indices  $i_1, \dots, i_p$ . Then the matrix  $\mathbf{X}_I$  corresponding to the group  $I$  is defined as  $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}$ . The split of the set of indices  $\{1, \dots, L\}$  into disjoint subsets  $I_1, \dots, I_m$  corresponds to the representation  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}$ . The procedure of choosing the sets  $I_1, \dots, I_m$  is called the grouping. For a given group  $I$ , the contribution of the component  $\mathbf{X}_I$  is measured by the share of the corresponding eigenvalues:  $\sum_{i \in I} \lambda_i / \sum_{i=1}^d \lambda_i$ , where  $d$  is the rank of  $\mathbf{X}$ .

**2nd Step: Diagonal averaging.** The purpose of diagonal averaging is to transform a matrix to the form of a Hankel matrix which can be subsequently converted to a time

series. If  $z_{ij}$  stands for an element of a matrix  $\mathbf{Z}$ , then the  $k$ -th term of the resulting series is obtained by averaging  $z_{ij}$  over all  $i, j$  such that  $i + j = k + 1$ . By performing the diagonal averaging of all matrix components of  $\mathbf{X}_{I_j}$  in the expansion of  $\mathbf{X}$  above, we obtain another expansion:  $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}_{I_1} + \dots + \tilde{\mathbf{X}}_{I_m}$ , where  $\tilde{\mathbf{X}}_{I_j}$  is the diagonalized version of the matrix  $\mathbf{X}_{I_j}$ . This is equivalent to the decomposition of the initial series  $Y_N = (y_1, \dots, y_N)$  into a sum of  $m$  series;  $y_t = \sum_{j=1}^m \tilde{y}_t^{(j)}$ , where  $\tilde{Y}_N^{(j)} = (\tilde{y}_1^{(j)}, \dots, \tilde{y}_N^{(j)})$  corresponds to the matrix  $\tilde{\mathbf{X}}_{I_j}$ .

In what follows, we use two groups of indices,  $I_1 = \{1, \dots, r\}$  and  $I_2 = \{r + 1, \dots, L\}$  and associate the group  $I = I_1$  with signal component and the group  $I_2$  with noise. It is worth mentioning, if  $\tilde{x}_{ij}$  is the  $ij^{th}$  entry of the matrix  $\tilde{\mathbf{X}}$  then applying diagonal averaging formula follows that:

$$(1.2) \quad \tilde{y}_j = \frac{1}{s_2 - s_1 + 1} \sum_{i=s_1}^{s_2} \tilde{x}_{i, j+1-i}$$

where,  $s_1 = \max\{1, j+1-K\}$ ,  $s_2 = \min\{L, j\}$  and  $\tilde{y}_j$  is the  $j^{th}$  element of the reconstructed series  $\tilde{Y}_N$ .

## 2. MAIN RESULTS

**Theorem 2.1.** *Let  $\mathbf{A}$  be an arbitrary  $L \times K$  matrix and  $\mathbf{B}$  be its corresponding Hankelized form. Then:*

$$(2.1) \quad T_{\mathbf{A}}^L \geq T_{\mathbf{B}}^L$$

where,  $T_{\mathbf{U}}^L = \text{tr}(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$ .

*Proof.* The element  $b_{ij}$  of the matrix  $B$  is as follows (see the property of a Hankel matrix in equation (1.2)):

$$(2.2) \quad b_{ij} = \frac{1}{s_2 - s_1 + 1} \sum_{l=s_1}^{s_2} a_{l, s-l}$$

where,  $s_1 = \max\{1, s-K\}$ ,  $s_2 = \min\{L, s-1\}$ . Note that equation (2.2) indicates that  $b_{l, s-l}$  is just the arithmetic mean of the elements  $\{a_{l, s-l}; l = s_1, \dots, s_2\}$ , which is denoted  $\bar{a}_s$  in the following. Let us now consider  $T_{\mathbf{A}}^L - T_{\mathbf{B}}^L$ :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{A}}^L - T_{\mathbf{B}}^L &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K a_{ij}^2 - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K b_{ij}^2 = \sum_{s=2}^{N+1} \sum_{l=s_1}^{s_2} (a_{l, s-l}^2 - b_{l, s-l}^2) \\ &= \sum_{s=2}^{N+1} \sum_{l=s_1}^{s_2} (a_{l, s-l}^2 - \bar{a}_s^2) = \sum_{s=2}^{N+1} \sum_{l=s_1}^{s_2} (a_{l, s-l} - \bar{a}_s)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

**Corollary 2.2.** *Let  $\{\lambda_{1_A}, \dots, \lambda_{L_A}\}$  and  $\{\lambda_{1_B}, \dots, \lambda_{L_B}\}$  denote the eigenvalues of the matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$ , respectively. Then:*

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^L \lambda_{i_A} = \sum_{i=1}^L \lambda_{i_B} + \sum_{s=2}^{N+1} \sigma_s^2$$

where  $\sigma_s^2 = \sum_{l=s_1}^{s_2} (a_{l,s-l} - b_{l,s-l})^2$  is the diagonal variance of the  $s^{\text{th}}$  secondary diagonal of the matrix  $\mathbf{B}$ , and  $s_1 = \max\{1, s - K\}$ ,  $s_2 = \min\{L, s - 1\}$ .

**Corollary 2.3.** *Matrix  $\mathbf{B}$  is the nearest matrix to  $\mathbf{A}$  among all Hankel matrices of dimension  $L \times K$  with respect to  $T_{\mathbf{A}}^L$ . (It shows that hankelization by diagonal averaging attains maximum information.)*

**Theorem 2.4.** *Let  $\mathbf{B}$  denote the Hankelized form of the arbitrary  $L \times K$  matrix  $\mathbf{A}$ . Then:*

$$T_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}^L = T_{\mathbf{A}}^L - T_{\mathbf{B}}^L.$$

*Proof.* Let us first show that  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)$ .

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K a_{ij} b_{ij} = \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{l=s_1}^{s_2} a_{l,s-l} b_{l,s-l} \\ &= \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{l=s_1}^{s_2} a_{l,s-l} \bar{a}_s = \sum_{s=1}^{N+1} w_{s-1}^L \bar{a}_s^2 = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T) \end{aligned}$$

Using the above equality, we have:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}^L &= \text{tr}((\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) + \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T) - 2\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) - \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T) = T_{\mathbf{A}}^L - T_{\mathbf{B}}^L. \end{aligned}$$

□

**Corollary 2.5.** *Let  $\{\lambda_{1_A}, \dots, \lambda_{L_A}\}$ ,  $\{\lambda_{1_B}, \dots, \lambda_{L_B}\}$  and  $\{\lambda_{1_{A-B}}, \dots, \lambda_{L_{A-B}}\}$  be the eigenvalues of the matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ , respectively. Then:*

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^L \lambda_{i_{A-B}} = \sum_{i=1}^L \lambda_{i_A} - \sum_{i=1}^L \lambda_{i_B}.$$

**Corollary 2.6.** *Let  $\{\lambda_{1_A}, \dots, \lambda_{L_A}\}$ ,  $\{\lambda_{1_B}, \dots, \lambda_{L_B}\}$  and  $\{\lambda_{1_{A+B}}, \dots, \lambda_{L_{A+B}}\}$  be the eigenvalues of the matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , respectively. Then:*

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^L \lambda_{i_{A+B}} = \sum_{i=1}^L \lambda_{i_A} + 3 \sum_{i=1}^L \lambda_{i_B}.$$

### 3. CONCLUSION

In this paper the role of Hankel matrix and hankelization by diagonal averaging are considered in SSA procedure and several theorems about the properties of Hankel matrix and hankelization process are presented. According to the mentioned theorems and their conclusions it can be seen that hankelization is an optimal procedure in SSA. Moreover review of SSA show that embedding time series to Hankel matrix in the first step and smoothing via hankelization in the final step makes SSA differ from (and reliable than) principal component analysis which is an SVD based technique for analysis of multivariate data.

### REFERENCES

1. WEB SITE: [http://www.en.wikipedia.org/wiki/Hankel\\_matrix](http://www.en.wikipedia.org/wiki/Hankel_matrix)
2. WIDOM, H. (1966). Hankel Matrix. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 121, No. 1, pp. 1-35.
3. GOLYANDINA, N., NEKRUTKIN, V., AND ZHIGLJAVSKY, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure: SSA and related techniques*, Chapman & Hall/CRC, New York - London,

<sup>1,2</sup> FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES, SHAHID BEHESHTI UNIVERSITY, P. O. Box 1983963113, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* r.mahmodvand@gmail.com, nader\_najari85@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## RELATIONSHIP BETWEEN SINGULAR VALUES AND RANK OF THE HANKEL MATRIX

RAHIM MAHMOUDVAND<sup>1\*</sup> AND MOHAMMAD ZOKAEI<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** Hankel matrices are an important family of matrices and have various applications. In this paper the effect of changing dimension of the Hankel matrix on the singular values is considered.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

A Hankel matrix is a matrix, finite or infinite, whose  $i, j$  entry is a function of  $i + j$  [1]. In other words a matrix whose entries are the same along the anti-diagonals is called a Hankel matrix. Hankel matrices play a role in diverse areas of mathematics such as approximation and interpolation theory, theory of moments, stability theory, theory of orthogonal polynomials, system theory, as well as in communication and control engineering including filter design, identification, model reduction and broadband matching (for more details see [2]). Thus, these type of matrices were subjected to intensive study with respect to their spectrum ( collection of eigenvalues ) and many interesting results were derived. Since closed form computation of eigenvalues is not known the effect of changing dimension of matrix on eigenvalues were not investigated in detail. Here we consider this problem and try to find the effect of changing dimension of the hankel matrix on singular values.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A18; Secondary 15A03, 47B35.  
*Key words and phrases.* Hankel Matrix, Singular Value Decomposition, Eigen Value.

\* Speaker.

## 2. MAIN RESULTS

**Definition 2.1.** An  $L \times K$  Hankel matrix  $\mathbf{H}$  is a rectangular matrix of the form:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_K \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_L & h_{L+1} & \dots & h_N \end{bmatrix}.$$

where,  $N = L + K - 1$ .

Throughout of this paper, the matrices to be considered are over the field of real numbers. Moreover we consider different values of  $L$  whereas  $N$  is supposed to be fixed. Recall that for any operator  $\mathbf{A}$  the operator  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  is always positive, and its unique positive square root is denoted by  $|\mathbf{A}|$ . The eigenvalues of  $|\mathbf{A}|$  counted with multiplicities are called the singular values of  $\mathbf{A}$ . As we know the number of non-zero eigenvalues of  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  is equal to the rank of  $\mathbf{H}$ . Below, we try to find some inequalities between the ordered eigenvalues with respect to different values of  $L$ . Let  $\lambda_j^{L,N}$  denote the  $j^{\text{th}}$  ordered eigenvalue of  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ , where  $\mathbf{H}$  is the Hankel matrix  $L \times K$ . According to Cauchy's Interlacing Theorem (see, [3]) it can be given the following theorem:

**Theorem 2.2.** *Let  $\mathbf{H}$  be a  $L \times K$  Hankel matrix as defined above. Then, we have:*

$$(2.1) \quad \lambda_j^{L,N} \geq \lambda_j^{L-m,N-m} \geq \lambda_{j+m}^{L,N} \text{ for } j = 1, \dots, L-m.$$

As it appeared from the title of this paper, we would like to find a relationship between  $\lambda_j^{L-m,N}$  and  $\lambda_j^{L,N}$ , therefore Theorem 2.2 shouldn't use directly. In the following we consider four cases and show that we can find general relation for some classes of hankel matrix.

*Case 1:*  $L \geq 1$ , rank of  $\mathbf{H} = 1$ . It is obvious that we have one positive eigenvalue. Therefore we can write:

$$(2.2) \quad \lambda_1^{L,N} = \sum_{j=1}^L \lambda_j^{L,N} = \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^T) = \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^{K+l-1} h_j^2$$

It is not difficult to see that, eigenvalue  $\lambda_1^{L,N}$  increases with  $L$  till  $\lceil \frac{N+1}{2} \rceil$  and then decreases for  $L \geq \lceil \frac{N+1}{2} \rceil + 1$ . Therefore we have  $\lambda_1^{L-m,N} \leq \lambda_1^{L,N}$ ,  $L \leq \lceil \frac{N+1}{2} \rceil$  provided that the conditions of case 1 satisfied. In the following example we give a model that has these conditions.

**Example 2.3.** Let  $h_t = e^{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot t}$ ,  $t = 1, \dots, N$ . It is easy to see that the corresponding hankel matrix  $\mathbf{H}$  has rank one.

*Case 2:  $L = 2$ , rank of  $\mathbf{H} = 2$ .* In this case, there are at most two eigenvalues which are the solution of the following quadratic equation:

$$(2.3) \quad \lambda^2 - \left( \sum_{j=1}^{N-1} h_j^2 + \sum_{j=2}^N h_j^2 \right) \lambda + \sum_{j=1}^{N-1} h_j^2 \sum_{j=2}^N h_j^2 - \left( \sum_{j=1}^{N-1} h_j h_{j+1} \right)^2 = 0$$

Equation (2.3) has two real solutions, and hence we have two real eigenvalues. The first eigenvalue (larger one) is:

$$(2.4) \quad \lambda_1^{2,N} = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} h_j^2 + \sum_{j=2}^N h_j^2 + \sqrt{(h_1^2 - h_N^2)^2 + 4 \left( \sum_{j=1}^{N-1} h_j h_{j+1} \right)^2}}{2}$$

Equation (2.4) shows that:

$$\lambda_1^{2,N} = \begin{cases} \geq \lambda_1^{1,N} & \text{if } \left( \sum_{j=1}^{N-1} h_j h_{j+1} \right)^2 \geq h_1^2 h_N^2 \\ \leq \lambda_1^{1,N} & \text{if } \left( \sum_{j=1}^{N-1} h_j h_{j+1} \right)^2 \leq h_1^2 h_N^2 \end{cases}$$

where  $\lambda_1^{1,N} = \sum_{j=1}^N h_j^2$  (when  $L = 1$ ).

As it indicated in case 1 we can't find a general inequality between  $\lambda_j^{L-m,N}$  and  $\lambda_j^{L,N}$ . But this example show that we can do it considering some conditions. Of Course in practice it seems that the first condition usually satisfied for a wide classes of models. For example it can be seen that the condition is equivalent to monotonicity of the sequence  $\{h_j\}_{j=1}^N$ .

For a non-negative (or non-positive) monotone sequence, we have  $\sum_{j=1}^{N-1} h_j h_{j+1} \geq h_1 h_N$ .

Applying equation (2.4) follows  $\lambda_1^{2,N} \geq \sum_{j=1}^{N-1} h_j^2 = \lambda_1^{1,N-1}$ . Greater class has obtained if we consider positive data which all observations are bigger that the first one and  $h_1 \geq \frac{h_N}{N-1}$ .

Under this condition it is easy to show that  $\sum_{j=1}^{N-1} h_j h_{j+1} \geq h_1 h_N$  and therefore  $\lambda_1^{2,N} \geq \lambda_1^{1,N}$ .

Of Course we will see in the next example that there are some models that have not these condition but  $\lambda_1^{2,N} \geq \lambda_1^{1,N}$ .

*Case 3:  $L > 2$ , rank of  $\mathbf{H} = 2$ .* In this case  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  has two positive eigenvalues. To obtain the eigenvalues first of all note that:

$$(2.5) \quad \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{H}^T) = \lambda^L + c_1 \lambda^{L-1} + \dots + c_{L-1} \lambda + c_L$$

where the coefficients of  $c_j$  can be obtained from following lemma:

**Lemma 2.4.** (Theorem 1.2.12 in [4]) *If  $\mathbf{A}$  is a real or complex  $n \times n$  matrix with eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  then for  $1 \leq k \leq n$ ,*

- (1)  $s_k(\lambda) = (-1)^k c_k$ :
- (2)  $s_k(\lambda)$  is the sum of all  $k \times k$  principal minors of  $\mathbf{A}$ .

Equation (2.5) shows that the eigenvalues of  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  in this case are the solution of the following quadratic equation:

$$(2.6) \quad \lambda^2 - \lambda \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^{K+l-1} h_j^2 + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{L-l} \left\{ \left( \sum_{j=l}^{K+l-1} h_j^2 \right) \left( \sum_{j=l}^{K+l-1} h_{j+i}^2 \right) - \left( \sum_{j=l}^{k+l-1} h_j h_{j+i} \right)^2 \right\} = 0$$

The first eigenvalue (larger one) is:

$$(2.7) \quad \lambda_1^{L,N} = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^{K+l-1} h_j^2 + \sqrt{\Delta_L}}{2}$$

where  $\Delta_L$  is the discriminant of the quadratic equation (2.6).

*Case 4:  $L > 2$ , rank of  $\mathbf{H} > 2$ .* Applying equation (2.5) it can be obtained characteristic equation and solving it give eigenvalues of  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ . However, calculating their functional forms are very sophisticated in this case and therefore we consider several series to check the interesting relationship between eigenvalues.

**Example 2.5.** Let  $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ ,  $t = 1, \dots, N$ . It is easy to show that rank of corresponding hankel matrix  $\mathbf{H}$  is 3. Figure 1 show three eigenvalues of  $\mathbf{H}$  for  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, N = 20$ . As it appeared from this figure we can say that all eigenvalues of  $\mathbf{H}$  increase for  $L \leq \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$  and then decrease.

### 3. CONCLUSION

In this paper we studied the behaviour of the singular values of a hankel matrix with respect to it's dimension. We considered four cases and showed that for a wide classes of hankel matrix,  $\lambda_j^{L,N}$  increases with  $L$  in  $L \in \{1, \dots, \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor\}$ .

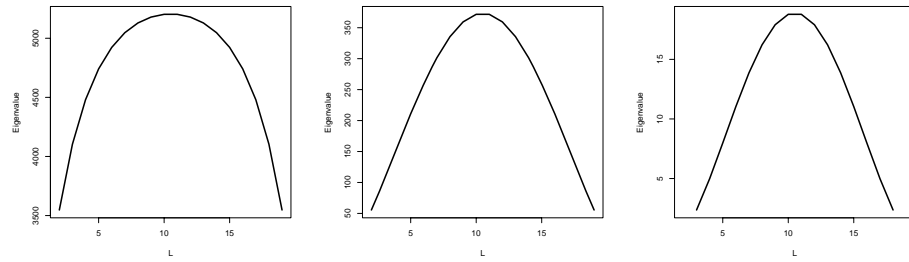


FIGURE 1. Plot of  $\lambda_j^{L,N}$  with respect to  $L$  for  $N = 20$ .

### REFERENCES

1. WIDOM, H. (1966). Hankel Matrix. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 121, No. 1, pp. 1-35.
2. PELLER, V, *Hankel Operators and Their Applications*, Springer Verlag, 2003.
3. BHATIA, R, *Matrix Analysis*, Springer Verlag, 1997.
4. HORN, R. A. AND JOHNSON, C. R, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

<sup>1,2</sup> FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES, SHAHID BEHESHTI UNIVERSITY, P. O. Box 1983963113, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* r.mahmoudvand@gmail.com, Zokaei@sbu.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## INVERSE EIGENVALUE PROBLEM FOR A SPECIAL KIND OF SYMMETRIC MATRICES

SIMA MASHAYEKHI<sup>1\*</sup>, S. MEHDI KARBASSI<sup>2</sup> AND S. ABOLFAZL SHAHZADEF AZELI<sup>3</sup>

**ABSTRACT.** In this paper, inverse eigenvalue problem for bordered diagonal matrices are reconsidered. These are matrices whose elements are equal to zero except for the first row, the first column and the diagonal elements. The necessary and sufficient conditions for existence of a symmetric bordered diagonal matrix, in which  $a_j = ma_1$  are the diagonal elements and  $b_{j-1} > 0, j = 2, \dots, n$  are the elements of first row of this matrix, are determined. A new algorithm to make such matrices is derived and some numerical examples are given to illustrate the efficiency of the method.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

We consider the problem of constructing a symmetric bordered diagonal matrix of the form:

$$(1.1) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & ma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & ma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & ma_1 \end{pmatrix}, \quad a_1 \in R, \quad b_j > 0, \quad m \in R$$

This class of matrices appear in certain symmetric inverse eigenvalue and inverse Sturm Liouville problems, which arise in many applications, including control theory and vibration analysis [1, 2, 3].

2000 *Mathematics Subject Classification.* 15xx-15A29.

*Key words and phrases.* Inverse eigenvalue problem; Bordered diagonal matrix; Leading principal submatrix .

\* Speaker.

Throughout this paper, we denote by  $A_j$  the  $j \times j$  leading principal submatrix of  $A$ , by  $\phi_j(\lambda)$  the characteristic polynomial of  $A_j$  and by  $\lambda_1^{(j)} \leq \lambda_2^{(j)} \leq \dots \leq \lambda_j^{(j)}$  the eigenvalues of  $A_j, j = 1, \dots, n$ . This work is motivated by the results in [4, 5]. The authors introduced two special cases of inverse eigenvalue problems, for constructing a symmetric tridiagonal matrix with constant diagonal elements.

We develop the case in which there exists a unique matrix,  $A$ , of the form as defined in (1.1), if and only if

$$(1.2) \quad \lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \dots < \lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \dots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)} ,$$

$$(1.3) \quad \lambda_1^{(j)} + \lambda_j^{(j)} = (m+1)\lambda_1^{(1)} , \quad j = 2, \dots, n , \quad m \in R.$$

Note that the cases presented in [5] are obtained for  $m = -1$  and  $m = 1$  in relation (1.3). We also show that in computation of matrix  $A$ , the characteristic polynomial of every leading principal submatrix of  $A$  is independent of other submatrices and hence any element of  $A$  may be calculated independently. This leads to an algorithm for constructing a matrix of the form (1.1) which is much simpler than the algorithm in [4], besides fewer calculations are required. Finally, we show an example to illustrate the results.

## 2. MAIN RESULTS

In this section we construct a symmetrical bordered diagonal matrix  $A$  of the form (1.1), from the minimal and maximal eigenvalues  $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$  of all its leading principal submatrices  $A_j, j = 1, 2, \dots, n$ . For convenience of discussion, let us define  $b_0 = 1, \phi_0(\lambda) = 1$  and  $\phi_j(\lambda) = \det(\lambda I_j - A_j)$ . We start with the following well known result:

We also need the following theorem:

**Theorem 2.1.** *Let  $2n-1$  real numbers  $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}, j = 1, \dots, n$  be given. Then there exists a unique  $n \times n$  matrix  $A$  of the following form*

$$(2.1) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} , \quad a_j \in R , \quad b_j > 0$$

such that  $\lambda_1^{(j)}$  and  $\lambda_j^{(j)}$  are the minimal and the maximal eigenvalue of each leading principal submatrix  $A_j, j = 1, \dots, n$  of  $A$ , respectively, if and only if

$$(2.2) \quad \lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \dots < \lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \dots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)}.$$

*Proof.* See[5]. □

From this theorem the following corollary is deduced.

**Corollary 2.2.** *If  $2n - 1$  real numbers  $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}, j = 1, \dots, n$  satisfy (2.2), then the elements of unique matrix  $A$  are in the following form:*

$$a_1 = \lambda_1^{(1)}$$

and for  $j = 2, \dots, n$

$$(2.3) \quad a_j = \frac{\lambda_1^{(j)} \phi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_j^{(j)} - a_i) - \lambda_j^{(j)} \phi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_1^{(j)} - a_i)}{\phi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_j^{(j)} - a_i) - \phi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_1^{(j)} - a_i)}$$

$$(2.4) \quad b_{j-1}^2 = \frac{(\lambda_j^{(j)} - \lambda_1^{(j)}) \phi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) \phi_{j-1}(\lambda_j^{(j)})}{\phi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_j^{(j)} - a_i) - \phi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1} (\lambda_1^{(j)} - a_i)}$$

**Lemma 2.3.** *For a given matrix  $A$  of the form:*

$$(2.5) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & ma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & ma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & ma_1 \end{pmatrix}, \quad a_1 \in R, \quad b_j > 0, \quad m \in R$$

the sequence  $\{\phi_j(\lambda)\}$  satisfies the recurrence relation

$$(2.6) \quad \phi_j(\lambda) = (\lambda - ma_1)^{j-2} \left[ (\lambda - a_1)(\lambda - ma_1) - \sum_{i=1}^{j-1} b_i^2 \right], \quad 2 \leq j \leq n$$

*Proof.* The result can be verified by direct expansion of determinant of  $A$ , easily. □

**Corollary 2.4.** *If  $A$  is a matrix of the form (2.5), then  $ma_1$  is the repetitive eigenvalue of order  $j - 2$  of leading principal submatrix  $A_j$  for  $2 \leq j \leq n$ . (See equation (2.6)).*

**Theorem 2.5.** *Let  $2n-1$  real numbers  $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}, j = 1, \dots, n$  be given. Then there exists a unique  $n \times n$  matrix  $A$  of the form (2.5) such that  $\lambda_1^{(j)}$  and  $\lambda_j^{(j)}$  are the minimal and the maximal eigenvalue of the leading principal submatrix  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  of  $A$ , respectively, if and only if*

$$(2.7) \quad \lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \dots < \lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \dots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)}$$

$$(2.8) \quad \lambda_1^{(j)} + \lambda_j^{(j)} = (m+1)\lambda_1^{(1)}, \quad j = 2, \dots, n, \quad m \in R$$

*Proof.* We have proved this theorem with attention to lemmas and theorems that we introduced later.  $\square$

**Example 2.6.**

$$\begin{array}{cccccccccccc} \lambda_1^{(6)} & \lambda_1^{(5)} & \lambda_1^{(4)} & \lambda_1^{(3)} & \lambda_1^{(2)} & \lambda_1^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \lambda_3^{(3)} & \lambda_4^{(4)} & \lambda_5^{(5)} & \lambda_6^{(6)} \\ -21.151 & -9.117 & -8.13 & -6 & -5.9 & -4.7 & -3.1898 & -3.0898 & -0.9598 & 0.0272 & 12.0612 \end{array}$$

These numbers satisfy (2.7) and (2.8) of the Theorem 2.2, i.e.

$$\lambda_1^{(j)} + \lambda_j^{(j)} = (0.934 + 1)\lambda_1^{(1)}, \quad j = 2, \dots, 6.$$

Therefore with the given spectral data, the symmetric bordered diagonal matrix is as follows:

$$A = \begin{pmatrix} -4.7000 & 1.3462 & 0.5301 & 3.2765 & 2.8375 & 15.9643 \\ 1.3462 & -4.3898 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5301 & 0 & -4.3898 & 0 & 0 & 0 \\ 3.2765 & 0 & 0 & -4.3898 & 0 & 0 \\ 2.8375 & 0 & 0 & 0 & -4.3898 & 0 \\ 15.9643 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.3898 \end{pmatrix}$$

Now suppose the matrix  $A$  is given in above form. Clearly,  $A$  is in consonance with (1.1), with  $m = 0.934$  and the eigenvalues of leading principal submatrices  $A_j$  of  $A$  are:

$$\sigma(A_1) = \{-4.7\}$$

$$\sigma(A_2) = \{-5.9000, -3.1898\}$$

$$\sigma(A_3) = \{-6.000, -4.3898, -3.0898\}$$

$$\sigma(A_4) = \{-8.1300, -4.3898, -4.3898, -0.9598\}$$

$$\sigma(A_5) = \{-9.1170, -4.3898, -4.3898, -4.3898, 0.0272\}$$

$$\sigma(A_6) = \{-21.1510, -4.3898, -4.3898, -4.3898, -4.3898, 12.0612\}$$

We observe relations (2.7) and (2.8) hold and

$$\lambda_1^{(j)} + \lambda_j^{(j)} = (0.934 + 1)\lambda_1^{(1)} = -9.0898, \quad j = 2, \dots, 6.$$

## REFERENCES

1. M.T. CHU, G.H. GOLUB, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and applications*, Oxford University Press, New York, 2005.
2. L. ELSNER, C. HE, *Perturbation and interlace theorems for the unitary eigenvalue problem*, Linear Algebra and its Applications, Volumes 188-189 (2006) 336-347.
3. G.M.L. GLADWELL, N.B. WILLMS, *The construction of tridiagonal system from its frequency response at an interior point*, Inverse Problems 4 (1988) 1013-1024.
4. J. PENG, X.Y. HU, L. ZHANG, *Two inverse eigenvalue problems for a special kind of matrices*, Linear Algebra and its Applications 416 (2006) 336-347.
5. H. PICKMAN, J. EGANA, R.L. SOTO, *External inverse eigenvalue problem for bordered diagonal matrices*, Linear Algebra and its Applications 427 (2007) 256-271.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY, ARAK, IRAN.

*E-mail address:* s-mashayekhi@araku.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, YAZD UNIVERSITY, IRAN.

*E-mail address:* smkarbassi@yazduni.ac.ir

<sup>3</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, YAZD UNIVERSITY, IRAN.

*E-mail address:* fazeli@yazduni.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ON SOLVING SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS BY THE VHPM

M. MATINFAR<sup>1\*</sup> AND M. GHASEMI<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** As we know finding the exact solutions or the solutions that are close to the exact ones of the system of linear equations is very important because we can't use the approximate value for some systems. For example in electronic systems using the solutions that aren't close to the exact ones can be very dangerous. Hence, applying the appropriate method with high rate of convergence and accuracy is very important. In this paper we introduce the Variational Homotopy Perturbation Method (VHPM) as a helpful and reliable method for finding the solutions of the system of linear equations.

### 1. Introduction and Preliminaries

The chines researcher J.H.He introduced an effective method for solving different kinds of PDEs and ODEs and called that Variational Iteration Method (VIM) [1]. Combined VIM with Homotopy Perturbation Method (HPM) [2] made the modification on the result of combination and called that the VHPM. This method is an effective instrument for solving linear and nonlinear PDEs and ODEs. It has been applied for solving different kinds of equations and by comparison which was made between the obtained results and the exact solutions, rapid convergence was approved [3, 4]. Recently Keramati used HPM [5] for solving the system of linear equations for the first time. In this article we use the VHPM for solving this system and show that this method is effective not only for differential equations but also for system of linear equations and this ability of the VHPM made it more reliable and applicable. In following first we introduce the VHPM and to demonstrate the above idea numerical examples are given. In solving procedure we show that the VHPM is easy to apply and has rapid convergence.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34A30; 35A15.

*Key words and phrases.* System of linear equations; Variational homotopy perturbation method

\* Speaker.

## 2. Basic idea of the VHPM

To illustrate the basic idea of the VHPM, we consider the following general differential equation

$$(2.1) \quad Lu + Nu = g(x)$$

where  $L$  is a linear operator,  $N$  is a nonlinear operator and  $g(x)$  is an inhomogeneous term. According to the VIM as illustrated in previous subsection we can construct a correction functional as follows:

$$(2.2) \quad u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^t \lambda(\tau) \{Lu_n + N\tilde{u}_n - g(\tau)\} d\tau,$$

where  $\lambda(\tau)$  is a general Lagrange multiplier. Now we apply the homotopy perturbation method

$$(2.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n = u_0(x) + p \int_0^t \lambda(\tau) \left\{ N \left( \sum_{n=0}^{\infty} p^n \tilde{u}_n \right) \right\} d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) g(\tau) d\tau,$$

which is the coupling of VIM and He's polynomials and is called the Modified Variational Iteration Method (MVIM). The comparison of like powers of  $p$  gives solutions of various orders. For later numerical computation, we let the expression  $\phi_n = \sum_{i=0}^n u_i(x, y, t)$  and  $\varphi_n = \sum_{i=0}^n v_i(x, y, t)$  to denote the  $n$ -term approximation to  $u(x, y, t)$  and  $v(x, y, t)$ .

## 3. Numerical example

### Example 1.4

Now consider this system of linear equations:

$$(3.1) \quad \begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases}$$

with the exact solution  $x = (1, 2, -1, 1)^t$ . As the same as previous example  $\lambda_1 = \frac{-1}{10}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-1}{11}$ ,  $\lambda_3 = \frac{-1}{10}$  and  $\lambda_4 = \frac{-1}{8}$ . By considering the VHPM for each equation we have:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} x_{1k} p^k &= X_{10} - \frac{p}{10} \left[ - \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k} p^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} x_{3k} p^k \right] + \frac{6}{10}, \\
 \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k} p^k &= X_{20} - \frac{p}{11} \left[ - \sum_{k=0}^{\infty} x_{1k} p^k - \sum_{k=0}^{\infty} x_{3k} p^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} x_{4k} p^k \right] + \frac{25}{11}, \\
 \sum_{k=0}^{\infty} x_{3k} p^k &= X_{30} - \frac{p}{10} \left[ 2 \sum_{k=0}^{\infty} x_{1k} p^k - \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k} p^k - \sum_{k=0}^{\infty} x_{4k} p^k \right] - \frac{11}{10}, \\
 \sum_{k=0}^{\infty} x_{4k} p^k &= X_{40} - \frac{p}{8} \left[ 3 \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k} p^k - \sum_{k=0}^{\infty} x_{3k} p^k \right] + \frac{15}{8}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

By choosing

$$X_0 = (0, 0, 0, 0)^t,$$

and by comparison of like powers of  $p$  we have:

$$\begin{aligned}
 p^0 : x_{10} &= \frac{6}{10}, \\
 p^1 : x_{11} &= \frac{-1}{10}(-x_{20} + 2x_{30}), \\
 p^2 : x_{12} &= \frac{-1}{10}(-x_{21} + 2x_{31}), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

and for second equation:

$$\begin{aligned}
 p^0 : x_{20} &= \frac{25}{11}, \\
 p^1 : x_{21} &= \frac{-1}{11}(-x_{10} - x_{30} + 3x_{40}), \\
 p^2 : x_{22} &= \frac{-1}{11}(-x_{11} - x_{31} + 3x_{41}), \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

and as the same as second one for two last ones:

$$\begin{aligned}
 p^0 : x_{30} &= \frac{-11}{10}, \\
 p^1 : x_{31} &= \frac{-1}{10}(2x_{10} - x_{20} - x_{40}), \\
 p^2 : x_{32} &= \frac{-1}{10}(2x_{11} - x_{21} - x_{41}), \\
 &\vdots \\
 p^0 : x_{40} &= \frac{15}{8}, \\
 p^1 : x_{41} &= \frac{-1}{8}(3x_{20} - x_{30}), \\
 p^2 : x_{42} &= \frac{-1}{8}(3x_{21} - x_{31}), \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

So, by this recursive formulation we can find the component of the solution of this system of linear equations. Obtained results that are provided in table (2) shows that with this method we have high rate of convergence.

Table 2: The obtained results by the VHPM

<i>iteration</i>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	0.6000	2.2727	-1.1000	1.8750
2	1.0473	1.7159	-0.8052	0.8852
3	0.9326	2.0533	-1.0493	1.1309
4	1.0152	1.9537	-0.9681	0.9738
5	0.9890	2.0114	-1.0103	1.0214
6	1.0032	1.9922	-0.9945	0.9944
7	0.9981	2.0023	-1.0020	1.0036
8	1.0006	1.9987	-0.9990	0.9989
9	0.9997	2.0004	-1.0004	1.0006
10	1.0001	1.9998	-0.9998	0.9998

#### 4. Conclusion:

This paper presents the new use of the VHPM for solving the system of linear equations. By studying the tables, it is clear this method is very good because of its simplicity, rapid convergence and excellent agreement with the exact solution of the systems and contrary on the other methods it doesn't need difficult and time consuming computation.

#### REFERENCES

1. J.H. HE, X.H. WU, *Variational iteration method: new development and applications*, Comput. and Mth. with Applications, 54(7-8): 881-894, 2007.
2. J.H. HE, *Homotopy perturbation method : a new nonlinear analytical technique*, Appl. Math. and Compu., 135(1): 73-79, 2002.
3. M. MATINFAR, M. MAHDAVI AND Z. RAEISI, *The variational homotopy perturbation method for solving analytic treatment of the linear and nonlinear ordinary differential equations*, J. Appl. Math. and Informatics, 28(3-4): 845-862, 2010.
4. M. MATINFAR, M. GHASEMI, *Variational Homotopy Perturbation Method for the Zakharove-Kuznetsov Equations*, J. of Math. and Statistics, 6(4): 425-430, 2010.
5. B. KERAMATI, *An approach to the solution of linear system of equations by He's homotopy perturbation method*, Chaos Soliton and Fractals. 41: 152-156, 2009.

<sup>12</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MAZANDARAN UNIVERSITY, P. O. BOX 47415-95447, BABOL SAR, IRAN.

*E-mail address:* m.matinfar@umz.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ON SOLVING FULLY FUZZY SYSTEM EQUATIONS BY TS DECOMPOSITION METHOD

M. MATINFAR<sup>1\*</sup> AND H. KAMYAB

**ABSTRACT.** This paper tries to extend the TS decomposition method for solving fully fuzzy linear systems (FFLS). For finding a fuzzy vector  $\tilde{x}$  that satisfies  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ , where  $\tilde{A}$  and  $\tilde{b}$  are respectively a fuzzy matrix and a fuzzy vector, we employ Dubois and Prades approximate arithmetic operators on LR fuzzy numbers. We also transform the FFLS and use the TS decomposition method for solving an FFLS.

### 1. Introduction and Preliminaries

A general model for solving a fuzzy linear system whose coefficient matrix is crisp and the right-hand side column is an arbitrary fuzzy vector, first proposed by Friedman et al. [5].

**Definition 1.1.** Consider the  $n \times n$  fuzzy linear system of equations:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{a_{11}} \otimes \widetilde{x_1}) \oplus (\widetilde{a_{12}} \otimes \widetilde{x_2}) \oplus \dots \oplus (\widetilde{a_{1n}} \otimes \widetilde{x_n}) = \widetilde{b_1}, \\ (\widetilde{a_{21}} \otimes \widetilde{x_1}) \oplus (\widetilde{a_{22}} \otimes \widetilde{x_2}) \oplus \dots \oplus (\widetilde{a_{2n}} \otimes \widetilde{x_n}) = \widetilde{b_2}, \\ \vdots \\ (\widetilde{a_{n1}} \otimes \widetilde{x_1}) \oplus (\widetilde{a_{n2}} \otimes \widetilde{x_2}) \oplus \dots \oplus (\widetilde{a_{nn}} \otimes \widetilde{x_n}) = \widetilde{b_n}. \end{array} \right.$$

The matrix form of the above equations is

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b},$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34A30; 49M27.

*Key words and phrases.* Fuzzy system of linear equations; TS decomposition.

\* Speaker.

where the coefficient matrix  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  is a  $n \times n$  fuzzy matrix and  $\tilde{x}_j, \tilde{b}_i \in F(R)$ . This system is called a fully fuzzy linear system (FFLS).

In this paper we are going to find a positive solution of FFLS  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ , where  $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$ ,  $\tilde{b} = (b, h, g) > \tilde{0}$  and  $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ . So we have

$$(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, h, g).$$

**Definition 1.2.** [2] Consider the positive FFLS (1.1).  $\tilde{x}$  is a solution, if and only if

$$(1.2) \quad \begin{cases} Ax = b, \\ Ay + Mx = h, \\ Az + Nx = g. \end{cases}$$

In addition, if  $y \geq 0, z \geq 0$  and  $x - y \geq 0$  we say  $\tilde{x} = (x, y, z)$  is a consistent of positive FFLS or for abbreviation consistent solution. Otherwise, it will be called dummy solution.

## 2. TS decomposition

We shall prove our main results on Triangular and Symmetric decomposition in this section. Assume that  $\tilde{A} = (A, M, N)$  be a non-negative fuzzy matrix, where  $A$  is a non-singular and nonsymmetric. We can write

$$(Ax, Ay + Mx, Az + Nx) = (b, h, g).$$

Thus we have

$$(2.1) \quad \begin{cases} Ax = b, \\ Ay + Mx = h, \\ Az + Nx = g. \end{cases}$$

In other words we have

$$\begin{cases} Ax = b & \Rightarrow x = A^{-1}b, \\ Ay = h - Mx & \Rightarrow y = A^{-1}(h - Mx), \\ Az = g - Nx & \Rightarrow z = A^{-1}(g - Nx). \end{cases}$$

**Theorem 2.1.** [1] For every nonsingular and nonsymmetric  $n \times n$  matrix  $A$ , whose leading principal sub matrices are nonsingular, there exists  $S$  and  $T$  such that  $A = TS$ , where  $T$  is triangular and  $S$  is symmetric and positive definite.

Compute TS-decomposition for crisp matrix  $A$  as

$$A = TS.$$

For system of (1.2) we have

$$(2.2) \quad \begin{cases} TSx = b, \\ TSy = h - Mx, \\ TSz = g - Nx. \end{cases}$$

If  $Sx = t_1$ ,  $Sy = t_2$  and  $Sz = t_3$  then

$$(2.3) \quad \begin{cases} Tt_1 = b, \\ Tt_2 = h - Mx, \\ Tt_3 = g - Nx. \end{cases}$$

At first we solve system of (2.2) and with applying cholesky decomposition or the conjugate gradient method we can solving system of  $Sx = t_1$ ,  $Sy = t_2$  and  $Sz = t_3$  or system of (2.1). For more information we can see [3, 4].

### 3. Numerical example

**Example 3.1.** Consider the following FFLS (taken from [2]):

$$\begin{pmatrix} (6, 1, 4) & (5, 2, 2) & (3, 2, 1) \\ (12, 8, 20) & (14, 12, 15) & (8, 8, 10) \\ (24, 10, 34) & (32, 30, 30) & (20, 19, 24) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (58, 30, 60) \\ (142, 139, 257) \\ (316, 297, 514) \end{pmatrix}.$$

TS-decomposition for matrix  $A$  as follows:

$$A = TS,$$

that is

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 14 & 8 \\ 24 & 32 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.000 & 0 & 0 \\ 8.6667 & 4.000 & 0 \\ 13.8333 & 11.000 & 2.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.8333 & 0.5000 \\ 0.8333 & 1.6944 & 0.9167 \\ 0.5000 & 0.9167 & 1.5000 \end{pmatrix},$$

Thus, by using Eq.(9) we obtain

$$\tilde{x}_1 = (4, 1, 3), \quad \tilde{x}_2 = (5, 0.5000, 2), \quad \tilde{x}_3 = (3, 0.5000, 1),$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} (4, 1, 3) \\ (5, 0.5000, 2) \\ (3, 0.5000, 1) \end{pmatrix}.$$

As we see, the mentioned system has a same solution with LU decomposition method which is proposed in [2].

#### 4. Conclusion

In this paper a general model structure is presented for solving of linear equations (systems) with fuzzy variables and parameters. We proposed TS-decomposition for solving the extended fully fuzzy linear systems and compared with some other works.

**Acknowledgements:** We thanks to the Research Center of Algebraic hyper-structures and Fuzzy Mathematics for its partly supports.

#### REFERENCES

1. G.H. GOLUB, J.Y. YAN, *Symmetric-Triangular Decomposition and Its Applications, Part I: Theorems and algorithms*, BIT, 42: 814-822, 2002.
2. M. DEHGHAN, B. HASHEMI, M. GHATEE, *Computational methods for solving fully fuzzy linear systems*, Appl. Math. and Compu., 179: 328-343, 2006.
3. M. MATINFAR, H. KAMYAB AND Z. KHEIRI, *TS decomposition method for solving fuzzy system of linear equations*, Far East J. of Math. Educ., 3(3): 223-233, 2009.
4. M. MATINFAR, H. KAMYAB, *On the TS-decomposition for Matrices*, Extended Abstracts: The 5rd Seminar on Linear Algebra and its Applications, Babolsar, Iran, 153-156, 2009.
5. M. FRIEDMAN, M. MING, A. KANDEL, *Fuzzy linear systems*, Fuzzy Sets and Systems, 96: 201-209, 1998.

<sup>1</sup>DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MAZANDARAN UNIVERSITY, P. O. BOX 47415-95447, BABOL SAR, IRAN.

*E-mail address:* m.matinfar@umz.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ROOT- APPROXIMABLITY ELEMENTS OF $\text{Aut}(\text{SH}_2)$

FARZOLLAH MIRZAPOUR

ABSTRACT. In this paper we study the root of automorphisms on Siegel upper half plane of complex dimension 3.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\text{Sym}(n, \mathbb{C})$  be the space of  $n \times n$  complex symetric matrices. Let  $\text{SD}_n = \{Z \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) : \|Z\|_2 < 1\}$  be the Siegel  $n$ -disk. Then  $\overline{\text{SD}}_n = \{Z \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) : \|Z\|_2 \leq 1\}$  and  $\partial \text{SD}_n = \{Z \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) : \|Z\|_2 = 1\}$ . The Shilov boundary of  $\text{SD}_n$ , denoted by  $\partial_n \text{SD}_n$  is  $\text{USym}(n) = \text{U}_n \cap \text{Sym}(n, \mathbb{C})$  the set of  $n \times n$  unitary symmetric matrices. Let  $\text{SH}_n = \{Z \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) : \text{Im} Z > 0\}$  be the Siegel upper half plane.  $\text{Cl}(\text{SH}_n)$  the compactification of  $\text{SH}_n$  which is diffeomorphic to  $\overline{\text{SD}}_n$ . Then  $\partial \text{SH}_n, \partial_n \text{SH}_n$  are diffeomorphic to  $\partial \text{SD}_n, \partial_n \text{SD}_n$  respectively.  $\partial_n \text{SH}_n$  is the shilov boundary of  $\text{SH}_n$ .  $\partial_1 \text{SD}_2 = \partial \text{SD}_2 \setminus \partial_2 \text{SD}_2$  and  $\partial_1 \text{SH}_2 = \partial \text{SH}_2 \setminus \partial_2 \text{SH}_2$  are the other strata of  $\partial \text{SD}_2$  and  $\partial \text{SH}_2$  respectively[1].

**Definition 1.1.** The symplectic group  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  is defined as

$$\text{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : M^T J_n M = J_n\},$$

where

$$J_n = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix} \in \text{SL}(2n, \mathbb{R}).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A51; Secondary 28A78.

*Key words and phrases.* automorphism, Siepel upper half plane.

Equivalently

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \iff M^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \\ \iff A^T C \text{ and } B^T D \text{ are symmetric and } A^T D - C^T B = I_n.$$

Recall that  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  acts on  $\mathrm{SH}_n$  as follows:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

We will call these maps generalized Möbius transformations On  $\mathrm{SH}_n$ , where the action  $M$  and  $-M$  coincide. Then

$$\mathrm{PSp}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) / \{\pm I_n\}$$

is equal to the group of biholomorphisms of  $\mathrm{SH}_n$ . The action of  $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  extends continuously to  $\mathrm{Cl}(\mathrm{SH}_n)$ . Well known normal forms of conjugacy in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$ .

**Theorem 1.2.** *Let  $X \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ,  $X \neq \pm I_2$ . Then  $X$  is conjugate to one and only of the following normal forms in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ :*

- (a)  $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$   $\alpha > 1$ ,
- (b)  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ .

$X \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  is called hyperbolic, parabolic and elliptic if  $X$  is conjugate to one of the forms in (a), (b) and (c) respectively.

We give in [1, theorem 3.3], the normal forms of  $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$  according to the location of a fixed point of  $M$ , the spectrum of  $M$  and conjugacy of  $M$  to  $X \odot Y$ , where  $X, Y \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Every  $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$  is conjugate to one of the forms:

$$\text{IIa)} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{IIb)} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{I1c)} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \text{ I2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 2a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} |a| \leq 1 \\
& \text{I3)} \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \alpha \neq \pm 1, \text{ I4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \alpha = \pm 1 \\
& \text{II)} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix} a_1^2 + c_1^2 = 1, \\
& \text{III)} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ -b_1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & a_2 \end{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1
\end{aligned}$$

where  $\delta, \delta_1$  and  $\delta_2 = 0, \pm 1$ .

## 2. MAIN RESULTS

In order to determine the square root of automorphisms, we consider different cases according to the location of a fixed point of  $M$ . If  $H$  is upper half plane in  $\mathbb{C}$ , then the  $\text{Aut}(H) = \text{PSp}(1, \mathbb{R}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ .

**Definition 2.1.** Let  $G$  be a topological group with unit  $e$ . An element  $x$  in  $G$  is called root- approximable, if there exists a sequence  $(x_n)$  in  $G$  such that

$$(i) x_n^{2^n} = x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e.$$

**Theorem 2.2.**  $\text{Aut}(H)$  is root approximable group.

Since the  $\text{Aut}(\text{SH}_2) = \text{Psp}(2, \mathbb{R}) = \text{Sp}(2, \mathbb{R})/\{\pm I_4\}$ . Every  $M$  in  $\text{Sp}(2, \mathbb{R})$  is root approximable iff for all  $N$  in  $\text{Sp}(2, \mathbb{R})$ ,  $NMN^{-1}$  is root approximable. Therefore it is enough to show that the canonic form in theorem 3.3[1] is root approximable.

**Theorem 2.3.** *Some elements of  $\text{Aut}(SH_2)$  have a square root in  $\text{Aut}(SH_2)$ , thus it has root approximable subgroups.*

**Acknowledgements:** The author is supported by university of Zanjan.

#### REFERENCES

1. PEDRO J. FREITAS, SHMUEL FRIEDLAND, *Revisiting the Siegel upper half plane I and II*, Linear algebra and its applications, **376** (2004) 19-67.
2. F.MIRZAPOUR, *A note on the group of automorphisms of unit disc*, Inter. J. of App. Math. **vol. 14**, **no. 1**, (2003) 51-55.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ZANJAN UNIVERSITY, P. O. BOX 313, ZANJAN, IRAN.  
E-mail address: `f.mirza@znu.ac.ir`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## CHARACTERIZATION OF COMPLEX 2-INNER PRODUCTS BY COMPLEX FORMS

S. A. MOUSAVI\*

**ABSTRACT.** Let  $X$  be a complex linear space of dimension greater than 1. In this paper, we define a family of complex forms on  $X^4$ . We are going to characterize all complex 2-inner product on  $X$  by this family. Moreover, a number of basic properties of these forms are obtained.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The concepts of 2-inner products and 2-inner product spaces have been intensively studied by many authors in the last three decades [1]. Here we give the basic definition and the elementary properties of 2-inner product spaces [2, 3].

**Definition 1.1.** Let  $X$  be a linear space of dimension greater than 1 over the field  $\mathbb{K}$ , when  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (or  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Suppose that  $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$  is a  $\mathbb{K}$ -valued function defined on  $X^3 \equiv X \times X \times X$  satisfying the following conditions:

**2I1:**  $\langle x, x | z \rangle \geq 0$ , and  $\langle x, x | z \rangle = 0$  if and only if  $x$  and  $z$  are linearly dependent,

**2I2:**  $\langle x, x | z \rangle = \langle z, z | x \rangle$ ,

**2I3:**  $\langle y, x | z \rangle = \overline{\langle x, y | z \rangle}$ ,

**2I4:**  $\langle \alpha x, y | z \rangle = \alpha \langle x, y | z \rangle$ , for any scalar  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

**2I5:**  $\langle x + x', y | z \rangle = \langle x, y | z \rangle + \langle x', y | z \rangle$ ,

where  $x, x', y, z \in X$ . The functional  $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$  is called a complex (or real) 2-inner product on  $X$  and  $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$  is called a complex(or real) 2-inner product space (or 2-pre-Hilbert space).

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46C50; Secondary 15A63, 47A07.

*Key words and phrases.* 2-inner product space, form.

\* Speaker.

**Example 1.2.** If  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  be a complex inner product space, then the following function

$$(1.1) \quad \langle x, y|z \rangle := \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{vmatrix},$$

defines a complex 2-inner product, called *standard* (or simple) complex 2-inner product on  $X$ .

Some basic properties of the 2-inner product spaces can be immediately obtained as follows:

- $\langle x, \alpha y|z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y|z \rangle$ ,
- $\operatorname{Re} \langle x, y|z \rangle = \frac{1}{4}[\langle z, z|x+y \rangle - \langle z, z|x-y \rangle]$ ,
- $\langle x, y|\alpha z \rangle = |\alpha|^2 \langle x, y|z \rangle$ ,
- $\langle 0, y|z \rangle = \langle x, 0|z \rangle = \langle x, y|0 \rangle = 0$ ,
- $|\langle x, y|z \rangle|^2 \leq \langle x, x|z \rangle \langle y, y|z \rangle$ , and we have equality if and only if  $x, y$  and  $z$  are linearly dependent. This inequality is called Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality (CBS-inequality for short) for 2-inner products.

**Proposition 1.3.** *Let  $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$  be a complex 2-inner product space. For  $x, y, z, w \in X$ , let  $a = \langle x, y|z+w \rangle - \langle x, y|z-w \rangle$ ,  $b = \langle x, y|z+iz \rangle - \langle x, y|z-iz \rangle$ ,  $c = \langle z, w|x+y \rangle - \langle z, w|x-y \rangle$  and  $d = \langle z, w|x+iy \rangle - \langle z, w|x-iy \rangle$ . We have the following*

(1)  $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(c)$ ,  $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}(d)$ ,  $\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(c)$ , and  $\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im}(d)$ ,

(2)  $a + ib = c + id$ .

Suppose  $X$  is a real linear space and let  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{R}$  be a real covariant tensor of rank 4. Let  $\mathfrak{T}_X$  denote the set of all real covariant tensor of rank 4 with the following properties:

- (1)  $T(x, x, z, z) \geq 0$ , and we have equality if and only if  $x$  and  $z$  are linearly dependent,
- (2)  $T(x, y, z, w) = T(y, x, z, w)$  and  $T(x, y, z, w) = T(x, y, w, z)$ ,
- (3)  $T(x, y, z, w) + T(x, z, w, y) + T(x, w, y, z) = 0$ .

Misiak in [4] characterized real 2-inner products in the following way by above family of real covariant tensors of rank 4.

**Theorem 1.4.** ([4], Theorem 6) *Let  $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$  be a real 2-inner product on  $X$  and let*

$$(1.2) \quad T(x, y, z, w) = \frac{1}{4} [\langle x, y|z+w \rangle - \langle x, y|z-w \rangle].$$

*Then we have  $T \in \mathfrak{T}_X$  and*

$$(1.3) \quad \langle x, y|z \rangle = T(x, y, z, z).$$

Conversely let  $T \in \mathfrak{T}_X$ . Then 1.3 defines a real 2-inner product on  $X$ , for which 1.2 is true.

In this paper, we will characterize complex 2-inner products by a new family of complex forms on  $X$  of rank 4.

## 2. BASIC RESULTS

Let  $X$  be a complex linear space and  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex form on  $X^4$ , such that  $T$  is linear in the first and third arguments and conjugate-linear in second and fourth arguments. We call this function a *complex form of rank 4*.

To characterization of complex 2-inner products on  $X$ , we need the following propositions.

**Lemma 2.1.** *Let  $X$  be a complex linear space and  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex form of rank 4. Then we have*

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T(x, y, z, w) &= \frac{1}{4} [T(x, y, z + w, z + w) - T(x, y, z - w, z - w) \\ &\quad + iT(x, y, z + iw, z + iw) - iT(x, y, z - iw, z - iw)] \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{4} [T(x + y, x + y, z, w) - T(x - y, x - y, z, w) \\ &\quad + iT(x + iy, x + iy, z, w) - iT(x - iy, x - iy, z, w)]. \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.** *Let  $X$  be a complex linear space and  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex form of rank 4. The following are equivalent:*

$$(2.3) \quad T(x, x, z, z) = T(z, z, x, x), \quad \forall x, z \in X,$$

$$(2.4) \quad T(x, y, z, w) = T(z, w, x, y), \quad \forall x, y, z, w \in X.$$

**Proposition 2.3.** *Let  $X$  be a complex linear space and  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex form of rank 4. The following are equivalent:*

$$(2.5) \quad T(x, y, z, y) = 0, \quad \forall x, y, z \in X,$$

$$(2.6) \quad T(x, y, z, w) + T(x, w, z, y) = 0, \quad \forall x, y, z, w \in X,$$

$$(2.7) \quad T(x, y, z, w) + T(z, y, x, w) = 0, \quad \forall x, y, z, w \in X.$$

**Corollary 2.4.** *Let  $X$  be a complex linear space and  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex form of rank 4. Then 2.5 implies 2.3. In the case of  $T(x, y, z, w) = 0$  if at least three of the arguments coincide, 2.3 conversely implies 2.5.*

**Example 2.5.** Suppose  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  be a complex inner product space.  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  defined by  $T(x, y, z, w) = \langle x, y \rangle \langle z, w \rangle$  is a complex form of rank 4,  $T(x, x, z, z) = T(z, z, x, x)$  for all  $x, z \in X$ , but 2.5 is not true.

**Corollary 2.6.** Let  $X$  be a complex linear space,  $T : X^4 \rightarrow \mathbb{C}$  be a complex form of rank 4, and  $T(x, x, z, z) \geq 0$  for arbitrary  $x, z \in X$ . Also assume that  $T(x, x, z, z) = 0$  if  $x = z$ . Let 2.5 be true. Then for arbitrary  $x, y, z, w \in X$  we have

$$(2.8) \quad T(x, y, z, z)T(y, x, z, z) \leq T(x, x, z, z)T(y, y, z, z),$$

and  $T(x, y, z, w) = 0$  if at least three of the arguments coincide.

Let  $X$  be a complex linear space of dimension greater than 1. Now, let  $\mathfrak{F}_X$  denote the family of all complex forms on complex linear space  $X$  of rank 4, with the following properties:

- (1)  $T(x, x, z, z) \geq 0$  for all  $x, z \in X$ , and  $T(x, x, z, z) = 0$  if and only if  $x$  and  $z$  are linearly dependent,
- (2)  $T(x, y, z, w) = \overline{T(y, x, w, z)}$  for all  $x, y, z, w \in X$ ,
- (3)  $T(x, y, z, y) = 0$  for all  $x, y, z \in X$ .

**Corollary 2.7.** For arbitrary  $T \in \mathfrak{F}_X$ , 2.3 and 2.5 are true and  $T(x, y, z, w) = 0$  if at least three of the arguments are coincide.

There are a one-two-one relation between  $\mathfrak{F}_X$  and the set of all complex 2-inner products on  $X$ , as shows below.

**Theorem 2.8.** Let  $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$  be a complex 2-inner product space and let

$$(2.9) \quad T(x, y, z, w) = \frac{1}{4}[\langle x, y | z + w \rangle - \langle x, y | z - w \rangle + i \langle x, y, z + iw \rangle - i \langle x, y | z - iw \rangle].$$

Then we have  $T \in \mathfrak{F}_X$  and

$$(2.10) \quad \langle x, y | z \rangle = T(x, y, z, z).$$

Conversely, let  $T \in \mathfrak{F}_X$ . Then 2.10 defines a complex 2-inner product on  $X$ , for which 2.9 is true.

A complex 2-inner product space  $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$  and a complex form of rank 4,  $T \in \mathfrak{F}_X$ , which are related by 2.9, or equivalently by 2.10, are said to be *associated*.

**Example 2.9.** Let  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  be a complex inner product space, then the following function

$$(2.11) \quad T(x, y, z, w) := \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, w \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, w \rangle \end{vmatrix},$$

defines a complex form on  $X$  of rank 4 and it's associated 2-inner product is standard 2-inner product on  $X$ .

**Corollary 2.10.** *Let  $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$  be a complex 2-inner product space. Then for all  $x, y, z \in X$  and  $\alpha \in \mathbb{C}$  we have*

$$(2.12) \quad \langle x, y | z \rangle = \langle x + \alpha z | z \rangle.$$

**Acknowledgements:** This paper has been partially supported by the SBUK Center of Excellence in Linear Algebra and Optimization, Kerman, Iran.

#### REFERENCES

1. Y. J. CHO, P. C. S. LIN, S. S. KIM, AND A. MISIAK, *Theory of 2-inner product spaces*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2001.
2. Y.J. CHO, M. MATIĆ AND J.E. PEČARIĆ, *On Gram's determinant in 2-inner product spaces*, J. Korean Math. Soc., **38(6)**, 1125-1156, 2001.
3. S. KARAMI, S.A. MOUSAVI, F. SADEGHI, A. SALEMI, *On Standard n-inner Product Spaces*, 19th Mathematical Seminar On the Analysis and its applications, 19-20 February 2011, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.
4. A. MISIAK, *n-inner Product Spaces*, Math. Nachr., **140**, 299-319, 1989.

\* DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER, SHAHID BAHONAR UNIVERSITY OF KERMAN, 76169-14111, KERMAN, IRAN.

*E-mail address:* s.a.mousavi@hotmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## THE DISTANCE FROM A MATRIX POLYNOMIAL TO MATRIX POLYNOMIALS WITH TWO PRESCRIBED EIGENVALUES

A.M. NAZARI<sup>1\*</sup> AND E. KOKABIFAR<sup>2</sup>

ABSTRACT. For a matrix polynomial  $p(\lambda)$  and two given distinct complex numbers  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , we introduce a (spectral norm) distance from  $p(\lambda)$  to the set of matrix polynomials that have  $\mu_1$  and  $\mu_2$  as two eigenvalues. we compute the bounds for this distance and construct the associated perturbations of  $p(\lambda)$ .

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

In this paper we obtain lower and upper bounds for the distance from a matrix polynomial to matrix polynomials that have two prescribed eigenvalues.

At first we reconstructive some definitions from [1] consider an  $n \times n$  matrix polynomial

$$(1.1) \quad p(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$$

where  $\lambda$  is a complex variable, and  $A_j \in C^{n \times n}$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) with  $\det A_m \neq 0$ .

**Definition 1.1.** For the matrix polynomial in (1.1) and two given distinct complex numbers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  we define the distance from  $p(\lambda)$  to  $\mu_1$  and  $\mu_2$  as eigenvalues by

$$\varepsilon(\mu_1, \mu_2) = \min\{\varepsilon \geq 0; \exists Q(\lambda) \in B(p, \varepsilon, w) \text{ with } \mu_1 \text{ and } \mu_2 \text{ as eigenvalues}\}$$

where we denote the perturbation of the matrix polynomial  $p(\lambda)$  of the form

$$(1.2) \quad Q(\lambda) = p(\lambda) + \Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^m (A_j + \Delta_j) \lambda^j$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65F15; 15A60, 65F35.

*Key words and phrases.* Matrix polynomial, Singular value, Perturbation.

\* E.Kokabifar.

where the matrices  $\Delta_j \in C^{n \times n} (j = 0, 1, \dots, m)$  are arbitrary and for a given  $\varepsilon$  and given set of nonnegative weights  $w = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m\}$  with  $\omega_0 > 0$ , we define the class of admissible perturbation matrix polynomials as

$$B(p, \varepsilon, w) = \{Q(\lambda) \text{ as in (1.2); } \|\Delta_j\| \leq \varepsilon \omega_j \text{ } j = 0, 1, \dots, m\}$$

The weights  $\omega_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) allow freedom in how perturbations are measured.

## 2. MAIN RESULTS

**Definition 2.1.** For the matrix polynomial in (1.1) and two given distinct complex numbers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  we define the  $2n \times 2n$  matrix as

$$(2.1) \quad F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma] = \begin{pmatrix} p(\mu_1) & 0 \\ \gamma \frac{p(\mu_1) - p(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} & p(\mu_2) \end{pmatrix}; \gamma \in C$$

**Lemma 2.2.** For any two complex numbers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  we have that either  $s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) = 0$  for every  $\gamma \neq 0$  or  $s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \neq 0$  where  $s_1(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \geq s_2(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \geq \dots \geq s_{2n}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma])$  are the decreasing ordered singular values of  $F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]$ .

**Lemma 2.3.** If  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are two eigenvalues of  $Q(\lambda) = p(\lambda) + \Delta(\lambda)$ , then for every  $\gamma \neq 0$  the following relation holds

$$s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \leq \|F[\Delta(\mu_1, \mu_2); \gamma]\|$$

where

$$\hat{\Delta}(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta(\mu_1) - \Delta(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}$$

Henceforth for the sake of simplicity we denote  $\frac{f(\mu_1) - f(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}$  by  $\hat{f}(\mu_1, \mu_2)$  for  $f = \Delta, w, p, \dots$

**Lemma 2.4.** Let  $\mu_1$  and  $\mu_2$  be two eigenvalues of perturbation matrix polynomial  $Q(\lambda) = p(\lambda) + \Delta(\lambda) \in B(p, \varepsilon, w)$ , then for every  $\gamma \neq 0$ ; the following relations holds,

$$\varepsilon \geq \frac{\left\| \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1) & 0 \\ \gamma \hat{\Delta}(\mu_1, \mu_2) & \Delta(\mu_2) \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} w(\mu_1) & 0 \\ \gamma \hat{w}(\mu_1, \mu_2) & w(\mu_2) \end{pmatrix} \right\|} \geq \frac{s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma])}{\|F[w(\mu_1, \mu_2); \gamma]\|}$$

and in similar discussion from [1] in the remainder of the paper, we assume that that parameter  $\gamma$  is real and nonnegative. Now for  $\lambda_0$  we try to construct a matrix polynomial  $\Delta_\gamma(\lambda)$  such that the perturbation matrix polynomial  $Q_\gamma(\lambda) = p(\lambda) + \Delta_\gamma(\lambda)$  has  $\mu_1$  and

$\mu_2$  as two eigenvalues.

By the definition the scalar polynomial  $w(\lambda)$  as

$$w(\lambda) = \omega_m \lambda^m + \omega_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + \omega_1 \lambda + \omega_0$$

and consider two quantities  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  in following

$$\alpha_1 = \frac{1}{w(|\mu_2|)} \sum_{j=0}^m \left(\frac{\bar{\mu}_2}{|\mu_2|}\right)^j \mu_1^j \omega_j \quad \text{and} \quad \alpha_2 = \frac{1}{w(|\mu_1|)} \sum_{j=0}^m \left(\frac{\bar{\mu}_1}{|\mu_1|}\right)^j \mu_2^j \omega_j$$

and vectors

$$u_3(\gamma) = u_2(\gamma) - \theta u_1(\gamma) \quad \text{and} \quad v_3(\gamma) = v_2(\gamma) - \theta v_1(\gamma)$$

where  $\theta = \frac{\gamma}{\mu_1 - \mu_2}$ , and matrix

$$\Delta_\gamma = -s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma])[u_1(\gamma) \ u_3(\gamma)] \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\alpha_1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+\alpha_2} \end{pmatrix} [v_1(\gamma) \ v_3(\gamma)]^\dagger$$

where  $[v_1(\gamma) \ v_3(\gamma)]^\dagger$  is the Moore-Penrose pseudoinverse of  $[v_1(\gamma) \ v_3(\gamma)]$ . Then we define the  $n \times n$  matrix polynomial

$$\Delta_\gamma(\lambda) = \sum_{j=0}^m \Delta_{\gamma,j} \lambda^j$$

where

$$\Delta_{\gamma,j} \lambda^j = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w(|\mu_1|)} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{|\mu_1|}\right)^j + \frac{1}{w(|\mu_2|)} \left(\frac{\bar{\mu}_2}{|\mu_2|}\right)^j \right) \omega_j \Delta_\gamma$$

and observe that

$$\Delta(\mu_1) = \frac{1+\alpha_1}{2} \Delta_\gamma = \quad \text{and} \quad \Delta(\mu_2) = \frac{1+\alpha_2}{2} \Delta_\gamma$$

since  $\begin{pmatrix} u_1(\gamma) \\ u_2(\gamma) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(\gamma) \\ v_2(\gamma) \end{pmatrix} \in C^{2n}(u_k(\gamma), v_k(\gamma) \in C^n; k = 1, 2)$  is a pair of left and right singular vectors of  $s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma])$  respectively, it follows

$$\begin{aligned} p(\mu_1) v_1(\gamma) &= s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) u_1(\gamma) \\ p(\mu_2) v_3(\gamma) &= s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) u_3(\gamma) \end{aligned}$$

as a consequence, for matrix polynomial

$$(2.2) \quad Q_\gamma(\lambda) = p(\lambda) + \Delta_\gamma(\lambda) = \sum_{j=0}^m (A_j + \Delta_{\gamma,j}) \lambda^j$$

we have that  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are two eigenvalues of  $Q_\gamma(\lambda)$  corresponding to the  $v_1(\gamma)$  and  $v_1(\gamma)$  as two eigenvectors. Furthermore, it holds that

$$\|\Delta_{\gamma,j}\| \leq \frac{\omega_j}{2} \cdot s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \|\Delta_\gamma\| \left( \frac{1}{w(|\mu_1|)} + \frac{1}{w(|\mu_2|)} \right); \quad j = 0, 1, \dots, m$$

Thus, for any  $\gamma \neq 0$  the distance  $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$  satisfies

$$(2.3) \quad \varepsilon(\mu_1, \mu_2) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w(|\mu_1|)} + \frac{1}{w(|\mu_2|)} \right) s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \|\Delta_\gamma\|$$

For  $\gamma = 0$  we define

$$(2.4) \quad \beta_{low}(p, \mu_1, \mu_2, \gamma) = s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \left\| \begin{pmatrix} w(|\mu_1|) & 0 \\ |\gamma| \hat{w}(\mu_1, \mu_2) & w(|\mu_2|) \end{pmatrix} \right\|^{-1}$$

and

$$(2.5) \quad \beta_{up}(p, \mu_1, \mu_2, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w(|\mu_1|)} + \frac{1}{w(|\mu_2|)} \right) s_{2n-1}(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma]) \|\Delta_\gamma\|$$

Then (2.4) and (2.5) imply that these quantities are a lower bound and an upper bound of  $\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$ .

**Theorem 2.5.** Suppose  $p(\lambda)$  is a matrix polynomial as in (1.1) and two complex numbers  $\mu_1$  and  $\mu_2$ . Then for every  $\gamma \neq 0$

$$\beta_{low}(p, \mu_1, \mu_2, \gamma) \leq \varepsilon(\mu_1, \mu_2) \leq \beta_{up}(p, \mu_1, \mu_2, \gamma)$$

where the bounds  $\beta_{low}(p, \mu_1, \mu_2, \gamma)$  and  $\beta_{up}(p, \mu_1, \mu_2, \gamma)$  are given by (2.4) and (2.5) respectively. Furthermore  $Q_\gamma(\lambda)$  in (2.2) lies on the boundary of  $B(p, \beta_{up}(p, \mu, \gamma), w)$  and has  $\mu_1$  and  $\mu_2$  as two eigenvalues.

**Example 2.6.** Consider the matrix polynomial

$$p(x) = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 4 & 0 \\ 9 & 4 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 8 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 3 & 8 \\ 5 & 9 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

and set of weights  $w = \{1, 1, 1\}$  and consider  $\mu_1 = 2$  and  $\mu_2 = 1 + i$ .

Then we have  $s_* = s_9(F[p(\mu_1, \mu_2); \gamma_* = 0.3799375]) = 3.36866044288142$  and

$$\beta_{low}(p, 2, 1+i, 0.3799375) = 0.47739043039715 \leq \varepsilon(\mu_1, \mu_2) \leq \beta_{up}(p, 2, 1+i, 0.3799375) = 1.03211838$$

and

$$\begin{aligned}
 Q_{0.3799375}(\lambda) = & \begin{pmatrix} 9.969 - 0.302i & 7.997 + 0.067i & 5.829 + 0.042i & 4.218 + 0.204i & 0.951 - 0.046i \\ 2.025 - 0.0903i & 5.012 - 0.042i & 7.877 + 0.111i & 9.065 + 0.085i & 4.033 - 0.129i \\ 5.809 + 0.144i & 0.076 + 0.042i & 9.065 - 0.057i & 9.023 - 0.212i & 8.038 + 0.178i \\ 5.237 + 0.098i & 7.857 - 0.005i & 7.240 - 0.150i & 3.742 + 0.046i & -0.119 + 0.018i \\ 9.036 + 0.109i & 4.013 - 0.059i & 2.007 + 0.033i & 8.916 - 0.053i & 1.057 - 0.048i \end{pmatrix} x^2 \\
 + & \begin{pmatrix} 2.159 - 0.355i & -0.045 + 0.073i & 3.784 - 0.061i & 8.112 + 0.366i & 4.976 - 0.082i \\ 2.085 - 0.084i & 7.040 - 0.039i & 7.793 + 0.045i & 0.018 + 0.136i & 7.120 - 0.122i \\ 5.695 + 0.038i & 4.058 + 0.095i & 5.109 - 0.022i & 7.162 - 0.221i & 3.928 + 0.223i \\ 3.200 + 0.261i & 8.845 - 0.097i & 2.362 - 0.013i & 3.684 - 0.112i & 2.855 - 0.056i \\ 1.970 + 0.145i & 5.052 - 0.057i & 6.986 + 0.041i & 7.941 - 0.112i & 2.094 - 0.017i \end{pmatrix} x \\
 + & \begin{pmatrix} 2.330 - 0.258i & 6.919 + 0.046i & 4.825 - 0.167i & 6.922 + 0.405i & 7.019 - 0.090i \\ 7.123 - 0.037i & 4.058 - 0.016i & 8.780 - 0.061i & 2.948 + 0.139i & 3.176 - 0.056i \\ 2.690 - 0.116i & 9.007 + 0.120i & 8.115 + 0.034i & 3.265 - 0.129i & 7.819 + 0.176i \\ 5.059 + 0.349i & 8.902 - 0.170i & 6.352 + 0.169i & 2.756 - 0.265i & 5.890 - 0.125i \\ 1.899 + 0.123i & 6.079 - 0.028i & 7.966 + 0.033i & 5.000 - 0.136i & 4.099 + 0.031i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

#### REFERENCES

- [1] N. Papathanasiou, P. Psarrakos, *The distance from a matrix polynomial to matrix polynomials with a prescribed multiple eigenvalue*, Linear Algebra and its Applications, 429 (2008), 1453-1477.
- [2] Juan-Miguel Gracia, *Nearest matrix with two prescribed eigenvalues*, Linear Algebra and its Applications, 401 (2005), 277-294.

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY, P. O. BOX 38156-879, ARAK, IRAN.

*E-mail address:* e.kokabifar@arshad.araku.ac.ir, a-nazari@araku.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## AN ALGORITHM OF PRECONDITIONS FOR SOLVING LINEAR SYSTEMS

A. M. NAZARI<sup>1\*</sup> AND S. ZIA BORUJENI<sup>2</sup> AND L. BAHRAMPOUR<sup>3</sup>

ABSTRACT. T. Kohno and H. Niki in [1] claim that always the relation  $\rho(T_m) \leq \rho(T_s)$  has been unconditionally satisfied. In this paper we introduce a counter examples with show that their methods does not always hold. We present an algorithm which certainly one of its stage reach the relation  $\rho(T_m) \leq \rho(T_s)$ . For this aim we use of Maple 12.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

We herein consider the following preconditioned linear system:  $P Ax = P b$ , where  $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$  is a nonsingular  $M$ -matrix,  $P \in R^{n \times n}$  is a preconditioner, and  $x, b \in R^n$  are vectors. Without loss of generality, we assume that  $A$  has a splitting of the form  $A = I - L - U$ , where  $I$  denotes the  $n \times n$  identity, and  $-L$  and  $-U$  are the strictly lower, and upper triangular parts of  $A$ , respectively. In 1991, Gunawardena et al. [2] proposed the modified Gauss-Seidel method in which  $P = (I + S)$ , with

$$S = (s_{ij}) = \begin{cases} -a_{ii+1} & \text{for } i = 1, 2, \dots, n-1, j = i+1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

These authors proved that if  $0 < a_{ii+1}a_{i+1i} < 1$  then the inequality:  $\rho(T_S) \leq \rho(T) < 1$ , is satisfied, where  $\rho(T_S)$  and  $\rho(T)$  denote the spectral radius of the Gauss-Seidel iterative matrices  $T_S$  and  $T$  associated with  $A_s = (I+S)A$  and  $A$ , respectively. In 2002, Kotakemori et al. [3] proposed to use  $P_m = (I + S_m)$ , where  $S_m$  is defined by

$$S_m = (s_{ij}^{(m)}) = \begin{cases} -a_{ik_i} & 1 \leq i < n-1, i+1 < j \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65F10.

*Key words and phrases*. precondition, M-matrix, iterative method \* Speaker.

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i+1 \leq j \leq n\}$ , for  $1 \leq i < n$ . Then  $A_m = (I + S_m)A$  can be written as follows:

$$A_m = I - L - U + S_m - S_m L - S_m U = M_m - N_m,$$

where  $M_m = (I - D_m) - (L + E_m)$  and  $N_m = U - S_m + F_m + S_m U$  and  $D_m$ ,  $E_m$  and  $F_m$  are the diagonal and strictly lower and strictly upper triangular parts of  $S_m L$ , respectively. Under the condition  $0 < a_{ik_i} a_{k_i i} < 1$ , Kotakemori et al. derived the following result.

**Lemma 1.1.** (Kotakemori et al. [3], Lemma 3.4). *Let  $A$  be an  $M$ -matrix. Suppose that*

$$(1.1) \quad a_{i,i+1} a_{i+1,j} \leq a_{ik_i} a_{k_i j}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad j \leq i.$$

*Then the following inequality holds:*

$$M_m^{-1} \geq M_s^{-1}.$$

**Theorem 1.2.** *Let  $A$  be an  $M$ -matrix. Let  $A_s = M_s - N_s$  and  $A_m = M_m - N_m$  be Gauss-Seidel convergent splittings of  $A_s$  and  $A_m$ , respectively. Assume that only one of the inequalities  $A_m x \geq A_s x$  or  $A_m y \geq A_s y$ , where  $x$  and  $y$  are positive eigenvectors associated with  $T_s$  and  $T_m$ , respectively. Under the assumptions in Lemma 1, the following inequality holds:*

$$\rho(T_m) \leq \rho(T_s) < 1.$$

In [1], Toshiyuki Kohno et al. show that the  $\rho(T_m) \leq \rho(T_s)$  doesn't hold always and propose the following preconditioners.

**Method 1.** They propose the preconditioner  $P_{m1} = (I + S_{m1})$ , where  $S_{m1}$  is defined by

$$S_{m1} = (s_{ij}^{(m1)}) = \begin{cases} -a_{12} & \\ -a_{ik_i} & \text{for } 2 \leq i < n, \quad i < j \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i \leq j \leq n\}$ , for  $2 \leq i < n$ .

**Method 2.** They propose the preconditioner  $P_{m2} = (I + S_{m2})$ , where  $S_{m2}$  is defined by

$$S_{m2} = (s_{ij}^{(m2)}) = \begin{cases} -a_{12} & \\ -a_{1k_i} & \text{for } 1 < j \leq n \\ -a_{ik_i} & \text{for } 2 \leq i < n, \quad i < j \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i+1 \leq j \leq n\}$ , for  $1 \leq i < n$ .

**Method 3.** Morimoto et al. [4] proposed the preconditioner  $P_{sm} = (I + S + S_m)$ . For this precondition,  $S_m$  is

$$S_m = (s_{ij}^{(m)}) = \begin{cases} -a_{il_i} & \text{for } 1 \leq i < n-1, \quad i+1 < j \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $l_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i+2 \leq j \leq n\}$ , for  $1 \leq i < n-1$ .

T. Kohno and H. Niki in [1] claim that by using their methods always the relation  $\rho(T_m) \leq \rho(T_s)$  has been unconditionally satisfied. In this paper we introduce a counter examples with show that their methods does not always hold. We present an algorithm which certainly one of its stage reach the relation  $\rho(T_m) \leq \rho(T_s)$ . For this aim we use of Maple 12.

**Example.** Consider the following matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & 1 & -0.1 & -0.1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 1 & -0.1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}.$$

we have  $\rho(T_s) = 0.3137$ . On the other hand for  $P_m$  we have:  $\rho(T_m) = 0.3356$ . While this matrix satisfies condition equation (1.2), the inequality  $\rho(T_m) \leq \rho(T_s)$  does not hold.

Now we survey this example for Kohno et al.'s methods. For this matrix we have  $\rho(T_{m1}) = 0.3210$   $\rho(T_{m2}) = 0.3164$ . By using preconditioner  $P_{sm}$ , we obtain:  $\rho(T_{sm}) = 0.2538$ . Then by above result we have:

$$\rho(T_{sm}) \leq \rho(T_s) \leq \rho(T_{m2}) \leq \rho(T_{m1}) \leq \rho(T).$$

## 2. MAIN RESULTS

For solving this problem we introduce following methods.

**Method I.** We present  $S'_{mi}$  instead of  $S_{m1}$  in following algorithm.

If  $\rho(S'_{m1}) \leq \rho(T_s)$ , then  $S'_{m1} = S_{m1}$  is true, else we define  $S'_{m2}$  as

$$S'_{m2} = (s'_{ij}) = \begin{cases} -a_{12} \\ -a_{23} \\ -a_{ik_i} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{for } 3 \leq i < n, \quad i < j \leq n \\ \text{otherwise.} \end{matrix}$$

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i \leq j \leq n\}$ , for  $3 \leq i < n$ .

If  $\rho(S'_{m2}) \leq \rho(T_s)$ , then  $S'_{m2}$  is solution of our problem, else we define  $S'_{m3}$  as

$$S'_{m3} = (S'^{m'3}_{ij}) = \begin{cases} -a_{12} \\ -a_{23} \\ -a_{34} \\ -a_{ik_i} & \text{for } 4 \leq i < n, i < j \leq n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i \leq j \leq n\}$ , for  $4 \leq i < n$ .

And in order to we continue. Finally if  $\rho(S'_{m,n-2}) > \rho(T_s)$ , then we must introduce  $S'_{m,n-1}$  as follows:

$$S'_{m,n-1} = (s'^{m',n-1}_{ij}) = \{-a_{i,i+1} \quad \text{for } 1 \leq i < n$$

This algorithm lead to Ganavardena's precondition.

**Method II.** We present  $S''_{mi}$  instead of  $S_{m2}$  in following algorithm.

If  $\rho(S''_{m1}) \leq \rho(T_s)$ , then  $S''_{m1} = S_{m2}$  is true, else we define  $S''_{m2}$  as follows:

$$S''_{m2} = (S''^{m''2}_{ij}) = \begin{cases} -a_{12} \\ -a_{1k_i} & \text{for } 1 < j \leq n \\ -a_{23} \\ -a_{2k_i} & \text{for } 2 < j \leq n \\ -a_{ik_i} & \text{for } 3 \leq i < n, i < j \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i+1 \leq j \leq n\}$ , for  $1 \leq i < n$ .

If  $\rho(S''_{m2}) \leq \rho(T_s)$ , then  $S''_{m2}$  is solution. Else we define  $S''_{m3}$  as

$$S''_{m3} = (S''^{m''3}_{ij}) = \begin{cases} -a_{12} \\ -a_{1k_i} & \text{for } 1 < j \leq n \\ -a_{23} \\ -a_{2k_i} & \text{for } 2 < j \leq n \\ -a_{34} \\ -a_{3k_i} & \text{for } 3 < j \leq n \\ -a_{ik_i} & \text{for } 4 \leq i < n, i < j \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $k_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i+1 \leq j \leq n\}$ , for  $1 \leq i < n$ .

And in order to we continue above method. Finally if  $\rho(S''_{m,n-2}) > \rho(T_s)$  then we must introduce  $S''_{m,n-1}$  as follows:

$$S''_{m,n-1} = \left( s_{ij}^{m'',n-1} \right) = \begin{cases} -a_{i,i+1} & \text{for } 1 \leq i < n \\ -a_{il_i} & \text{for } 1 \leq i < n-1, i+1 < j \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $l_i = \min I_i$ ,  $I_i = \{j : |a_{ij}| \text{ is maximal for } i+2 \leq j \leq n\}$ , for  $1 \leq i < n-1$ .

This algorithm lead to Morimoto's precondition.

With these two algorithm we solve this problem, for instance if we apply Method I and Method II for solving Example 4 respectively, we have following relations.  $\rho(S_{m'2}) = 0.3140827769 > \rho(T_s)$ ,  $\rho(S_{m'3}) = 0.3136582529 = \rho(T_s)$ .  $\rho(S_{m''2}) = 0.3003438688 < \rho(T_s)$ .

#### REFERENCES

1. T. Kohno, H. Niki, A note on the preconditioner  $P_m = (I + S_m)$ , J. Comput. Appl. Math. 225 (2009) 316-319.
2. A.D. Gunawardena, S.K. Jain, L. Snyder, Modified iterative method for consistent linear systems, Linear Algebra Appl. 154-156 (1991) 123-143.
3. H. Kotakemori, K. Harada, M. Morimoto, H. Niki, A comparison theorem for the iterative method with the preconditioner  $(I + S_{max})$ , J. Comput. Appl. Math. 145 (2002) 373-378.
4. M. Morimoto, K. Harada, M. Sakakihara, H. Sawami, The Gauss-Seidel iterative method with the preconditioning matrix  $(I + S + S_m)$ , Japan J. Indust. Appl. Math. 21 (2004) 25-34.

<sup>1,2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF ARAK, P.O. BOX 38156, IRAN

*E-mail address:* A-nazari@araku.ac.ir and z-borujeni@arshad.araku.ac.ir l-bahrapour@arshad.araku.ac



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## APPLICATION OF THE BERNSTEIN POLYNOMIALS FOR SOLVING THE NONLINEAR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Y. ORDOKHANI<sup>1</sup> AND S. DAVAEI FAR<sup>2\*</sup>

**ABSTRACT.** In this article an efficient numerical method for finding solution of the non-linear Fredholm integro-differential equations on base of Bernstein polynomials basis would be presented. To do so with approximate the solution of integro-differential equation with  $C^T \phi(x)$  form, mentioned equation will be converted to an equivalent matrix equation. Coefficients vector  $C$  is the solution of this matrix equation. At the end with presentation of a numerical example the method will be evaluated.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

One of the most important mathematical dialogs which has capture the attention of authors, scientists which is foundation of researches is the fascinating subject of integro-differential equations. In this article, firstly we present operational matrices of integration and product for the Bernstein polynomials (B-polynomials) and also dual operational matrix of Bernstein basis vector, by the expansion of B-polynomials in terms of Legendre polynomials. Then we utilize them for solving  $s$ -th order nonlinear Fredholm integro-differential equation

$$(1.1) \quad \sum_{j=0}^s \rho_j(x) y^{(j)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t) [y(t)]^p dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

with the initial conditions

$$(1.2) \quad y^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq s-1,$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 45J05; 65R20.

*Key words and phrases.* Bernstein polynomial; Integro-differential equation; Legendre polynomial.

\* Sara Davaei far.

where  $y^j(x)$  is the  $j$ -th derivative of the unknown function that will be determined,  $k(x, t)$  is the kernel of the integral equation,  $g(x)$  and  $\rho_j(x), j = 0, 1, \dots, s$  are known analytic functions,  $p$  is a positive integer and  $\lambda, b_k, k = 0, 1, \dots, s - 1$  are suitable constants. The main characteristic of this technique is that it reduces these equations to those of an easily soluble algebraic equation, thus greatly simplifying the equations.

## 2. EXPANSION OF B-POLYNOMIALS IN TERMS OF LEGENDRE BASIS AND VICE VERSA

A set of shifted Legendre polynomials on the interval  $[0, 1]$ , denoted by  $\{L_k(x)\}$  for  $k = 0, 1, \dots$ , is orthogonal with respect to the weighting function  $w(x) = 1$  over the interval  $[0, 1]$ . These polynomials satisfy the recurrence relation

$$(k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1)(2x-1)L_k(x) - kL_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

with  $L_0(x) = 1$  and  $L_1(x) = 2x - 1$ . The orthogonality of these polynomials is expressed by the relation

$$(2.1) \quad \int_0^1 L_j(x) L_k(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 0, 1, 2, \dots$$

when the approximant (2.1) is expressed in the Legendre form  $P_m(x) = \sum_{j=0}^m l_j L_j(x)$ , by using Eq. (3.1) we can obtain the Legendre coefficients as  $l_j = (2j+1) \int_0^1 L_j(x) f(x) dx$ ,  $j = 0, \dots$ . Now consider a polynomial  $P_m(x)$  of degree  $m$ , expressed in the  $m$ -th degree Bernstein and Legendre bases on  $x \in [0, 1]$ :

$$(2.2) \quad P_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j B_{j,m}(x) = \sum_{k=0}^m l_k L_k(x).$$

We write the transformation of the Legendre polynomials on  $[0, 1]$  into the  $m$ -th degree Bernstein basis functions as

$$(2.3) \quad B_{k,m}(x) = \sum_{i=0}^m w_{k,i} L_i(x), \quad k = 0, \dots, m.$$

The elements  $w_{k,i}, k, i = 0, 1, \dots, m$ , form a  $(m+1) \times (m+1)$  basis conversion matrix  $W$  that with respect to [2] will be calculated as:

$$w_{k,j} = \frac{(2j+1)}{m+j+1} \binom{m}{k} \sum_{i=0}^j (-1)^{j+i} \frac{\binom{j}{i} \binom{j}{i}}{\binom{m+j}{k+i}}, \quad k, j = 0, \dots, m.$$

Similarly, we write the transformation of the B-polynomials on  $[0, 1]$  into  $m$ -th degree Legendre basis functions as

$$(2.4) \quad L_k(x) = \sum_{j=0}^m \Lambda_{k,j} B_{j,m}(x), \quad k = 0, \dots, m,$$

The elements  $\Lambda_{k,j}$ ,  $k, j = 0, 1, \dots, m$  form a  $(m+1) \times (m+1)$  basis conversion matrix  $\Lambda$ . Replacing Eq.(3.4) into Eq.(3.2), we obtain

$$(2.5) \quad c_j = \sum_{k=0}^m l_k \Lambda_{k,j}, \quad j = 0, \dots, m.$$

With respect to [2] the basis transformation (3.4) is defined by the elements

$$\Lambda_{k,j} = \frac{1}{\binom{m}{j}} \sum_{i=r}^{\min\{j,k\}} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j-i}, \quad r = \max\{0, j+k-m\},$$

of the matrix  $\Lambda$  for  $k, j = 0, \dots, m$ . If we denote the Legendre basis vector as

$$(2.6) \quad L(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_m(x)]^T,$$

using Eqs. (2.2, 3.3, 3.4) and (3.6) we have

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \phi(x) &= WL(x), \\ L(x) &= \Lambda \phi(x). \end{aligned}$$

### 3. B-POLYNOMIALS OPERATIONAL MATRIX OF PRODUCT

Suppose that  $C$  is an arbitrary  $(m+1) \times 1$  vector, then  $\hat{C}$  is an  $(m+1) \times (m+1)$  operational matrix of product whenever

$$(3.1) \quad C^T \phi(x) \phi^T(x) \simeq \phi^T(x) \hat{C}.$$

As we did in [3], this matrix is given by  $\hat{C} = \tilde{C}W^T$ , where  $\tilde{C}$  is a  $(m+1) \times (m+1)$  matrix and details of obtaining this matrix is given in [3].

### 4. DUAL OPERATIONAL MATRIX

With taking integration of cross product of two Bernstein basis vectors, a matrix of  $(m+1) \times (m+1)$  dimensional will be resulted which will be indicated as follow:

$$(4.1) \quad H = \int_0^1 \phi(x) \phi^T(x) dx.$$

This matrix is known by dual operational matrix of  $\phi(x)$  and by using Eq. (3.7) will be calculated as follow:

$$H = \int_0^1 (W L(x)) (W L(x))^T dx = W \left[ \int_0^1 L(x) L^T(x) dx \right] W^T = W D W^T,$$

that by using Eq. (3.1),  $D = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2m+1} \right)$ .

## 5. METHOD OF SOLUTION

Consider the  $s$ -th order nonlinear Fredholm integro-differential equation (1.1) with the initial conditions (1.2).

**Step 1:** The functions of  $y^j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$  is being approximate by the B-polynomials. Therefore with approximation  $y^s(x)$  in the form of

$$(5.1) \quad y^{(s)}(x) = C^T \phi(x),$$

we have

$$(5.2) \quad y^{(j)}(x) = Q_j^T \phi(x), \quad j = 0, 1, \dots, s,$$

where  $Q_j$ 's are  $(m+1) \times 1$  vectors and details of obtaining these vectors is given in [3].

**Step 2:** The function of  $k(x, t)$  is being approximate by the B-polynomials in the form of,

$$(5.3) \quad k(x, t) = \phi^T(x) K_b \phi(t),$$

where  $K_b$  is a  $(m+1) \times (m+1)$  matrix.

**Step 3:** In this step, we present a general formula for approximate  $y^p(t)$  with the B-polynomials. To do so, by using Eqs. (7.2, 5.1) we have

$$y^2(t) = Q_0^T \phi(t) \phi^T(t) Q_0 = \phi^T(t) \hat{Q}_0 Q_0,$$

and so by use of induction  $y^p(t)$  will be approximated as

$$(5.4) \quad y^p(t) = Q_0^T \phi(t) \phi^T(t) (\hat{Q}_0)^{p-2} Q_0 = \phi^T(t) (\hat{Q}_0)^{p-1} Q_0.$$

Now, with approximate  $g(x)$  and  $\rho_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$  in the forms of  $G^T \phi(x)$  and  $\rho_j(x) = P_j^T \phi(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$ , respectively and with substituting Eqs. (7.2-7.4) into Eq. (1.1) we have

$$\sum_{j=0}^s P_j^T \phi(x) \phi^T(x) Q_j = G^T \phi(x) + \lambda \int_0^1 \phi^T(x) K_b \phi(t) \phi^T(t) (\hat{Q}_0)^{p-1} Q_0 dt,$$

and therefore by using Eqs. (5.1, 6.1 ) we get

$$(5.5) \quad \sum_{j=0}^s \phi^T(x) \hat{P}_j Q_j = \phi^T(x) G + \lambda \phi^T(x) K_b H \left( \hat{Q}_0 \right)^{p-1} Q_0,$$

The matrix equation (7.5) gives a system of  $m+1$  nonlinear algebraic equation which can be solved for the elements of  $C$  in Eq. (7.1). Once  $C$  is known,  $y(x)$  can be calculated from Eq. (7.2).

**Example 1:** Consider the first-order nonlinear Fredholm integro-differential equation [5]

$$(5.6) \quad y'(x) = e^x - \frac{1}{5} e^{-x^2} (e^5 - 1) + \int_0^1 e^{2t-x^2} y^3(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

with the initial condition  $y(0) = 1$ . The exact solution of this example is  $y(x) = e^x$ . The absolute difference error for  $m = 3, 5, 9$  in Table 1 is being observed. As we observed in this Table with increasing the value of  $m$  the resulted accuracy increased as well. It is noted that with  $N = 5$ , the maximum absolute error on the grid points Sinc in the Sinc method [5], is  $3.72499 \times 10^{-3}$ ; but in the present method with  $m = 10$ , for equality basis function(11 basis function) the maximum absolute error on the grid points Sinc is  $3.4916 \times 10^{-11}$ .

Table 1

$x$	<i>presented method</i>		
	$m = 3$	$m = 5$	$m = 9$
0.0	$9.9522E - 004$	$2.5022E - 006$	$2.4740E - 012$
0.2	$4.2859E - 004$	$3.8321E - 007$	$1.9780E - 012$
0.4	$1.7370E - 004$	$1.4740E - 007$	$2.5981E - 012$
0.6	$2.2852E - 004$	$2.6432E - 007$	$3.8940E - 012$
0.8	$4.3482E - 004$	$4.7009E - 007$	$5.7709E - 012$
1.0	$9.4787E - 004$	$2.4950E - 006$	$3.3360E - 012$

**Acknowledgements:** The work was supported by Alzahra university.

## REFERENCES

1. M.I. BHATTI, P. BRACKEN, Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, J. Appl. Math. Comput. 205 (2007) 272-280.
2. R. T. FAROUKI, Legendre-Bernstein basis transformations, J. Appl. Math. Comput. 119 (2000) 145-160.
3. Y. ORDOKHANI, S. DAVAEI FAR, Approximate solutions of differential equations by using Bernstein polynomials, ISRN Applied Mathematics, (to be appeared) Article ID 787694, (2011).

4. C. H. HSIAO, Hybrid function method for solving Fredholm and Volterra integral equations of the second kind, J. Appl. Math. Comput. 230 (2009) 59-68.
5. K. JALAEI, M. ZAREBNIA, M. MIRZAEI CHALAKI, Development of the sinc method for nonlinear integro-differential equations, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 4 (2010) 5508-5515.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ALZAHRA UNIVERSITY, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* `ordokhani@alzahra.ac.ir`

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ALZAHRA UNIVERSITY, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* `sara.davaei@yahoo.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ON $MC$ -MATRICES AND $MC'$ -MATRICES

MEHDI PANAHI<sup>1</sup> AND FAHIMEH AMIRI<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. We present some properties of two classes of nonsingular matrices, the  $MC$ -matrices and the  $MC'$ -matrices, and show that the class of symmetric  $MC$ -matrices and the class of symmetric  $MC'$ -matrices are both subsets of the class of symmetric matrices with exactly one positive eigenvalue.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The class of symmetric real matrices having exactly one positive eigenvalue will be denoted by  $B$ . The class of positive matrices belonging to  $B$  will be denoted by  $A$  [1]. Clearly,  $A \subseteq B$ . These classes of matrices play important roles in many areas such as mathematical programming, matrix theory, numerical analysis and statistics [1, 3].

In [3], Pena presented several properties of a symmetric positive matrix with exactly one positive eigenvalue. In this paper some properties of the  $MC$ -matrices and the  $MC'$ -matrices are presented. In addition we show that every symmetric  $MC$ -matrix and every symmetric  $MC'$ -matrix has exactly one positive eigenvalue.

Let  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , and let  $k$  be a positive integer. Then we denote by  $I$  the identity matrix;  $A^T$  the transpose of  $A$ ;  $\rho(A)$  the spectral radius of  $A$ ;  $\nu_k$  the row vector  $(1, 2, \dots, k)$ ;

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 15A18; Secondary 15A48, 15A57.

*Key words and phrases*. Eigenvalue, Symmetric matrix,  $MC$ -matrix,  $MC'$ -matrix.

\* Speaker.

$$A[\nu_k] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

the  $k \times k$  leading principle submatrix of  $A$ . We write  $A \geq B$  (*respectively*,  $A > B$ ) if  $a_{ij} \geq b_{ij}$  (*respectively*,  $a_{ij} > b_{ij}$ ) for  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

The remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we present some properties of the  $MC$ -matrices, and show that every symmetric  $MC$ -matrix has exactly one positive eigenvalue. The  $MC'$ -matrices, are introduced in Section 3 and proved that the class of symmetric  $MC'$ -matrices is a subset of  $B$ .

## 2. $MC$ -MATRICES

**Definition 2.1.** Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Then

1.  $A$  is said to be a *positive* (respectively, *nonnegative*) matrix if  $a_{ij} > 0$  (respectively,  $a_{ij} \geq 0$ ) for all  $i, j = 1, 2, \dots, n$  [2].
2.  $A$  is called a nonsingular  $M$ -matrix if it can be expressed as  $A = sI - B$ , where  $B$  is nonnegative and has a spectral radius  $\rho(B) < s$  [2].

Given a matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , we define

$$s_i^+(A) = \max \{0, \min\{a_{ij} \mid j \neq i\}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

The matrix  $A$  can be decomposed into

$$A = C^+(A) + E^+(A),$$

where

$$C^+(A) = \begin{pmatrix} a_{11} - s_1^+(A) & a_{12} - s_1^+(A) & \dots & a_{1n} - s_1^+(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} - s_n^+(A) & a_{n2} - s_n^+(A) & \dots & a_{nn} - s_n^+(A) \end{pmatrix},$$

$$E^+(A) = \begin{pmatrix} s_1^+(A) & s_1^+(A) & \dots & s_1^+(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_n^+(A) & s_n^+(A) & \dots & s_n^+(A) \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.2.** A matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  with positive row sums is called an *MC*-matrix if all its off-diagonal elements are positive, and  $-C^+(A)$  is a nonsingular *M*-matrix [4].

**Example 2.3.** Consider the positive row sums matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Clearly all its off-diagonal elements are positive. We have

$$-C^+(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 5I - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 5I - B,$$

where  $B \geq 0$  and  $\rho(B) = 3.5616 < 5$ . Thus  $-C^+(A)$  is a nonsingular *M*-matrix and then  $A$  is an *MC*-matrix.

The following results explain some properties of the *MC*-matrices.

**Theorem 2.4.** If  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is an *MC*-matrix, then  $(-1)^{n-1} \det(A) > 0$ .

**Lemma 2.5.** Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be an *MC*-matrix, and let  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be a positive diagonal matrix. Then  $DA$  is an *MC*-matrix.

The following theorem shows that the class of symmetric *MC*-matrices is a subset of  $B$ .

**Theorem 2.6.** Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be a symmetric *MC*-matrix. Then  $A \in B$ .

### 3. $MC'$ -MATRICES

**Definition 3.1.** A matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  with at least one positive diagonal element is called an *MC'*-matrix if all its off-diagonal elements are positive, and  $-C^+(A)$  is a nonsingular *M*-matrix.

**Example 3.2.** Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$A$  has at least one positive diagonal element and all its off-diagonal elements are positive. Clearly

$$-C^+(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

is a nonsingular  $M$ -matrix. Thus  $A$  is an  $MC'$ -matrix.

For an  $MC'$ -matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , similar to the Theorem 2.4, we can deduce

$$(-1)^{n-1} \det(A) > 0.$$

*Remark 3.3.* We remark that a positive matrix is an  $MC'$ -matrix if and only if it is an  $MC$ -matrix. But the classes of symmetric  $MC'$ -matrices and symmetric  $MC$ -matrices do not contain each other. For example, let

$$A_1 = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Then, by simple computations,  $A_1$  is an  $MC'$ -matrix, but not an  $MC$ -matrix.  $A_2$  is an  $MC$ -matrix, but not an  $MC'$ -matrix.

The following results explain some properties of the  $MC'$ -matrices.

**Lemma 3.4.** Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , and let  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be a permutation matrix. Then  $P^T A P$  is an  $MC'$ -matrix if and only if  $A$  is an  $MC'$ -matrix.

**Lemma 3.5.** Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be an  $MC'$ -matrix with  $a_{11} > 0$ . Then any  $k \times k$  leading principle submatrix  $A[\nu_k]$  of  $A$  is an  $MC'$ -matrix.

**Lemma 3.6.** Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be symmetric, and let

$$(-1)^{k-1} \det(A[\nu_k]) > 0 \text{ for all } k = 1, 2, \dots, n.$$

Then  $A \in B$ .

*Remark 3.7.* It was shown in [1, Theorem 4.4.6] that a symmetric positive matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  belongs to  $A$  if and only if, for any  $k \times k$  principle submatrix  $B$  of  $A$ ,  $(-1)^{k-1} \det(B) > 0$  for all  $k = 1, 2, \dots, n$ . Thus, Lemma 3.6 provides a weaker condition such that a symmetric matrix has exactly one positive eigenvalue.

The following theorem shows that the class of symmetric  $MC'$ -matrices is a subset of  $B$ .

**Theorem 3.8.** *Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  be a symmetric  $MC'$ -matrix. Then  $A \in B$ .*

*Proof.* There exists a permutation matrix  $P$  such that the first diagonal element of  $P^T A P$  is positive. From Lemma 3.4,  $P^T A P$  is also an  $MC'$ -matrix. By Lemma 3.5, any  $k \times k$  leading principle submatrix of  $P^T A P$  is an  $MC'$ -matrix, and hence

$$(-1)^{k-1} \det((P^T A P)[\nu_k]) > 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

Thus, due to Lemma 3.6, we have  $P^T A P \in B$ , and then  $A \in B$ . □

## REFERENCES

1. R. B. BAPAT, T. E. S. RAGHAVAN, *Nonnegative Matrices and Applications*, Encyclopedia Math. Appl., vol.64, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
2. A. BERMAN, R.J. PLEMMONS, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York, 1979.
3. J. M. PENA, *Positive symmetric matrices with exactly one positive eigenvalue*, Linear Algebra Appl., 430 (2009) 1566–1573.
4. S. Q. SHEN, T. Z. HUANG AND Y. F. JING, *On inclusion and exclusion intervals for the real eigenvalues of real matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 31 (2009) 816–830.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BIRJAND, P. O. BOX 414, BIRJAND, IRAN.  
E-mail address: panahitemp@yahoo.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BIRJAND, P. O. BOX 414, BIRJAND, IRAN.  
E-mail address: fahimeamiri64@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ON THE MAXIMALITY OF THE GRAPHS OF THE SKEW HERMITIAN OPERATORS

ALI PARSIAN<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. For a Hilbert space  $(H, \rho)$  and any closed subspace  $E \subseteq H$  and any Skew Hermitian linear map  $S : E \rightarrow H$  in this paper it is shown that the set  $\Lambda = \{(x, Sx + e^\perp) | x \in E, e^\perp \in E^\perp\}$  is a closed subspace of  $E \times H$  and has the maximality property in the sense of [4]. It is also proved that for all such  $\Lambda$  that the map  $P_1 + P_2 : \Lambda \rightarrow H$  is a norm preserving isomorphism of vector spaces. As an application some existence and uniqueness theorems on Integral and Matrix Theory also proved.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

A kind of Maximality on smooth manifolds were introduced by Courant and Weinstein [1,5] as a construction of prisymplectic structures. The algebraic counterpart of this structure is given by Dorfman [3]. A new construction and some applications of this concept on Hilbert spaces are introduced in [4]. In this approach we prove some new theorems on operators and extend the domain of construction and applications in the sense of [4].

### 2. MAIN RESULTS

Let  $(H, \rho)$  be a Hilbert space and  $E$  be a closed subspace of it. The maps  $\Theta, \Phi : (E \times H)^2 \rightarrow R$  defined by

$$(2.1) \quad \Theta((e, h), (e', h')) = \rho(e, h') + \rho(h, e')$$

$$(2.2) \quad \Phi((e, h), (e', h')) = \rho(e, e') + \rho(h, h')$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 15B57, 11F72.

*Key words and phrases.* Skew Hermitian operator, Trace.

\* Speaker.

are bilinear and  $(E \times H, \Phi)$  is a Hilbert space [3].

**Theorem 2.1.** *Let  $E \subseteq H$  and  $S : E \rightarrow H$  be a skew Hermitian linear operator and  $\Lambda = \{(x, Sx + e^\perp) | x \in E, e^\perp \in E^\perp\}$ , then  $\Lambda$  is a closed subspace of  $E \times H$  and*

$$(2.3) \quad \Theta((x, Sx + e^\perp), (x', Sx' + e'^\perp)) = 0$$

for all  $x, x', e, e' \in E$ . Moreover  $\Lambda$  is Maximal with the above property, i.e., there is not  $(a, b) \in E \times H$  and  $e^\perp \in E^\perp$  such that  $b \neq Sa + e^\perp$  and  $\Theta((x, Sx + e^\perp), (a, b)) = 0$  for all  $x \in E, e^\perp \in E^\perp, (x, y) \in E \times H$ .

*Proof.* obviously  $\Theta$  is a subspace of  $E \times H$  and  $\Theta((x, Sx + e^\perp), (x', Sx' + e'^\perp)) = 0$  for all  $x, x', e, e' \in E$ . let  $(u, v) \in \bar{\Lambda}$  and  $\{(x_n, Sx_n + e_n^\perp)\}_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of the elements of  $\Lambda$  tends to  $(u, v)$ . Then

$$\begin{aligned} \Theta((u, v), (x, Sx + e^\perp)) &= \rho(u, Sx + e^\perp) + \rho(v, x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(x_n, Sx + e^\perp) + \rho(Sx_n + e_n^\perp, x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta((x_n, Sx_n + e_n^\perp), (x, Sx + e^\perp)) = 0 \end{aligned}$$

So maximality of  $\Lambda$  implies that  $(u, v) \in \Lambda$  and  $\Lambda$  is closed. Let there exists some  $(a, b) \in E \times H$  such that  $\Theta((x, Sx + e^\perp), (a, b)) = 0$  for all  $x \in E, e^\perp \in E^\perp$ . Then  $\rho(x, b) + \rho(x, -Sa) + \rho(e^\perp, a) = 0$  for all  $x \in E, e^\perp \in E^\perp, (a, b) \in E \times H$ . So  $\rho(x, b - Sa) = 0$  for all  $x \in E$ , and consequently  $b - Sa = e^\perp$  for some  $e \in E$ . □

**Theorem 2.2.** *Let  $P_i : \Lambda \rightarrow H (i = 1, 2)$  are the first and second projections, then the linear map  $P_1 + P_2$  is surjective.*

*Proof.* Let  $z \perp (P_1 + P_2)(\Lambda)$ , there are  $x, x', e, e' \in E$  such that

$$(z, z) = (x, Sx + e^\perp) + (Sx'^\perp + e'^\perp, x')$$

Therefore

$$\begin{aligned} 2\|z\|^2 &= \Phi((z, z), (z, z)) \\ &= \Phi((z, z), (x, Sx + e^\perp)) + \Phi((z, z), (Sx'^\perp + e'^\perp, x')) \\ &= \rho(z, x + Sx + e) + \rho(z, x' + Sx'^\perp + e'^\perp) = 0 \end{aligned}$$

,i.e.,  $z = 0$  and  $(P_1 + P_2)(\Lambda)$  is dense in  $H$ . Consequently if  $(P_1 + P_2)(z_n)$  is a Cauchy sequence in  $H$  then  $z_n$  is also a Cauchy sequence in  $\Lambda$  and  $(P_1 + P_2)(\Lambda) = H$ . □

**Theorem 2.3.** *The map  $P_1 + P_2$  is injective and norm preserving.*

*Proof.* For any  $x, e \in E$  we have

$$\begin{aligned}\|(x, Sx + e^\perp)\|^2 &= \Phi((x, Sx + e^\perp), (x, Sx + e^\perp)) \\ &= \rho(x, x) + \rho(Sx + e^\perp, Sx + e^\perp) = \|x\|^2 + \|Sx + e^\perp\|^2 = \\ &= \rho(x + Sx + e^\perp, x + Sx + e^\perp) = \|x + Sx + e^\perp\|^2\end{aligned}$$

Therefore  $\|(x, Sx + e^\perp)\| = \|x + Sx + e^\perp\|$ . □

**Theorem 2.4.** For any  $g \in L^2[a, b]$  and  $f \in C^1[a, b]$ , with the boundary condition  $f(a) = f(b) = 0$ , there is some  $\lambda \in R$ , such that

$$\int_a^b (f(t)g(t) - \lambda f^2(t) - \lambda f(t)f'(t))dt = 0$$

*Proof.* let  $H = L^2[a, b]$ ,  $E = \text{Span}\{f\}$  and define  $S : E \rightarrow H$  by  $S(f) = \frac{df}{dt}$ . Then  $g = \lambda f + \lambda f' + e^\perp$  for some  $\lambda \in R$  and  $e^\perp \in E^\perp$ , therefore  $\int_a^b (f(t)g(t) - \lambda f^2(t) - \lambda f(t)f'(t))dt = 0$ . □

**Theorem 2.5.** Let  $M$  be a fixed skew Hermitian  $n \times n$  matrix. Then the matrix equation  $X \pm MX = G$  has a unique solution for any  $n \times n$  matrix  $G$ .

*Proof.* Let  $H = M_{n \times n}$ ,  $A, B \in H$ ,  $E = M$ ,  $\rho(A, B) = \text{tr}(B^*A)$  and  $S(A) = \pm MA$ , then  $\rho(S(A), B) + \rho(A, S(B)) = 0$ , and the proposition is proved. □

As a consequence of the following Theorem we have

**Theorem 2.6.** For any Skew Hermitian matrix  $M$  both  $I + M$  and  $I - M$  are nonsingular.

## REFERENCES

1. T.G. COURANT, *Dirac manifolds*, Trans. Amer. Math.Soc, **319** 1990, no.2 631 - 661.
2. I. DORFMAN, *Dirac structures And integrability of nonlinear evolution equations*, Nonlinear science: Theory and Applications, John Wiley Sons.Ltd.Chichester, 1993. MR94j:58031.
3. N. DUNFORD, I.T.SCHWARTZ, *Linear Operators*, interscience Publishers Inc, New york, 1958.
4. A. PARSIAN, *Applications of Maximality in the Decomposition of Hilbert Spaces*, 16th Seminar on Math.Anal.appl., **4-5** February 2007, Ferdowsi University, Mashhad, Iran. pp.109-112.
5. A. WENSTEIN, *The local structure of Poisson manifolds*, J.Diff.Geom, **18** 1983, 523 - 557.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TAFRESH, P. O. CODE 39518-79611, TAFRESH, IRAN.

*E-mail address:* parsian@Tafreshu.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## APPLICATION OF GENERALIZED PURCELL METHOD FOR COMPLEX EIGENVALUE PROBLEM

M. RAHMANI<sup>1\*</sup> AND S. H. MOMENI-MASULEH<sup>2</sup>

ABSTRACT. A new method based on generalized Purcell method is presented to obtain the real and complex eigenvalues of an arbitrary matrix. For accelerating the convergence of the iterative method, a new version of Aitkin's acceleration for complex series is proposed. In order to elucidate the accuracy of the proposed method, the method is applied to the standard and challengeable matrices FS1836( $n = 183$ ) and STEAM1( $n = 240$ ) that obtained from Matrix Market.

### 1. INTRODUCTION

Assume that  $x \pm iy$  be the eigenvectors corresponding to eigenvalues  $\lambda \pm i\mu$  of matrix  $A$ . Based on relations for complex eigenvalues of a matrix  $A$ , we have

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x - \mu y \\ Ay &= \mu x + \lambda y \end{aligned}$$

which can be written in the following homogenous linear system of equations

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} A - \lambda I & \mu I \\ -\mu I & A - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

For initial values of  $\mu_0$  and  $\lambda_0$  the new generalized Purcell iterative (GPI) method is proposed for solving Eq. (1.1) leads to

$$\lambda_n = \frac{x^T Ax + y^T Ay}{x^T x + y^T y}$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65F05; Secondary , 65F10, 65F15.

*Key words and phrases*. Real eigenvalue problem, complex eigenvalue problem, Purcell method.

\* Speaker.

and

$$\mu_n = \frac{x^T Ay - y^T Ax}{x^T x + y^T y}$$

for

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

To accelerate the convergence of the proposed iterative method, a new version of Aitkin's method for complex series is proposed. Comparison with the QR method [2] shows that the method gives reliable results.

## 2. GENERALIZED PURCELL METHOD

To obtain a decomposition of matrix  $A$  as  $AE = R$  such that  $R$  is upper triangular and  $E$  is an invertible matrix we do as follows. Let  $\{a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  be the row vectors of  $A$  and  $E^1 = \{e_i^1, i = 1, 2, \dots, n\}$  be the standard basis for space  $\mathbb{R}^n$ . Let by induction in the step  $j$  we have

$$(2.1) \quad E^j = \{e_1^1, e_2^2, \dots, e_j^j, e_{j+1}^j, \dots, e_n^j\}.$$

To make the set  $E^{j+1}$ , the vectors  $e_k^{j+1}$  for  $k = j+1, \dots, n$  are constructed by linear combination of  $e_j^j$  and  $e_k^j$  such that  $a_j$  will be orthogonal to new vectors  $e_k^{j+1}$  in  $E^{j+1}$ . For this purpose let

$$(2.2) \quad \alpha_{ij} = (e_i^j, a_j) / (e_j^j, a_j),$$

and set

$$(2.3) \quad e_i^{j+1} = e_i^j - \alpha_{ij} e_j^j \quad i = j+1, \dots, n.$$

**Lemma 2.1.** *If in equation (2.3)  $\alpha_{ij} = 0$  for  $i = j+1, \dots, n$  then  $a_j$  is a linearly dependent vector from  $\{a_k\}_{k=1}^{j-1}$ .*

in the case of lemma (2.1) put away  $a_j$  and begin process by  $a_{j+1}$ .

**Theorem 2.2.** *For  $k = 1, \dots, n$ , every vector in  $\mathbb{R}^n$  can be expressed as a linear combination of vectors in  $E^k$  in a unique way, or  $E^k$  is a basis of  $\mathbb{R}^n$ .*

For avoiding divided by zero in (2.2) we select  $a_j$  such that

$$(2.4) \quad j = \operatorname{argmax}_{j \leq k \leq n} \|(a_k, e_j^j)\|,$$

or  $e_j^j$  such that

$$(2.5) \quad j = \operatorname{argmax}_{j \leq k \leq n} \|(a_j, e_k^j)\|.$$

We call the selection process(2.4) row pivoting and the selection process(2.5) column pivoting.

**Theorem 2.3.** *Let  $\epsilon$  be a least upper bound of the computation error for  $\alpha_{ij}$ ,  $\delta_{e_n^n}$  be the relative computation error of  $e_n^n$  and suppose  $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|\bar{e}_i\|_2}{\|e_n^n\|_2}$ , then  $\delta_{e_n^n}$  is less than or equal to  $\beta\epsilon(1 - \epsilon)^{-1}$ .*

**Lemma 2.4.** *The number of operations in Purcell method in step  $j$  is equal to  $n(2n+1) - 2j^2$ , so  $\sum_{j=1}^n (n(2j+1) - 2j^2) \approx \frac{1}{3}n^3$ . Thus the complexity of Purcell method is  $o(\frac{1}{3}n^3)$ .*

### 3. NEW ALGORITHMS FOR REAL & COMPLEX EIGENPROBLEMS

According to relation  $A(x + iy) = (\lambda + i\mu)(x + iy)$ , to approximate  $(\lambda + i\mu)$  and  $x + iy$ , for a vector  $Z$  that obtained from GPI method, we define

$$\begin{aligned} f(\lambda, \mu) &= \min_{\lambda, \mu} \|BZ\|_2^2 \\ &= \min_{\lambda, \mu} \left\| \begin{pmatrix} A - \lambda I & \mu I \\ -\mu I & A - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2^2. \end{aligned}$$

By differentiation one can get

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{x^T Ax + y^T Ay}{x^T x + y^T y} \\ \mu &= \frac{x^T Ay - y^T Ax}{x^T x + y^T y}. \end{aligned}$$

The Jacobian of  $f$  is equal to  $J_f = \text{Dig}(|x + iy|^2, |x + iy|^2)$ .

The proposed method for the complex eigenproblem is summarized as following

Step 1: Set  $\lambda_0 = 0$  and  $\mu_0 = 0$  and select arbitrary  $\epsilon$ .

Step 2: For  $k = 1, 2, \dots$ , do:

$$\text{Let } e_{2n}^{2n} = \text{argmin}_{\|z\|_2=1} \|BZ\|_2^2. \quad (\text{According to GPI method})$$

Let  $b_i$  be row vectors of matrix  $B$ . Set

$$\lambda_k = \frac{e_{2n,2n}^{2n}(e_{2n}^{2n}, b_{2n})}{\|e_{2n}^{2n}\|_2^2} + \lambda_{k-1}$$

and

$$\mu_k = \frac{e_{2n,n}^{2n}(e_{2n}^{2n}, b_{2n})}{\|e_{2n}^{2n}\|_2^2} + \mu_{k-1}$$

Step 3: Repeat step 2 until  $|(\lambda_k + i\mu_k) - (\lambda_{k-1} + i\mu_{k-1})| \leq \epsilon$

**Acknowledgements:** This research was supported by Iranian Academic Center for Education, Culture and Research, Tehran, Iran.

## REFERENCES

1. M. Rahmani and S.H. Momeni-Masuleh, Generalized Purcell Method and its Applications, International Journal of Applied Mathematics, 22 (1) (2009), 103-115.
2. D. S. Watkins, The QR Algorithm Revisited, SIAM Review, 50 (1) (2008) 133-145.
3. <http://math.nist.gov/MatrixMarket/>

<sup>1</sup> TECHNOLOGY DEVELOPMENT INSTITUTE, ACECR, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* rahmanimr@yahoo.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHED UNIVERSITY, TEHRAN, P.O. BOX: 18151-159, IRAN.

*E-mail address:* momeni@shahed.ac.ir



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## VECTOR OPTIMIZATION AND VECTOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN ASPLUND SPACES

M. REZAEI<sup>1</sup> AND E. BAYATMANESH<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** Some properties pseudoinvex functions via limiting subdifferential are obtained. Furthermore, the equivalence between vector variational inequalities and vector optimization problems are studied under pseudoinvexity condition.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The study of vector variational inequalities has become an important research direction of vector optimization problems. In particular, various relationship between vector variational inequalities and vector optimization problems have been established [1],[3],[4],[9]. For nondifferentiable locally Lipschitz functions similar results are obtained in terms of monotonicity of their Clarke subdifferentials in [4]. The concept of generalized differentials plays a fundamental role in modern variational analysis [2],[5]-[7]. In 1976 Mordukhovich [5] presented and introduced a new subdifferential that it is defined by the limit of the other subdifferentials which is called the limiting subdifferential. In [6],[7] one can find the new recent works, applications and relations between their subdifferentials.

The following results are obtained and known in nonsmooth analysis (see [2], [6],[7]).

A vector  $\xi \in X^*$  is said to be a proximal subgradient of  $f$  at  $x \in K$ , if  $(\xi, -1) \in N_{epif}^P(x, f(x))$ , where  $epif = \{(x, \alpha) : \alpha \geq f(x)\}$ . The set of all proximal subgradient vectors of  $f$  at  $x$  is denoted by  $\partial_P f(x)$ . A vector  $\xi \in X^*$  is a limiting subdifferential

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A51 26B25 47N10 65K10.

*Key words and phrases.* Asplund space, Limiting subdifferentials, Variational inequalities, Prequasinvex and Pseudoinvex functions.

vector of  $f$  at  $x \in K$ , if there exist two sequences  $\xi_i \in X^*$  and  $x_i \in X$  such that  $\xi_i \in \partial_P f(x_i)$ ,  $\xi_i \rightarrow \xi$ ,  $x_i \rightarrow x$  and  $f(x_i) \rightarrow f(x)$ . The set of all limiting subdifferential vectors of  $f$  at  $x$  is denoted by  $\partial_L f(x)$ . The notion of the limiting subdifferential was first introduced, in the equivalent form, in [5]. One of the classes of functions whose set of limiting subdifferentials is nonempty is the class of locally Lipschitz functions. Considering this class, the following results are obtained and known in nonsmooth analysis (see [2], [6],[7]).

**Definition 1.1.** A Banach space  $X$  is an Asplund, or it has the asplund property, if every convex continuous function  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  defined on an open convex subset  $U$  of  $X$  is *Fréchet differentiable* on a dense subset of  $U$ .

*Remark 1.2.* One of the most popular Asplund spaces is any reflexive Banach space [6].

**Theorem 1.3.** [6] *Let  $X$  be a Asplund space and  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  proper and lower semicontinuous around  $\bar{x} \in \text{dom}\varphi$ , then*

$$\partial_L \varphi(\bar{x}) = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \partial_F \varphi(x).$$

*Remark 1.4.* [6] It is well known that

$$\partial_F f(x) \subseteq \partial_L f(x) \subseteq \partial_C f(x) \subseteq \partial_{CR} f(x).$$

**Theorem 1.5.** *Let  $f$  be locally Lipschitz at  $x \in K$ , then  $\partial_L f(x)$  is closed. In fact, if  $x_i \rightarrow x$ ,  $\xi_i \in \partial_L f(x_i)$ , and  $\xi_i \rightarrow \xi$ , then  $\xi \in \partial_L f(x)$ .*

**Theorem 1.6.**  *$f$  is locally Lipschitz, then the set of all limiting subdifferential vectors of  $f$  is uniformly bounded.*

**Theorem 1.7.** *Let  $f$  be locally Lipschitz at  $x \in K$ , then  $\partial_L f(x)$  is closed. In fact, if  $x_i \rightarrow x$ ,  $\xi_i \in \partial_L f(x_i)$ , and  $\xi_i \rightarrow \xi$ , then  $\xi \in \partial_L f(x)$ .*

**Theorem 1.8.** *Let  $f$  be locally Lipschitz on a neighborhood of line segment  $[x, y]$ . Then for every  $\varepsilon > 0$  there exists a point  $z$  in the  $\varepsilon$ -neighborhood of  $[x, y]$  and  $\zeta \in \partial_p f(z)$  such that  $f(y) - f(x) \leq \langle \zeta, (y - x) \rangle + \varepsilon$ .*

**Theorem 1.9.** [7] *Let  $f$  be locally Lipschitz on an open set containing  $[x, y]$ . Then*

$$f(y) - f(x) \leq \langle x^*, y - x \rangle$$

*for some  $c \in [x, y]$ ,  $x^* \in \partial_L f(c)$ .*

The rest of this section provides some relations between the prequasinvex and pseudoinvex functions.

Throughout this paper, we suppose that  $K \subseteq X$  be a nonempty set,  $\eta : K \times K \rightarrow X$  be a vector-valued mapping and  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  be a function.

**Definition 1.10.** A set  $K$  is said to be an invex set with respect to  $\eta$  if for each  $x, y \in K$  and  $t \in [0, 1]$ ,  $x + t\eta(y, x) \in K$ .

The following condition is useful in the sequel.

**Condition C.** Let  $\eta : X \times X \rightarrow X$ . Then for any  $x, y \in X$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  
 $\eta(y, y + \lambda\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y)$ ,  
 $\eta(x, y + \lambda\eta(x, y)) = (1 - \lambda)\eta(x, y)$ .

*Remark 1.11.* Yang et al.(2005) have shown if  $\eta$  satisfies Condition C, then

$$\eta(y + \lambda\eta(x, y), y) = \lambda\eta(x, y).$$

## 2. CHARACTERIZATION OF PSEUDOINVEX FUNCTIONS

**Definition 2.1.** The function  $f$  is said to be pseudoinvex with respect to  $\eta$  if, for each  $x, y \in K$  with  $\langle \xi, \eta(y, x) \rangle \geq 0$  for some  $\xi \in \partial_L f(x)$ , we have  $f(y) \geq f(x)$ .

**Example 2.2.** Let  $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1 > -1, -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}\}$ , for all  $x = (x_1, x_2) \in K$  and  $y = (y_1, y_2) \in K$

$$\eta(y, x) = (y_1 - x_1, \frac{\sin y_2 - \sin x_2}{\cos x_2})$$

and

$$f(x_1, x_2) = x_1 + \sin x_2.$$

For each  $x, y \in K$  and  $\xi \in \partial_L f(x)$  we have

$$\langle \xi, \eta(y, x) \rangle = y_1 - x_1 + \sin y_2 - \sin x_2.$$

Therefore

$$\langle \xi, \eta(y, x) \rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Then the function  $f$  is pseudoinvex.

**Definition 2.3.** The function  $f$  is said to be prequasiinvex with respect to  $\eta$  if for each  $x, y \in K$  and each  $t \in [0, 1]$ , we have  $f(x + t\eta(y, x)) \leq \max(f(x), f(y))$ . The function  $f$  is said to be strictly prequasiinvex with respect to  $\eta$  if for each  $x, y \in K$  and each  $t \in [0, 1]$ , with  $f(x) \neq f(y)$  we have  $f(x + t\eta(y, x)) < \max(f(x), f(y))$ .

**Theorem 2.4.** Let  $f$  be a locally Lipschitz function on  $K$ , and for each  $x, y \in K$   $\langle \zeta, \eta(x, y) \rangle < 0$  for each  $\zeta \in \partial_L f(y)$ , then  $f$  is strict prequasiinvex on  $K$ .

### 3. MAIN RESULTS

**Proposition 3.1.** If  $f$  is a locally Lipschitz function and pseudoinvex with respect to  $\eta$ , satisfies condition  $C$ , then  $f$  is strict prequasiinvex on  $K$ .

**Theorem 3.2.** Let  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  be locally Lipschitz prequasiinvex function,  $\eta$  be continuous with respect to the second argument satisfying Condition  $C$ . If  $\langle x^*, \eta(y, x) \rangle > 0$ , for a  $x^* \in \partial_L f(x)$ , then  $f(y) > f(x)$ .

*Proof.* Since this theorem holds for the Clarke subdifferential (Theorem 3.2 [9]), therefore, by using Remark 1.4, it holds also for limiting subdifferential.  $\square$

**Acknowledgements:** In this research, the first author was partially supported by the Center of Excellence for Mathematics, University of Isfahan.

### REFERENCES

1. Q. H. Ansari, M. Rezaei, and J. Zafarani, Generalized vector variationallike inequalities and vector optimization, Journal of Global Optimization, to appear, 2011.
2. F. H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, 1983.
3. F. Giannessi, Theorems on the alternative quadratic programs and complementarity problems. In: Cottle, R.W., Giannessi, F., Lions, J.L (eds.) Variational Inequalities and Complementarity Problems, pp. 151- 186. Wiley, Chichester (1980).
4. T. Jabarootian and J. Zafarani, Generalized vector variational-like inequalities. J. Optim. Theory Appl. 136, 15-30 (2008).
5. B. S. Mordukhovich, Maximum principle in problems of time optimal control with nonsmooth constraints. J. Appl. Math. 40, 960-969 (1976).

6. B.S. Mordukhovich, Variations Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory, in: Grundlehren Series (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 330, Springer, 2006.
7. B.S. Mordukhovich, Variations Analysis and Generalized Differentiation, II: Applications, Grundlehren Ser. (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 331, Springer, 2006.
8. B. S. Mordukhovich and Y. Shao, Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996) 1235-1280.
9. M. Rezaie and J. Zafarani, Vector optimization and variational-like inequalities. J. Glob. Optim. 43,(2009) 47-66 .
10. M. Soleimani-damaneh, On generalized convexity in Asplund spaces, Nonlinear Anal. 70 (2009), pp. 3072-3075.
11. X. M. Yang and X. Q. Yang, Vector variational-like inequality with pseudoinvexity. Optimization 55,(2006) 157- 170 .

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF ISFAHAN, ISFAHAN 81745-163, IRAN.  
*E-mail address:* mrezaie@sci.ui.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF ISFAHAN, ISFAHAN 81745-163, IRAN.  
*E-mail address:* e.bayat23@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## DIMENSION OF SCHUR MULTIPLIER OF LIE ALGEBRAS

MOHAMMAD REZA RISMANCHIAN<sup>1,\*</sup> AND MEHDI ARASKHAN<sup>2</sup>

ABSTRACT. The paper is devoted to give some bounds for the dimension of Schur multiplier of finite dimensional Lie algebras. Moreover, we present the concepts of irreducible and primitive extensions of an arbitrary Lie algebra and give some equivalent conditions for a central extension to be one of the latter notions.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

An algebra is a vector space  $A$  over a field  $k$  together with a bilinear map  $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ . The bilinear map  $[\cdot, \cdot]$  is called a Lie bracket. A subalgebra  $B \subset A$  is called an ideal if  $[x, y]$  and  $[y, x]$  lie in  $B$  for all  $x \in A$  and  $y \in B$ . An algebra  $L$  is said to be a *Lie algebra* if its Lie bracket has the following properties:

- (1)  $[x, x] = 0$  for all  $x \in L$ ,
- (2)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  for all  $x, y, z \in L$ .

Let  $S$  be a subset of  $L$ . Then the set

$$C_L(S) = \{x \in L \mid [x, s] = 0 \text{ for all } s \in S\},$$

is called the *centralizer* of  $S$  in  $L$ . One may easily observed that  $C_L(S)$  is a subalgebra of  $L$ . If  $S = L$ , then  $C_L(L)$  is equal to the center of  $L$  which denoted by  $C(L)$ . Let  $L$  be a

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. 17B56, 17B99.

*Key words and phrases*. Lie algebra, Schur multiplier, irreducible and primitive extensions.

\* rismanchian@sci.sku.ac.ir.

Lie algebra and let  $V, W$  be subspaces of  $L$ . Then the linear span of the elements  $[v, w]$  for  $v \in V$  and  $w \in W$  is called the *product space* of  $V$  and  $W$ . It is denoted by  $[V, W]$ . If  $V$  and  $W$  be ideals of  $L$ , then also  $[V, W]$  is an ideal of  $L$ . Also, if  $V = W = L$ , then the subspace  $[L, L] = L^2$  is an ideal of  $L$ . It is called the *derived subalgebra* of  $L$ .

Throughout this paper we shall use the term Lie algebra to mean a Lie algebra over some fixed field  $k$ . Let  $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$  be a free presentation of a Lie algebra  $L$ , where  $F$  is a free Lie algebra. Then the *Schur multiplier* of  $L$ , denoted by  $M(L)$ , is defined to be the factor Lie algebra  $(R \cap F^2)/[R, F]$ . It is easily seen that the Schur multiplier of a Lie algebra  $L$  is abelian and independent of the choice of the free presentation of  $L$ . Furthermore, if  $L$  is finite dimensional, then  $M(L)$  is isomorphic to  $H^2(L, k)$ , where  $L$  acts trivially on  $k$  (see [1,2,3,4] for more information on the Schur multiplier of a finite dimensional Lie algebra). An exact sequence  $0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$  of Lie algebras is a *central extension* of  $L$  if  $M$  is a central subalgebra of  $K$ . Note that the above free presentation of  $L$  induces the following central extension, which is called a *free central extension* of  $L$ ,

$$0 \longrightarrow \frac{R}{[R, F]} \longrightarrow \frac{F}{[R, F]} \xrightarrow{\bar{\pi}} L \longrightarrow 0,$$

where  $\bar{\pi}$  is the natural epimorphism induced by  $\pi$ .

The following useful lemma, which its proof is straightforward, will be needed.

**Lemma 1.1.** *Let  $F/R \cong L$  be a free presentation of the Lie algebra  $L$  and let  $0 \longrightarrow M \longrightarrow K \xrightarrow{\theta} \bar{L} \longrightarrow 0$  be a central extension of another Lie algebra  $\bar{L}$ . Then for each homomorphism  $\alpha : L \longrightarrow \bar{L}$ , there exists a homomorphism  $\beta : F/[R, F] \longrightarrow K$  such that  $\beta(R/[R, F]) \subseteq M$  and the following diagram is commutative:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{R}{[R, F]} & \longrightarrow & \frac{F}{[R, F]} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\theta} & \bar{L} \longrightarrow 0, \end{array}$$

where  $\beta_1$  is the restriction of  $\beta$  to  $R/[R, F]$ .

## 2. MAIN RESULTS

In this section we study  $\dim M(L)$ . begin by the following theorem.

**Theorem 2.1.** *Let  $L$  be a finite dimensional Lie algebra with ideal  $B$  and set  $A = L/B$ . Then there exists a finite dimensional  $G$  with an ideal  $M$  such that*

- (i)  $L^2 \cap B = G/M$ ,
- (ii)  $M \cong M(L)$ ,
- (iii)  $M(A)$  is a homomorphic image of  $G$ .

*Proof.* Let  $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$  be a free presentation of a Lie algebra  $L$ , and suppose  $B = S/R$  for some ideal  $S$  in  $F$ . Then  $A = L/B = \frac{F/R}{S/R} \cong F/S$ . Now, set  $M = (F^2 \cap R)/[R, F]$  and  $G = (F^2 \cap S)/[R, F]$ . Then

$$L^2 \cap B = (F/R)^2 \cap S/R = ((F^2 + R) \cap S)/R = ((F^2 \cap S) + R)/R \cong F^2 \cap S/F^2 \cap R \cong G/M.$$

Thus, (i) has been proven. By definition,  $M(L) \cong M$  and (ii) has been proven. By definition,

$$M(A) \cong F^2 \cap S/[R, F] \cong \frac{F^2 \cap S/[R, F]}{[S, F]/[R, F]} \cong \frac{G}{[S, F]/[R, F]}.$$

Therefore,  $M(A)$  is the image of  $G$  under some homomorphism, whose kernel is  $[S, F]/[R, F]$ . □

This leads to the following result.

**Corollary 2.2.** *Let  $L$  be a finite dimensional Lie algebra,  $B$  be any ideal of  $L$ , and  $A = L/B$ . then  $\dim M(A) \leq \dim M(L) + \dim M(L^2 \cap B)$ .*

*Proof.* From Theorem 2.1,  $\dim M(G) = \dim M(L) + \dim M(L^2 \cap B)$  and  $\dim M(A) \leq \dim G$ . Thus,  $\dim M(A) \leq \dim M(L) + \dim M(L^2 \cap B)$ . □

Now, we introduce the notions of irreducible and primitive extensions of a finite dimensional Lie algebra.

**Definition 2.3.** Let  $e : 0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$  be a central extension of a finite dimensional Lie algebra  $L$ . Then the extension  $e$  is called *irreducible* if there is no proper

subalgebra  $K_1$  of  $K$  such that  $K = M + K_1$ . If in addition  $\dim(M \cap K^2) = \dim(M(L))$ , then  $e$  is called a *primitive extension*.

**Theorem 2.4.** *Let  $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$  be a free presentation of a Lie algebra  $L$  and  $e : 0 \longrightarrow M \longrightarrow K \xrightarrow{\theta} L \longrightarrow 0$  be any irreducible extension of  $L$ . Then  $K$  is a homomorphic image of the factor Lie algebra  $F/[R, F]$ , in such a way that there exists an ideal  $S/[R, F]$  in  $R/[R, F]$  such that*

$$K \cong \frac{F/[R, F]}{S/[R, F]} \quad \text{and} \quad M \cong \frac{R/[R, F]}{S/[R, F]}.$$

*Moreover, if  $L$  is finite dimensional, then  $\dim(M \cap K^2) \leq \dim M(L)$  and the extension  $e$  is primitive if and only if  $S \cap F^2 = [R, F]$ .*

*Proof.* By Lemma 1.1, there exists a homomorphism  $\beta : F/[R, F] \longrightarrow K$  such that the corresponding diagram with the central extension  $e$  in Lemma 1.1 is commutative. It is easily shown that  $K = M + \beta(F/[R, F])$  and  $\text{Ker} \beta \subseteq R/[R, F]$ . By the assumption  $e$  is irreducible, so  $K = \beta(F/[R, F])$  and  $\beta$  is onto. Put  $\text{Ker} \beta = S/[R, F]$ , for some suitable ideal  $S$  in  $F$ , then we can obtain the required isomorphisms.

Now, suppose that  $L$  is finite dimensional. Then using the above notations, we have

$$M \cap K^2 \cong \frac{R \cap (F^2 + S)}{S} \cong \frac{(R \cap F^2) + S}{S} \cong \frac{R \cap F^2}{S \cap F^2} \cong \frac{M(L)}{(S \cap F^2)/[R, F]},$$

which imply that  $\dim(M \cap K^2) \leq \dim M(L)$ . Finally, by Definition 1.2 and using the above isomorphisms, one can easily see that  $e$  is primitive if and only if  $S \cap F^2 = [R, F]$ .  $\square$

## REFERENCES

1. P. Batten, K. Moneyhun and E. Stitzinger, *On characterizing nilpotent Lie algebras by their multipliers*, Comm. Alg. **24** (1996), 4319-4330.
2. L.R. Bosko, *On Schur multipliers of Lie algebras and groups of maximal class*, Int. J. Alg. Comput. **20**(6) (2010), 807-821.
3. P. Hardy, *On characterizing nilpotent Lie algebras by their multipliers III*, Comm. Alg. **33** (2005), 4205-4210.
4. B. Yankosky, *On the multiplier of a Lie algebra*, Journal of Lie Theory. **13** (2003), 1-6.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHRE-KORD UNIVERSITY, P. O. Box 115, SHAHRE-KORD, IRAN.

*E-mail address:*    `rismanchian@sci.sku.ac.ir`

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ISLAMIC AZAD UNIVERSITY-YAZD BRANCH, IRAN.

*E-mail address:*    `m.araskhan@iauyazd.ac.ir`



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## ORTHOGONALITY OF OPERATORS

FARZANE SADEGHI<sup>1\*</sup> AND ABBAS SALEMI<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** A new notion of orthogonality for operators is introduced. Comparisons are drawn between this orthogonality and an earlier one used by R. Bhatia. A condition has been achieved in the sense of this new orthogonality which converts Birkhoff-James orthogonality to be symmetric. We also state its application in approximation theory, distance problems and computing norm of inner derivation.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $(X, \|\cdot\|)$  be a normed linear space of dimension greater than 1. If  $(X, \|\cdot\|)$  is an inner-product space with inner-product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , then the most obvious definition of orthogonality is  $x \perp y$  if and only if  $\langle x, y \rangle = 0$ . More general definitions involving only normed properties were introduced by G. Birkhoff, R.C. James, I. Singer and C.R. Diminnie. One of these definitions is known as Birkhoff-James orthogonality which we will denote by  $\perp_{BJ}$ . It is defined as follows

$x \perp_{BJ} y$  if and only if  $\|x\| \leq \|x + zy\|$  for every complex numbers  $z$ .

In the concept of orthogonality, some immediate desirable properties which are usually studied, are as follows:

- (1) Symmetry: if  $x \perp y$ , then  $y \perp x$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 15A60, 47A12, 47A58.

*Key words and phrases.* Birkhoff-James orthogonality, Davis-Wielandt shell, Maximal numerical range, Distance problems, Best approximation, Inner derivation, .

\* speaker.

(2) Homogeneity: if  $x \perp y$ , then  $\alpha x \perp \beta y$  for all real  $\alpha$  and  $\beta$ .

(3) Additivity: if  $x \perp y$  and  $x \perp z$ , then  $x \perp y + z$ .

(4) Existence: if  $x, y \in X$ , then there is a real number  $\alpha$  such that  $x \perp (\alpha x + y)$ .

The last property is extremely useful in working with an orthogonality relation. Among other things, it guarantees that the relation is not vacuous.

Let  $\mathbb{B}(H)$  be the algebra of bounded linear operators acting on the Hilbert space  $H$ . We identify  $\mathbb{B}(H)$  with  $M_n$  if  $H$  has dimension  $n$ . R. Bhatia has studied Birkhoff-James orthogonality for matrices and operators in  $\mathbb{B}(H)$ . Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$  the operator  $A$  is said to be Birkhoff-James orthogonal to  $B$  if  $\|A\| \leq \|A + zB\|$  for all complex number  $z$ . In Hilbert spaces this orthogonality is equivalent to the usual notion of orthogonality but in general Banach spaces is neither symmetric nor additive. However it is homogeneous and existent. Next characterization of orthogonality was proved by Bhatia.

**Theorem 1.1** ([1], theorem 1.1). *Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$ . Then  $A \perp_{BJ} B$  if and only if there exists a sequence  $\{x_n\}$  of unit vectors such that  $\|Ax_n\| \rightarrow \|A\|$ , and  $\langle Ax_n, Bx_n \rangle \rightarrow 0$ .*

Following Hestenes [3], operators  $A, B \in \mathbb{B}(H)$  are  $*$ -orthogonal if  $A^*B = AB^* = 0$ .  $*$ -orthogonality is symmetric, additive and homogeneous but it is not existent. Note that merely the assumption  $A^*B = 0$  implies  $A \perp_{BJ} B$  and even  $B \perp_{BJ} A$ . This follows from

$$\|A + zB\|^2 = \|(A + zB)^*(A + zB)\| = \|A^*A + |z|^2 B^*B\| \geq \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

To formulate our new orthogonality relation, we need the concept of *numerical range* of an operator which is defined as follows

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in H, \langle x, x \rangle = 1\}.$$

Motivated by theoretical study and applications, there have been many generalizations of the numerical range, one of these generalizations is the *Davis-Wielandt shell* of  $A \in \mathbb{B}(H)$  defined by

$$DW(A) = \{(\langle Ax, x \rangle, \langle Ax, Ax \rangle) : x \in H, \langle x, x \rangle = 1\}$$

Evidently the projection of the set  $DW(A)$  on the first coordinate is  $W(A)$ . Another generalization of  $W(A)$  is introduced by Stampfli in [4], the *maximal numerical range* of  $A \in \mathbb{B}(H)$  which is the set

$$W_0(A) = \{\lambda : \langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda \text{ where } \|x_n\| = 1 \text{ and } \|Ax_n\| \rightarrow \|A\|\}.$$

If  $H$  is finite dimensional,  $W_0(A)$  corresponds to the numerical range produced by the unit norm attaining vectors (vectors  $x$  such that  $\|x\| = 1$  and  $\|Ax\| = \|x\|$ ). It is also clear that  $W_0(A)$  is a level set of the Davis-Wielandt shell of  $A$ . Stampfli proved that  $W_0(A)$  is nonempty, closed, convex and contained in the closure of the numerical range. He also proved the following theorem.

**Theorem 1.2** ([4], theorem 2). *If  $0 \in W_0(A)$ , then  $\|A\|^2 + |z|^2 \leq \|A + z\|^2$  for all  $z \in \mathbb{C}$ . Conversely, if  $\|A\| \leq \|A + z\|$  for all  $z \in \mathbb{C}$ , then  $0 \in W_0(A)$ .*

## 2. MAIN RESULTS

In this section we will state our definition, its relation with  $*$ -orthogonality and Birkhoff-James orthogonality and at the end we will state its application in approximation theory and distance problems.

**Definition 2.1.** Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$  then

$$A \perp B \text{ if and only if } 0 \in W_0(A^*B).$$

**Theorem 2.2.** *This notion of orthogonality is symmetric and homogeneous. It is also existent if  $H$  is finite dimensional.*

**Proposition 2.3.** *Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$ . If  $A$  is  $*$ -orthogonal to  $B$ , then  $A \perp B$ .*

**Theorem 2.4.** *Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$ . Then*

$$A \perp B \text{ if and only if } A^*B \perp_{BJ} I \text{ i.e. } \|A^*B\| \leq \|A^*B + zI\| \text{ for all } z.$$

we demonstrate Turnsek's characterization of isometries and coisometries in the sense of Birkhoff-James orthogonality in the following.

**Proposition 2.5** ([5], theorem 2.5). *Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$ . Then  $A \perp_{BJ} B$  always implies  $B \perp_{BJ} A$  if and only if  $B$  is a scalar multiple of an isometry or coisometry.*

**Corollary 2.6.** *Let  $A \in \mathbb{B}(H)$ ,  $C$  be a scalar operator. Then  $A \perp C$  if and only if  $A \perp_{BJ} C$ .*

Now, we can prove the following theorem that gives a condition which converts Birkhoff-James orthogonality to be symmetric.

**Theorem 2.7.** *If  $A \perp B$  and  $A$  or  $B$  is a coisometry then,  $A \perp_{BJ} B$  and  $B \perp_{BJ} A$ .*

Problems of approximating an operator by a simpler one have been of interest to operator theorists. Now with the notion of this orthogonality the distance of an operator to the class of scalar operators can be found.

**Definition 2.8.** The distance of an operator to the class of scalar operators is defined as follows

$$\text{dist}(A, \mathbb{C}I) = \min_{z \in \mathbb{C}} \|A + zI\|$$

By means of this notion of orthogonality, we can introduce new notion of best approximation.

**Theorem 2.9.** Let  $A, B \in \mathbb{B}(H)$ . Suppose  $W$  is the linear subspace spanned by all scalar operators, and  $A^*B \notin W$ . Then the zero operator is the best approximation to  $A^*B$  among all operators in  $W$  if and only if  $A \perp B$ .

**Proposition 2.10.** If  $\text{dist}(A, \mathbb{C}I) = A_0 = A + z_0I$  then  $A_0 \perp I$  and  $\text{dist}(A, \mathbb{C}I) = \|A\|$  if and only if  $A \perp I$ .

Recall that the operator  $D_A(X) = AX - XA$  is called an inner derivation. According to what Stampfli proved in [4] and our orthogonality we state the following proposition.

**Proposition 2.11.**  $A \perp I$  if and only if  $\|D_A\| = 2\|A\|$ .

**Corollary 2.12.**  $\text{dist}(A, \mathbb{C}I) = \|D_A\|$ .

Let  $A, B \in M_n$ . We say that  $A$  is orthogonal to  $B$  in the Schatten  $p$ -norm (for a given  $1 \leq p < \infty$ ) if

$$\|A^*B\|_p \leq \|A^*B + I\|_p \text{ for all } z$$

where,

$$\|A\|_p = \left[ \sum_{j=1}^n (s_j(A))^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

In the case  $p = 2$ , The quantity  $\langle A, B \rangle = \text{tr} A^*B$  defines an inner product, and the norm associated with this inner product is  $\|\cdot\|_2$ . So  $\langle A, B \rangle = 0$  if and only if  $A \perp B$ .

*Remark 2.13.* As we know (see [1, section 2]), if  $1 < p < \infty$ , then the norm  $\|\cdot\|_p$  is Frechet differentiable at every  $A$ . In this case

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \|A + tB\| = p \text{Re}(\text{tr}(|A|^{p-1} U^* B))$$

for every  $B$ , where  $A = U|A|$  is a polar decomposition of  $A$ . If  $p = 1$  this is true if  $A$  is invertible.

By [1, theorem 2.1] and Remark 2.13, we state the following theorem.

**Theorem 2.14.** *Let  $A^*B$  have a polar decomposition  $A^*B = U|A^*B|$ . If for any  $1 \leq p < \infty$  we have  $\text{tr}|A^*B|^{p-1}U = 0$ , then  $A \perp B$  in the Schatten  $p$ -norm. The converse is true for all  $A$ , if  $1 < p < \infty$ , and for all invertible  $A$ , if  $p = 1$ .*

**Acknowledgements:** This research has been supported by the SBUK Center of Excellence in Linear Algebra and Optimization.

#### REFERENCES

1. R. BHATIA AND P. SEMRL, *Orthogonality of matrices and some distance problems*, Linear Algebra and its Applications, 287 (1999) 77-85.
2. C. DAVIS, *The shell of a Hilbert-space operator. II*, Acta Sci. Math., (Szeged) 31 (1970), 301-318.
3. M.R. HESTENES, *Relative Hermitian matrices*, Pacific J. Math., 11 (1961) 225-245.
4. J.G. STAMPFLI, *The norm of a derivation*, Pacific J. Math., 33 (1970) 737-747.
5. A. TURNEK, *On operators preserving James orthogonality*, Linear Algebra and its Applications, 407 (2005) 189-195.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAAR UNIVERSITY, 76169-14111, KERMAN, IRAN.  
E-mail address: sadeghi.farzane@gmail.com

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAAR UNIVERSITY, 76169-14111, KERMAN, IRAN.  
E-mail address: salemi@uk.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## AN ALGORITHM FOR COMPUTING THE INERTIA

MARYAM SHAMS SOLARY<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. In this note we try to design an algorithm for Computing the Inertia of  $n \times n$  complex matrix. Inertia is defined the nature and location of eigenvalues for complex matrix. This algorithm helps us for finding inertia without compute eigenvalues.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The inertia of a  $n \times n$  complex matrix  $A$ , is defined to be an integer triple,  $In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$  where  $\pi(A)$  is the number of eigenvalues of matrix  $A$  with positive real parts,  $\nu(A)$  is the number of eigenvalues with negative real parts and  $\delta(A)$  is the number of eigenvalues with zero real parts. In this paper, is developed the shift- and- invert Arnoldi method by a suitable shift for converting generalized system to standard system. Then by a block matrix method and Gerschgorin theorem, the nature and location of eigenvalues were determined.

### 2. MAIN RESULTS

In [4], the authors have shown that the shift- and- invert Arnoldi method for the eigenproblem  $A\varphi_i = \lambda_i B\varphi_i$  is mathematically equivalent to the standard Arnoldi method for the transformed eigenproblem:

$$A\varphi_i = \lambda_i B\varphi_i$$

$$A\varphi_i - \sigma B\varphi_i = \lambda_i B\varphi_i - \sigma B\phi_i$$

$$(A - \sigma B)\varphi_i = (\lambda_i - \sigma)B\varphi_i \Rightarrow 1/(\lambda_i - \sigma)\varphi_i = (A - \sigma B)^{-1}B\varphi_i$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65F25, Secondary 65N25.

*Key words and phrases*. Eigenvalue , Shift, Norm , Gerschgorin Theorem , Inertia.

\* Speaker.

$$M\varphi_i = \theta_i\varphi_i$$

Where  $\sigma$  is a shift. We gain the first shift by this process:

$$\begin{aligned} Ax = \lambda Bx &\Rightarrow \|Ax\| = |\lambda| \|Bx\| \leq |\lambda| \|B\| \|x\| \\ \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} &\leq |\lambda| \|B\| \|A\|^* = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \end{aligned}$$

$\|\cdot\|^*$  is a matrix norm, see [2]. So we have:

$$\frac{\|A\|}{\|B\|} \leq |\lambda|$$

$$\begin{aligned} Ax = \lambda Bx &\Rightarrow B^{-1}Ax = \lambda x \Rightarrow \|B^{-1}Ax\| = |\lambda| \|x\| \Rightarrow \|B^{-1}\| \|A\| \|x\| \geq |\lambda| \|x\| \\ &\Rightarrow \|B^{-1}\| \|A\| \geq |\lambda| \end{aligned}$$

Suppose  $\sigma = \frac{\|A\|}{\|B\|}$ , If shift  $\sigma$  is not suitable, i.e.  $(A - \sigma B)$  is not invertible, we find a new shift by bisection on the interval  $[\frac{\|A\|}{\|B\|}, \|B^{-1}\| \|A\|]$ .

This process does not need Hessenberg form of matrices A and B. Therefore it saves time compared with the defined method in [4]. Also we use norm 1 ( $\|\cdot\|_1$ ) for saving time. Now we explain another proof of Gerschgorin theorem. This proof will help us for better describing the Inertia Algorithm: Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}_{n \times n}$  be a square matrix of order n with complex entries and let

$$D^i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\} = B(a_{ii}, \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|), \quad i = 1, \dots, n$$

**Theorem 2.1.** (Gerschgorin) 1. Every eigenvalue of A lies in some  $D^i$ .

2. If M is the union of m disks  $D_i$  such that M is disjoint from all other disks of this type, then M contains precisely m eigenvalues of A (counting multiplicities).

*Proof.* See [3]. □

By above theorem, all eigenvalues of A can be found in the union of disks

$$\{z : |z - a_{ii}| \leq r_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

So by Gerschgorin theorem we can describe

$$rp_i = \text{real}(A(i, i)) - r_i, \quad rn_i = \text{real}(A(i, i)) + r_i$$

and use them for finding the nature and location of eigenvalues. For example, if  $rp_i > 0$  for  $1 \leq i \leq n$  agreement definition  $rp_i$  then ith eigenvalue situated in positive part of real numbers. If  $rn_i < 0$  for  $1 \leq i \leq n$  agreement definition  $rn_i$  then ith eigenvalue

situated in negative part of real numbers. Else eigenvalue may be zero but we do not sure, so we must examine more.

*Remark 2.2.* The Gerschgorin Circles for matrix A show that eigenvalues are in the  $[-14, 8.5]$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 1 & .5 & 0 & 0 \\ .5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

By defining  $rp_i$  and  $rn_i$  we can see 4 eigenvalues are situated in Positive Circle , 2 eigenvalues are in Negative Circle and 1 eigenvalue is in Zero Circle.  $R_i \quad i = 1, 2, 3$  give us lower bound and upper bound for circles on real axes, see Figure 1.

$$R_1 = [1.5, 8.5] \rightarrow \text{Positive eigenvalues}$$

$$R_2 = [-14, -3] \rightarrow \text{Negative eigenvalues}$$

$$R_3 = [-1, 1] \rightarrow \text{must be examined more}$$

Note that if these circles overlap with each other, we can not determine the number of eigenvalues in every circle. Thus we must try to plot another circle which contains both circles.

*Remark 2.3.* The Gerschgorin Circles for matrix A show that eigenvalues are in the  $[-7, 6]$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & .5 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

We can see Negative Circle and Zero Circle overlap with each other. So for describing the situation of the eigenvalues needs to determine another circle, this circle must contain two negative and zero circles, see Figure 2. This process is showed in Step4 of Inertia Algorithm. The following is a modification of Inertia Algorithm in [4]. This Inertia Algorithm works faster and more efficient than last algorithm.

### Inertia Algorithm

**Step 1:** Input matrices A,B.

**Step 2:** If B is singular or ill-conditioned, then first shift is:  $\sigma = \frac{\|A\|}{\|B\|}$ , else:  $\sigma = 0$

**Step 3:**  $M = (A - \sigma B)^{-1}$  and use block inverse method for computing inverse of matrix M.

**Step 4:** Gain  $rp_i$  and  $rn_i$  for matrix M by:

$$rp_i = \text{real}(M(i, i)) - r_i, \quad rn_i = \text{real}(M(i, i)) + r_i$$

a- If  $rp_i > 0$  for  $1 \leq i \leq n$ : It shows ith eigenvalue is in Positive Circle.

b- If  $rn_i < 0$  for  $1 \leq i \leq n$ : It shows ith eigenvalue is in Negative Circle.

c-Else: eigenvalue may be zero but we are not sure. Therefore we must examine more.

Note: If upper bound of Negative Circle is bigger than lower bound of Zero Circle, try to gain another circle that contains both of them. If lower bound of Positive Circle is smaller than upper bound of Zero Circle, try to gain another circle that contains both of them.

**Step 5:** By Step(4-a) and Step(4-b) we have:

$\pi(M)$ : The number of eigenvalues with positive real parts in Positive Circle.

$\nu(M)$ : The number of eigenvalues with negative real parts in Negative Circle.

$\delta(M)$ : The number which we do not have information about their nature in Zero Circle.

**Step 6:** Gain eigenvalues  $(\theta_i), i = 1, 2 \dots \delta(M)$  for  $M = (A - \sigma B)^{-1}B$  in Zero Circle.

**Step 7:** Set  $zero(M) = 0$

**For**  $j=1, 2, \dots, \delta(M)$  **do**,  $\lambda_i = \sigma + 1/\theta_i$

If  $\text{real}(\lambda_i) > 0$  then  $\pi(M) = \pi(M) + 1$

If  $\text{real}(\lambda_i) < 0$  then  $\nu(M) = \nu(M) + 1$

Else if  $\text{real}(\lambda_i) = 0$  then  $zero(M) = zero(M) + 1, \delta(M) = zero(M)$

**Step 8:**  $In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$ .

**Example 2.4.** Let  $A = \text{gallery('lesp', n)}$ ,  $B = \text{eye}(n)$   $n=1500$ .  $\text{eig}(A,B)$  after 247s and Inertia algorithm after 46.443s gives us the nature of eigenvalues (All eigenvalues are negative).

Note: Matrix A is in Matlab Gallery and "eig" is a Matlab function for computing eigenvalues.

**Example 2.5.** Let  $A = \text{BCSSTK13}$ ,  $B = \text{BCSSTM13}$  where A is a real symmetric positive definite matrix of size 2003 and B is a real symmetric positive semi-definite matrix of size 2003 (Matrices A and B are in Harwell-Boeing matrix market).

$\text{Rank}(A)=2003$  and  $\text{Rank}(B)=1241$  (Fluid flow generalized eigenvalues).  $\text{eig}(A,B)$  cannot

work because  $A, B$  are sparse and  $\text{eigs}(A, B)$  also is the same because  $B$  is not symmetric positive definite. So we use  $\text{eig}(\text{full}(A), \text{full}(B))$ , this function needs 735s for doing but Inertia Algorithm needs 342.2653s. Both of them give us similar results (All eigenvalues are positive).

*Remark 2.6.* If in Inertia algorithm we replaced  $\text{inv}(A) \times B$  by  $(A \setminus B)$  we need only 60.4891s. We know that in Matlab software both of them give us similar results (i.e  $\text{inverse}(A)$  multiply  $B$ ) with different times.

#### REFERENCES

1. F. CHATLIN, *Eigenvalues of Matrices*, John Wiley and Sons, 1993.
2. B.N. DATTA, *Numerical Linear Algebra and Applications*, ITP, An International Thomson Company, 1994.
3. D.GOMEZ, *A more direct proof of Gerschgorin's theorem*, *Matematicas Enseñanza Universitaria*, Vol.XIV No 2:119-122, 2006.
4. H. SABERI NAJAFI, M. SHAMS SOLARY, *A New algorithm for computing the inertia of eigenproblems*, *Appl.Math.Comput.* 201: 138-148, 2008.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, PAYAME NOOR UNIVERSITY, 19395-4697 TEHRAN, I.R. OF IRAN.  
*E-mail address:* `shamssolary@pnu.ac.ir` or `shamssolary@gmail.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## NUMERICAL RADIUS INEQUALITIES

<sup>1</sup> ALEMEH SHEIKH HOSEINI AND ABBAS SALEMI <sup>2\*</sup>

ABSTRACT. We present several numerical radius inequalities for Hilbert space operators. In particular, we prove that if  $p, q > 1$  with  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , then it is shown that  $\omega^2(AXB) \leq \omega\left(\frac{1}{p}(B|X|B)^P + \frac{1}{q}(A|X^*|A)^q\right)$  for all  $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$  such that  $A = A^*, B = B^*$  and  $\omega(\cdot)$  is the numerical radius. Also, we obtain a bound for  $\omega^r(A^2)$  and  $\omega^r(A^3)$ , for  $r \geq 2$ .

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\mathcal{B}(\mathbf{H})$  denote the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space  $\mathbf{H}$  with inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . For  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ , the usual operator norm of  $A$  is defined by

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbf{H}, \|x\| = 1\},$$

where  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ , and the numerical range of  $A$  is defined as the set of complex numbers given by

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in \mathbf{H}, \|x\| = 1\}.$$

The numerical radius of  $A$  is given by

$$\omega(A) = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathbf{H}, \|x\| = 1\}.$$

It is well known that  $\omega(\cdot)$  defines a norm on  $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ , and that for every  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$  we have

$$(1.1) \quad \frac{1}{2}\|A\| \leq \omega(A) \leq \|A\|.$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47A12, 47A30.

*Key words and phrases.* Numerical radius, Operator norm, Young inequality

\* Sheihk hoseini.

The classical Young inequality for two scalars, which is a fundamental relation between two nonnegative real numbers. This inequality says that if  $a, b \geq 0$  and  $p, q > 1$  such that  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , then

$$(1.2) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

The following inequality has been shown by Kittaneh in 2005.

**Theorem 1.1.** [3, Theorem 2] *If  $A, B, C, D, S, T \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ , then*

$$(1.3) \quad \omega(ATB + CSD) \leq \frac{1}{2}(\|A|T^*|^{2(1-\alpha)}A^* + B^*|T|^{2(\alpha)}B + C|S^*|^{2(1-\alpha)}C^* + D^*|S|^{2(\alpha)}D\|).$$

In 2009, Shebrawi and Albadawi extended Theorem 1.1, in the following form.

**Theorem 1.2.** [5, Theorem 2.5] *Let  $A_i, B_i, X_i \in \mathcal{B}(\mathbf{H}) (i = 1, 2, \dots, n)$ , and let  $f$  and  $g$  be nonnegative functions on  $[0, \infty)$ . which are continuous and satisfy the relation  $f(t)g(t) = t$  for all  $t \in [0, \infty)$ . Then for all  $r \geq 1$ ,*

$$(1.4) \quad \omega^r\left(\sum_{i=1}^n A_i^* X_i B_i\right) \leq \frac{n^{r-1}}{2}(\| \sum_{i=1}^n ([A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i]^r + [B_i^* f^2(|X_i|)B_i]^r) \|).$$

## 2. MAIN RESULTS

In this section, we establish a general numerical radius inequality for Hilbert space operators which yields well known and new numerical radius inequalities as special cases. To prove our results, we need the following basic lemmas.

**Lemma 2.1.** [4, Theorem 1] *Let  $A$  be an operator in  $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ , and let  $f$  and  $g$  be nonnegative functions on  $[0, \infty)$  which are continuous and satisfy the relation  $f(t)g(t) = t$  for all  $t \in [0, \infty)$ . Then*

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \|f(|A|)x\| \|g(|A^*|)y\|.$$

for all  $x$  and  $y$  in  $\mathbf{H}$ .

**Lemma 2.2.** [4] *Let  $A$  be a positive operator in  $\mathcal{B}(\mathbf{H})$  and let  $x \in \mathbf{H}$  be any unit vector. Then for all  $r \geq 1$ ,*

$$\langle Ax, x \rangle^r \leq \langle A^r x, x \rangle$$

**Lemma 2.3.** *Let  $a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) be a positive real number. Then for all  $r \geq 1$ ,*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^r = n^{r-1} \sum_{i=1}^n a_i^r$$

Our main result in this paper, which leads to a generalization of (1.4) for  $r \geq 2$  can be stated as follows.

**Theorem 2.4.** *Let  $A_i, B_i, X_i \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), and let  $f$  and  $g$  be nonnegative functions on  $[0, \infty)$  which are continuous and satisfy the relation  $f(t)g(t) = t$  for all  $t \in [0, \infty)$ . if  $p, q > 1$  with  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , then for all  $r \geq 1$ ,*

$$(2.1) \quad \omega^{2r} \left( \sum_{i=1}^n A_i^* X_i B_i \right) \leq n^{2r-1} \omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p} (A_i^* g^2(|X_i^*|) A_i)^{rp} + \frac{1}{q} (B_i^* f^2(|X_i|) B_i)^{rq} \right) \right).$$

Inequality (2.1) includes several numerical radius inequality as special cases. Samples of inequalities are demonstrated in what follows.

For  $f(t) = t^\alpha$  and  $g(t) = t^{1-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , in (2.1), we get the following inequality.

**Corollary 2.5.** *Let  $A_i, B_i, X_i \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $r \geq 1$  and  $0 < \alpha < 1$ . Then*

$$(2.2) \quad \omega^{2r} \left( \sum_{i=1}^n A_i^* X_i B_i \right) \leq n^{2r-1} \omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p} (A_i^* |X_i^*|^{2(1-\alpha)} A_i)^{rp} + \frac{1}{q} (B_i^* |X_i|^{2\alpha} B_i)^{rq} \right) \right).$$

*In particular,*

$$(2.3) \quad \omega^{2r} \left( \sum_{i=1}^n A_i^* X_i B_i \right) \leq n^{2r-1} \omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p} (A_i^* |X_i^*| A_i)^{rp} + \frac{1}{q} (B_i^* |X_i| B_i)^{rq} \right) \right).$$

For  $X_i = I$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) in inequality (2.3), we get the following numerical radius inequalities for products of operators.

**Corollary 2.6.** *Let  $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) and  $r \geq 1$ . Then*

$$(2.4) \quad \omega^{2r} \left( \sum_{i=1}^n A_i^* B_i \right) \leq n^{2r-1} \omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p} |A_i|^{2rp} + \frac{1}{q} |B_i|^{2rq} \right) \right).$$

*In particular,*

$$(2.5) \quad \omega^2 \left( \sum_{i=1}^n A_i^* B_i \right) \leq n \omega \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p} |A_i|^{2p} + \frac{1}{q} |B_i|^{2q} \right) \right).$$

*Remark 2.7.* The case  $n = 1$  in (2.4), provides the following inequality

$$(2.6) \quad \omega^{2r} (A^* B) \leq \omega \left( \frac{1}{p} |A|^{2rp} + \frac{1}{q} |B|^{2rq} \right).$$

which is a numerical radius inequality for the product of operators and is related to the Young inequality for operators. Note that a more general inequality can be obtained by letting  $\alpha = 1/2$  and  $n = 1$  in (2.2). In fact, we have

$$(2.7) \quad \omega^{2r}(A^*XB) \leq \omega\left(\frac{1}{p}(A^*|X^*|A)^{rp} + \frac{1}{q}(B^*|X|B)^{rq}\right).$$

For  $r = 1$  in (2.7), we obtain the inequality

$$(2.8) \quad \omega^2(A^*XB) \leq \omega\left(\frac{1}{p}(A^*|X^*|A)^p + \frac{1}{q}(B^*|X|B)^q\right).$$

In particular if  $A, B$  are Hermitian, then

$$(2.9) \quad \omega^2(AXB) \leq \omega\left(\frac{1}{p}(A|X^*|A)^p + \frac{1}{q}(B|X|B)^q\right).$$

The inequality in (2.7) can be used to give an upper bound for the numerical radius of  $A^2$  and  $A^3$ . In fact, we have

$$\begin{aligned} \omega^{2r}(A^2) &\leq \omega\left(\frac{1}{p}(AA^*)^{rp} + \frac{1}{q}(A^*A)^{rq}\right), \\ \omega^{2r}(A^3) &\leq \omega\left(\frac{1}{p}(A|A^*|A^*)^{rp} + \frac{1}{q}(A^*|A|A)^{rq}\right). \end{aligned}$$

**Acknowledgements:** This research has been supported by the SBUK Center of Excellence in Linear Algebra and Optimization.

## REFERENCES

1. Kh. Shebrawi and H. Albadawi, Numerical Radius and Operator Norm Inequalities, Journ.of Inequal. and Appl., Vol 2009 (2009), 1-11.
2. R.BHATIA, *Matrix Analysis*, vol.169 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 1997.
3. F.KITTANEH, *Numerical radius inequalities for Hilbert space operators*, Studia Mathematica, vol.168, no.1, pp.73-80, 2005
4. F.KITTANEH, *Notes on some inequalities for Hilbert space operators*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, vol.24, no.2, pp.283-293, 1988.
5. KH. SHEBRAWI AND H. ALBADAWI, *Numerical Radius and Operator Norm Inequalities*, Journ.of Inequal. and Appl., Vol 2009 (2009), 1-11.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAR UNIVERSITY OF KERMAN, 76169-14111, KERMAN, IRAN.

*E-mail address:* `alemehsheikhoseiny@yahoo.com`

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAR UNIVERSITY OF KERMAN, 76169-14111, KERMAN, IRAN.

*E-mail address:* `salemi@mail.uk.ac.ir`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## ISOMETRY AND HILBERT-SCHMIDT PROPERTIES FOR COMPOSITION OPERATORS

VALI SOLTANI MASI<sup>H</sup>1 \*

ABSTRACT. The object of study in this paper are composition operator  $C_\varphi$  to be a Hilbert-Schmidt operator on the Hardy-Hilbert space  $\mathbf{H}^2$ . we give necessary and sufficient condition for composition operator  $C_\varphi$  to be a isometry and Hilbert-Schmidt operator.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\mathbf{H}^2$  be the space of all analytic functions on the unit disc  $\mathbb{D}$  having power series representation with square-summable complex coefficient. The inner product on  $\mathbf{H}^2$  is defined by  $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$  for  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  and  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ . Let  $\mathcal{S}(\mathbb{D})$  denote the set of all analytic self-maps of the unit disc  $\mathbb{D}$ . Every analytic self-map  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$  induces through composition a linear composition operator  $C_\varphi$  from  $\mathbf{H}^2$  to itself. For such  $\varphi$ , we define an operator  $C_\varphi$  on  $\mathbf{H}^2$  by

$$(C_\varphi f)(z) = (f \circ \varphi)(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

for all  $f \in \mathbf{H}^2$ , see[3, 2]. Let  $\mathcal{C}(\mathbf{H}^2)$  denote the space of composition operators on  $\mathbf{H}^2$ . The Hilbert-Schmidt operator, is the bounded operators  $S$  defined on a separable complex Hilbert space  $\mathbf{H}^2$ , satisfying the following condition: If  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  is an orthonormal basis of  $\mathbf{H}^2$ , then  $\sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|^2 < \infty$ , where  $\|\cdot\|$  is a norm on  $\mathcal{C}(\mathbf{H}^2)$  coming from the inner product. see[1]. An operator  $S$  on a complex Hilbert space  $\mathcal{H}$  is a 2-isometry if

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 42B30; Secondary 47B33, 30D05.

*Key words and phrases*. Composition operator, Hardy Hilbert space, Hilbert-Schmidt operator,  $m$ -Isometry.

\* Speaker.

$S^2 S^{*2} - 2SS^* + I \equiv 0$ , where  $I$  denotes the identity operator. As noted by Richter, in [4], the notion of ‘2-isometry’ generalizes in a natural way the well-known definition of isometry.

If  $S$  is a bounded operator on a Hilbert space, then  $S$  is said to be an  $m$ -isometry if and only if  $\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S^{*k} S^k \equiv 0$ . We also propose sufficient conditions for a composition operator to be an  $m$ -isometry.

## 2. MAIN RESULTS

Composition operator are characterized form acting an orthonormal basis

$$\{e_n: e_n(z) = z^n \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots\}$$

on  $\mathbf{H}^2$ , for non-negative integers  $n$ .

**Theorem 2.1.** *An operator  $A$  in  $\mathbf{H}^2$  is a composition operator if and only if  $Ae_n = (Ae_1)^n$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$*

*Proof.* If  $A = C_\varphi$ , then  $Ae_1 = C_\varphi e_1 = C_\varphi z = \varphi$  and  $Ae_n = C_\varphi e_n = C_\varphi z^n = \varphi^n$ , and therefore  $Ae_n = (Ae_1)^n$ .

Conversely, suppose  $Ae_n = (Ae_1)^n$  for all non-negative integers  $n$ . Define  $\varphi$  by  $\varphi = Ae_1$ . Since  $Ae_1$  is in a  $\mathbf{H}^2$ ,  $\varphi$  is analytic on  $\mathbb{D}$ .

To show that  $A = C_\varphi$ , it suffices to prove that  $|\varphi(z)| < 1$  for all  $z \in \mathbb{D}$ , since then it would follow that the composition operator  $C_\varphi$  is well-defined and bounded. Then

$$Ae_n = (Ae_1)^n = \varphi^n = C_\varphi z^n = C_\varphi e_n;$$

thus by linearity and continuity, it would follow that  $A = C_\varphi$ .

To show that  $|\varphi(z)| < 1$ , note that  $\varphi^n = Ae_n$  implies that  $\|\varphi^n\| \leq \|A\|$  for all non-negative  $n$ . Since  $\varphi \in \mathbf{H}^2$ , there exists an increasing sequence  $\{r_n\}$  of positive number converging to 1 such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n e^{i\theta}) = \tilde{\varphi}(e^{i\theta})$ . We claim that  $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| \leq 1$  for almost all  $\theta$ . Consider any  $\delta > 0$  and define the set  $E$  by  $E = \{e^{i\theta}: |\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| \geq 1 + \theta\}$ . Then

$$\begin{aligned} \|\varphi^n\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_E |\tilde{\varphi}(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &\geq \int_E (1 + \theta)^{2n} dm \\ &= m(E) (1 + \theta)^{2n} \end{aligned}$$

where  $m(E)$  is the measure of  $E$ . If  $m(E) > 0$ , this would imply that  $\{\|\varphi^n\|\} \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$  which contradicts the fact that  $\|\varphi^n\| \leq \|A\|$  for all  $n$ . Hence  $m(E) = 0$  and therefore  $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| \leq 1$ . It follows that  $|\varphi(z)| \leq 1$  for all  $z$  in  $\mathbb{D}$ , see[3]. We claim that  $|\varphi(z)| < 1$  for all  $z$  in  $\mathbb{D}$ . If not, then there exists  $z_0 \in \mathbb{D}$  such that  $|\varphi(z_0)| = 1$ . By maximum modulus principle [5] this implies that  $\varphi$  is a constant function; say  $\varphi(z) = \lambda$ , with  $\lambda$  of modulus 1. Since  $Ae_n = (Ae_1)^n$ , it follows that  $Ae_n = \lambda^n$ . But then  $\langle A^*e_0, e_n \rangle = \langle e_0, Ae_n \rangle = \langle e_0, \lambda^n \rangle = \bar{\lambda}^n$ , where  $A^*$  is adjoint operator of  $A$ . so

$$\|A^*e_0\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle A^*e_0, e_n \rangle|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} = \infty$$

since  $|\lambda| = 1$ . This is a contradiction.  $\square$

The following theorem gives necessary and sufficient conditions for the composition operator  $C_\varphi$  on  $\mathbf{H}^2$  to be a Hilbert-Schmidt operator.

**Theorem 2.2.** *Let  $C_\varphi$  is a composition operator on a Hilbert space  $\mathbf{H}^2$ . Then  $C_\varphi$  is a Hilbert-Schmidt operator if and only if  $\|\varphi\| < 1$ .*

*Proof.* Suppose that  $\|\varphi\| < 1$ . For any  $n = 0, 1, 2, \dots$  and  $z \in \mathbb{D}$  the mapping  $e_n(z) = z^n$  are an orthonormal basis for  $\mathbf{H}^2$ . Form the Theorem 2.1 we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \|C_\varphi e_n\|^2 &= \sum_{n=0}^N \|(C_\varphi e_1)^n\|^2 = \sum_{n=0}^N \|\varphi^n\|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^N \|\varphi\|^{2n} < \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi\|^{2n} = \frac{1}{1 - \|\varphi\|^2} \end{aligned}$$

then power series  $\sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi e_n\|^2$  is converges. consequently the composition operator  $C_\varphi$  is a Hilbert-Schmidt operator.

Conversely, if  $\|\varphi\| = 1$ , then there exists  $z_0 \in \mathbb{D}$  such that  $|\varphi(z_0)| = 1$ . By maximum modulus principle this implies that  $\varphi$  is a constant function; say  $\varphi(z) = \lambda$ , with  $\lambda$  of modulus 1. Since  $C_\varphi e_n = (C_\varphi e_1)^n$ , it follows that  $C_\varphi e_n = \lambda^n$ . But then  $\langle C_\varphi^* e_0, e_n \rangle = \langle e_0, C_\varphi e_n \rangle = \langle e_0, \lambda^n \rangle = \bar{\lambda}^n$ , so

$$\|C_\varphi^* e_0\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle C_\varphi^* e_0, e_n \rangle|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} = \infty$$

since  $|\lambda| = 1$ . This is a contradiction.  $\square$

Recall that every composition operator  $C_\varphi$  is invertible if and only if  $\varphi$  is a conformal mapping of  $\mathbb{D}$  onto itself, In this case,  $C_\varphi^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$ . Consequently  $C_\varphi$  is a bijective operator

on  $\mathbf{H}^2$ , Thus  $C_\varphi$  is an unitary operator and  $C_\varphi^* = C_{\varphi^{-1}}$ . For  $m = 0, 1, 2, \dots$  we conclude that  $C_\varphi^{*n} C_\varphi^m = I$ , therefore composition operator  $C_\varphi$  is a  $m$ -isometry operator.

The following corollary which proof above gives necessary and sufficient conditions for the composition operator  $C_\varphi$  on  $\mathbf{H}^2$  to be a  $m$ -isometry operator, for  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

**Corollary 2.3.** *Let  $\varphi$  is a analytic self-map on  $\mathbb{D}$ . Then  $\varphi$  is a conformal mapping of  $\mathbb{D}$  onto itself if and only if  $C_\varphi$  is a  $m$ -isometry, for  $m = 0, 1, 2, \dots$ .*

**Acknowledgements:** The author gratefully acknowledge the financial support for this work that was provided by University of Payame Noor.

#### REFERENCES

1. J. RINGROSE, *Compact Non-selfadjoint Operators*, Van Nostrand, London, 1971.
2. L.PATTON, M.ROBBINS, *Composition operators that are M-isometries*, Houston J. Math. 31 (1) (2005) 255-267.
3. RUBÉN A. MARTÍNEZ-AVENDAÑO, P. ROSENTHAL, *An Introduction to Operator on the Hardy-Hilbert Space*, Springer Verlag, 2007.
4. S. RICHTER, *A representation theorem for cyclic analytic two-isometries*, Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1) (1991) 325-349.
5. WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw Hill, New York, 1986.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, PAYAME NOOR UNIVERSITY, P. O. BOX, KERMANSHAH, IRAN.  
E-mail address: vali.soltanimasih@gmail.com



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## MAPS PRESERVING DIVERGENCE

ALI TAGHAVI<sup>1</sup> AND ABOLFAZL SANAMI<sup>2\*</sup>

**ABSTRACT.** Many well known distinguishability measures of quantum states are given by, or driven from,  $f$ - divergences; special examples include the quantum relative entropy, the Rényi relative entropies, and the Chernoff and Hoeffding measures. The distance of statistical operators is conveniently measured in many statistical and information-theoretical applications by quantum  $f$ - divergence. In this lecture, format of maps that preserve quantum  $f$ - divergences on rank one projections of  $\mathbb{S}(H)$  are presented.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Quantum mechanics was one of the very important new theories of the 20th century. Quantum mechanics motivated the creation of new areas in mathematics; the theory of linear operators on Hilbert spaces was certainly such an area. Quantum information theory was born in the 1990s. Measurements on a quantum system provide classical information, and due to the randomness classical statistics can be used to estimate the true state.

Entropy is the degradation of energy from order to disorder, and describes the tendency of anything to degeneration. The subject of entropy is as a measure of uncertainty. Of course, when talking about an uncertainty relation one needs a measure to express uncertainty, and although there are many such thinkable measures we will restrict ourselves to the one that is known as entropy? We consider the Shannon entropy, the Von Neumann entropy and the quantum relative entropy.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 47B49; Secondary: 46L05, 47L30.

*Key words and phrases.* rank-one projection, quantum  $f$ - divergence.

\* Speaker.

In the stochastic modeling of systems, the probabilities of the different outcomes of possible measurements performed on the system are given by a state, which is a probability distribution in the case of classical systems and a statistical operator on Hilbert space of the system in the quantum case. In applications, it is important to have a notion of how far two states are from each other hand, as it turns out, such measures arise naturally in statistical problems like state discrimination. Probably the most relevant statistically motivated distance measure is the relative entropy. Relative entropy has various generalizations, most notably Renyi's  $\alpha$ -relative entropies [?] that share monotonicity and convexity properties with the relative entropy, and are also related to error exponents in binary state discrimination problems. A general approach to quantum relative entropies was developed by Petz in 1985 [5], who introduced the concept of quasi-entropies.

Molnař (2008) in [2] has shown that every bijective transformation on the space of all density operators on a finite-dimensional complex Hilbert space which preserves the relative entropy is necessarily implemented by either a unitary or antiunitary operator on the underlying Hilbert space. He and W. Timmermann (2009) in [4] proved that any bijective map on the space of all quantum states which preserves the Jensen-Shannon divergence is induced by a unitary or antiunitary. Moreover, in ([3], 2010) L. Molnař and P. Szokol show that every transformation on the space of all density operators on finite-dimensional Hilbert space  $H$  which preserves the relative entropy is implemented by either a unitary or antiunitary operator on  $H$ . Recently, L. Molnař proved that every bijective map on the set of all invertible density operators which preserves the Umegaki relative entropy is necessary is implemented by either a unitary or antiunitary operator on  $H$ .

The basic postulate of quantum mechanics is about the Hilbert space formalism. To each quantum mechanical system a complex Hilbert space  $H$  is associated. In the traditional approach to quantum mechanics, a physical system is described in a Hilbert space: observable correspond to a self adjoint operators and statistical operators are associated with the states. The physical states of a quantum mechanical system are described by statistical operators acting on the Hilbert space. Note that, a statistical operator is positive operator of trace 1 on Hilbert space  $H$ .

Let  $\mathfrak{A}$  be a finite dimensional  $\mathfrak{C}^*$ -algebra. Unless otherwise stated, we will always assume that  $\mathfrak{A}$  is a  $\mathfrak{C}^*$ -subalgebra of  $\mathbb{B}(H)$  for some finite-dimensional Hilbert spaces  $H$ , i.e.,  $\mathfrak{A}$  is a subalgebra of  $\mathbb{B}(H)$  that is closed under taking the adjoint of operators. For simplicity, we also assume that the unit of  $\mathfrak{A}$  coincides with identity operator  $I$  on  $H$ ; if this is not the case, we can simply consider a smaller Hilbert space. The Hilbert-Schmidt inner product

on  $\mathfrak{A}$  is defined as

$$\langle A, B \rangle_{HS} = \text{Tr} A^* B, \quad A, B \in \mathfrak{A}$$

with induced norm  $\|A\|_{HS} = \sqrt{\text{Tr} A^* A}$ ,  $A \in \mathfrak{A}$ .

**Definition 1.1.** Let  $A$  and  $B$  be positive semi-definite operators on  $H$  and let  $f$  be a function on  $[0, +\infty)$  such that  $f$  is continuous on  $(0, +\infty)$  and the limit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  exists in  $[-\infty, +\infty]$ . The  $f$ -divergence of  $A$  with respect to  $B$  is defined as

$$(1.1) \quad S_f(A\|B) = \langle B^{\frac{1}{2}}, f(\Delta(A, B)) B^{\frac{1}{2}} \rangle_{HS},$$

when  $\text{supp} A \leq \text{supp} B$  and  $\Delta(A, B) : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  is so-called modular operator acting on  $\mathfrak{A}$  as  $\Delta(A, B)X = AXB^{-1}$ . In general case, we define

$$(1.2) \quad S_f(A\|B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_f(A\|B + \varepsilon I).$$

## 2. MAIN RESULTS

**Theorem 2.1.** Let  $f$  be a nonnegative convex continuous function on  $[0, +\infty)$  and the limit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  exists in  $[-\infty, +\infty]$ , also  $\varphi : \mathbb{S}(H) \rightarrow \mathbb{S}(H)$  be a surjective map satisfying

$$(2.1) \quad S_f(A\|B) = S_f(\varphi(A)\|\varphi(B)).$$

Then there is an either linear or conjugate-linear isometry  $V$  on  $H$  such that  $\varphi(A) = VAV^*$  for any rank one projections  $A \in \mathbb{S}(H)$ .

**Proof.** The proof is divided into several steps.

First, we proved that  $\varphi$  preserves the rank of operators in both sides and next by the previous step we can prove that  $\varphi$  preserves invertibility bidirectionally. Second,  $\varphi$  preserves rank one projections in both sides and it follows that the transition probability between  $A$  and  $B$  is the same as between  $\varphi(A)$  and  $\varphi(B)$ , i.e., we have  $\text{tr} \varphi(P)\varphi(Q) = \text{tr} PQ$ . Therefore, there is an either linear or conjugate-linear isometry  $V$  on  $H$  such that  $\varphi(P) = VPV^*$  for any rank one projection  $P \in \mathbb{S}(H)$ .

## REFERENCES

1. L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1895. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
2. L. Molnár, *Maps on states preserving the relative entropy*, J.Math Phs. , **49**(2008), 032114.
3. L. Molnár and P. Szokol, *Maps on states preserving the relative entropy II*, Linear Algebra and its Applications , **xxx**(2010), xxx-xxx.

4. L. Molnár and W. Timmermann, *Maps on Quantum States Preserving the Jensen-Shannon Divergence*, J.Phys. A: Math. Theor. , **42**(2009), 015301 (9pp).
5. D. Petz, *From  $f$ -divergence to quantum quasi-entropies and their use*, Entropy,(2010), **12**, 304–325.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF BASIC SCIENCES, UNIVERSITY OF MAZANDARAN, P. O. BOX 47416-1468, BABOLSAR, IRAN.  
*E-mail address:* Taghavi@nit.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF BASIC SCIENCES, UNIVERSITY OF MAZANDARAN, P. O. BOX 47416-1468, BABOLSAR, IRAN.  
*E-mail address:* a.sanami@yahoo.com



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## LINEAR MAPS PRESERVING THE R-POTENCY OF OPERATORS

ALI TAGHAVI<sup>1\*</sup> AND ROJA HOSSEINZADEH<sup>2</sup>

ABSTRACT. In this lecture, we give the forms of surjective linear maps on matrix algebras preserving the r-potency of products of matrices.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The study of maps on operator algebras preserving certain properties or subsets is a topic which attracts much attention of many authors. Some of these problems are concerned with preserving a certain property of usual products or other products of operators. For example see [1, 3, 4]. Let  $X$  be a Banach space. Denote by  $B(X)$  the algebra of all bounded linear operators on  $X$ . Let  $r \geq 2$  be a natural number.  $P \in B(X)$  is an idempotent operator when  $P^2 = P$ , or an r-potent operator when  $P^r = P$ . In [3], authors considered surjective linear maps on  $B(X)$  preserving the nonzero idempotency of either products of two operators or triple Jordan products of two operators. In this paper we extend this result for r-potent operators on matrix algebras.

### 2. MAIN RESULTS

We need some lemmas to prove our results. Assume  $r \geq 2$  is a natural number and  $\phi$  is a linear surjective map on  $M_n$  such that preserves the nonzero r-potency of products of operators

**Lemma 2.1.**  $\phi$  is injective.

**Lemma 2.2.** Let  $N \in M_n$  be of finite-rank and  $N^2 = 0$ . Then  $\Phi(N)$  is nilpotent.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46J10, 47B48.

*Key words and phrases.* Linear preserver problem; Operator algebra.

\* Speaker.

**Lemma 2.3.**  $\phi(I) = \lambda I$  for some constant  $\lambda$  such that  $\lambda^{2r} = 1$ .

**Theorem 2.4.** [2] Let  $f(x)$  be a polynomial with at least two distinct roots,  $V(f(x)) = \{X \in M_n; f(X) = 0\}$  and  $L : M_n \rightarrow M_n$  ( $n \geq 3$ ) be a bijective linear map so that  $L(V(f(x))) \subseteq V(f(x))$ . Then for some invertible matrix  $S$  either  $L(X) = SXS^{-1}$  or  $L(X) = SX^tS^{-1}$  or for some  $l \geq 0, k \geq 2$ , the polynomial  $g(x)$  we have  $f(x) = x^l g(x^k)$  and for some  $k$ th root of unity  $\omega$ ,  $L$  has one of the two forms  $L(X) = \omega SXS^{-1}$  or  $L(X) = \omega SX^tS^{-1}$ .

**Theorem 2.5.** Let  $r$  be an integer such that  $r \geq 2$  and  $\phi$  be a linear surjective map on  $M_n$ . Then  $\phi$  preserves the nonzero  $r$ -potency of products of two operators if and only if there exists an invertible matrix  $S \in M_n$  such that either  $\phi(X) = \lambda SXS^{-1}$  or  $\phi(X) = \lambda SX^tS^{-1}$  for every  $X \in M_n$ , where  $\lambda^{2r} = 1$  and  $X^t$  denotes the transpose of  $X$ .

**Acknowledgements:** This research is partially supported by the Research Center in Algebraic Hyperstructures and Fuzzy Mathematics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

## REFERENCES

1. L. FANG, G. JI, Y. PANG, *Maps preserving the idempotency of products of operators*, Linear Algebra Appl. 426 (2007) 40-52.
2. R. HOWARD, *Linear maps that preserve matrices annihilated by a polynomial*, Linear Algebra Appl. 30 (1980) 167-176.
3. M. WANG, L. FANG, G. JI, Y. PANG, *Linear maps preserving idempotency of products or triple Jordan products of operators*, Linear Algebra Appl. 429 (2008) 181-189.
4. L. ZHAO, J. HOU, *Jordan zero-product preserving additive maps on operator algebras*, J. Math. Anal. Appl. 314 (2006) 689-700.

<sup>1,2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF BASIC SCIENCES, UNIVERSITY OF MAZANDARAN, P. O. BOX 47416-1468, BABOLSAR, IRAN.

*E-mail address:* taghavi@umz.ac.ir

*E-mail address:* ro.hosseinzadeh@umz.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## APPLICATIONS OF LINEAR ALGEBRA ON THE THEORY OF M-ROOT FINSLER METRICS

AKBAR TAYEBI<sup>1</sup> \* AND ESMAEIL PEYGHAN<sup>2</sup>

ABSTRACT. The theory of  $m$ -th root metric has been developed by H. Shimada, and applied to Biology as an ecological metric. It is regarded as a direct generalization of Riemannian metric in a sense, i.e., the second root metric is a Riemannian metric. In this paper, we characterize  $y$ -Berwald  $m$ -th root metrics. Then, we show that every  $m$ -th root metric of isotropic  $E$  (resp.  $H$ )-curvature reduces a weakly Berwald metric (resp.  $H = 0$ ).

### 1. Preliminaries and introduction

Let  $(M, F)$  be a Finsler manifold of dimension  $n$ ,  $TM$  its tangent bundle and  $(x^i, y^i)$  the coordinates in a local chart on  $TM$ . Let  $F$  be the following function on  $M$ , by  $F = \sqrt[m]{A}$ , where  $A$  is given by

$$(1.1) \quad A := a_{i_1 \dots i_m}(x) y^{i_1} y^{i_2} \dots y^{i_m}$$

with  $a_{i_1 \dots i_m}$  symmetric in all its indices [13]. Then  $F$  is called an  $m$ -th root Finsler metric.

Recently studies, shows that the theory of  $m$ -th root Finsler metrics play a very important role in physics, theory of space-time structure, gravitation, general relativity and seismic ray theory [2][6][9][10][11]. For quartic metrics, a study of the geodesics and of the related geometrical objects is made by S. Lebedev, [7], respectively, by V. Balan, S. Lebedev and N. Brnzei [3].

In two papers [4] and [5], V. Balan and N. Brnzei study the Einstein equations for some relativistic models relying on  $m$ -root Finsler metrics. Tensorial connections for such

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53C60, 53C25.

*Key words and phrases.*  $m$ -root metric,  $H$ -curvature,  $E$ -Curvature.

\* Speaker.

spaces have been recently studied by L. Tamassy [14]. B. Lie and Z. Shen study locally projectively flat fourth root metrics under irreducibility condition [8]. Y. Yu and Y. You shows that an  $m$ -th root Einstein Finsler metrics are Ricci-flat [16].

## 2. Some Notations

For an  $m$ -th root Finsler metric on an open subset  $U \subset \mathbb{R}^n$ , we put  $A_i = \frac{\partial A}{\partial y^i}$  and  $A_{ij} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^i \partial y^j}$ . Suppose that  $A_{ij}$  define a positive definite tensor and  $A^{ij}$  denotes its inverse. Then the following hold

$$(2.1) \quad g_{ij} = \frac{A^{\frac{2}{m}-2}}{m^2} [mAA_{ij} + (2-m)A_iA_j],$$

$$(2.2) \quad g^{ij} = A^{-\frac{2}{m}} [mAA^{ij} + \frac{m-2}{m-1}y^iy^j],$$

$$(2.3) \quad y^iA_i = mA, \quad y^iA_{ij} = (m-1)A_j, \quad y_i = \frac{1}{m}A^{\frac{2}{m}-1}A_i,$$

$$(2.4) \quad A^{ij}A_{jk} = \delta_k^i, \quad A^{ij}A_i = \frac{1}{m-1}y^j, \quad A_iA_jA^{ij} = \frac{m}{m-1}A.$$

## 3. Locally Dually Flat m-root Metrics

A Finsler metric  $F = F(x, y)$  on a manifold  $M$  is said to be locally dually flat if at any point there is a standard coordinate system  $(x^i, y^i)$  in  $TM$  such that  $L = F^2$  satisfies  $L_{x^k}y^k = 2L_{x^l}$ . In this case, the coordinate  $(x^i)$  is called an adapted local coordinate system [12]. In this paper, we characterize locally dually flat  $m$ -th root Finsler metrics.

**Theorem 3.1.** *Let  $F$  be an  $m$ -th root Finsler metric on an open subset  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Then  $F$  is a locally dually flat metric if and only if the following holds*

$$(3.1) \quad A_{x^l} = \frac{1}{2A} \left\{ \left( \frac{2}{m} - 1 \right) A_l A_0 + A A_{0l} \right\}.$$

Moreover, suppose that  $A$  is irreducible. Then  $F$  is locally dually flat if and only if there exists a 1-form  $\theta = \theta_l(x)y^l$  on  $U$  such that the following holds

$$(3.2) \quad A_{x^l} = \frac{1}{3m} \left\{ 2\theta A_l + mA\theta_l \right\}.$$

## 4. $y$ -Berwald m-root Metrics

A Finsler metric  $F$  is called an Antonelli metric or  $y$ -Berwald metric if there is a local coordinate system  $(x^i, y^i)$  in  $TM$  such that the spray coefficient is function of  $y^i$  only. In this case, the spray coefficient of  $F$  are given by

$$G^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(y) y^j y^k.$$

Antonelli metrics were introduced by P. L. Antonelli for some studies in Biology and Ecology [1]. Antonelli calls them  $y$ -Berwald metrics. This class of metrics arises in time sequencing change models in the evolution of colonial systems. Here, we characterize  $m$ -th root Antonelli metrics. More precisely, we prove the following.

**Theorem 4.1.** *Let  $F$  be an  $m$ -th root Finsler metric on an open subset  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Then,  $F$  is a Antonelli metric if and only if there exist functions  $\Gamma_{lk}^i$  depending only on direction such that the following holds*

$$(4.1) \quad A_{x^l} = [\Gamma_{lk}^i y^k + \frac{1}{2} \Gamma_{jk,l}^i y^j y^k] A_i.$$

### 5. Isotropic Mean Berwald $m$ -root Metrics

A Finsler metric  $F$  is called a Berwald metric if  $G^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k$  are quadratic in  $y \in T_x M$  for any  $x \in M$  or equivalently Berwald curvature vanishes. The  $E$ -curvature is defined by the trace of the Berwald curvature. A Finsler metric  $F$  is called of isotropic mean Berwald curvature if  $E = \frac{n+1}{2} c F^{-1} h$ , where  $c = c(x)$  is a scalar function on  $M$  and  $h$  is the angular metric. If  $c = 0$ , then  $F$  is called weakly Berwald metric. In continue, we show that every  $m$ -th root isotropic mean Berwald metric reduces to a weakly Berwald metric.

**Theorem 5.1.** *Let  $F$  be an  $m$ -th root Finsler metric on an open subset  $U \subset \mathbb{R}^n$  with  $n \geq 2$ . Suppose that  $F$  is of isotropic mean Berwald curvature. Then  $F$  is a weakly Berwald metric.*

### 6. On $m$ -root Metrics with Isotropic $H$ -Curvature

In [?], Arkar-Zadeh cosidered a non-Riemannian quantity  $H$  which is obtained from the mean Berwald curvature by the covariant horizontal differentiation along geodesics. This is a positively homogeneous scalar function of degree zero on the slit tangent bundle. The quantity  $H_y = H_{ij} dx^i \otimes dx^j$  is defined as the covariant derivative of  $E$  along geodesics. More precisely

$$H_{ij} := E_{ij|m} y^m.$$

In local coordinates, we have

$$\begin{aligned} 2H_{ij} = & y^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial x^m} - 2G^m \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^m} \\ & - \frac{\partial G^m}{\partial y^i} \frac{\partial^3 G^k}{\partial y^j \partial y^k \partial y^m} - \frac{\partial G^m}{\partial y^j} \frac{\partial^4 G^k}{\partial y^i \partial y^k \partial y^m}. \end{aligned}$$

Akbar-Zadeh proved that: " Let  $F$  be a Finsler metric of scalar curvature on an  $n$ -dimensional manifold  $M$  ( $n \geq 3$ ). Then the flag curvature  $K$ =constant if and only if  $H = 0$ ."

We show that for every  $m$ -th root metric with isotropic  $H$ -curvature,  $H = \frac{n+1}{2}cF^{-1}h$ , has vanishing  $H$ -Curvature.

**Theorem 6.1.** *Let  $F$  be an  $m$ -th root Finsler metric on an open subset  $U \subset \mathbb{R}^n$  with  $n \geq 2$ . Suppose that  $F$  is of isotropic  $H$ -curvature. Then  $H = 0$ .*

## REFERENCES

- [1] P. L. Antonelli, R. Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Acad. publ., Netherlands (1993).
- [2] G.S. Asanov, *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht, 1984.
- [3] V. Balan, N. Brinzei and S. Lebedev, *Geodesics, Paths and Jacobi Fields for Berwald-Moor Quartic Metrics*, to appear, "Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics".
- [4] V. Balan and N. Brinzei, *Einstein equations for  $(h,v)$  - Berwald-Moor relativistic models*, Balkan. J. Geom. Appl. 11(2), 2006, 20-26.
- [5] V. Balan and N. Brinzei, *Berwald-Moor-type  $(h,v)$ -metric physical models*, "Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics" 2 (4), Vol 2, 2005, 114-122.
- [6] Z. Hu and S. Deng, *Invariant fourth root Finsler metrics on the Grassmannian manifolds*, Journal of Geometry and Physics, **61**(2011), 18-25.
- [7] S.V. Lebedev, *The generalized Finslerian metric tensors*, to appear.
- [8] B. Li and Z. Shen, *On projectively flat fourth root metrics*, Canad. Math. Bull, accepted.
- [9] M. Matsumoto and H. Shimada, *On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moor's metric  $L = (y^1 y^2 \dots y^n)^{1/n}$* , Tensor N. S. **32**(1978), 275-278.
- [10] D.G. Pavlov (Ed.), *Space-Time Structure. Algebra and Geometry*, Collected papers, TETRU, 2006.
- [11] D.G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics **1** (1), Vol. **1**(2004), 31-39.
- [12] Z. Shen, *Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry*, Chin. Ann. Math. **27**(2006), 73-94.
- [13] H. Shimada, *On Finsler spaces with metric  $L = \sqrt[m]{a_{i_1 i_2 \dots i_m} y^{i_1} y^{i_2} \dots y^{i_m}}$* , Tensor, N.S., **33**(1979), 365-372.
- [14] L. Tamàssy, *Finsler spaces with polynomial metric*, "Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics" 2 (6), Vol 3, 2006, 85-92.
- [15] A. Tayebi and E. Peyghan, *On Ricci tensors of Randers metrics*, Journal of Geometry and Physics, **60**(2010), 1665-1670.
- [16] Y. Yu and Y. You, *On Einstein  $m$ -th root metrics*, Differential Geometry and its Applications, **28**(2010) 290-294.

<sup>1</sup> FACULTY OF SCIENCE, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, QOM UNIVERSITY, QOM, IRAN  
*E-mail address:* `akbar.tayebi@gmail.com`

<sup>2</sup> FACULTY OF SCIENCE, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ARAK UNIVERSITY, ARAK, IRAN.  
*E-mail address:* `epeyghan@gmail.com`



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## ACCELERATED NORMAL AND SKEW-HERMITIAN SPLITTING METHODS FOR POSITIVE DEFINITE LINEAR SYSTEMS

F. TOUTOUNIAN<sup>1</sup> AND D. HEZARI<sup>2\*</sup>

**ABSTRACT.** For solving large sparse non-Hermitian positive definite linear equations, Bai, Golub and NG proposed the Hermitian and skew-Hermitian splitting methods (HSS). They recently generalized this technique to the normal and skew-Hermitian splitting methods (NSS). In this paper, we present an accelerated normal and skew-Hermitian splitting methods (ANSS) which involve two parameters for the NSS iteration. We theoretically study the convergence properties of the ANSS method. Moreover, the construction factor of ANSS iteration is derived. Numerical examples illustrating the effectiveness of ANSS iteration are presented.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Many problems in scientific computation given rise to solving the linear system

$$(1.1) \quad Ax = b,$$

with  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a large non-Hermitian positive definite matrix and  $x, b \in \mathbb{C}^n$ . We observe that the coefficient matrix  $A$  naturally possesses the Hermitian/skew-Hermitian (HS) splitting

$$A = H + S$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65F10, 65F15.

*Key words and phrases.* Non-Hermitian matrix; normal matrix; Hermitian matrix; skew-Hermitian matrix; splitting iteration method.

\* Speaker.

where

$$H = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{and} \quad S = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

with  $A^*$  being the conjugate transpose of  $A$ . Bai, Golub and NG [2] presented the HSS iteration method: given an initial guess  $x^{(0)}$ , for  $k = 0, 1, 2, \dots$ , until  $x^{(k)}$  converges, compute

$$(1.2) \quad \begin{cases} (\alpha I + H)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)x^{(k+1)} = (\alpha I - H)x^{(k+\frac{1}{2})} + b. \end{cases}$$

where  $\alpha$  is a given positive constant. They have also proved for any positive  $\alpha$  the HSS method converges unconditionally to the unique solution of the system of linear equations.

Bai, Golub and Ng [2] recently generalized this technique to the normal and skew-Hermitian splitting methods (NSS). They split the coefficient matrix  $A$  into

$$A = N + S$$

where  $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$  is a normal matrix and  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  is a skew-Hermitian matrix, and obtained the following normal/skew Hermitian splitting (NSS) method to iteratively compute a reliable and accurate approximate solution for the system of linear equation (1.1):

*The NSS iteration method:* Given an initial guess  $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ . For  $k = 0, 1, 2 \dots$  until  $\{x^{(k)}\}$  converges, compute

$$\begin{cases} (\alpha I + N)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)x^{(k+1)} = (\alpha I - N)x^{(k+\frac{1}{2})} + b, \end{cases}$$

where  $\alpha$  is a given positive constant. They have also proved that for any positive  $\alpha$  the NSS method converges unconditionally to the unique solution of the system of linear equations.

In this paper, we introduce two constants for the NSS iteration and present different approach to solve Eq. (1.1), called the *accelerated normal and skew-Hermitian splitting iteration*, shortened to the ANSS iteration. Moreover, we analyze the convergence properties of the ANSS iteration and present the numerical examples for illustrating the effectiveness of ANSS iteration.

## 2. THE ANSS METHOD

Throughout the paper, the non-Hermitian matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  is positive definite if its Hermitian part is Hermitian positive definite.

*The ANSS iteration method:* Given an initial guess  $x^{(0)}$ , for  $k = 0, 1, 2 \dots$  until  $\{x^{(k)}\}$  converges, compute

$$\begin{cases} (\alpha I + N)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\beta I + S)x^{(k+1)} = (\beta I - N)x^{(k+\frac{1}{2})} + b, \end{cases}$$

where  $\alpha$  is a given nonnegative constant and  $\beta$  is a given positive constant, and  $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$  is a normal matrix and  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a skew-Hermitian such that  $A = N + S$ .

In matrix-vector form, the ANSS iteration method can be equivalently rewritten as

$$x^{(k+1)} = M(\alpha, \beta)x^{(k)} + G(\alpha, \beta), \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

where

$$M(\alpha, \beta) = (\beta I + S)^{-1}(\beta I - N)(\alpha I + N)^{-1}(\alpha I - S)$$

and

$$G(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)(\beta I + S)^{-1}(\alpha I + N)^{-1}$$

Here,  $M(\alpha, \beta)$  is the iteration matrix of the ANSS iteration. The following theorem describes the convergence properties of the ANSS iteration.

**Theorem 2.1.** *Let  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be a positive definite matrix,  $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be a normal matrix and  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be a skew-Hermitian matrix such that  $A = N + S$ , and  $\alpha$  be a nonnegative constant and  $\beta$  be a positive constant. Then the spectral radius  $\rho(M(\alpha, \beta))$  of the iteration matrix  $M(\alpha, \beta)$  of the ANSS iteration is bounded by*

$$\delta(\alpha, \beta) \equiv \max_{\sigma_j \in \sigma(S)} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \sigma_j^2}}{\sqrt{\beta^2 + \sigma_j^2}} \max_{\gamma_j + i\eta_j \in \lambda(N)} \sqrt{\frac{(\beta - \gamma_j)^2 + \eta_j^2}{(\alpha + \gamma_j)^2 + \eta_j^2}}$$

where  $\lambda(N)$  is the spectral set of  $N$  and  $\sigma(S)$  is the singular-value set of  $S$ . And, for any given parameter  $\alpha$ , if  $\beta$  satisfies

$$\max \left\{ \frac{\alpha(\gamma_{\min}^2 + \eta_{\max}^2)}{2\alpha\gamma_{\min} + \gamma_{\min}^2 + \eta_{\max}^2}, \frac{\alpha(\gamma_{\max}^2 + \eta_{\max}^2)}{2\alpha\gamma_{\max} + \gamma_{\max}^2 + \eta_{\max}^2} \right\} < \beta \leq \alpha + 2\gamma_{\min}$$

then  $\delta(\alpha, \beta) < 1$ , and or if  $\beta$  satisfies

$$\alpha + 2\gamma_{\min} \leq \beta \quad \text{and} \quad \sigma_{\max} \leq \sqrt{\gamma_{\min} + \eta_{\min} + 2\gamma_{\min}\alpha}$$

then  $\delta(\alpha, \beta) < 1$ , i.e., the ANSS iteration converges, where  $\gamma_{\min}$  and  $\gamma_{\max}$ ,  $\eta_{\min}$  and  $\eta_{\max}$  are the lower and the upper bound of the real, the absolute values of the imaginary parts of the eigenvalues of the matrix  $N$ , respectively, and  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  are the lower and the upper bound of the singular-value set of the matrix  $S$ , respectively.

Theorem 2.1 mainly discusses the available  $\beta$  for a convergent ANSS iteration for any given nonnegative  $\alpha$ . It also shows that the choice of  $\beta$  is dependent on the choice of  $\alpha$ , the spectrum of the matrix  $N$ , the singular-values of  $S$ , but is not dependent on the spectrum of  $A$ .

#### REFERENCES

1. Z. Z. BAI, G. H. GOLUB AND M. K. NG, *on successive-overrelaxation acceleration of the Hermitian and skew-Hermitian splitting iterations*, Numer. Linear. Algebra. Appl. , **14**(2007)319-335.
2. Z. Z. BAI, G. H. GOLUB AND M. K. NG, *Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems* , SIAM J. Matrix. Anal. Appl. ,**24**(2003)603-626.

<sup>1</sup> SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, FERDOWSI UNIVERSITY , P. O. 1159-91775, MASHHAD, IRAN.

*E-mail address:* E-mail: `toutouni@math.um.ac.ir`

<sup>2</sup> SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, FERDOWSI UNIVERSITY, P. O. 1159-91775, MASHHAD, IRAN.

*E-mail address:* `hezari_h@yahoo.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## DIMENSION OF THE SPACE OF RELATIVE SYMMETRIC POLYNOMIALS ASSOCIATED WITH CYCLIC GROUPS

Y. ZAMANI <sup>1</sup> AND E. BABAEI <sup>2\*</sup>

ABSTRACT. The dimension of the space of relative symmetric polynomials associated with a certain cyclic subgroup of  $S_m$  which is generated by a  $m$ -cycle is explicitly given in terms of the generalized Ramanujan sum. This dimension can also be expressed as the Euler  $\phi$ -function and Möbius function in some special cases.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $G$  be a subgroup of the full symmetric group  $S_m$  of degree  $m$  and suppose  $\chi$  is an irreducible complex character of  $G$ . Let  $H_d[x_1, \dots, x_m]$  be the complex space of homogenous polynomials of degree  $d$  with the independent commuting variables  $x_1, \dots, x_m$ . Let  $\Gamma_{m,d}^+$  be the set of all  $m$ -tuples of non-negative integers,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , such that  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = d$ . For any  $\alpha \in \Gamma_{m,d}^+$ , let  $X^\alpha$  to be the monomial  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ . Then the set  $\{X^\alpha; \alpha \in \Gamma_{m,d}^+\}$  is basis of  $H_d[x_1, \dots, x_m]$ . An inner product on  $H_d[x_1, \dots, x_m]$  is defined by

$$\langle X^\alpha, X^\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$

The group  $G$  acts on  $H_d[x_1, \dots, x_m]$  via

$$q^\alpha(x_1, \dots, x_m) = q(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(m)}).$$

It also acts on  $\Gamma_{m,d}^+$  by

$$\alpha\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m)}).$$

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 05E05; Secondary 15A69.

*Key words and phrases*. Symmetric polynomials, Permutation groups, Complex characters, Ramanujan sum.

\* Speaker.

Let  $\Delta$  be a set of representatives of orbits of  $\Gamma_{m,d}^+$  under action of  $G$ . The idempotent  $T(G, \chi)$  is defined by

$$T(G, \chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \sigma$$

in the group algebra  $\mathbb{C}G$ . The range of  $H_d[x_1, \dots, x_m]$  under the map  $T(G, \chi)$  is called the space of relative polynomials of degree  $d$  associated with  $G$  and  $\chi$  and is denoted by  $H_d(G, \chi)$ . Since  $tr\sigma = Q(d, \sigma)$  (see [4]), where  $Q(d, \sigma)$  denotes the number of non-negative integer solutions of the equation  $a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n = d$ , such that  $[a_1, \dots, a_n]$  is the cyclic structure of  $\sigma \in G$ , we have

$$\dim H_d(G, \chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) Q(d, \sigma).$$

We obtain the dimension of  $H_d(G, \chi)$ , when  $G$  is a cyclic group. A similar result has obtained for symmetry classes of tensors in [2].

## 2. MAIN RESULTS

Let  $\sigma$  be a  $m$ -cycle, then the subgroup of  $S_m$  generated by  $\sigma$  is the cyclic group  $C_m$ . The elements of  $C_m$  are  $\sigma^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . For any  $\sigma \in S_m$ , let  $c(\sigma)$  denote the number of cycles in disjoint cycle decomposition of  $\sigma$  including cycles of length one. Then for any  $0 \leq k \leq m-1$ ,  $\sigma^k$  has  $(m, k)$  cycles of length  $\frac{m}{(m, k)}$  and so  $c(\sigma) = (m, k)$ , where  $(m, k)$  denotes the greatest common divisor of  $m$  and  $k$ . From group representation theory we know that the irreducible characters of  $C_m$  are

$$\chi_l(\sigma^k) = \exp\left(\frac{2\pi i l k}{m}\right), \quad l = 0, \dots, m-1.$$

**Definition 2.1.** Ramanujan sum is defined by

$$C_m(h) = \sum_{t=0, (t, m)=1}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi i h t}{m}\right),$$

where  $m$  is a positive integer and  $h$  is a nonnegative integer.

Ramanujan proved that

$$C_m(h) = \frac{\phi(m) \mu\left(\frac{m}{(m, h)}\right)}{\phi\left(\frac{m}{(m, h)}\right)},$$

where  $\phi$  is the Euler  $\phi$ -function, ( $\phi(1) = 1$  and for  $m > 1$ ,  $\phi(m)$  = the number of positive integers less than  $m$  and relatively prime to  $m$ ), and  $\mu$  is the Möbius function,

( $\mu(1) = 1, \mu(m) = 0$  if  $p^2 \nmid m$  for some prime number  $p$  and  $\mu(m) = (-1)^r$ , if  $m = p_1 \dots p_r$ , where  $p_1, \dots, p_r$  are distinct prime numbers).

**Definition 2.2.** The generalized Ramanujan sum is defined by

$$S(h; m_1, \dots, m_p; d_1, \dots, d_p) = \sum_{t=0, (t, m_1)=d_1, \dots, (t, m_p)=d_p}^{[m_1, \dots, m_p]-1} \exp\left(\frac{2\pi i h t}{[m_1, \dots, m_p]}\right),$$

where  $m_1, \dots, m_p$  are positive integers and  $h$  is a nonnegative integer and  $d_1 \mid m_1, \dots, d_p \mid m_p$ , also  $[m_1, \dots, m_p]$  denotes the least common multiple of the integers  $m_1, \dots, m_p$ . If the set

$$\{0 \leq t \leq [m_1, \dots, m_p] - 1 \mid (t, m_i) = d_i, 1 \leq i \leq p\}$$

is empty, then the generalized Ramanujan sum is defined  $S(h; m_1, \dots, m_p; d_1, \dots, d_p) = 0$ .

The generalized Ramanujan sum is given in the following examples for some special cases.

**Example 2.3.**  $S(0; m; d) = C_{\frac{m}{d}}(0) = \phi\left(\frac{m}{d}\right)$  and if  $(h, m) = 1$ , we have

$$S(h; m; d) = C_{\frac{m}{d}}(h) = \mu\left(\frac{m}{d}\right).$$

Now we calculate  $\dim H_d(G, \chi)$ , when  $G$  is the cyclic group of order  $m$  and  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Our formula involves the known function that introduced in the beginning of this section.

**Theorem 2.4.** Let  $G$  be a cyclic subgroup of  $S_m$  generated by a  $m$ -cycle ( $G = \langle \sigma \rangle$ , where  $\sigma^m = 1$ ) and  $\text{Irr}(G) = \{\chi_l \mid 0 \leq l \leq m-1\}$ , then we have

$$\dim H_d(G, \chi_l) = \frac{1}{m} \sum_{t \mid m, m \mid dt} S(l, m, t) \binom{\frac{dt}{m} + t - 1}{t-1}, \quad 0 \leq l \leq m-1.$$

By using Example 2.3 and Theorem 2.4, we obtain the following corollaries.

**Corollary 2.5.** If  $G$  is a cyclic subgroup of  $S_m$  generated by a  $m$ -cycle and  $\chi$  is the identity character 1, then we have

$$\dim H_d(G, \chi) = \frac{1}{m} \sum_{j \mid (m, d)} \phi(j) \binom{\frac{d}{j} + \frac{m}{j} - 1}{\frac{m}{j} - 1}.$$

**Corollary 2.6.** If  $G$  is a cyclic subgroup of  $S_m$  generated by a  $m$ -cycle and  $\chi$  is a primitive linear character of  $G$ , then

$$\dim H_d(G, \chi) = \frac{1}{m} \sum_{j \mid (m, d)} \mu(j) \binom{\frac{d}{j} + \frac{m}{j} - 1}{\frac{m}{j} - 1}.$$

## REFERENCES

1. L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, 1974.
2. M. R. DARAFSHEH AND M. R. POURNAKI, *On the Dimension of Cyclic Symmetry Classes of Tensors*, Journal of Algebra, 205 (1998) 317-325.
3. R. MERRIS, *Multilinear Algebra*, Gordon and Breach Science Publisher, 1997.
4. M. SHAHRYARI, *Relative Symmetric Polynomials*, Linear Algebra and its Applications, 433 (2010) 1410-1421.

<sup>1</sup> FACULTY OF SCIENCES, SAHAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, TABRIZ, IRAN.

*E-mail address:* `zamani@sut.ac.ir`

<sup>2</sup> FACULTY OF SCIENCES, SAHAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, TABRIZ, IRAN.

*E-mail address:* `e_babaei@sut.ac.ir`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## JOINT HIGHER RANK NUMERICAL RANGE OF SOME PAULI MATRICES

AKBAR ZARE CHAVOSHI<sup>1</sup>, HAMID REZA AFSHIN<sup>2\*</sup> AND MOHAMMAD ALI MEHRJOOFARD<sup>3</sup>

ABSTRACT. In this article we characterize joint higher rank numerical range of some Pauli matrices.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $A_1, \dots, A_m \in M_n$ , where  $M_n$  denotes the set of all  $n \times n$  complex matrices. The joint numerical range of  $A = (A_1, \dots, A_m)$  and joint rank  $k$ -numerical range are defined as the following sets

$$W(A) = \{(a_1, \dots, a_m) : \exists x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1, x^*A_jx = a_j, \forall j\},$$

$$\Lambda_k(A) = \{(a_1, \dots, a_m) : \exists U \in M_{n,k}, U^*U = I_k, U^*A_jU = a_jI_k, \forall j\},$$

respectively. Clearly when  $k = 1$ ,  $\Lambda_k(A)$  reduces to the joint numerical range. Consider the following matrices:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

we call any of them or their tensor product, Pauli matrix. This type of matrices appear frequently in quantum computing. By considering discussions at WONRA08, Kribs et.al. [2] list five open problems that have direct relevance to joint higher rank numerical range and quantum error correction. In this note we try to answer the first problem:

**Problem** Compute the joint higher-rank numerical range for an arbitrary Pauli matrices.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47A12; Secondary 15A60, 81P68.

*Key words and phrases*. Joint higher rank numerical range; Joint numerical range; Pauli matrices

\* Speaker.

Throughout this paper, for any  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ , we fix the following notations

$$\Psi_{i_1, \dots, i_n} = \{A_1 \otimes \dots \otimes A_n : A_1 \in \Delta_{i_1}, \dots, A_n \in \Delta_{i_n}\}$$

$$F_n = \bigcup_{j_1, \dots, j_n \in \{1, 2\}} \Psi_{j_1, \dots, j_n}$$

such that  $\Delta_1 = \{X, iY\}, \Delta_2 = \{I, Z\}$ , and we will usually consider them as an ordered sequences with alphabetical order. For example

$$\Psi_{2,1} = (I \otimes X, iI \otimes Y, Z \otimes X, iZ \otimes Y)$$

$$F_2 = (I \otimes I, I \otimes X, iI \otimes Y, I \otimes Z, X \otimes I, X \otimes X, iX \otimes Y, X \otimes Z, \\ iY \otimes I, iY \otimes X, -Y \otimes Y, iY \otimes Z, Z \otimes I, Z \otimes X, iZ \otimes Y, Z \otimes Z)$$

## 2. MAIN RESULTS

The following theorem shows that joint numerical range of  $F_n$  lies in the boundary of a  $4^n$ -dimensional sphere:

**Theorem 2.1.**

$$(2.1) \quad W(F_n) \subset \left\{ (b_1, b_2, \dots, b_{4^n}) \in \mathbb{R}^{4^n} : \sum_{j=1}^{4^n} b_j^2 = 2^n \right\}$$

Gutkin et.al. [1, Example 1] showed that when  $n = 1$ , equality holds in (2.1). In the following example we show this is not true in general case.

**Example 2.2.**

$$\left( 1, 0, 0, 0, 0, \sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \in \left\{ (b_1, \dots, b_{16}) \in \mathbb{R}^{16} : \sum_{i=1}^{16} b_i^2 = 4 \right\} \setminus W(F_2).$$

Let  $F_2 = P_1, \dots, P_{16}$  and  $U = [a, b, c, d]^T \in \mathbb{C}^4$  be such that for any  $i = 1, \dots, 16$ ,  $U^* P_i U = b_i$ , then  $b_2 = b_3 = b_{14} = b_{15} = 0 = b_5 = b_8 = b_9 = b_{12}$  and hence  $(0, 0) \in \{(a, d), (b, c)\}$ , that contradicts with  $(b_6, b_7, b_{10}, b_{11}) = (\sqrt{3}, 0, 0, 0)$ .

**Theorem 2.3.** Let  $S = 2, 2, \dots, 2$  be a sequence of length  $n \in \mathbb{N}$ , therefore

$$W(\Psi_S) = \left\{ \xi = (1, b_{II \dots IIZ}, b_{II \dots IZI}, \dots, b_{ZZ \dots Z}) \in \mathbb{R}^{2^n} : \left( \bigotimes_{j=1}^n (X + Z) \right) \xi \geq 0 \right\},$$

where indices are arranged in alphabetical order.

*Remark 2.4.* Let  $\Psi_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \{i_1, i_2, \dots, i_n P_k\}_{k=1}^{2^n}$  where  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ . One readily checks that there exist permutation matrix  $P = X^{i_1} \otimes X^{i_2} \otimes \dots \otimes X^{i_n}$  such that  $i_1, i_2, \dots, i_n P_j = {}_{2, 2, \dots, 2} P_j P$  for any  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$  and  $j = 1, 2, \dots, 2^n$ . So, by using

Theorem 2.3, we can completely determine  $W(\Psi_{2,2,\dots,2} \cup E)$  for any  $E$  that is union of some  $\Psi_{i_1,\dots,i_n}$ 's.

**Example 2.5.** Direct computation shows that  $(1, b_{IX}, b_{IY}, \dots, b_{ZZ}) \in W(F_2)$  iff there exist  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$  such that

$$\begin{aligned} (X + Z) & \left( \begin{bmatrix} \bar{x}_1 x_1 \\ \bar{x}_2 x_2 \\ \bar{x}_3 x_3 \\ \bar{x}_4 x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{x}_2 x_1 \\ \bar{x}_1 x_2 \\ \bar{x}_4 x_3 \\ \bar{x}_3 x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{x}_3 x_1 \\ \bar{x}_4 x_2 \\ \bar{x}_1 x_3 \\ \bar{x}_2 x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{x}_4 x_1 \\ \bar{x}_3 x_2 \\ \bar{x}_2 x_3 \\ \bar{x}_1 x_4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 \\ b_{IZ} \\ b_{ZI} \\ b_{ZZ} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{IX} \\ -ib_{IY} \\ b_{ZX} \\ -ib_{ZY} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{XI} \\ b_{XZ} \\ -ib_{YI} \\ -ib_{YZ} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{XX} \\ -ib_{XY} \\ -ib_{YX} \\ -b_{YY} \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} |x_1|^2 = \frac{1+b_{IZ}+b_{ZI}+b_{ZZ}}{4}, \\ |x_2|^2 = \frac{1-b_{IZ}+b_{ZI}-b_{ZZ}}{4}, \\ |x_3|^2 = \frac{1+b_{IZ}-b_{ZI}-b_{ZZ}}{4}, \\ |x_4|^2 = \frac{1-b_{IZ}-b_{ZI}+b_{ZZ}}{4}, \end{cases} \begin{cases} \bar{x}_2 x_1 = \frac{b_{IX}-ib_{IY}+b_{ZX}-ib_{ZY}}{4}, \\ \bar{x}_4 x_3 = \frac{b_{IX}-ib_{IY}-b_{ZX}+ib_{ZY}}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_4 x_1 = \frac{b_{XX}-ib_{XY}-ib_{YX}-b_{YY}}{4}, \\ \bar{x}_3 x_2 = \frac{b_{XX}+ib_{XY}-ib_{YX}+b_{YY}}{4}, \end{cases} \begin{cases} \bar{x}_3 x_1 = \frac{b_{XI}+b_{XZ}-ib_{YI}-ib_{YZ}}{4}, \\ \bar{x}_4 x_2 = \frac{b_{XI}-b_{XZ}-ib_{YI}+ib_{YZ}}{4}. \end{cases}$$

That is  $(1, b_{IX}, b_{IY}, \dots, b_{ZZ}) \in W(F_2)$  iff

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_{IX}, b_{IY}, \dots, b_{ZZ}) \in \mathbb{R}^{15}, \\ 0 \leq \min \{1 + b_{IZ} + b_{ZI} + b_{ZZ}, 1 - b_{IZ} + b_{ZI} - b_{ZZ}, 1 + b_{IZ} - b_{ZI} - b_{ZZ}, 1 - b_{IZ} - b_{ZI} + b_{ZZ}\}, \\ (1 + b_{IZ} + b_{ZI} + b_{ZZ})(1 - b_{IZ} + b_{ZI} - b_{ZZ}) = (b_{IX} + b_{ZX})^2 + (b_{IY} + b_{ZY})^2, \\ (1 - b_{IZ} - b_{ZI} + b_{ZZ})(1 + b_{IZ} - b_{ZI} - b_{ZZ}) = (b_{IX} - ib_{IY} - b_{ZX})^2 + b_{ZY}^2, \\ (1 - b_{IZ} - b_{ZI} + b_{ZZ})(1 + b_{IZ} + b_{ZI} + b_{ZZ}) = (b_{XX} - b_{YY})^2 + (b_{XY} + b_{YX})^2, \\ (1 + b_{IZ} - b_{ZI} - b_{ZZ})(1 - b_{IZ} + b_{ZI} - b_{ZZ}) = (b_{XX} + b_{YY})^2 + (b_{XY} - b_{YX})^2, \\ (1 + b_{IZ} - b_{ZI} - b_{ZZ})(1 + b_{IZ} + b_{ZI} + b_{ZZ}) = (b_{XI} + b_{XZ})^2 + (b_{YI} + b_{YZ})^2, \\ (1 - b_{IZ} - b_{ZI} + b_{ZZ})(1 - b_{IZ} + b_{ZI} - b_{ZZ}) = (b_{XI} - b_{XZ})^2 + (-b_{YI} + b_{YZ})^2 \end{array} \right.$$

And there exist  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in \mathbb{R}$  and  $k_1, k_2, \dots, k_6 \in \mathbb{Z}$  such that

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(b_{IX} - ib_{IY} + b_{ZX} - ib_{ZY})(\varphi_1 - \varphi_2 - 2k_1\pi + \arg(b_{IX} - ib_{IY} + b_{ZX} - ib_{ZY})) = 0, \\ \operatorname{sgn}(b_{IX} - ib_{IY} - b_{ZX} + ib_{ZY})(\varphi_3 - \varphi_4 - 2k_2\pi - \arg(b_{IX} - ib_{IY} - b_{ZX} + ib_{ZY})) = 0, \\ \operatorname{sgn}(b_{XX} - ib_{XY} - ib_{YX} - b_{YY})(\varphi_1 - \varphi_4 - 2k_3\pi - \arg(b_{XX} - ib_{XY} - ib_{YX} - b_{YY})) = 0, \\ \operatorname{sgn}(b_{XX} + ib_{XY} - ib_{YX} + b_{YY})(\varphi_2 - \varphi_3 - 2k_4\pi - \arg(b_{XX} + ib_{XY} - ib_{YX} + b_{YY})) = 0, \\ \operatorname{sgn}(b_{XI} + b_{XZ} - ib_{YI} - ib_{YZ})(\varphi_1 - \varphi_3 - 2k_5\pi - \arg(b_{XI} + b_{XZ} - ib_{YI} - ib_{YZ})) = 0, \\ \operatorname{sgn}(b_{XI} - b_{XZ} - ib_{YI} + ib_{YZ})(\varphi_2 - \varphi_4 - 2k_6\pi - \arg(b_{XI} - b_{XZ} - ib_{YI} + ib_{YZ})) = 0. \end{cases}$$

The following lemma can easily verified by direct computation.

**Lemma 2.6.** *Let  $A_{1,j}, \dots, A_{k,j} \in M_{m_j, n_j}$  are linearly independent matrices for any  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Then  $\{A_{i_1,1} \otimes A_{i_2,2} \otimes \dots \otimes A_{i_s,s}\}_{i_1, i_2, \dots, i_s \in \{1, \dots, k\}}$  is linearly independent set.*

**Corollary 2.7.** *For any  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ ,  $\Psi_{i_1, \dots, i_n}$  is linearly independent set.*

**Lemma 2.8.** *for any  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ ,  $\Lambda_2(\Psi_{i_1, \dots, i_n}) \subset \{0\}$*

**Theorem 2.9.** (i)  $\Lambda_2(\Psi_{2,2,\dots,2}) = \emptyset$ .

(ii) *for any  $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$ , such that  $\{i_1, \dots, i_n\} \neq \{2\}$ , we have  $\Lambda_2(\Psi_{i_1, \dots, i_n}) = \{0\}$ .*

**Example 2.10.**  $\Lambda_2(I \otimes X, I \otimes Y, Z \otimes Y, Z \otimes X, Z \otimes Z, I \otimes Z) = \emptyset$ .

Let

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{cases} U^*U = I \\ U^*(I \otimes X)U = a_1I, \\ U^*(I \otimes Y)U = a_2I, \\ U^*(Z \otimes X)U = a_3I, \\ U^*(Z \otimes Y)U = a_4I, \\ U^*(Z \otimes Z)U = a_5I, \\ U^*(I \otimes Z)U = a_6I. \end{cases}$$

By theorem 2.9 we have  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  and therefore

$$\begin{cases} \bar{c}a = \bar{a}d = \bar{c}b = \bar{d}b = 0, \\ \bar{g}e = \bar{e}h = \bar{g}f = \bar{h}f = 0. \end{cases}$$

On the other hand, we can deduce from  $U^*(Z \otimes Z)U = a_5I$  and  $U^*(I \otimes Z)U = a_6I$  that

$$\begin{cases} \bar{a}a - \bar{c}c = \bar{b}b - \bar{d}d, \\ \bar{e}e - \bar{g}g = \bar{f}f - \bar{h}h, \\ \bar{a}b = \bar{c}d, \\ \bar{e}f = \bar{g}h. \end{cases}$$

Now we see that

$$\begin{cases} ab = ac = ad = 0, \\ ca = cb = cd = 0, \\ ba = bc = bd = 0, \\ da = dc = db = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} ef = eg = eh = 0, \\ ge = gf = gh = 0, \\ fe = fg = fh = 0, \\ he = hg = hf = 0. \end{cases}$$

That is contradiction.

**Theorem 2.11.**  $\Lambda_{2^n}(S) = \begin{cases} \{1\} & : S = \{I_{2^n}\} \\ \emptyset & : S \subset F_n \setminus \{I_{2^n}\} \end{cases}$

#### REFERENCES

1. E. GUTKIN AND E.A. JONCKHEERE AND M. KAROW, *Convexity of the joint numerical range: topological and differential geometric viewpoints*, Linear Algebra Appl., 376 (2004), pp. 143171.
2. D.W. KRIBS AND A. PASIEKA AND M. LAFOREST AND C. RYAN AND M.P. SILVA, *Research problems on numerical ranges in quantum computing*, Lin. Multilin. Alg., 57 (2009), pp. 491502.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MALEK ASHTAR UNIVERSITY, SHAHINSHAHR, IRAN

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY OF RAFSANJAN, RAFSANJAN, IRAN.  
E-mail address: afshin@mail.vru.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VALI-E-ASR UNIVERSITY OF RAFSANJAN, RAFSANJAN, IRAN.  
E-mail address: aahaay@gmail.com



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## UNBOUNDED OR BOUNDED IDEMPOTENT OPERATORS IN HILBERT SPACE

TSUYOSHI ANDO<sup>1\*</sup>

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 00X00; Secondary 00X00, 00X00.

*Key words and phrases.* Inequality.

\* Invited Speaker.

ABSTRACT. A densely defined, *closed* linear operator  $F$  in a Hilbert space  $\mathcal{H}$  is said to be *idempotent* if  $\text{ran}(F) \subset \text{dom}(F)$  and  $F \cdot F = F$ . Here  $\text{ran}(\cdot)$  and  $\text{dom}(\cdot)$  denote the *range* and the *domain* respectively.

Let  $\mathcal{M} = \text{ran}(F)$  and  $\mathcal{N} = \ker(F)$  where  $\ker(\cdot)$  denotes the *kernel*. Then the idempotency of  $F$  means that

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \{0\} \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{M} + \mathcal{N}} = \mathcal{H}$$

and

$$F(x + y) = x \quad (x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}).$$

When  $\mathcal{H}$  is finite dimensional, that is,  $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^n$ , the domain of  $F$  coincides with the whole space  $\mathbb{C}^n$ . The situation is the same when  $F$  is bounded, that is, *continuous*. In this case  $F$  is nothing but an *oblique projection onto  $\mathcal{M}$  along  $\mathcal{N}$* .

Since  $\mathcal{H}$  is a Hilbert space, there is an *orthoprojection*  $P$  to  $\mathcal{M} = \text{ran}(F)$  and one  $Q$  to  $\mathcal{N} = \ker(F)$ .

Our first aim is to represent  $F$  in terms of  $P$  and  $Q$  even in the unbounded case as

$$F = P(P + Q)^{-1/2} \cdot (P + Q)^{-1/2}$$

where  $P(P + Q)^{-1/2}$  becomes a well defined bounded operator and  $\text{ran}((P + Q)^{1/2}) = \text{dom}(F)$ .

When  $F$  is bounded, this formula becomes  $F = P(P + Q)^{-1}$ . In this case, Vidav (1964) showed long ago that

$$F = (I - PQ)^{-1}P(I - PQ) \quad \text{and} \quad \|F\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}}$$

where  $\|\cdot\|$  denotes the *spectral norm*.

Our second aim is to give a description of  $\|F\|$  in terms of  $\|P + Q\|$  as

$$\|F\| = \frac{1}{\sqrt{\|P + Q\| \cdot \{2 - \|P + Q\|\}}},$$

We prove also the following:

$$F = P(P - Q)^{-1} \quad \text{and} \quad \|F\| = \|(P - Q)^{-1}\|.$$

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, JAPAN.

E-mail address: ando@es.hokudai.ic.jp



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## MATHEMATICS OF MEDICAL IMAGING

ALI A. JAFARIAN<sup>1\*</sup>

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 00X00; Secondary 00X00, 00X00.

*Key words and phrases.* Inequality.

\* Invited Speaker.

ABSTRACT. One of the main topics in Medical Imaging is Computerized Tomography (CT), which involves reconstruction of cross-sectional images of an object, and consequently its whole image. This is done by using attenuation coefficient (function), which is a function that quantifies the tendency of the object to scatter or absorb an x-ray of a given energy. The attenuation function is unknown, but its integral along different line segments in the cross section can be determined using Beer's Law. This requires a great deal of computation of line or plane integrals. From a pure mathematical point of view, the problem is reconstruction of a function, defined in a compact region in a plane, from the knowledge of its integrals along many different line segments in the region. In 1917, J. Radon solved this mathematical problem in a different context. No real application of the Radon work (Radon Transform) was known until early 1970s. At that time, G.N. Hounsfield used Radon Transform to invent an x-ray computerized tomography scanner, for which he received a Nobel Prize in 1972. (Hounsfield shared the prize with Allan Cormack, who independently discovered some of the algorithms.) Since then, CT scan machines have gone through many stages of improvements. The innovations not only have been in the design of the machines, but also in the algorithms and techniques used to recover, filter noise, and improve the quality and clarity of the pictures, as well as making the process faster. In early 1990s, wavelets found their way in medical imaging. They are used, instead of the Fourier Transform, in the "inverse problem"; i.e., the reconstruction of the image from the data captured by the detectors. Also, they have been used for improving the quality of the image and the speed. However, it should be mentioned that one needs much more mathematics than the wavelets in medical imaging. It is very rewarding for mathematicians to see how some of the pure mathematics (Linear Algebra, Analysis and Functional Analysis, etc.) is used to reconstruct the image. In 1917 and at the time that Radon was doing his pure mathematics research, no one could predict that fifty some years later it will be used in the invention of CT scan machines. These machines, and also the similar ones, have revolutionized the way physicians can see inside the body without invasive surgery. The impact of using wavelets in this area and others such as image and signal processing, data compression, and communications, etc, is enormous and revolutionary.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NEW HAVEN UNIVERSITY, USA.

*E-mail address:*    **AJafarian@newhaven.edu**



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## ON THE SET OF SPECTRAL RADIUS OF $n \times n$ MATRICES WITH ENTRIES IN PRESCRIBED FINITE SETS

JOSE ANTONIO DIAS DA SILVA<sup>1\*</sup> AND PEDRO J. FREITAS<sup>2</sup>

ABSTRACT. Let  $A$  be a finite subset of the positive real numbers. We present results relating the structure of the set  $A$  and the cardinality of the set of spectral radius of the set of  $n \times n$  matrices with entries in  $A$ . Special attention will be given to the case where  $A$  is a subset of the positive integers, namely relating it with classical results in additive number theory.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS OF THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LISBON.  
*E-mail address:* japsilva@fc.ul.pt

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS OF THE FACULTY OF SCIENCES OF THE UNIVERSITY OF LISBON.  
*E-mail address:* pedro @ ptmat.fc.ul.pt

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 00X00; Secondary 00X00, 00X00.  
*Key words and phrases.* Inequality.

\*Invited Speaker.



*Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran*



## ALGEBRAS SPANNED BY TRIANGULARIZABLE MATRICES

BAMDAD R. YAHAGHI \*

**ABSTRACT.** A version of a celebrated theorem of Burnside asserts that  $M_n(F)$  is the only irreducible subalgebra of  $M_n(F)$  provided that the field  $F$  is algebraically closed. In other words, Burnside's theorem characterizes all irreducible subalgebras of  $M_n(F)$  whenever  $F$  is algebraically closed. In view of this, by a Burnside type theorem for certain irreducible subalgebras of matrices, we mean a result which characterizes such subalgebras. In this talk, we will present a short survey of Burnside type theorems in linear algebra.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

First, we present a simple proof of a slight generalization of Burnside's theorem. We also present Burnside type theorems for irreducible  $\mathbb{R}$ -subalgebras of  $M_n(\mathbb{H})$ , where  $\mathbb{H}$  denotes the division ring of quaternions, and for irreducible subalgebras of  $M_n(\mathbb{R})$ , a result which is well known to the experts. For a given  $n > 1$ , we characterize all fields  $F$  for which Burnside's Theorem holds in  $M_n(F)$ . Letting  $K$  be a field and  $F$  a subfield of  $K$  which is  $k$ -closed for all  $k$  dividing  $n$  with  $k > 1$ , we present a Burnside type theorem for irreducible  $F$ -algebras of matrices in  $M_n(K)$  on which trace is not identically zero. (For a  $k > 1$ , a field  $F$  is said to be  $k$ -closed if every polynomial of degree  $k$  over  $F$  is reducible over  $F$ , e.g.,  $\mathbb{R}$  is not 2-closed but it is  $k$ -closed for any integer greater than two. For a quasi-algebraically closed field  $F$ , e.g., an algebraic extension of a finite field, we prove that  $M_n(F)$  is the only irreducible algebra in  $M_n(F)$  which is spanned by triangularizable

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A30; Secondary 20M20.

*Key words and phrases.*  $F$ -algebra, Trace, Spectra, Inner eigenvalues, (Absolute) Irreducibility, Triangularizability,  $F$ -algebraic, Burnside's Theorem, Brauer group, (Quasi-)Algebraically closed field.

\*Invited Speaker. Parts of this talk is based on joint work with Heydar Radjavi.

matrices. If time permits, we present counterparts of some of our results over quaternions and more generally over division rings.

## 2. MAIN RESULTS

**Theorem 2.1.** *Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $F$  be a field. Then every polynomial of degree up to  $n$  over  $F$  splits into linear factors over  $F$  iff there exists an irreducible algebra of triangularizable matrices in  $M_n(F)$ , in which case Burnside's Theorem holds in  $M_n(F)$ .*

**Theorem 2.2.** *Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  a field,  $F$  a subfield of  $K$ , and  $\mathcal{S}$  an irreducible semigroup in  $M_n(K)$  such that  $\{0\} \neq \text{tr}(\mathcal{S}) \subseteq F$ . Let  $\mathcal{A} = \text{Alg}_F(\mathcal{S})$  and  $r \in \mathbb{N}$  be the smallest nonzero rank present in  $\mathcal{A}$ . Then, the integer  $r$  divides  $n$  and after a similarity  $\mathcal{A} = M_{n/r}(\Delta)$ , where  $\Delta$  is an irreducible division  $F$ -algebra  $M_r(K)$ . Furthermore, the minimal polynomial of every  $A \in \mathcal{A}$  is in  $F[X]$ , and that after a similarity,  $\mathcal{A} = M_n(F)$  if and only if  $r = 1$ .*

**Theorem 2.3.** *Let  $D$  be a division ring,  $F$  a subfield of its center, and  $\mathcal{A}$  an irreducible  $F$ -algebra of  $F$ -algebraic matrices in  $M_n(D)$ . Let  $r \in \mathbb{N}$  be the smallest nonzero rank present in  $\mathcal{A}$ . Then, the integer  $r$  divides  $n$  and after a similarity  $\mathcal{A} = M_{n/r}(\Delta)$ , where  $\Delta$  is an irreducible division  $F$ -algebra of  $F$ -algebraic matrices in  $M_r(D)$ . In particular, after a similarity,  $\mathcal{A} = M_n(\Delta_1)$ , where  $\Delta_1$  is an  $F$ -algebraic subdivision ring of  $D$  if and only if  $r = 1$ .*

**Theorem 2.4.** *Let  $D$  be a division ring,  $F$  a subfield of its center, and  $\mathcal{A}$  an irreducible  $F$ -algebra of triangularizable matrices in  $M_n(D)$  with inner eigenvalues in  $F$ . Then after a similarity  $\mathcal{A} = M_n(F)$ . Therefore,  $\mathcal{A}$  is defined over  $F$ ,  $\mathcal{A}$  is absolutely irreducible, and the subfield  $F$  is  $k$ -closed for each  $k = 2, \dots, n$ .*

**Theorem 2.5.** *Let  $n > 1$ ,  $\mathbb{H}$  be the division ring of quaternions, and  $\mathcal{A}$  be an irreducible  $\mathbb{R}$ -algebra in  $M_n(\mathbb{H})$ . Then  $\mathcal{A}$  is similar to one of the following  $\mathbb{R}$ -algebras:  $M_n(\mathbb{H})$  (in which case  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{H})$ ),  $M_n(\mathbb{C})$ , and  $M_n(\mathbb{R})$ .*

**Proposition 2.6.** *Let  $n > 1$ ,  $\mathbb{R}$  and  $\mathcal{A}$  be an irreducible algebra in  $M_n(\mathbb{R})$ . Let  $r \in \mathbb{N}$  be the minimal nonzero rank present in  $\mathcal{A}$ . Then  $\mathcal{A}$  is similar to one of the following algebras:  $M_n(\mathbb{R})$ , in which case  $r = 1$  and  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R})$ ;  $M_{n/2}(\mathbb{C})$ , in which case  $r = 2$ ; and  $M_{n/4}(\mathbb{H})$ , in which case  $r = 4$ .*

**Theorem 2.7.** *Let  $F$  be a field and  $n > 1$ . The following are equivalent.*

(i) *The only irreducible algebra in  $M_n(F)$  is  $M_n(F)$ , i.e., Burnside's Theorem holds in  $M_n(F)$ .*

- (ii) Every irreducible family of matrices in  $M_n(F)$  is absolutely irreducible.
- (iii) The commutant of every irreducible family of matrices in  $M_n(F)$  consists of scalars.
- (iv) Every nonscalar matrix in  $M_n(F)$  has a nontrivial hyperinvariant subspace.
- (v) The field  $F$  is  $k$ -closed, i.e., every polynomial of degree  $k$  over  $F$  is reducible over  $F$ , for all  $k$  dividing  $n$  with  $k > 1$ .

Theorems 2.8-11 are from Heydar Radjavi and the author.

**Theorem 2.8.** *Let  $n > 1$  and  $F$  be a quasi-algebraically closed, a.k.a.  $C_1$ , field. Then  $M_n(F)$  is the only irreducible algebra in  $M_n(F)$  which is spanned, as a vector space, by triangularizable matrices in  $M_n(F)$ .*

**Theorem 2.9.** *Let  $n > 1$ ,  $F$  be a subfield of the center of a division ring  $D$  which is  $C_1$ , and  $\mathcal{A}$  a finite-dimensional irreducible  $F$ -algebra in  $M_n(D)$  which, as a vector space, is spanned by triangularizable matrices with inner-eigenvalues in  $F$ . Then,  $\mathcal{A}$  is similar to  $M_n(F)$ . In particular,  $\mathcal{A}$  is absolutely irreducible.*

**Corollary 2.10.** *Let  $n > 1$ ,  $F$  be a subfield of a field  $K$  which is  $C_1$ , and  $\mathcal{A}$  a  $K$ -irreducible finite-dimensional  $F$ -algebra in  $M_n(K)$  which is spanned by triangularizable matrices with spectra in  $F$ . Then  $\mathcal{A}$  is similar to  $M_n(K)$ . In particular,  $\mathcal{A}$  is absolutely irreducible.*

**Theorem 2.11.** *Let  $n > 1$  and  $F$  be a subfield of a field  $K$  which has trivial Brauer group. Then every absolutely irreducible  $F$ -algebra in  $M_n(K)$  which is spanned by triangularizable matrices with spectra in  $F$  is similar to  $M_n(F)$ .*

## REFERENCES

- B1. J. BERNIK, Brauer-type results on semigroups over  $p$ -adic fields, Pacific Journal of Mathematics, Vol 208, No 2, 2003, pp. 201-207.
- B2. J. BERNIK, The eigenvalue field is a splitting field, Archiv der Mathematik, Volume 88, Number 6, 2007, 481-490.
- B. W. BURNSIDE, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions, Proc. London Math. Soc. 3(1905), 430-434.
- D. P.K. DRAXL, *Skew Fields*, Cambridge University Press, 1983.
- H. T.W. HUNGERFORD, *Algebra*, Springer Verlag, New York, 1974.
- HR. I. HALPERIN and P. ROSENTHAL, Burnside's theorem on algebras of matrices, Amer. Math. Monthly, **87** (1980), 810.
- LZ. T-K. LEE and Y. ZHOU, On irreducible and transitive algebras in matrix algebras, Linear and Multilinear Algebra, Volume 57, Issue 7 January 2009, pp. 659-672.
- K1. I. KAPLANSKY, *Fields and Rings*, University of Chicago Press, 1969.

- ORR. M. OMLADIC, M. RADJABALIPOUR, and H. RADJAVI, On semigroups of matrices with traces in a subfield, *Linear Algebra Appl.* **208/209** (1994), 419-424.
- RRa. M. RADJABALIPOUR and H. RADJAVI, A finiteness lemma, Brauer's Theorem and other irreducibility results, *Comm. Algebra* **27** (1) (1999), 301-319.
- RRY. M. RADJABALIPOUR, P. ROSENTHAL, and B.R. YAHAGHI, Burnside's Theorem for matrix algebras over division rings, *Linear Algebra Appl.* **383** (2004), 29-44.
- RR. H. RADJAVI and P. ROSENTHAL, *Simultaneous Triangularization*, Springer Verlag, New York, 2000.
- RY. H. RADJAVI and B.R. YAHAGHI, On irreducible algebras spanned by triangularizable matrices, In preparation.
- Y1. B.R. YAHAGHI, On irreducible semigroups of matrices with traces in a subfield, *Linear Algebra Appl.* **383** (2004), 17-28.
- Y2. B.R. YAHAGHI, On  $F$ -algebras of algebraic matrices over a subfield  $F$  of the center of a division ring, *Linear Algebra Appl.* **418** (2006), 599-613.
- Y3. B.R. YAHAGHI, *Reducibility Results on Operator Semigroups*, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, Halifax, Canada, 2002.
- Y4. B.R. YAHAGHI, Theorems of Burnside and Wedderburn revisited, In preparation.

bamdad5@hotmail.com

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCES, UNIVERSITY OF GOLESTAN, GORGAN 19395-5746, IRAN

*E-mail address:* bamdad5@hotmail.com



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین‌المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## کاربرد پایه در ماتریس‌ها

مهدی رجبعلی‌پور  
دانشگاه شهید باهنر کرمان،

۱۵ خرداد ۱۳۷۸

چکیده

هدف اصلی این مقاله، بررسی کاربرد پایه در تدریس جبر خطی در جهت  
سادگی اثبات قضایاست.

پایه، ماتریس‌ها، جبر خطی: .  
رده بندی موضوعی (MSC2000): .



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## دوگان قاب‌های مرسدس – بنز

حمیدرضا افشین، سمیه بلوچ اربابی، عاطفه دانشمند  
محمدعلی دهقان، الهه صانعی سیستانی، احمد صفاپور  
دانشگاه ولی عصر رفسنجان

afshin@vru.ac.ir, arbabi\_math87@yahoo.com, daneshmand@yahoo.com  
dehghan@vru.ac.ir, sanei-elahe-es@yahoo.com, safapour@vru.ac.ir

### چکیده

قاب‌های مرسدس – بنز نوع خاصی از قاب‌های چسبان هم‌زاویه می‌باشند. در این مقاله ابتدا قاب‌های مرسدس – بنز در فضای  $R^n$  را مورد بررسی قرار داده و سپس دوگان آن‌ها را بدست می‌آوریم. هم‌چنین نشان می‌دهیم دوگان این قاب‌ها نیز یک قاب چسبان هم‌زاویه است.

واژه‌های کلیدی: قاب چسبان هم‌زاویه، قاب‌های مرسدس – بنز.  
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 15A33, 15A57.

## ۱ مقدمه

فرض کنید  $I$  یک مجموعه اندیس گذار شمارا باشد. دنباله  $\{f_k\}_{k \in I}$  از عناصر فضای هیلبرت جدایی پذیر  $H$  یک قاب نامیده می‌شود اگر ثابت‌های  $0 < A \leq B < \infty$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $f$  در  $H$ :

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k \in I} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

اگر کران بالا و کران پایین قاب مساوی باشند قاب را چسبان گوئیم. قاب‌ها ابتداء در سال ۱۹۵۲ توسط دوفین و شیفر [۲] در بررسی سری‌های فوریه ی غیرهارمونیک

مورد بحث و بررسی قرار گرفتند. در دهه های اخیر با توجه به کاربردهای فراوانی که برای قاب ها پیدا شده، انواع مختلف آن از قبیل قاب های چسبان، قاب های پارسوال، قاب های هم زاویه، و بویژه قاب ها در فضاهای با بعد متناهی و چگونگی ساختن آن ها مورد توجه و مطالعه فراوانی قرار گرفته اند که از جمله می توان به [۱] و [۳] اشاره نمود.

تعریف ۱. فرض کنید  $\{f_i\}_{i=1}^m$  یک قاب در  $R^n$  باشد،  
(۱) نگاشت  $V$  که به صورت زیر تعریف می شود عملگر تجزیه قاب است.

$$V : R^n \rightarrow R^m, \quad (Vx)_j = \langle x, f_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n.$$

(۲) نگاشت  $V^*$  که به صورت زیر تعریف می شود عملگر ترکیبی قاب است.

$$V^* : R^m \rightarrow R^n, \quad V^*(\{c_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n c_i f_i.$$

اگر  $\{f_k\}_{k \in I}$  یک قاب برای فضای هیلبرت  $H$  بوده و  $\{g_k\}_{k \in I}$  دنباله دیگری در این فضا باشد به گونه ای که برای هر بردار  $f$  در  $H$  داشته باشیم  $f = \sum_{k \in I} \langle f, f_k \rangle g_k$ ، در این صورت  $\{g_k\}_{k \in I}$  یک دوگان قاب  $\{f_k\}_{k \in I}$  نامیده می شود. قضیه زیر، قضیه شناخته شده ای است که اثبات آن را می توان در کتاب های مرجع نظریه قاب یافت.

قضیه ۱. فرض کنید  $\{f_k\}_{k \in I}$  یک قاب در فضای هیلبرت  $H$  باشد. هم چنین فرض کنید  $\{\delta_k\}_{k \in I}$  پایه استاندارد  $l_2(N)$  باشد. اگر  $l_2(N) \rightarrow H$  وجود داشته باشد به طوری که  $VT^* = I$ . آن گاه  $\{V\delta_k\}_{k \in I}$  دوگان قاب مزبور می باشد.

یک خانواده متناهی از بردارها مانند  $\{f_i\}_{i=1}^m$  در  $R^n$  یک قاب هم زاویه نامیده می شود اگر تمام بردارهای قاب ناصفر بوده و ثابت  $b$  موجود باشد به طوری که برای هر  $i \neq j$  رابطه  $|\langle f_i, f_j \rangle| = b$  برقرار باشد.

## ۲ قاب های مرسدس — بنز

تعریف ۲. خانواده متناهی از بردارهای یکسانند  $\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$  در  $R^n$  یک سیستم مرسدس - بنز نامیده می شود اگر برای هر  $i \neq j$  رابطه  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = -\frac{1}{n}$  برقرار باشد.

علت چنین نام گذاری آن است که اگر بردارهای تشکیل دهنده ی این قاب در فضای  $R^2$  را رسم کنیم به طوری که یکی از بردارها در راستای محور  $Y$  ها باشد، شکل حاصل شبیه به آرم اتوموبیل های مرسدس بنز خواهد بود.

قضیه ۲. فرض کنید  $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$  یک خانواده متناهی از بردارهای یکسان در فضای  $R^n$  باشد و  $\sum_{j=1}^{n+1} b_j^n = 0$ . آنگاه  $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$  یک سیستم مرسدس بنز است.

برهان: با استقرا روی بعد فضا اثبات می شود. بردارهای  $b_1^2 = (0, 1)^T$  و  $b_2^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^T$  را در  $R^2$  در نظر بگیرید. مشاهده می شود  $\langle b_j^2, b_k^2 \rangle = -\frac{1}{2}$  و  $\sum_{j=1}^2 b_j^2 = 0$ .

حال خانواده  $\{b_j^{n-1}\}_{j=1}^n$  در  $R^{n-1}$  را طوری در نظر بگیرید که  $\sum_{j=1}^n b_j^{n-1} = 0$  و  $\langle b_j^{n-1}, b_k^{n-1} \rangle = -\frac{1}{n-1}$ . نشان می دهیم  $\langle b_j^n, b_k^n \rangle = -\frac{1}{n}$ . قرار دهید

$$b_j^n = c_n(b_j^{n-1}, -h_n)^T, \quad b_{n+1}^n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$$

که در آن  $c_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$  و  $h_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ . لذا برای هر  $k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  و  $k \neq j$  داریم

$$\langle b_j^n, b_k^n \rangle = c_n^2 (\langle b_j^{n-1}, b_k^{n-1} \rangle + h_n^2) = -\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n}$$

□ برای  $k = n+1$  و  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  داریم  $\langle b_j^n, b_{n+1}^n \rangle = -c_n h_n = -\frac{1}{n}$ .

قضیه ۳. خانواده  $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$  در  $R^n$  یک قاب چسبان هم زاویه است.

برهان: هم زاویه بودن قاب با توجه به تعریف قاب مرسدس - بنز نتیجه می شود. برای  $n=1$  و  $n=2$  برقرار است. با استقرا فرض کنید برای هر  $k \neq j$  رابطه  $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j^{n-1} \rangle^2$  درست باشد. نشان می دهیم برای  $n$  نیز برقرار می باشد.

بردار  $x \in R^n$  را به صورت  $x = (x^{n-1}, x_n)^T$  در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه فوق نتیجه مطلوب حاصل می شود و داریم  $\sum_{j=1}^{n+1} \langle x, b_j^n \rangle^2 = \frac{n+1}{n} \|x\|^2$ . □

### ۳ دوگان همزاویه قاب های مرسدس - بنز

قاب مرسدس بنز  $\{b_j^2\}_{j=1}^3$  در  $R^2$  که در آن  $b_1^2 = (0, 1)^T$  و  $b_2^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^T$  را در نظر بگیرید. طبق قضیه ۱ ماتریس  $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$  را طوری در نظر می گیریم که  $VT^* = I$ . بنابراین

$$I = VT^* = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(e-f) & d - \frac{e}{2} - \frac{f}{2} \end{pmatrix}$$

لذا  $V = \begin{pmatrix} c + \frac{1}{\sqrt{3}} & c + \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ e + 1 & e & e \end{pmatrix}$ . بنابراین ستون های  $V$  قاب دوگان می باشند و با  $\{g_j^2\}_{j=1}^3$  نشان می دهیم. چون نرم بردارهای یک قاب همزاویه برابر است، بنابراین دوگان یکتاست. پس داریم

$$g_1^2 = (0, \frac{2}{3})^T, \quad g_2^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})^T, \quad g_3^2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})^T$$

مشاهده می شود  $\|g_j^2\| = \frac{2}{3}$  و  $\langle g_j^2, g_k^2 \rangle = -\frac{2}{9}$ . حال با استقرا می توان دوگان همزاویه  $\{b_j^2\}_{j=1}^{n+1}$  در  $R^n$  را بدست آورد. قرار دهید

$$g_j^n = c_n(g_j^{n-1}, -h_n)^T, \quad g_{n+1}^n = (0, 0, \dots, \frac{n}{n+1})^T$$

که در آن  $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$  و  $h_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$ . هم چنین داریم

$$\|g_j^n\| = \frac{n}{n+1}, \quad \langle g_j^n, g_k^n \rangle = -\frac{n}{(n+1)^2}$$

قضیه ۴. خانواده  $\{g_j^n\}_{j=1}^{n+1}$  در  $R^n$  یک قاب چسبان همزاویه است.

برهان: رابطه  $\langle g_j^n, g_k^n \rangle = -\frac{n}{(n+1)^2}$  همزاویه بودن قاب را نتیجه می دهد. برای  $n=1$  و  $n=2$  برقرار است. با استقرا فرض کنید برای هر  $k \neq j$  رابطه  $\|x\|^2 = \frac{n-1}{n} \langle x, g_j^{n-1} \rangle^2 + \sum_{j=1}^n | \langle x, g_j^{n-1} \rangle |^2$  درست باشد. نشان می دهیم برای  $n$  نیز برقرار می باشد.

بردار  $x \in R^n$  را به صورت  $x = (x^{n-1}, x_n)^T$  در نظر بگیرید. باقرار دادن  $g_j^n = c_n(g_j^{n-1}, -h_n)^T$  نتیجه مطلوب حاصل می شود.

□

- [1] B.G. BODMANN, V.I. PAULSEN, M. TOMFORDE, *Equiangular tight frames from complex Seidel matrices containig cuve roots of unity*, Linear Algebra and its Applications, 430(2009), 396-417.
- [2] R.J. DUFFIN, A.C. SCHAEFFER, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., 72(1952), 341-366.
- [3] T. STROHMER, R.W. HEATH, *Grassmannian frames with applications to coding and communications*, Appl. Comp. Harmonic Anal, 14(3)2003, 257-275.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## کاربرد جبر خطی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی به روش تعدیلی پویا

مریم عرب عامری

زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی [arabameri@math.usb.ac.ir](mailto:arabameri@math.usb.ac.ir)

شمسی یاوری

زاهدان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زاهدان [math\\_teacher\\_2008@yahoo.com](mailto:math_teacher_2008@yahoo.com)

### چکیده

یکی از روشهایی که در دو دهه گذشته برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بدرفتار مورد استفاده قرار گرفته است مبتنی بر تولید شبکه هایی است که قادرند به صورت پویا خود را با جواب معادلات تطبیق دهند این مقاله به طور خاص به حل معادله انتقال حرارت غیرخطی (نیمه خطی) به روش مذکور می پردازد، استفاده از نوع پویای روش، دستگاهی غیر خطی به وجود می آورد که در این کار، به چگونگی حل آن پرداخته می شود. [۲]

واژه های کلیدی: تعدیل پویا، تعدیل شبکه، نیمه ایستایی.

رده بندی موضوعی (65N50,15A99):

### ۱ مقدمه

روش مورد بحث در این مقاله برای حل مسئله ای به فرم زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P(u)}{\partial x} = F^{(n)}(u), \quad x_0 < x < x_r, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$t = 0 : u(x, 0) = u^0(x) \quad (2.1)$$

$$x = x_0 : g_0(t, x_0, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

$$x = x_r : g_r(t, x_r, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \dots) = 0$$

که  $P(u) \geq 0$  یک تابع خطی یا غیر خطی، و  $F^{(n)}(u) \geq 0$  یک پارامتر خطی است که درجه آن از دو بیشتر نیست،  $(n = 0, 1, 2)$ . فرض کنید که جواب  $u(x, t)$  و تابع  $u^0(x)$  به اندازه کافی هموار هستند، براساس فرم  $P(u)$  و  $F^{(n)}(u)$  رابطه (۱.۱) می تواند توصیف کننده فرآیندهای فیزیکی مختلفی باشد و بطور متناظر معادله ای هذلولوی یا سهموی (خطی یا غیرخطی) باشد، برای مثال اگر:

$$F^{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x} k(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad P(u) = 0 \quad (4.1)$$

رابطه (۱.۱) رابطه انتقال گرما یا انتشار نیمه خطی است. در این مقاله از مجموعه دیفرانسیلی (۴.۱) استفاده می شود که سبب می شود معادله (۱.۱) سهموی باشد.

## ۲ دستگاه مختصات وابسته به زمان دلخواه

روش تعدیل پویا مبتنی بر پروسه انتقال به یک دستگاه مختصات وابسته به زمان دلخواه است. این سیستم امکان فرمول بندی مسئله تولید و تعدیل شبکه های محاسباتی را در فرم دیفرانسیلی می دهد.

### ۱.۲ تغییر متغیرها

در ادامه فضای فیزیکی  $\Omega_{x,t}$  با فضای محاسباتی  $\Omega_{q,\tau}$  جایگزین می شود. این جانشینی توسط تغییر متغیرهای  $x = f(q, t)$ ,  $t = \tau$  انجام می گیرد. که دارای معکوس نامنفرد یکتایی بصورت  $t = \tau$ ,  $q = \varphi(x, t)$  است [۲]. مشتقات مکانی متغیرهای وابسته، زمانی که مختصات تغییر می کند بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \quad (1.2)$$

با استفاده از این تغییر متغیرها و روابط (۱.۲) مدل دیفرانسیلی (۱.۱) تا (۳.۱) بر حسب متغیرهای  $(q, \tau)$  به فرم زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(uQ)}{\partial q} + \frac{\partial P(u)}{\partial q} = F^{(n)}(u) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -Q \quad (3.2)$$

رابطه (۳.۲) رابطه تبدیل معکوس است که در آن  $Q$  بعنوان یک تابع مجهول بیان صریحی از تبدیل مختصات است. این رابطه می تواند برای تعیین مختصات نیز بکار می رود. در بعضی از مسائل، ساده تر است که رابط (۳.۲) به فرم زیر بکار برده شود:

[۱]

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}$$

### ۳ انتقال گرمای غیرخطی

با استفاده از روابط (۴.۱) و جایگزینی آنها در رابطه (۱.۱) و سپس با استفاده از تغییر متغیرهای فرم کلی و اعمال روابط (۱.۲) معادله انتقال گرمای نیمه خطی بدست می آید. [۲]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial w}{\partial q}, \quad w = -\frac{k(u)}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} \quad (۱.۲)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \psi = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad q_0 < q < q_r, \quad \tau > 0 \quad (۲.۲)$$

در هنگام تغییر مختصات فرض می شود که دستگاه مختصات وابسته به زمان به گونه ای انتخاب شده است که مشتقات زمانی جواب در مختصات جدید بسیار کوچکتر از مشتقات در دستگاه اصلی باشد. برای تحقق این فرض نیاز است که مشتقات زمانی صفر یا حداقل بسیار کوچک باشد، به این دلیل فرض می کنیم  $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ . با اعمال این فرض بر رابطه (۱.۲)، تابع تبدیلی  $Q$  به فرم زیر تعیین می شود، [۲]

$$Q = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{k(u)}{\psi} \right) = \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q} + u^{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\psi} \right) \quad (۳.۲)$$

### ۴ تحلیل عددی

تشکیل دو جبهه با دمای ثابت را با استفاده از مدل مسئله انتقال گرما، بعنوان نمونه در نظر بگیرید: [۲]

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(Q u)}{\partial q} = -\frac{\partial w}{\partial q}, \quad w = -\frac{k(u)}{\psi} \frac{\partial u}{\partial q}, \quad k(u) = k_0 u^{\alpha}, \quad u^{\alpha}, \alpha > 1 \quad (۱.۳)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \psi, \quad 0 < q < 1, \quad \tau > 0 \quad (۲.۳)$$

$$u^0(q, 0) = \sin(\pi q), \quad \psi(q, 0) = 1, \quad \tau = 0 \quad (۳.۳)$$

$$u(0, \tau) = 0, \quad Q(0, \tau) = 0, \quad q = 0 \quad (۴.۳)$$

$$u(1, \tau) = 0, \quad Q(1, \tau) = 0, \quad q = 1$$

در فضای محاسباتی  $\Omega_{q,\tau}$ ، شبکه محاسباتی  $\omega_h^{\Delta\tau}$  در نقاط شبکه ای با اندیس های صحیح و نیمه صحیح به فرم زیر تعریف می شود:

$$\omega_h^{\Delta\tau} = \{(q_i, \tau^j), (q_{i+\frac{1}{2}}, \tau^j)\}$$

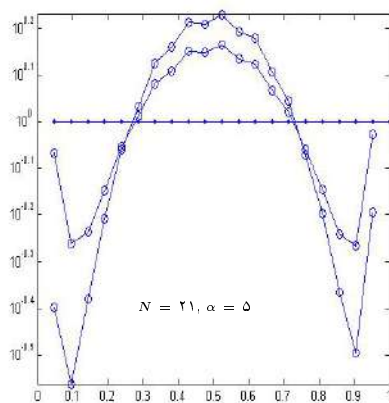
$$q_{i+1} = q_i + h, q_{i+\frac{1}{2}} = q_i + 0.5h, i = 0, 1, \dots, N-1, \tau^{j+1} = \tau^j + \Delta\tau^j, j = 0, 1, \dots, J\}$$

توابع  $Q_i^j, u_i^j, x_i^j$  در نقاط شبکه صحیح و توابع  $W_{i+\frac{1}{2}}^j, \psi_{i+\frac{1}{2}}^j$  در نقاط نیمه صحیح  $(q_{i+\frac{1}{2}}^j, \tau^j)$  تعریف می شوند. با استفاده از شبکه تعریف شده، مجموعه طرح های

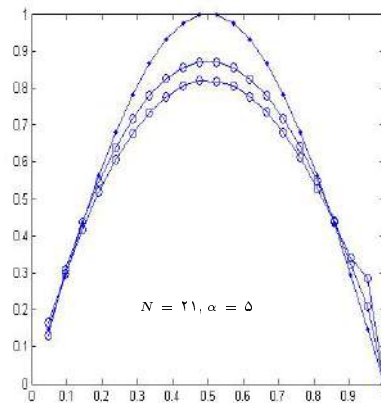
تفاضلی [۲] زیر را برای دستگاه معادلات (۱.۴) و (۲.۴) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} (\psi.u)_i^{j+1} &= (\psi.u)_i^j - \frac{\Delta\tau^j}{h} \{ (1-\sigma) [w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}} + (u.Q)_{i+\frac{1}{2}} - (u.Q)_{i-\frac{1}{2}}]^j \\ &+ \sigma [w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}} + (u.Q)_{i+\frac{1}{2}} - (u.Q)_{i-\frac{1}{2}}]^{j+1} \} \\ (\psi)_i^{j+1} &= (\psi)_i^j - \frac{\Delta\tau^j}{h} ((1-\sigma) [Q_{i+1} - Q_i]^j + \sigma [Q_{i+1} - Q_i]^{j+1}) \quad (5.3) \\ w_{i+\frac{1}{2}} &= \left( \frac{u^\alpha}{\psi} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad x_{i+1} = h\psi_{i+\frac{1}{2}} \\ Q_i &= \left[ \left( \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\psi} \right)_i \frac{1}{h} (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{u_i^\alpha}{h} \left( \frac{1}{\psi_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\psi_{i-\frac{1}{2}}} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

دستگاه معادلات تفاضلی غیر خطی (۵.۳) با استفاده از روش تکراری نیوتن، خطی سازی شده است. در هر گام تکرار، دستگاه معادلات جبری خطی با استفاده از روش ماتریسی حل می شود. مقدار نقاط نیمه صحیح برای توابع شبکه بصورت نصف مجموع مقادیر این توابع در تمام نقاط مجاور محاسبه می شود. [۱]



شکل (۲):  $\psi(t, x)$



شکل (۱):  $u(t, x)$

## مراجع

- [1] ,THE DYNAMIC ADAPTION METHOD IN GAS DYNAMIC, *Mat Modelir*, 7(1995).no.12, pp.48-78.
- [2] ,DYNAMIC ADAPTATION FOR PARABOLIC EQUATIONS, *Institute of Mathematical Modeling, Miusskaya pl.4. Moscow, 125047 Russia*.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## قطعه تخت روی برد عددی ماتریس های $3 \times 3$

محمد باقر اسدی

دانشگاه تهران؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر؛ mb.asadi@gmail.com

فاطمه اسماعیلی طاهری

دانشگاه شاهد؛ دانشکده علوم پایه؛ گروه ریاضی؛ esmaeili.3143@gmail.com

### چکیده

در سالهای اخیر مطالعات زیادی روی برد عددی ماتریس ها و عملگرهای کراندار صورت گرفته است. در این مقاله ابتدا مفهوم برد عددی را بیان کرده و سپس به چگونگی محاسبه و ترسیم برد عددی ماتریس های  $3 \times 3$  می پردازیم و در ادامه ویژگی های ماتریس های  $3 \times 3$  تحویل ناپذیریکانی که مرز برد عددی آنها دارای قطعه تخت است را بررسی می کنیم. به طور کلی این مقاله قصد دارد توجه مخاطبان عام ریاضی را به تاثیر متقابل و بی نظیر جبر خطی؛ آنالیز و هندسه جلب کند.

واژه های کلیدی: برد عددی؛ منحنی کپی هان؛ قطعه تخت.

رده بندی موضوعی (MSC2000): 47A12.

## ۱ برد عددی چگونگی ترسیم آن

فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  با درایه های مختلط باشد؛ برد عددی ماتریس  $A$  را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in C, x^*x = 1\}$$

برد عددی دارای خواص بسیاری است که از مهم ترین آنها فشرده و محدب بودن آن است. (برای مطالعه بیشتری توانید به کتاب (۱) مراجعه کنید). بسیاری از محققان

چگونگی ترسیم برد عددی را در جهات مختلف توسعه دادند یکی از این جهات در زمینه هندسه جبری است که نقطه شروع آن منحنی جبری زیر است:

$$P_A(x, y, z) = \det(x\operatorname{Re}(A) + y\operatorname{Im}(A) + zI_n)$$

قضیه ۱. فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد اگر  $ax + by + c = 0$  (که  $a, b, c$  اعداد مختلط ناصفر هستند.) خط تکیه گاه  $W(A)$  باشد آنگاه

$$\det(a\operatorname{Re}(A) + b\operatorname{Im}(A) + cI_n) = 0$$

لم ۱ فرض کنید  $A = H + iK$  که  $\lambda_{max}$  بزرگترین مقدار ویژه  $H(A)$  است آنگاه

$$\operatorname{MaxRe}(W(A)) = \operatorname{Max}W(H(A)) = \lambda_{max}$$

از آنجایی که برد عددی فشرده و محدب است برای بدست آوردن شکل برد عددی تنها کافی است که مرز آن را مشخص کنیم. با استفاده از لم بالا می توان نقاط مرزی و خطوط تکیه گاه را بدست آورد.

## ۲ منحنی کیپین هان

تعریف ۱. دوگان معادله خط  $ax + by + cz = 0$  در صفحه تصویری بطوریکه  $a, b, c$  ثابت هستند متناظر با نقطه  $(a, b, c)$  در دوگان صفحه تصویری است و برعکس خط  $ax + by + cz = 0$  در دوگان صفحه تصویری بطوریکه  $x, y, z$  ثابت هستند متناظر با دسته ای از خطوط گذرنده از نقطه  $(x, y, z)$  در صفحه تصویری است.

تعریف ۲. اگر  $C$  یک منحنی جبری از مرتبه  $d$  باشد دوگان  $C$  به صورت زیر است:

$$C^* = \{[a, b, c] \in CP^2 : ax + by + cz = 0 \text{ که بر } C \text{ مماس است.}\}$$

تعریف ۳. فرض کنید  $A$  ماتریس  $n \times n$  باشد؛ مجموعه زیر را در نظر می گیریم

$$\Gamma = \{[x, y, z] \in (CP)^2 : P_A(x, y, z) = \det(x, y, z) = \det(x \operatorname{Re}(A) + y \operatorname{Im}(A) + z I_n) = 0\}$$

بنابراین با توجه به تعریف دوگان داریم

$$\Gamma^* = \{[a, b, c] \in CP^2 : \text{که } ax + by + cz = 0 \text{ بر } C \text{ مماس است.}\}$$

حال منحنی زیر را منحنی کپین هان ماتریس  $A$  گوئیم.

$$C(A) = \{(a, b) \in R^2 : (a, b, 1) \in \Gamma^*\}$$

قضیه ۲. اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد آنگاه داریم  $W(A) = co(C(A))$

تعریف ۴. قطعه تخت روی مرز  $W(A)$  پاره خطر ماکسیمال ناتبهگون به صورت

$$\{\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 : 0 < \alpha < 1, z_1, z_2 \in C, z_1 \neq z_2\}$$

کپین هان بر اساس تجزیه  $P(A)$  برد عددی ماتریس های  $3 \times 3$  را به چهار حالت مثلثی شکل؛ بیضی یا مخروط؛ تخم مرغی شکل و یا شکلی که مرز آن دارای قطعه تخت است؛ طبقه بندی کرده است. حال این سوال مطرح است که برد عددی ماتریس  $A$  را می توان بازسازی کرد و به ماتریس  $A$  رسید؟ از آنجایی که  $W(A) = W(U^*AU)$  نمی توانیم ماتریس منحصر به فرد و یکتا  $A$  را بازسازی کنیم اما در شرایطی می توانیم یک کلاس هم ارزی یکانی که  $W(A)$  را تولید می کند؛ بیابیم.

قضیه ۳. فرض کنید  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و  $W(A)$  دارای یک قطعه هموار روی مرز باشد آنگاه مشابه یکانی  $A$  را می توان از  $W(A)$  بازسازی کرد.

پس ماتریس هایی که مرز برد عددی آنها دارای قطعه تخت است مهم اند.

تعریف ۵. ماتریس  $A$  را تحویل پذیر یکانی گوئیم اگر داشته باشیم

$$U^*AU = A_1 \oplus A_2, A_1 \in M_k, A_2 \in M_{n-k} (1 < k < n)$$

که  $U$  ماتریس یکانی است. در غیر این صورت ماتریس را تحویل ناپذیر گوئیم.

قضیه ۴. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  هم ارز یکانی با ماتریس زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (a, b, c, x, y, z \in \mathbb{C})$$

که  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  هم ارز یکانی با ماتریس زیر باشد. شرط زیر برقرار باشد:

$$xyz \neq 0$$

$$xz \neq (b-a)y \quad \text{اگر } a = c \neq b$$

$$\text{حداقل یکی از موارد زیر برقرار باشد یعنی}$$

$$\left| \frac{xy}{z} \right| - 2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} a) = \left| \frac{xz}{y} \right| - 2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} b) = \left| \frac{yz}{x} \right| + 2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} c)$$

$$\left| \frac{xy}{z} \right| + 2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} a) = \left| \frac{xz}{y} \right| + 2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} b) = \left| \frac{yz}{x} \right| + 2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta} c)$$

که  $\theta = \arg(x\bar{y}z)$

## مراجع

- [1] R. HORN, C. JONSON, Topics in Matrix Analysis, Cambridge, 1991.
- [2] R. KIPPENHAHN, Obere der Werlevorrat einer Matrix, Math, Nachr, 1951.
- [3] L. RODMAN, I. M. SPITKOVSKY,  $3 \times 3$  matrices with a flat portion on the boundary of the numerical range, Linear Algebra and its Applications, 2005



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## شرایط لازم روی سطرها و ستون های قاب های چسبان هم زاویه

سمیه بلوچ اربابی، عاطفه دانشمند،  
الله صانعی سیستانی، احمد صفاپور  
دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان  
arbabi@yahoo.com, daneshmand@yahoo.com,  
safapour@vru.ac.ir, sanei - elah - es@yahoo.com

### چکیده

یک قاب چسبان هم زاویه یک ماتریس  $d \times N$  است که دارای ستون هایی با طول واحد و سطرهایی متعامد است. خاصیت کلیدی چنین قاب هایی این است که اندازه ضرب داخلی بین جفت ستون های آن با هم مساویند. قاب های چسبان هم زاویه کاربردهای زیادی در ارتباطات، نظریه کدگذاری و تقریب های تنک دارند. قاب های چسبان هم زاویه از زوج هایی به شکل  $(d, N)$  به دست می آیند که منظور از  $N$  تعداد بردارها در یک فضای  $d$  بعدی است. در این مقاله شرایطی روی سطرها و ستون های چنین ماتریس هایی را مورد بررسی قرار می دهیم که تحت آن شرایط برای هر فضایی با بعد متناهی یک قاب چسبان هم زاویه پیدا می شود.

واژه های کلیدی: قاب های چسبان، قاب های هم زاویه، سادک .  
رده بندی موضوعی (MSC2000): 15A33, 15A57 .

## ۱ مقدمه

فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک دنباله در  $H$  باشد. دنباله  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $H$  نامیده می شود اگر ثابت های  $0 < A \leq B < \infty$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $f$  در  $H$ :

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m \in I} |\langle f, f_m \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

اعداد  $A$  و  $B$  کران های قاب نام دارند. اگر  $A = B$  قاب را چسبان گویند و در این حالت مقدار ثابت  $A$  را ثابت قاب می نامند. قاب ها ابتداءً در سال ۱۹۵۲ توسط دوفین و شيفر [۱] در بررسی سری های فوری ی غیرهارمونیک مورد بحث و بررسی قرار گرفتند. در دهه های اخیر با توجه به کاربردهای فراوانی که برای قاب ها پیدا شده، انواع مختلف آن از قبیل قاب های چسبان، قاب های پارسوال، قاب های هم زاویه، و بویژه قاب ها در فضاهای با بعد متناهی مورد توجه و مطالعه فراوانی قرار گرفته اند که از جمله می توان به [۲] و [۳] اشاره نمود.

تعریف ۱. کوچک ترین مجموعه محدب در یک فضای اقلیدسی  $R^n$  شامل  $n + 1$  نقطه  $v_0, v_1, \dots, v_n$  که در یک ابرصفحه از بعد کمتر از  $n$  قرار نگیرد را یک  $n$ -سادک می گویند.

## ۲ قاب های چسبان هم زاویه

تعریف ۲. فرض کنید  $S$  یک ماتریس  $d \times N$  باشد که ستون های  $s_1, s_2, \dots, s_N$  هستند. ماتریس  $S$  یک قاب چسبان هم زاویه نامیده می شود اگر:

- (۱) هر ستون دارای طول واحد باشد. یعنی برای  $n = 1, 2, \dots, N$ ،  $\|s_n\|_2 = 1$
- (۲) ستون ها هم زاویه باشند یعنی به ازای یک  $\alpha$  نامنفی و برای هر  $m$  و  $n$  بین ۱ تا  $N$  داریم  $|\langle s_m, s_n \rangle| = \alpha$
- (۳) ستون ها یک قاب چسبان با ثابت قاب  $\frac{N}{d}$  برای فضای  $d$  بعدی هیلبرت تشکیل دهند.

شرایط لازم روی سطرها و ستون های قاب های چسبان هم زاویه ————— ۲۷۱

قضیه ۱. شرط سوم در تعریف بالا با رابطه  $SS^* = \frac{N}{d}I$  معادل است.

برهان: داریم  $S = [s_1, s_2, \dots, s_N]$  نشان می دهیم  $SS^* = \frac{N}{d}I$

$$\begin{aligned} \langle SS^*f, f \rangle &= \langle S^*f, S^*f \rangle = \|S^*f\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \langle s_1^*, f \rangle \\ \langle s_2^*, f \rangle \\ \vdots \\ \langle s_N^*, f \rangle \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \langle f, s_1 \rangle \\ \langle f, s_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, s_N \rangle \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{N=1}^n |\langle f, s_N \rangle|^2 = \frac{N}{d} \langle f, f \rangle = \langle \frac{N}{d}f, f \rangle \end{aligned}$$

بنابراین  $SS^* = \frac{N}{d}I$  برای عکس مطلب نیز از تساوی  $\langle SS^*f, f \rangle = \langle \frac{N}{d}f, f \rangle$  نتیجه می شود.  $\square$

با توجه به رابطه  $SS^* = \frac{N}{d}I$  به سادگی نتیجه می شود که سطرهای یک قاب چسبان هم زاویه برهم عمودند.

### ۳ شرایط روی سطرها و ستون ها

دو نوع از قاب های چسبان هم زاویه وجود دارند که آن ها را برای هر فضایی با بعد  $d$  می توان به وجود آورد.

(۱) زمانی که  $N = d$  تنها مثال های قاب های چسبان هم زاویه ماتریس های یکانی هستند. زمانی که  $N = d$  هر ماتریس یکانی  $S$  یک قاب چسبان هم زاویه است زیرا در ماتریس یکانی  $SS^* = I$  و این یعنی شرط سوم قاب های چسبان هم زاویه برقرار است. از طرفی در ماتریس یکانی طول ستون ها یک است پس شرط اول قاب های چسبان هم زاویه نیز برقرار است. هم چنین در ماتریس یکانی ستون ها برهم عمودند یعنی اگر  $s_m$  و  $s_n$  دو ستون ماتریس باشند  $|\langle s_m, s_n \rangle| = 0$  لذا شرط دوم قاب های چسبان هم زاویه نیز برقرار می شود. هم چنین در حالتی که  $N = d$  هر قاب چسبان هم زاویه یک ماتریس یکانی است زیرا در این حالت  $SS^* = I$  و لذا چون  $N = d$  یک ماتریس یکانی است. در چنین حالتی قاب مورد نظر در واقع یک پایه متعامد یکه است.

(۲) زمانی که  $N = d + 1$  هر قاب چسبان هم زاویه می تواند به عنوان رئوس یک سادک

منتظم که مرکز آن در مبدا قرار دارد. ساده‌ترین راه برای فهمیدن یک مثال از این نوع محاسبه تصویر متعامد مختصات استاندارد پایه‌ها در  $R^{d+1}$  به روی متمم متعامد بردار  $[1, 1, \dots, 1]^T \in R^{d+1}$  است.

مثال ۱. فضای  $R^3$  را در نظر می‌گیریم. متمم متعامد بردار  $[1, 1, 1]^T$  صفحه  $x + y + z = 0$  است. حال تصویر متعامد مختصات استاندارد پایه‌های متعارف  $R^3$  را به روی صفحه مذکور حساب می‌کنیم. مثلاً تصویر  $[1, 0, 0]$  برابر با بردار  $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  می‌باشد که به طریق زیر محاسبه می‌شود. اگر تصویر نقطه  $A = (1, 0, 0)$  به روی صفحه ذکر شده را  $H = (x, y, z)$  و مبدا را  $O$  بنامیم با محاسبه طول  $AH, OA, OH$  به دستگاه زیر می‌رسیم.

$$f(x) = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

که از حل دستگاه مقادیر زیر به دست می‌آیند.

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad z = -\frac{1}{3}$$

حال اگر تصویر متعامد  $[0, 1, 0]$  و  $[0, 0, 1]$  را نیز به روی صفحه ذکر شده حساب کنیم. بردارهای  $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  و  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$  حاصل می‌شود. حال بردارها را در ضریب  $\sqrt{3}$  ضرب کرده و ستون‌های ماتریس قرار می‌دهیم. چون ستون‌ها هم خط نیستند بنابراین در فضای یک بعدی قرار ندارند. از طرفی چون مستقل خطی هم نیستند لذا فضای سه بعدی را نیز نمی‌توانند تولید کنند بنابراین در فضای دوبعدی قرار دارند.

## مراجع

- [1] R.J. DUFFIN, A.C. SCHAEFFER, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., 72(1952), 341-366.

- [2] T. STROHMER, R.W. HEATH, *Grassmannian frames with applications to coding and communications*, Appl. Comp. Harmonic Anal, 14(3)2003,257-275.
- [3] M.A SUSTIK, J.A.TROPP, I.S. DHILLON, R.W. HEATH , *On the existence of equiangular tight frames*, Linear Algebra and its Applications 2007.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## روش ماتریسی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری

فائزه فریور\*

f.farivar@modares.ac.ir

فرهاد نصرالله زاده

f.nasr@modares.ac.ir

### چکیده

در این مقاله روش ماتریسی به عنوان روشی آسان برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه کسری در نظر گرفته شده است. در این روش عملگرهای ماتریسی جایگزین مشتقات و انتگرال‌های موجود در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری می‌شوند. در اینجا روش ماتریسی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه کسری بکار می‌بریم و همگرایی را برای یک مثال بررسی می‌کنیم.

واژه های کلیدی: حسابان کسری، ماتریس ایزوکلینال.

رده بندی موضوعی (MSC2000): 39A70, 26A33

### ۱ مقدمه

پس از گذشت حدود دو دهه با روش‌های عددی به حل مسائل و معادلات دیفرانسیل در حوزه حسابان کسری می‌پردازند. به دلیل وجود مشتق و انتگرال در تعاریف حسابان کسری حل عددی و مخصوصاً روشی با پیاده‌سازی آسان برای این نوع معادلات دیفرانسیل ضروری است [۱]. در این بخش تعاریف و قضایای مهم در حسابان کسری و روش ماتریسی بیان می‌شود.

تعریف ۱. فرض کنید  $\alpha \in R+$ ، عملگر

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh = x-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), \quad \alpha > 0. \quad (1) \end{aligned}$$

برای  $a \leq x \leq b$  مشتق کسری گرانوالد - لنینکف مرتبه  $\alpha$  نامیده می شود [۲].

تعریف ۲. یک ماتریس  $A = \{a_{ij}\}$ ، ایزوکلینال نامیده می شود اگر  $a_{i+1, j+1} = a_{ij}$  برای تمام  $i, j$  ها [۳].

قضیه ۱. رده ماتریس های پایین مثلثی  $V_n$  با خاصیت ایزوکلینال، یک زیرحلقه جابجایی از حلقه ماتریس ها است، حال اگر  $A \in V_n$  ناکین باشد آنگاه  $A^{-1} \in V_n$  (پایین مثلثی) است [۳].

تعریف ۳. فرض کنید  $\alpha \in R+$ ، عملگر

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh = x-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), \quad \alpha > 0. \quad (2) \end{aligned}$$

برای  $a \leq x \leq b$  مشتق کسری گرانوالد - لنینکف مرتبه  $\alpha$  نامیده می شود [۲].

## ۲ روش ماتریسی در حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری معمولی غیر خطی

در سال ۲۰۰۰ ایده اولیه روش ماتریسی توسط ایگور پودلبنی در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه کسری مطرح شده است [۴] روش حاضر را در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه کسری تعمیم می دهیم. اگر در حالت کلی معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه کسری به صورت زیر فرض شود:

$$y^{(\alpha_1)} = f(t, y^{(\alpha_2)}(t), y^{(\alpha_3)}(t), \dots, y^{(\alpha_k)}(t)), \quad (0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n).$$

مشتقات کسری را  $y^{(\alpha)_i} = {}_a D_t^{\alpha_i} y(t)$  در نظر گرفته و با عملگر  $B_N$  جایگزین می کنیم،

$$\begin{aligned} B_N^{\alpha_i} Y_N &= f(Et_N, B_N^{(\alpha_1)} Y_N, \dots, B_N^{(\alpha_k)} Y_N), \quad y_j = 0, j = 0, 1, \dots, n-1. \\ Y_N &= (y_0, y_1, \dots, y_N)^T, \quad t_N = (t_0, t_1, \dots, t_N)^T, \\ y_j &= y(t_j), \quad t_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

که از تعریف مشتق گرانوالد بدست می آید و در آن  $w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$   $j = 0, 1, 2, \dots, [\alpha] + 1$ .

و در نهایت دستگاه غیرخطی (۳) حاصل از معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه کسری را با روش تکراری ساده حل می کنیم.

مثال ۱. معادله غیرخطی ریکاتی کسری را در نظر می گیریم [۵]

$$D^\alpha y(t) = 2y(t) - [y(t)]^2 + 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3)$$

$$y(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3. \quad (4)$$

حل: با جایگذاری عملگرهای ماتریسی در معادله فوق خواهیم داشت:

$$B^\alpha Y_{i+1} = 2Y_i - [Y_i]^2 + E_{N \times 1}. \quad (5)$$

معادله (۳) برای  $\alpha = 1$  دارای جواب تحلیلی به شکل زیر است:

$$y(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}t + 0.5 \ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})).$$

نتایج حاصل از روش تکراری ساده روی دستگاه غیرخطی (۵)، حاصل از پیاده سازی روش ماتریسی، به صورت زیر گزارش می شود:

جدول ۱: مقایسه جواب عددی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری غیر خطی ریکاتی با روش ماتریسی و جواب تحلیلی برای  $\alpha = 1$  و با  $tole = 0/0/1$  و تعداد تکرارهای  $Its = 5$ .

نقاط مکانی $x$	<i>Matrix - Method</i>	<i>Exact - solution</i>	<i>Abs - Error</i>
$x = 0/2$	0/1238	0/1103	0/0135
$x = 0/4$	0/4157	0/39551	0/0206
$x = 0/6$	0/7820	0/7560	0/260
$x = 0/8$	1/1793	1/1529	0/0264
$x = 1$	1/5485	1/5269	0/0245
$x = 2/5$	2/3955	2/3958	0/0002
$x = 3/1$	2/4108	2/4102	0/0006





چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## کلاسی از ماتریس های نرمال-مزدوج

مجتبی قاسمی کمالوند

خرم آباد / دانشگاه لرستان m-ghasemi98@yahoo.com

فاطمه جهان آرا

خرم آباد / دانشگاه لرستان fateme.jahanara@gmail.com

### چکیده

کلاسی از ماتریس های نرمال-مزدوج را که دارای طیف منتهایی اند مورد بررسی قرار می دهیم. فرض می کنیم  $\varphi$  مجموعه ای متشکل از ماتریس های مربعی، مختلط و نرمال-مزدوج باشد که  $\{\tilde{A} | A \in \varphi\} = \tilde{\varphi}$  یک نیم گروه از ماتریس های مختلط نرمال است. نشان می دهیم که هر عضو  $A$  از  $\varphi$  در شرط  $A^T = (A_R)^{\text{adj}} A$  (توان متقارن) صدق می کند که در آن  $n$  وابسته به ماتریس  $A$  نیست.

واژه های کلیدی: ماتریس های نرمال-مزدوج، هم طیف، نیم گروه  
رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F15.

### ۱ مقدمه

ماتریس  $A$  نرمال است اگر  $A^*A = AA^*$  (ترانهاده مزدوج از ماتریس  $A$  است) و همچنین ماتریس  $A$  نرمال-مزدوج است اگر  $A^*A = \overline{AA^*}$ . فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی دلخواه باشد با توجه به  $A$  ماتریس های کمکی زیر را تعریف می کنیم

$$A_R = A\bar{A}, \quad A_L = \bar{A}A, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ \bar{A} & 0 \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱. (هم مقدارهای ویژه با استفاده از مقادیر ویژه  $A_L$ ) فرض کنید  $n$  اسکالر  $\mu_1, \dots, \mu_n$  هم مقدارهای ویژه ماتریس  $A$  باشند، که به صورت زیر به دست می آیند

• اگر  $\lambda_i \in \lambda(A_L)$  روی قسمت منفی محور حقیقی قرار نگیرد آنگاه  $\mu_i$  تعریف شده به صورت جذری از  $\lambda_i$  است که با قسمت حقیقی نامنفی متناظر می شود و چندگانگی از  $\mu_i$  مساوی با چندگانگی  $\lambda_i$  است یعنی  $\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}, \operatorname{Re} \mu_i \geq 0$

• اگر  $\lambda_i \in \lambda(A_L)$  حقیقی و منفی باشد دو هم مقدار ویژه موهومی محض و مزدوج را به صورت مقابل مرتبط می کنیم  $\mu_i = \pm \lambda_i^{\frac{1}{2}}$  که چندگانگی  $\mu_i$  نصف چندگانگی  $\lambda_i$  است. مجموعه  $c\lambda(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  را هم طیف ماتریس  $A$  می نامیم.

اگر  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  هم طیف ماتریس  $A$  باشد، آنگاه مجموعه مقادیر ویژه یا طیف ماتریس  $\hat{A}$  به صورت  $\lambda(\hat{A}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n\}$  می باشد. این رابطه از تساوی زیر حاصل می شود

$$\det(\lambda - \hat{A}) = \det(\lambda^2 - A_L) = \det(\lambda^2 - A_R).$$

قضیه ۱. ماتریس  $A$  نرمال - مزدوج است اگر و فقط اگر  $\hat{A}$  نرمال باشد.

مطالب بیشتر در مورد ماتریس های نرمال - مزدوج و هم طیف ماتریس ها را می توان در [۱] مشاهده کرد.

تعریف ۲. ماتریس  $A$  را که در معادله  $A^* = A^n$  برای  $n \geq 1$  صدق می کند توان - هرمیتی گوئیم.

تعریف ۳. ماتریس  $A$  را که در معادله  $A^T = (A_R)^{\frac{n-1}{2}}$  برای  $n \geq 1$  صدق می کند توان - متقارن گوئیم.

## ۲ کلاسی با هم طیف متناهی

در این بخش ابتدا برخی از قضایا و تعاریف مورد نیاز را بیان می کنیم سپس قضایای بیان شده برای ماتریس های نرمال را برای ماتریس های نرمال - مزدوج اثبات می

کنیم. فرض کنیم  $\varphi$  مجموعه ای از ماتریس های مربعی مختلط نرمال—مزدوج باشد که  $\hat{\varphi} = \{\hat{A} | A \in \varphi\}$  یک نیم گروه ضربی از ماتریس های مختلط نرمال است، به عبارت دیگر هر ماتریس نرمال  $\hat{A}$  از نیم گروه  $\hat{\varphi}$  را به یک ماتریس نرمال—مزدوج از مجموعه  $\varphi$  مرتبط می کنیم که مرتبه آن دو برابر مرتبه ماتریس  $A$  است و طیف آن نسبت به مبدا متقارن است. باتوجه به یکی از شرایط معادل بانرمال بودن، هر ماتریس نرمال  $\hat{A}$  از نیم گروه  $\hat{\varphi}$  در معادله  $\hat{A}^* = p_{\hat{A}}(\hat{A})$  صدق می کند. فرض کنیم که چند جمله ای  $p$  ثابت باشد یعنی هر عضو از نیم گروه  $\hat{\varphi}$  در شرط  $\hat{A}^* = p(\hat{A})$  صدق کند.

قضیه ۲. اگر  $p$  یک چند جمله ای ثابت با یک متغیر باشد و مساوی با تبدیل همانی نباشد یا به عبارتی  $p(x) \neq x$  و همچنین اگر همه عضوهای  $\hat{A}$  از نیم گروه  $\hat{\varphi}$  در معادله  $\hat{A}^* = p(\hat{A})$  صدق کنند، آنگاه طیف چنین نیم گروهی را که به صورت زیر تعریف می شود متناهی است.

$$\lambda(\hat{\varphi}) = \bigcup_{\hat{A} \in \hat{\varphi}} \lambda(\hat{A}).$$

قضیه ۳. اگر طیف نیم گروه  $\hat{\varphi}$  متناهی باشد یک عدد صحیح مثبت و ثابت  $n$  موجود است به طوری که هر ماتریس  $\hat{A} \in \hat{\varphi}$  توان—هرمیتی است.

اثبات قضایای ۲ و ۳ را می توان در [۳] مشاهده کرد.

حال در اینجا قضایای بیان شده برای نیم گروه هایی از ماتریس های نرمال را برای مجموعه هایی از ماتریس های نرمال—مزدوج اثبات می کنیم.

قضیه ۴. اگر  $p$  یک چند جمله ای ثابت با یک متغیر باشد و مساوی با تبدیل همانی نباشد یا به عبارتی  $p(x) \neq x$  و اگر به ازای هر عضو  $A$  از مجموعه  $\varphi$  همه عضوهای  $\hat{A}$  از نیم گروه  $\hat{\varphi}$  در معادله  $\hat{A}^* = p(\hat{A})$  صدق کنند آنگاه هم طیف  $\varphi$  که به صورت زیر تعریف می شود متناهی است.

$$c\lambda(\varphi) = \bigcup_{A \in \varphi} c\lambda(A).$$

برهان: فرض کنید  $\lambda(\hat{A}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n\}$  می دانیم  $c\lambda(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  لذا  $c\lambda(A) \subseteq \lambda(\hat{A})$  بنابراین داریم

$$c\lambda(\varphi) = \bigcup_{A \in \varphi} c\lambda(A) \subseteq \bigcup_{\hat{A} \in \hat{\varphi}} \lambda(\hat{A}) = \lambda(\hat{\varphi})$$

و چون طبق قضیه ۲ طیف نیم گروه  $\hat{\varphi}$  متناهی است لذا هم طیف مجموعه  $\varphi$  نیز متناهی است.  $\square$

قضیه ۵ اگر مجموعه  $\varphi$  از ماتریس های مختلط نرمال — مزدوج غیر صفر دارای هم طیف متناهی باشد آنگاه  $\varphi$  شامل ماتریس های توان متقارن است، به عبارت دیگر در معادله  $A^T = (A_R)^{\frac{n-1}{2}} A$  برای  $n \geq 1$  (فرد و ثابت) صدق می کنند.

برهان: فرض کنید هم طیف  $\varphi$  متناهی باشد لذا با توجه به تعریف هم طیف  $\varphi$ ، طیف  $\hat{\varphi}$  نیز متناهی است، بنابراین طبق قضیه ۳ هر عضو  $\hat{A}$  از  $\hat{\varphi}$  توان هرمیتی است و در شرط  $\hat{A}^* = \hat{A}^n$  صدق می کند، بنابراین چون  $\hat{A}^n = \begin{bmatrix} \circ & (A_R)^{\frac{n-1}{2}} A \\ (A_L)^{\frac{n-1}{2}} \bar{A} & \circ \end{bmatrix}$ ،  $\hat{A}^* = \begin{bmatrix} \circ & A^T \\ A^* & \circ \end{bmatrix}$  اگر  $n$  فرد باشد آنگاه و چنانچه  $n$  زوج باشد  $\hat{A}^n = \begin{bmatrix} (A_R)^{\frac{n}{2}} & \circ \\ \circ & (A_L)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$  لذا با توجه به شرط بالا در حالت فرد  $A^T = (A_R)^{\frac{n-1}{2}} A$  و در حالت زوج  $A = \circ$  که با فرض غیر صفر بودن ماتریس  $A$  این حالت به تناقض می رسد.  $\square$

## مراجع

- [1] H.FABBENDER, K.D. IKRAMOV, *conjugate-normal matrices:A survey*, Linear Algebra and its Applications 429 (2008) 1425-1441.
- [2] R.A. HORN AND C.R. JOHNSON, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [3] B.ZALAR, *on semigroups of normal matrices*, Linear Algebra and its Applications 368 (2003) 191-195.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## ماتریس های سه قطری که با ماتریس های نرمال — مزدوج بطور یکانی همنهشتند

مجتبی قاسمی کمالوند

خرم آباد / دانشگاه لرستان [m\\_ghasemi98@yahoo.com](mailto:m_ghasemi98@yahoo.com)

مهری پاک منش

خرم آباد / دانشگاه لرستان [pakmanesh\\_mehri@yahoo.com](mailto:pakmanesh_mehri@yahoo.com)

چکیده

اگر ماتریس سه قطری  $T$  با ماتریس نرمال — مزدوج  $A$  به طور یکانی  
همنهشت باشد، آنگاه عناصر بالا قطری و پایین قطری متناظر دارای قدر مطلق  
یکسان هستند. همچنین یک ضرب اسکالر خاص ارائه شده، نشان داده می شود،  
بوسیله این ضرب هر ماتریس نرمال مزدوج به طور یکانی با یک ماتریس سه  
قطری هرمیتی همنهشت است.

واژه های کلیدی: هم تشابهی — همنهشتی یکانی — ماتریس نرمال — مزدوج.  
رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F50.

### ۱ مقدمه

ماتریس  $A \in M_n(C)$  نرمال — مزدوج است اگر  $AA^* = \overline{A}^*A$ . ماتریس های  
نرمال — مزدوج کلاسی مهم از ماتریس ها هستند، ماتریس های متقارن، کج متقارن و  
یکانی زیر کلاسی از ماتریس های نرمال — مزدوج می باشند (برای کسب اطلاعات  
بیشتر در مورد ماتریس های نرمال — مزدوج به [۱] مراجعه شود). در کلاس ماتریس  
های نرمال — مزدوج به جای تشابه، مقوله هم تشابهی مطرح می شود. ماتریس های

$B, A$  را هم متشابه می نامند اگر  $A = SB\bar{S}^{-1}$ ، برای ماتریس غیرتکین  $S$ . اگر برای ماتریس یکانی  $U$ ،  $S = U$ ، در نتیجه  $A = UBU^T$ ،  $(U^{-1} = U^*)$ ، این را هم تشابه یکانی (همنهشتی یکانی) می نامند. بنابراین به جای هم ارزی یکانی، همنهشتی یکانی مطرح می شود. اگر ماتریس  $A$  نرمال بوده و  $U^*AV = T$  ماتریس سه قطری باشد، چنانچه  $\gamma_i$  و  $\beta_i$  به ترتیب عناصر بالا و پایین قطری متناظر در  $T$  باشد داریم:  $|\beta_i| = |\gamma_i| \forall i = 1, \dots, n-1$ ، (این مطلب در [۳] ثابت شده است). در فصل بعدی این مقاله معادل این مطلب را برای ماتریس های نرمال-مزدوج اثبات می کنیم.

## ۲ تبدیل سه قطری برای ماتریس های نرمال-مزدوج

در این فصل ابتدا برخی قضایا مورد نیاز بیان می شود و در آخر نتیجه اصلی برای ماتریس های سه قطری که بطور یکانی با ماتریس های نرمال-مزدوج همنهشت هستند، اثبات می گردد.

قضیه ۱. اگر  $A \in M_n(C)$ ، روابط زیر هم ارزند:

(۱) ماتریس  $A$  نرمال-مزدوج است.

(۲) برای هر  $x, y \in C^n$ ،  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^T x, A^T y \rangle$ .

(۳) برای  $x \in C^n$ ،  $\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T x, A^T x \rangle$ .

(۴) برای  $x \in C^n$ ،  $\|Ax\|_2 = \|A^T x\|_2$ .

برهان:  $۱ \Leftrightarrow ۲$  برای هر  $x, y \in C^n$  داریم:

$$(Ay)^*(Ax) = y^* A^* Ax = y^* \overline{AA^*} x = (A^T y)^*(A^T x)$$

$۲ \Rightarrow ۳$  کفایت قرار دهیم:  $x = y$

$۱ \Rightarrow ۳$  با توجه به این که،  $\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T x, A^T x \rangle$ ، داریم:

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T x, A^T x \rangle \Leftrightarrow \langle x, A^* Ax \rangle = \langle x, \overline{AA^T} x \rangle \Leftrightarrow A^* A = \overline{AA^T}$$

$۳ \Leftrightarrow ۴$  برای  $x \in C^n$  داریم:

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T x, A^T x \rangle \Leftrightarrow \|Ax\|_2 = \|A^T x\|_2$$

□

تعریف می کنیم

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \quad (۱)$$

توجه شود که برای هر  $x \in C^n$  و هر ماتریس یکانی  $U$  داریم:

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad (۲)$$

قضیه ۲. فرض کنید ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  نرمال-مزدوج باشد و  $U^T A U = T$  ماتریسی سه قطری باشد ( $U$  یک ماتریس یکانی است)، اگر  $\beta_i, \gamma_i$  به ترتیب عناصر بالا و پایین قطری  $T$  باشند داریم:

$$|\beta_i| = |\gamma_i| \quad i = 1, \dots, n-1$$

برهان: با توجه به قضیه ۱ و رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \|Te_1\|_2 &= \|U^T A U e_1\|_2 = \|A U e_1\|_2 \\ &= \|A u_1\|_2 = \|A^T u_1\|_2 = \|A^T U e_1\|_2 \\ &= \|U^T A^T U e_1\|_2 = \|T^T e_1\|_2 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|\alpha_1|^2 + |\gamma_1|^2 = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2$$

پس

$$|\beta_1| = |\gamma_1|$$

به طور مشابه داریم:

$$\|Te_2\|_2 = \|T^T e_2\|_2$$

در نتیجه

$$|\beta_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\gamma_2|^2 = |\beta_2|^2 + |\alpha_2|^2 + |\gamma_1|^2$$

طبق قسمت قبل داریم  $|\beta_2| = |\gamma_2|$  به طور مشابه برای  $i = 3, \dots, n-1$  داریم  $|\beta_i| = |\gamma_i|$  و قضیه اثبات می شود.  $\square$

حال ضرب اسکالر  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle x, y \rangle_\Omega = x^* T \Omega y \quad (3)$$

که در اینجا  $\Omega$  یک ماتریس غیر تکین است و ماتریس الحاقی با توجه به ضرب تعریف شده به صورت  $\langle Ax, y \rangle_\Omega = \langle x, A^* y \rangle_\Omega$  یا

$$A^* = \Omega^{-1} A^T \Omega. \quad (4)$$

تعریف می شود.

قضیه ۳. اگر ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  نرمال-مزدوج باشد و ماتریس یکانی  $U$  موجود باشد که  $U^T A U = T$  سه قطری باشد، آنگاه ماتریس یکانی قطری  $\Omega$  موجود است بطوریکه با ضرب اسکالر  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  هر میتی است.

برهان: با توجه به قضیه ۲ قدر مطلق عناصر بالا و پایین قطری متناظر در  $T$  برابر هستند. بنابراین می توان  $T$  را به صورت حاصل ضرب دو ماتریس متقارن و قطری یکانی نوشت ( $T = SD$ ) که  $S$  متقارن و  $D$  قطری یکانی و می توان  $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2, \dots)$  در نظر گرفت که در آن  $\delta_i = \frac{\beta_i}{\gamma_i}$ . با جایگذاری  $T = SD$  د رابطه (۴) و قرار دادن  $\Omega = D$  داریم:  $T = T^*$ .  $\square$

برای اثبات وجود تجزیه یکانی متقارن  $T = SD$  می توان به [۲] مراجعه کرد.

## مراجع

- [1] H.FABBENDER, K.D. IKRAMOV, *conjugate-normal matrices:A survey*, Linear Algebra and its Applications 429 (2008) 1425-1441.
- [2] R.A. HORN AND C.R. JOHNSON, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [3] R.VANDEBRIL, *tridiagonal matrices unitarily equivalent to normal matrices*, Linear Algebra APPL. (2010).



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## خواص جدیدی از $H$ -ماتریس ها و ماتریس های نکراسف \*

مهدی حمزه نژاد

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان، دانشکده سما، mhdhamzehnejad@gmail.com

سعید کرمی زرنندی

دانشگاه شهید باهنر کرمان، بخش ریاضی، s.karami2006@yahoo.com

### چکیده

ماتریس های نکراسف زیر دسته ای از  $H$ -ماتریس ها هستند که در حل تکراری دستگاه های خطی و مکانیک سیالات کاربرد گسترده ای دارند. در این مقاله ابتدا نشان می دهیم ماتریس های مثلثی به رده ماتریس های نکراسف تعلق دارند و حاصلضرب هادامارد دو  $H$ -ماتریس، یک  $H$ -ماتریس و در حالت خاص حاصلضرب هادامارد دو ماتریس نکراسف یک ماتریس نکراسف است. در انتها زیرجمع مستقیم ماتریس های نکراسف را بررسی می کنیم. واژه های کلیدی:  $H$ -ماتریس، ماتریس نکراسف، ضرب هادامارد. رده بندی موضوعی (MSC2000): 15A57.

## ۱ مقدمات و تعاریف

ماتریس  $A$  را یک  $M$ -ماتریس می نامیم اگر بتوان ماتریس  $A$  را به صورت  $A = mI - C$  تفکیک کرد به طوری که  $C$  یک ماتریس نامنفی و  $m \geq \rho(C)$  است [۱]، که در آن  $\rho(C)$  شعاع طیفی ماتریس  $C$  است. همچنین ماتریس مقایسه  $A$  که با این مقاله از حمایت قطب جبرخطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان برخوردار شده است.

$\mu(A)$  نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$\mu(A) = \begin{cases} -|a_{ij}|, & i \neq j, \\ |a_{ij}|, & i = j. \end{cases}$$

تعریف ۱.۱ [۱] ماتریس  $A$  را یک  $H$ -ماتریس می‌نامیم اگر ماتریس مقایسه‌اش یک  $M$ -ماتریس باشد.

برای معرفی ماتریس نکراسف شناخت نمادهای زیر ضروری است بنابراین ابتدا به معرفی آنها می‌پردازیم [۲]:

مجموعه  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  تعداد سطرهای یک ماتریس را نشان می‌دهد. همچنین داریم:

$$r_i(A) = \sum_{j \in N, j \neq i} |a_{ij}|,$$

$$h_1(A) = r_1(A),$$

$$h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|.$$

تعریف ۱.۲ [۱] ماتریس  $A$  را اکیدا قطری غالب یا  $SDD$  می‌گوییم هرگاه:

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

تعریف ۳.۲ [۲] ماتریس  $A$  را یک ماتریس نکراسف می‌گوییم هرگاه:

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

قضیه ۱.۲ [۲] ماتریس‌های نکراسف زیردسته‌ای از  $H$ -ماتریس‌ها هستند.

قضیه ۲.۲ [۲، ۳] ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  یک  $H$ -ماتریس است اگر و فقط اگر یک ماتریس قطری نامنفرد و مثبت  $D$  موجود باشد به طوری که  $AD$  یک ماتریس  $SDD$  باشد.

تعریف ۴.۴ [۴] فرض کنیم  $A, B \in C^{n \times n}$  ضرب هادامارد دو ماتریس  $A$  و  $B$  را با  $A \circ B$  نشان می‌دهیم و برای هر  $i, j \in N$  داریم  $(A \circ B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ .

## ۲ نتایج و قضایا

در این قسمت نشان خواهیم داد که ماتریس‌های مثلثی که عناصر روی قطر اصلی آنها غیرصفر باشند به مجموعه ماتریس‌های نکراسف و در نتیجه به  $H$ -ماتریس‌ها تعلق دارند، لم زیر در اثبات قضیه بکار می‌رود:

لم ۱. اگر  $A \in C^{n \times n}$  یک ماتریس مثلثی باشد. آنگاه برای هر  $i \in N$  داریم  $h_i(A) = 0$ .

قضیه ۳. اگر  $A \in C^{n \times n}$  یک ماتریس مثلثی با عناصر قطری غیرصفر باشد، آنگاه  $A$  یک ماتریس نکراسف است.

مثال ۱. نشان می‌دهیم حاصلضرب دو  $H$ -ماتریس لزوماً یک  $H$ -ماتریس نیست: طبق قضیه قبل ماتریس‌های  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  بدلیل مثلثی بودن  $H$ -ماتریس هستند اما حاصلضرب آنها یعنی  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$  طبق قضیه ۲،  $H$ -ماتریس نمی‌باشد.

در قسمت قبل نشان دادیم حاصلضرب معمولی دو  $H$ -ماتریس لزوماً  $H$ -ماتریس نیست اما برخلاف این، اکنون نشان می‌دهیم حاصلضرب هادامارد دو  $H$ -ماتریس همواره یک  $H$ -ماتریس است: برای بررسی ضرب هادامارد بر روی  $H$ -ماتریس‌ها ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۲. اگر  $A, B \in C^{n \times n}$  دو ماتریس  $SDD$  باشند، ضرب هادامارد آنها نیز یک ماتریس  $SDD$  است.

باتوجه به لم فوق و قضیه ۲ می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد:

قضیه ۴. فرض کنیم  $A, B \in C^{n \times n}$  دو  $H$ -ماتریس باشند، آنگاه ضرب هادامارد آنها نیز یک  $H$ -ماتریس است.

از آنجا که ماتریس‌های نکراسف،  $H$ -ماتریس هستند از قضیه فوق نتیجه می‌شود حاصلضرب هادامارد دو ماتریس نکراسف  $H$ -ماتریس است. در قضیه بعد ثابت کرده‌ایم بیشتر از این نیز برقرار است، در واقع حاصلضرب هادامارد دو ماتریس نکراسف، یک ماتریس نکراسف است:

قضیه ۵. اگر  $A$  و  $B$  ماتریس نکراسف باشند آنگاه  $A \oplus B$  نیز یک ماتریس نکراسف است.

#### زیرجمع‌های مستقیم

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی از مرتبه به ترتیب  $n_1$  و  $n_2$  باشند. همچنین فرض کنیم  $k$  یک عدد صحیح باشد به طوری که  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ . فرض کنیم  $A$  و  $B$  به صورت زیر بلوک بندی شده‌اند:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

که در آن  $A_{22}$  و  $B_{11}$  ماتریس‌های مربعی از مرتبه  $k$  هستند. ماتریس مربعی زیر را که از مرتبه  $n = n_1 + n_2 - k$  است را  $k$ -زیر جمع مستقیم ماتریس‌های  $A$  و  $B$  می‌گوییم و به صورت  $A \oplus_k B$  نشان می‌دهیم.

$$C = A \oplus_k B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \circ \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} & B_{12} \\ \circ & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

قضیه ۶. اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس نکراسف باشند آنگاه  $A \oplus_1 B$  نیز یک ماتریس نکراسف است.

## مراجع

- [1] R. BRU, C. CORRAL, I. GIMENEZ, J. MAS, *Classes of general  $H$ -matrices, groups*, Linear algebra Appl., **429** (2008) 2358-2366.
- [2] L. CVETKOVIC, V. KOSTIC, S. RAUSKI, *A new subclass of  $H$ -matrices, groups*, Applied Mathematics and Computation, **208** (2009) 206-210.
- [3] L. CVETKOVIC, V. KOSTIC, *New criteria for identifying  $H$ -matrices, groups*, Computation and Applied Mathematics, **180** (2005) 265-278.
- [4] R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1962.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## روشی جدید برای حل دستگاه های جبری غیرخطی بزرگ مقیاس

علاء الدین ملک<sup>۱</sup>، محمد ابراهیم آقابابایی هرنندی [mala@modares.ac.ir](mailto:mala@modares.ac.ir)  
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی

### چکیده

روش های عددی برای حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی درحالت کلی به دو دسته نقطه ثابت و روش نیوتن پیوسته و گسسته تقسیم می شوند. در این مقاله یک روش نقطه ثابت پیوسته جدید ارائه شده است. روش هایی که در [۱] و [۲] معرفی شده اند روش های نقطه ثابتی هستند که در حالت کلی نمی توان نقطه های ثابت آن ها را به دست آورد. از طرفی این روش ها نیاز به نقطه اولیه ای دارند که به اندازه کافی نزدیک به جواب باشد به طور معمول دست یافتن به یک نقطه نزدیک به جواب کار آسانی نیست. در این مقاله روش نقطه ثابتی را ارائه می کنیم که بدون وابستگی به نقطه آغازین نزدیک به جواب، قادر است دستگاه های جبری غیرخطی داده شده را با دقت دلخواه داده شده حل نماید. همگرایی روش عددی جدید اثبات گردیده است. مثال عددی همراه با نتیجه آن مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: معادلات جبری غیر خطی، روش های تکراری، معادلات دیفرانسیل معمولی، روش های زمان موهومی  
رده بندی موضوعی (65F99):

### ۱ مقدمه

روش نیوتن و روش نقطه ثابت از جمله روش هایی هستند که برای حل دستگاه های غیر خطی در مهندسی، فیزیک و ریاضی مورد استفاده قرار می گیرند. دستگاه  $n$  - معادله  $n$  - مجهولی زیرا در نظر بگیرد.

<sup>۱</sup>ارائه دهنده

$$F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)] = \circ, \quad (1)$$

Liu در [۱] معادله دیفرانسیل وابسته به زمان زیر را برای حل دستگاه معادلات (۱) ارائه نمود. این روش براساس مفاهیم نقطه ثابت پیوسته عمل می کند.

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{v}{1+t}F \quad (2)$$

او برای به دست آوردن نقطه ثابت این معادله دیفرانسیل زمان را به سمت بی نهایت میل داده و برای تضمین همگرایی، شرط کراننداری را برای تابع مد نظر قرار می دهد. ولی متأسفانه این شرط در بسیاری از مسائل فیزیک، ریاضی، مهندسی و بزرگ مقیاس قابل تحقق نیست.

## ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدید

ما در این مقاله با الهام از نقطه نظرات Liu، معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدیدی را طراحی کرده ایم که با به سمت بی نهایت میل نمودن زمان همگرایی روش تضمین می گردد و همچنین نقطه اولیه مورد استفاده در این روش نیاز ندارد که به اندازه کافی نزدیک به جواب مساله باشد.

قضیه ۱. فرض کنید که  $F(X) = \circ$  دارای حداقل یک ریشه  $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$  باشد. در این صورت با توجه به معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر ثابت کنید اگر  $t \rightarrow \infty$  آن گاه  $F(X(t)) \rightarrow \circ$  میل خواهد کرد.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{v}{1+t} f_i \quad v > \circ \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

برهان: با یک جابه جایی در (۳) و یک انتگرال گیری داریم:

$$\frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}{f_i} dx_i = -\frac{v}{1+t} dt \quad (4)$$

و لذا

$$\int_{x_i(\circ)}^{x_i(t)} \frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}{f_i} dx_i = -\int_{\circ}^t \frac{v}{1+t} dt \quad (5)$$

$$\ln(|f_i|) = -v \ln(|1+t|) + \ln(c), \quad (6)$$

$$(\ln(c) = \text{Initial condition}) \quad (7)$$

$$|f_i| = \frac{c}{(1+t)^v} \quad (8)$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{c}{(1+t)^v} \rightarrow \circ \Rightarrow |f_i| \rightarrow \circ \Rightarrow F(X) \rightarrow \circ \quad (9)$$

□

با توجه به این که به سمت بی نهایت میل نمودن زمان در روش های عددی عملاً قابل انجام نیست، در روش جدید بازه ی  $[0, \infty)$  به یک بازه متناهی  $[0, T_{max})$  تبدیل می گردد.

قضیه ۲. فرض کنید دستگاه (۱) دارای حداقل یک ریشه باشد و همچنین تابع  $q$  بر بازه  $[0, T_{max})$  تعریف شده باشد به طوریکه

$$\lim_{r \rightarrow T_{max}} \int_0^r \frac{1}{q(t)} dt = \infty \quad (10)$$

آن گاه در معادله دیفرانسیل (۱۰) زمانی که  $t \rightarrow T_{max}$  آن گاه  $X(t)$  به سمت ریشه دستگاه (۱) میل خواهد کرد.

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{v}{q(t)} \frac{f_i}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}} \quad t \in [0, T_{max}) \quad v > 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

برهان: بایک جابه جایی ساده در (۱۱) و یک انتگرال گیری داریم:

$$\frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}{f_i} dx_i = -\frac{v}{q(t)} dt \quad (12)$$

ولذا

$$\int_{x_i(0)}^{x_i(t)} \frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}{f_i} dx_i = \int_0^t -\frac{v}{q(t)} dt \ln(|f_i|) = \lim_{t \rightarrow T} \int_0^t -\frac{v}{q(t)} dt + c, \quad (13)$$

$$(c = \text{Initial condition},) \quad (14)$$

$$\ln(|f_i|) \rightarrow -\infty \Rightarrow |f_i| \rightarrow 0 \quad (15)$$

□

مثال ۱. فرض کنید که  $q(t) = 1 - t, T_{max} = 1$  چون

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^r \frac{1}{1-t} dt = \infty \quad (16)$$

پس معادله دیفرانسیل وابسته به زمان مرتبه اول (۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{v}{1-t} \frac{f_i}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}} \quad t \in [0, 1) \quad v > 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

قابل ذکر است که باید در هر معادله ای متغیر مربوطه وجود داشته باشد. در غیر این صورت اگر فرض کنید که در معادله  $i$  ام، متغیر  $i$  ام موجود نباشد آن گاه اگر این متغیر

روشی جدید برای حل دستگاه های جبری غیر خطی بزرگ مقیاس ————— ۲۹۳

در معادله  $z$  ام به کاررفته باشد در این صورت به جای این دو معادله، معادلات زیر را قرار می دهیم.

$$f_i^2 + f_j^2 = 0 \quad (18)$$

$$f_j^2 = 0 \quad (19)$$

بقیه معادلات نیز به همین ترتیب اصلاح می شوند. یکی از مزیت های این روش بر سایر روش ها در این است که می توان این روش را برای حل دستگاه هایی که تعداد معادلاتشان کمتر از تعداد مجهولات آن ها هستند به کاربرد. روش نیوتن و روش های قبلی هیچ کدام در این مورد کاربرد ندارند. در این مورد کافیت که یکی از معادلات به دلخواه تکرار شده و دستگاه جدید حل شود.

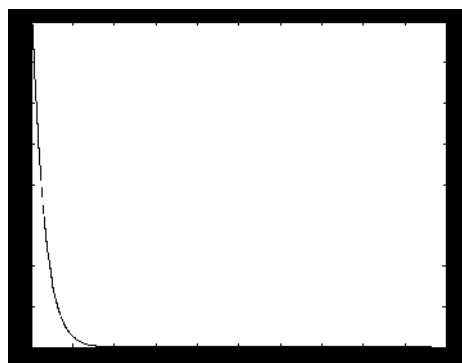
مثال ۲. به مثال زیر که برگرفته از [۲] است دقت کنید.

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} = \frac{h^2(x_i + t_i + 1)^2}{2}, \quad i = 1, \dots, 60 \quad (20)$$

$$x_0 = x_{61} = 0; \quad t_i = ih \quad h = \frac{1}{61} \quad (21)$$

$X^0 = [200, 200, \dots, 200]$  فرض شده است.

حل: این مثال به کمک رابطه (۳) حل شده است. نمودار زیر بیانگر نرم دستگاه در هر تکرار است. خطا در جواب آخر در حدود  $10^{-6}$  می باشد



□

## مراجع

- [1] C. S. LIU, S. N. ATLURI, *A Novel Time Integration Method for Solving a Large System of Non-Linear Algebraic Equations*, CMES Journal, Vol.31, No.2, pp.71-83, 2008.
- [2] T. HAN, Y. HAN, *Solving Large Scale Non-Linear Equations by a New ODE Numerical Integration Method*, Applied Mathemaics, 2010,1,222-229.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



# حل دستگاه تولید شده از گسسته سازی معادلات انفجاری روی شبکه تعدیل یافته با استفاده از تجزیه $LU$

مریم عرب عامری

دانشگاه سیستان و بلوچستان و [arabameri@math.usb.ac.ir](mailto:arabameri@math.usb.ac.ir)

مریم دهقانی

دانشگاه سیستان و بلوچستان و [dehghani8702234@yahoo.com](mailto:dehghani8702234@yahoo.com)

چکیده

در این مقاله روش حرکت شبکه، برای حل معادلات انفجاری انتشار-واکنش با جملات غیر خطی مکانی اجرا می شود. معادله فیزیکی، توسط تبدیل وابسته به زمان، بصورت فرم لاگرانژی نوشته می شود که تابع تبدیل مذکور در معادله  $MMPDE$  صدق می کند. دستگاه غیر خطی حاصل از گسسته سازی معادله فیزیکی به روش نیوتن خطی می شود، سپس با گسسته سازی  $MMPDE$  و حل دستگاه خطی حاصل به روش تجزیه  $LU$ ، نقاط شبکه جدید نتیجه می شود، نهایتاً با حل دستگاه غیر خطی حاصل از گسسته سازی معادله تبدیل یافته به روش نیوتن جواب مسئله روی شبکه غیر یکنواخت بدست می آید.

واژه های کلیدی: معادلات انفجاری، معادلات انتشار-واکنش، روش حرکت شبکه.

رده بندی موضوعی : 65N50 , 15A99 .

## ۱ بیان مسئله

در این مقاله، مسائلی با جملات واکنش سراسری نسبت به مکان، به فرم زیر مورد مطالعه قرار می گیرد:

$$u_t - u_{xx} = f\left(u(x, t), \int_{\Omega} g(t, u(y, t)) dy\right), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}. \quad (1)$$

شرایط مرزی و اولیه برای معادله فوق به ترتیب، به صورت  $u|_{\partial\Omega} = 0$  و  $u(x, 0) = u_0(x)$  در نظر گرفته می شوند. نگاشت وابسته به زمان  $x(\xi, t)$  از

مختصات محاسباتی  $\xi$  به مختصات فیزیکی  $x$  تعریف می شود بطوری که در  $MMPDE^6$  با معادله زیر صدق کند [۲]:

$$-\tau \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right), \quad (2)$$

$M = M(x, t)$  تابع نشانگر است که به جواب فیزیکی بستگی دارد و برای کنترل تمرکز شبکه استفاده می شود و  $\tau > 0$  پارامتری است که برای تنظیم زمان واکنش حرکت شبکه بکار برده می شود. این تابع به یکی از فرمهای زیر در نظر گرفته می شود: ( $\gamma > 0$ )

$$M(x, t) = u^\gamma, \quad \text{برای حالتی که جمله واکنش تابعی از } u^p \text{ باشد} \quad (3)$$

$$M(x, t) = (\exp(u))^\gamma, \quad \text{برای حالتی که جمله واکنش تابعی از } \exp(u) \text{ باشد} \quad (4)$$

با استفاده از تبدیل  $x(\xi, t)$ ، معادله (۱) به فرم لاگرانژی زیر بیان می شود [۱]:

$$(\dot{x}_\xi u) - (\dot{x}_\xi u + \dot{x} u_\xi) - \left( \frac{u_\xi}{x_\xi} \right) = x_\xi (\text{nonlocal term}), \quad (5)$$

که سمت راست تساوی فوق با جملات واکنش سراسری که در آن  $x$  با  $x(\xi, t)$  جایگزین شده متناظر می باشد. معادله زیر به عنوان مثالی برای معادله کلی (۱) بررسی می شود:

$$u_t - u_{xx} = u^2 - \int_0^1 u(y, t) dy, t > 0, x \in (0, 1) \quad (6)$$

شرایط مرزی و اولیه برای معادله فوق به ترتیب، به صورت  $u|_{\partial\Omega} = 0$  و  $u(x, 0) = 2 \sin \pi x$  در نظر گرفته می شوند.

## ۲ روش حل

$N = 101$  تعداد نقاط شبکه مکانی و  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots$  افزایش بازه زمانی است و گام زمانی انتگرالگیری بصورت  $\Delta t_n = \frac{dt}{\left[ \max_{(j)} \{u_j^n\} \right]^\gamma}$  انتخاب شده

است که در آن  $dt$  و  $\gamma'$  ثابتهای مثبت هستند.  $x_j^n = x(\xi_j, t_n)$  و  $u_j^n \approx u(x_j^n, t_n)$  به ترتیب نمایانگر شبکه و جواب مسئله در گام  $n$ ام هستند. جواب و شبکه در گام  $k$ ام  $\{x_j^k, u_j^k\}$ ،  $k = 0, 1, \dots, n$ ، معلوم است و مقادیر ذکر شده در گام  $t_{n+1}$ ام،  $\{x_j^{n+1}, u_j^{n+1}\}$ ، به روش زیر محاسبه می شود [۱]. ابتدا معادله فیزیکی (۶) در شبکه ثابت  $\{x_j^n\}$  روی  $[t_n, t_{n+1}]$  بصورت زیر گسسته سازی می شود:

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t_n} = \frac{2}{x_{j+1}^n - x_{j-1}^n} \left( \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1}}{x_{j+1}^n - x_j^n} - \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{x_j^n - x_{j-1}^n} \right) + \left( \bar{u}_j^{n+1} \right)^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \left( x_{j+1}^n - x_j^n \right) \frac{(\bar{u}_j^{n+1}) + (\bar{u}_{j+1}^{n+1})}{4}, j = 1, \dots, N. \quad (7)$$

پس از مرتب کردن معادله فوق ملاحظه می شود که نسبت به  $\tilde{u}$  غیر خطی است، لذا از روش تکراری خطی سازی نیوتن برای حل دستگاه غیرخطی (۷) استفاده می شود. برای حل، این دستگاه غیر خطی معادلات را به شکل

$$F(\tilde{U}) = 0 \quad (8)$$

در نظر بگیرید که  $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ ،  $\tilde{U}^{n+1} = (\tilde{u}_1^{n+1}, \tilde{u}_2^{n+1}, \dots, \tilde{u}_N^{n+1})^T$

روش تکراری نیوتن برای معادله (۸) بصورت زیر اجرا می شود:

۱.  $\tilde{U}^0$  به عنوان حدس اولیه (که همان شرایط اولیه می باشد) در نظر گرفته می شود.

۲. برای  $k = 0, 1, \dots$  تا برقراری شرط همگرایی مراحل زیر انجام شود:

۱.۲. حل دستگاه

$$J(\tilde{U}^{(k)}) \delta^{(k)} = -F(\tilde{U}^{(k)})$$

با استفاده از روش تجزیه  $LU$ ، گوس سایدل یا ژاکوبی.

۲.۲. قرار دهید  $\tilde{U}^{(k+1)} = \tilde{U}^{(k)} + \delta^{(k)}$

که  $J(\tilde{U}^{(k)})$  ماتریس ژاکوبین و  $\delta^{(k)}$  بردار تصحیح می باشد. تکرارهای نیوتن در

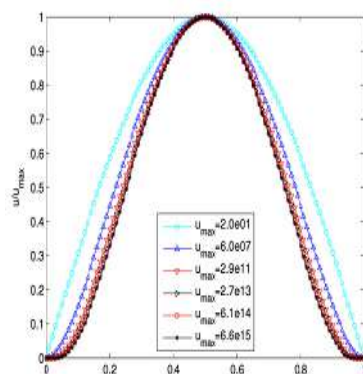
$$\|\tilde{U}^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k)}\| \leq 10^{-5}$$

برقرار باشد.

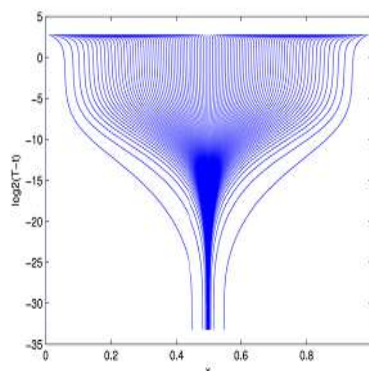
در مرحله بعد  $MMPDE$  (معادله (۲)) بدین صورت گسسته سازی می شود:

$$-\tau \frac{(x_{j+1}^{n+1} - 2x_j^{n+1} + x_{j-1}^{n+1}) - (x_{j+1}^n - 2x_j^n + x_{j-1}^n)}{\Delta t_n} = \frac{M(\tilde{u}_j^{n+1}) + M(\tilde{u}_{j+1}^{n+1})}{4} (x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}) - \frac{M(\tilde{u}_{j-1}^{n+1}) + M(\tilde{u}_j^{n+1})}{4} (x_j^{n+1} - x_{j-1}^{n+1}), j = 1, \dots, N$$

یک دستگاه معادلات خطی بصورت  $AX = B$  ایجاد می شود که  $A$  یک ماتریس سه قطری و  $X = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_N^{n+1})^T$  و  $B$  بردار سمت راست می باشد که با استفاده از روش تجزیه  $LU$  حل می شود و نقاط شبکه حرکت داده شده بدست می آید. سپس معادله تبدیل یافته (۵) همانند معادله (۶) گسسته سازی شده [۱] و با همان روش نیوتن حل می شود و جواب مسئله را روی شبکه تعدیل شده غیر یکنواخت نتیجه می دهد. نتایج در شکل های ۱.۲ و ۲.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۱.۲: جواب مسئله براساس روش معرفی شده در گامهای زمانی متفاوت.



شکل ۲.۲: مسیر حرکت نقاط شبکه.

## مراجع

- [1] J. MA, Y. JIANG, K. XIANG , *Numerical simulation of blowup in nonlocal reaction-diffusion equations using a moving mesh method* , J. Comput. Appl. Math. , **230** (2009) 8-21.
- [2] W. ZH. HUANG, Y. REN, R. D. RUSSELL , *Moving mesh partial differential equations (MMPDE) based upon the equidistribution principle* , SIAM J. Numer. Anal. , **31** (1994) 709-730.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین‌المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## ماتریس $t$ -شمولی و آرایه‌های متعامد

سید محسن نجفیان  
دانشگاه زنجان - گروه ریاضی  
najafian@znu.ac.ir

چکیده

طرح‌های بلوکی و تریدها به‌عنوان مفاهیم ترکیبیاتی دارای خاصیت‌های جالب جبری نیز می‌باشند. ماتریس  $t$ -شمولی در ارتباط با آن‌ها تعریف شده و زمینه‌ای برای کاربرد جبر خطی در بررسی طرح‌های بلوکی و تریدها فراهم آورده‌است. در این مقاله همین روش برای دو مفهوم دیگر ترکیبیاتی (آرایه‌های متعامد و تریدهای لاتین) به‌کار برده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: طرح بلوکی، ترید، ماتریس  $t$ -شمولی، آرایه متعامد، ترید لاتین.  
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 05B15.

## ۱ طرح‌های بلوکی و تریدها

فرض می‌کنیم  $V$  یک مجموعه  $v$  عضوی و  $t, k$  و  $\lambda$  اعداد صحیح هستند به‌طوری که  $0 < t \leq k \leq v$  و  $\lambda \geq 1$ .

تعریف ۱. یک  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) طرح بلوکی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی  $V$  مانند  $B$  (به‌نام بلوک‌ها) است به‌طوری که هر زیرمجموعه  $t$ -عضوی  $V$  دقیقاً مشمول  $\lambda$  بلوک باشد.

اگر  $0 \leq k \leq v$  آن‌گاه مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی  $V$  را با  $\sum v$  نشان می‌دهیم. برای مجموعه  $V = \{1, 2, \dots, v\}$  تعداد  $\binom{v}{k}$  زیرمجموعه  $k$  عضوی

متمايز وجود دارد. مجموعه  $v \sum k$  را با ترتيب فرهنگ لغتی مرتب می‌کنیم. اکنون نماد  $B_i$  را برای نمایش بلوک  $i$  ام  $v \sum k$ ،  $(1 \leq i \leq \binom{v}{k})$  به کار می‌بریم. حال برای هر  $t-(v, k, \lambda)$  طرح بلوکی، بردار فراوانی  $F = (f_1, f_2, \dots, f_{\binom{v}{k}})$  را نسبت می‌دهیم که در آن  $f_i$  تعداد تکرار بلوک  $B_i$  در خانواده بلوک‌های  $t$ -طرح است.

تعریف ۲. ماتریس  $t$ -شمولی  $P_t$ ، ماتریسی است که سطرها و ستون‌های آن به ترتیب متناظر با اعضای  $v \sum t$  و  $v \sum k$  با ترتيب فرهنگ لغتی بوده و در آیه‌های آن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$(P_t)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر عضو } i \text{ ام } v \sum t \text{ زیر مجموعه عضو } j \text{ ام } v \sum k \text{ باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قضیه ۱. اگر  $F$  بردار فراوانی یک  $t-(v, k, \lambda)$  طرح بلوکی باشد آن‌گاه  $P_t F = \lambda \bar{I}$ . ( $\bar{I}$  برداری است که همه مولفه‌های آن مقدار ثابت ۱ است). برعکس، اگر  $F$  یک بردار با مولفه‌های صحیح نامنفی باشد که به ازای یک عدد صحیح مثبت  $\lambda$  در رابطه  $P_t F = \lambda \bar{I}$  صدق کند آن‌گاه  $F$  بردار فراوانی یک  $t-(v, k, \lambda)$  طرح بلوکی است.

تعریف ۳. فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  دو خانواده از اعضای  $v \sum k$  باشند به طوری که  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$  و هر عضو  $t$   $v \sum t$  به تعداد مساوی در اعضای خانواده‌های  $T_1$  و  $T_2$  ظاهر گردد، یعنی تعداد بلوک‌های شامل هر زیرمجموعه  $t$  عضوی  $V$ ، در  $T_1$  و  $T_2$  یکسان باشد. در این صورت  $T = (T_1, T_2)$  را یک  $t-(v, k)$  ترید می‌نامیم.

می‌توانیم با بهره‌گیری از خواص ماتریس  $P_t$  تعریف معادل دیگری برای  $t-(v, k)$  تریدها ارائه دهیم. تعریف زیر را از [۱] می‌آوریم. معادل بودن این دو تعریف به آسانی قابل بررسی است.

تعریف ۴. بردار  $T$  با مولفه‌های صحیح را یک  $t-(v, k)$  ترید می‌نامیم هرگاه  $P_t T = \bar{0}$ . مجموع مولفه‌های مثبت  $T$  حجم این ترید گفته می‌شود.

پس تریدها همان فضای پوچ ماتریس  $P_t$  هستند. بنابراین برای مشخص کردن آن‌ها کافی است یک پایه فضای پوچ  $P_t$  را تعیین نماییم.

## ۲ آرایه‌های متعامد و تریدهای لاتین

فرض کنید  $V = \{1, 2, \dots, v\}$  و  $t, k$  و  $\lambda$  اعداد صحیح هستند به طوری که  $0 \leq t \leq k$  و  $\lambda \geq 1$ . فرض کنید  $V^k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in V, i = 1, \dots, k\}$ .

$I$  را یک زیرمجموعه  $t$ -عضوی از مجموعه  $\{1, \dots, k\}$  می‌گیریم و قرار می‌دهیم  $V_I^t = \{(u_1, \dots, u_t)_I \mid u_i \in V, i = 1, \dots, t\}$ . برای هر عضو  $(x_1, \dots, x_k)$  از  $V^k$  و هر عضو  $(u_1, \dots, u_t)_I$  از  $V_I^t$  (که در آن  $I = \{i_1, \dots, i_t\}$  و  $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ ) تعریف می‌کنیم

$$(u_1, \dots, u_t)_I \in (x_1, \dots, x_k) \iff u_j = x_{i_j}, j = 1, \dots, t.$$

**تعریف ۵.** یک آرایه متعامد  $OA_t(v, k, \lambda)$  روی مجموعه  $V$ ، خانواده‌ای از اعضای  $V^k$  است به طوری که برای هر زیرمجموعه  $t$ -عضوی  $I$  از  $\{1, \dots, k\}$ ، هر عضو  $V_I^t$  دقیقاً متعلق به  $\lambda$  عضو از این خانواده باشد. هر  $OA_t(v, k, \lambda)$  را به صورت یک آرایه  $N \times k$  نشان می‌دهیم که سطرهاى آن همان  $k$ -تائی‌های مرتب عضو  $OA_t(v, k, \lambda)$  است.

**تعریف ۶.** ماتریس  $t$ -شمولی  $M = M(t(v, k))$ ، ماتریسی است که ستون‌های آن با اعضای  $V^k$  با ترتیب فرهنگ لغتی و سطرهاى آن با اعضای  $V_I^t$   $\cup I$  متناظر می‌شوند (اجتماع روی همه زیرمجموعه‌های  $t$ -عضوی مجموعه  $\{1, \dots, k\}$  گرفته می‌شود). درآیه‌های ماتریس  $\circ$  یا  $1$  هستند که به شکل زیر تعیین می‌شوند:

$$M_{(u_1, \dots, u_t)_I, (x_1, \dots, x_k)} = 1 \iff (u_1, \dots, u_t)_I \in (x_1, \dots, x_k).$$

پس  $M(t(v, k))$  ماتریسی از مرتبه  $\binom{k}{t} v^t \times v^k$  می‌باشد.

برای آرایه متعامد  $OA_t(v, k, \lambda)$ ، بردار فراوانی  $F$  با مولفه‌های صحیح نامنفی را نسبت می‌دهیم. مولفه‌های  $F$  با اعضای  $V^k$  با ترتیب فرهنگ لغتی متناظر هستند و برای هر  $F(x)$ ،  $x \in V^k$  تعداد تکرار  $x$  در خانواده  $OA_t(v, k, \lambda)$  است.

**لم ۱.**  $F$  بردار فراوانی یک آرایه متعامد است اگر و تنها اگر  $F \geq 0$  و عدد صحیح  $\lambda$  موجود باشد به طوری که  $MF = \lambda \bar{1}$ .

**تعریف ۷.** یک  $t$ -ترید لاتین  $T = (T_1, T_2)$  دو خانواده از هم جدای  $T_1$  و  $T_2$  از اعضای  $V^k$  است به طوری که به ازای هر زیرمجموعه  $t$ -عضوی  $I$  از مجموعه  $\{1, \dots, k\}$  و هر عضو  $(u_1, \dots, u_t)_I$  از  $V_I^t$ ، تعداد اعضائی از  $T_1$  و  $T_2$  که شامل  $(u_1, \dots, u_t)_I$  هستند مساوی باشند.

یک تعریف جبری معادل نیز می‌توان برای  $t$ - $(v, k)$  ترید لاتین ارائه کرد. در این تعریف تریدهای لاتین به عنوان فضای پوچ ماتریس  $M(t-(v, k))$  مطرح می‌شوند. خانبان و دیگران در [۲] پایه این فضا را در حالت  $k = t + 1$  مشخص کرده‌اند. این تعریف را در زیر می‌آوریم.

تعریف ۸. بردار  $T$  با مولفه‌های صحیح را یک  $t$ - $(v, k)$  ترید لاتین می‌نامیم هرگاه  $MT = \bar{0}$ . مجموع مولفه‌های مثبت  $T$  حجم این ترید لاتین گفته می‌شود.

محمودیان و نجفیان در [۳] حجم تریدهای لاتین را مورد بررسی قرار داده‌اند. جالب است که  $t$ -تریدهای لاتین در ارتباط مستقیم با آرایه‌های متعامد قرار می‌گیرند. در مورد ارتباط آن‌ها قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید  $A_1$  و  $A_2$  دو آرایه متعامد با پارامترهای یکسان  $k, t, v$  و  $\lambda$  باشند. آن‌گاه  $(T_1, T_2)$  که  $T_1 = A_1 - A_2$  و  $T_2 = A_2 - A_1$  یک  $t$ - $(v, k)$  ترید لاتین است و بعکس، برای هر  $t$ - $(v, k)$  ترید لاتین  $(T_1, T_2)$  دو آرایه متعامد  $A_1$  و  $A_2$  با پارامترهای یکسان  $k, t, v$  وجود دارند به طوری که  $T_1 = A_1 - A_2$  و  $T_2 = A_2 - A_1$ .

## مراجع

- [1] A. S. Hedayat. The theory of trade-off for  $t$ -designs. In *Coding theory and design theory, Part II*, volume 21 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 101–126. Springer, New York, 1990.
- [2] A. A. Khanban, M. Mahdian, and E. S. Mahmoodian. A linear algebraic approach to orthogonal arrays and Latin squares. *Ars Combinatoria*, to appear. arXiv:0905.0195v1 [math.CO]2 May 2009.
- [3] E. S. Mahmoodian and M. S. Najafian. Possible volumes of  $t$ - $(v, t + 1)$  Latin trades. *Ars Combinatoria*, to appear. arXiv:0905.0191v1 [math.CO]2 May 2009.
- [4] E. S. Mahmoodian and M. S. Najafian.  $t$ - $(v, k)$  trades and  $t$ - $(v, k)$  Latin trades. *Utilitas Mathematica*, to appear.

## روش تفاضلی ضمنی-ADI برای حل معادله انتشار کسری روی زمان و مکان دوبعدی

فرهاد نصراله زاده \*

f.nasr@modares.ac.ir

سید محمد حسینی

hossei.m@modares.ac.ir

### چکیده

معادلات انتشار کسری به عنوان تعمیمی از معادلات انتشار کلاسیک برای  
مدلسازی در هیدرولوژی، ریاضیات مالی و جریان سیال بکار می رود. در این  
مقاله ما یک روش تفاضلی ضمنی برای حل معادله انتشار کسری دوبعدی ارائه  
می شود. در این مقاله برای نخستین بار از روش ADI برای حل معادله کسری  
روی زمان و مکان استفاده می شود، در ضمن روش ارائه شده پایدار می باشد که  
برای اثبات پایداری از روش ماتریسی استفاده شده است.

واژه های کلیدی: معادله انتشار کسری، روش های تفاضل متناهی.

رده بندی موضوعی: 60J60, 26A33.

### ۱ مقدمه

حل تحلیلی معادله انتشار کسری دو بعدی با ضرایب متغیر مشکل می باشد، لذا در  
اینجا یک روش عددی برای حل آن ارائه می دهیم. معادله انتشار کسری دو بعدی به  
شکل زیر است:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha} = d(x, y, t) \frac{\partial^\beta u(x, y, t)}{\partial x^\beta} + c(x, y, t) \frac{\partial^\gamma u(x, y, t)}{\partial y^\gamma} + q(x, y, t), \quad (1)$$

که روی ناحیه مستطیلی  $x_L < x < x_H$  و  $y_L < y < y_H$  در نظر گرفته می شود و  $0 < \alpha \leq 1$  و  $0 < \beta \leq 1$  و  $0 < \gamma \leq 1$ . همچنین  $d(x, y, t) > 0$  و  $e(x, y, t) > 0$  ضرایب انتشار می باشد، تابع نیروی  $q(x, y, t)$  برای نمایش منبع بکار می رود. برای سادگی فرض کنیم  $x_L = y_L = 0$ .

مشتق کسری روی مکان مشتق ریمان-لیوویل است که بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^\beta u(x, y, t)}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_L^x \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^{\alpha + 1 - n}} d\xi \quad (2)$$

که  $n = [\beta]$ . همچنین مشتق کسری روی زمان مشتق کاپتو است:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial^m u(x, y, \eta)}{\partial \eta^m} \frac{\partial \eta}{(t - \eta)^\alpha} \quad (3)$$

که  $m = [\alpha]$ .

## ۲ روش عددی

فرض کنید  $t_n = n\Delta t$  و  $n = 0, 1, 2, \dots, K$  و  $0 \leq t_n \leq T$  برای زمان  $\Delta x = (x_H - x_L)/N_x = h_x > 0$  و  $\Delta y = (y_H - y_L)/N_y = h_y > 0$  طول گام مکان در جهت  $x$  و  $y$ . شرایط اولیه  $u_{i,j}^0 = f_{i,j} = f(x_i, y_j)$  و شرایط مرزی دیریکله روی مرزهای مستطیل در نظر می گیریم.

برای تقریب مشتقات کسری ریمان-لیوویل روی مکان از تقریب گرانیوالد انتقال یافته در زمان  $t_{n+1}$  استفاده می کنیم [۲]. از آنجاییکه در معادله انتشار کسری روی زمان و مکان دوبعدی  $0 < \alpha < 1$  می باشد با استفاده از قضیه ای در [۴] مشتقات ریمان-لیوویل و کاپتو با هم برابرند، پس اگر شرایط اولیه صفر باشند، می توان از تقریب های بکار رفته برای مشتق ریمان-لیوویل برای مشتق کاپتو استفاده کرد. در اینجا از تقریب گرانیوالد معمولی در زمان  $t_{n+1}$  برای تقریب مشتق کاپتو استفاده می کنیم. با جایگذاری تقریب های بیان شده در معادله (۱) و ساده کردن آن داریم:

$$(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\beta, x} - (\Delta t)^\alpha \delta_{\gamma, y}) u_{i,j}^{n+1} = \delta_{\alpha, t} u_{i,j}^{n+1} + (\Delta t)^\alpha q_{i,j}^{n+1} \quad (4)$$

که در آن عملگرهای تفاضل متناهی بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\delta_{\beta, x} u_{i,j}^{n+1} = \frac{d_{i,j}^{n+1}}{(\Delta x)^\beta} \sum_{p=0}^{i+1} g_{\beta, p} u_{i-p+1, j}^{n+1},$$

$$\delta_{\gamma, y} u_{i,j}^{n+1} = \frac{e_{i,j}^{n+1}}{(\Delta y)^\gamma} \sum_{q=0}^{j+1} g_{\gamma, q} u_{i, j-q+1}^{n+1},$$

$$\delta_{\alpha,t} u_{i,j}^{n+1} = - \sum_{k=1}^{n+1} g_{\alpha,k} u_{i,j}^{n+1-k}.$$

و ضرایب گرانوالد بصورت زیر می باشند:

$$g_{\alpha,k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}.$$

از روش ADI به منظور کاهش عملیات محاسباتی استفاده می کنیم، برای استفاده از این روش معادله فوق را بصورت زیر می نویسیم:

$$(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\beta,x})(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\gamma,y}) u_{i,j}^{n+1} = \delta_{\alpha,t} u_{i,j}^{n+1} + (\Delta t)^\alpha q_{i,j}^{n+1}, \quad (5)$$

شکل ماتریسی این رابطه بصورت زیر است:

$$STU^{n+1} = -g_{\alpha,1} IU^n - g_{\alpha,2} IU^{n-1} - \dots - g_{\alpha,n+1} IU^0 + R^{n+1}, \quad (6)$$

که ماتریسهای  $S$ ،  $T$  مربوط به اپراتورهای  $(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\beta,x})$ ،  $(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\gamma,y})$  می باشند. با استفاده از جواب میانی  $u_{i,j}^*$  رابطه فوق را به دو رابطه تبدیل می کنیم:

$$(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\beta,x}) u_{i,j}^* = \delta_{\alpha,t} u_{i,j}^{n+1} + (\Delta t)^\alpha q_{i,j}^{n+1}, \quad (7)$$

$$(1 - (\Delta t)^\alpha \delta_{\gamma,y}) u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^*. \quad (8)$$

الگوریتم زیر به کمک روش ADI در گام زمانی  $t_{n+1}$  در دو گام زیر اجرا می شود:

(۱) ابتدا با ثابت نگه داشتن  $y_j$  مساله را در جهت  $x$  برای بدست آوردن جوابهای میانی  $u_{i,j}^*$  با استفاده از رابطه (۷) حل می کنیم.

(۲) سپس با ثابت نگه داشتن  $x_i$  معادله را در جهت  $y$  با استفاده از رابطه (۸) حل می کنیم.

### ۳ سازگاری و پایداری روش

روش ارائه شده دارای مرتبه اول زمانی و مکانی می باشد [۳]. در ضمن قضایای پایداری روش را بصورت زیر بیان و ثابت کرده ایم که اثباتها در [۱] آمده است.

قضیه ۱. روشهای یک بعدی اوپلر ضمنی تعریف شده با معادلات (۷) و (۸) برای  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 < \beta < 2$ ,  $1 < \gamma < 2$  بدون شرط پایدار هستند.

روش تفاضلی ضمنی-ADI برای حل معادله انتشار کسری روی زمان و مکان دوبعدی ۳۰۵

قضیه ۲. اگر  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 < \beta < 2$ ,  $1 < \gamma < 2$  و ماتریسهای  $T$ ,  $S$  جابجایی باشند آنگاه روش تفاضلی ضمنی-ADI تعریف شده با رابطه (۶) بدون شرط پایدار است.

مثال عددی معادله دیفرانسیل کسری زیر در دامنه متناهی  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  و زمان  $0 \leq t \leq T = 1$  حل می‌شود:

$$\frac{\partial^{\alpha/5} u(x, y, t)}{\partial t^{\alpha/5}} = \frac{\Gamma(2/8)}{\Gamma(4)} x^{1/2} \frac{\partial^{1/2} u(x, y, t)}{\partial x^{1/2}} + \frac{\Gamma(2/2)}{\Gamma(4)} y^{1/8} \frac{\partial^{1/8} u(x, y, t)}{\partial y^{1/8}} + x^3 y^3 \left( \frac{8}{3\Gamma(5/5)} t^{1/5} - 2t^2 - 2 \right)$$

و شرط اولیه  $u(x, y, 0) = x^3 y^3$  است و شرایط مرزی دیریکله روی ناحیه مستطیلی به شکل  $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = 0$  و  $u(1, y, t) = (t^2 + 1)y^3$  و  $u(x, 1, t) = (t^2 + 1)x^3$  برای  $0 \leq t \leq 1$  برقرار است. جواب دقیق معادله دیفرانسیل  $u(x, y, t) = (t^2 + 1)x^3 y^3$  است.

جدول ۱: ماکزیمم خطا در زمان  $t = 1$  با روش تفاضلی ضمنی-ADI

$\Delta t$	$\Delta x = \Delta y$	ماکزیمم خطا
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$6/027 \times 10^{-3}$
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$1/5473 \times 10^{-2}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$2/0936 \times 10^{-2}$

## مراجع

- [۱] فرهاد نصراله‌زاده، حل عددی معادله انتشار کسری دوبعدی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، سال ۱۳۸۹.
- [2] C. Tadjeran, M.M. Meerschaert, A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation, J. Comput. Phys. 220 (2007) 813-823.
- [3] M.M. Meerschaert, H.P. Scheffler, C. Tadjeran, Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation, J. Comput. Phys. 211 (2006) 249-261.
- [4] M. Weilbeer, Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equation and Their Analytical Background, Phd Thesis, Braunschweig University.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بیسن المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## هم‌زمانی در شبکه‌ای از $n$ نورون یک بعدی الکتریکی

بهرروز رئیسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شاهد تهران بزرگراه خلیج فارس، روبه روی حرم مطهر امام خمینی (ره)

سمانه اسلامی

نشانی شامل نشانی دانشگاه و پست الکترونیکی نویسنده دوم

چکیده

شبکه‌ای از  $n$  نورون یک بعدی را در نظر بگیرید. این نورون‌ها توسط شبکه‌ای از گراف‌ها بایکدیگر پیوند یافته‌اند. هر یک از این نورون‌ها را به عنوان یک سیستم دینامیکی که برهم‌دیگر اثر می‌گذارند، در نظر بگیرید. در اینجا (بافرض فرسایشی بودن هر راس) شرایطی را وابسته به توپولوژی دینامیک گراف و وزن‌ها و قوت اتصالات آنها یافتیم که تحت آن شرایط، دستگاه سرانجام هم زمان (پایدار) شده و دارای یک نقطه‌ی پایدار مجانبی سراسری گردد.

واژه‌های کلیدی: .

رده‌بندی موضوعی (MSC2000): .

### ۱ مقدمه

رهیافت ریاضی دانان در مورد نورون‌ها، بررسی دینامیک نورون‌ها و شبکه‌ی نورون‌ها می‌باشد. هاچکینگ و هاکسلی [۴] چگونگی رفتار نورون‌ها را بررسی کردند، در این مقاله اثرات توپولوژیک شبکه‌ی نورون‌ها بر دینامیک جمعی شبکه مورد بررسی واقع شده است. یادگیری به عنوان هم‌زمانی شبکه‌های عصبی، توصیف شده است، همچنین شرایط هم‌زمانی بر حسب کمیت‌های ناوردای تئوری گراف، محاسبه شده

اند. به هر گراف می‌توان یک ماتریس نسبت داد، اگر ماتریس مربعی  $A$  را بادرایه‌های  $a_{ij}$  در نظر بگیریم در گراف نظیر یک ماتریس مربعی به هر سطر یک راس نسبت می‌دهیم به طور دقیق‌تر به ازای هر کمان  $(i, j)$  در گراف، وزن  $a_{ij}$  را به آن نسبت می‌دهیم.

## ۲ نتایج اصلی

فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  متغیرهای ولتاژ  $n$  نورون یک بعدی باشند، معادله‌ی حاکم بر هر کدام، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\dot{x} = I - g_l(x - E_l) - g_n m_\infty(x)(x - E_{Na}) - g_k n_\infty(x)(x - E_k) \quad (۱)$$

که در آن  $I$  جریان کل شارش‌یافته در طی یک قطعه از غشاء سلول است،  $x$  نماد پتانسیل غشاء و  $E_l, E_{Na}, E_k$  پتانسیل تعادل نرنست می‌باشند. پارامترهای ماکزیمم هدایت از یک کانال را با  $g_l, g_{Na}, g_k$  نمایش داده، که همواره مثبت هستند.  $\dot{x}$  مشتق متغیر ولتاژ  $x$  و  $(x - E_i)$  نیروی محرکه‌ی مربوط به یون  $i$  ام است. این معادله به فرم ۱ که استاندارد سیستم دینامیکی است نوشته شده است. در اینجا رفتار هر دو نورون ایزوله با یکدیگر مشابه می‌باشد اگر  $\varepsilon_{ij}$  درایه‌های ماتریس اتصال نورون‌ها باشد، آنگاه دینامیک شبکه به صورت زیر خواهد بود.

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \varepsilon_{i,j}(x_j - x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (۲)$$

فرض کنید ماتریس  $G_{n \times n} = (\varepsilon_{ij})$ ، یک ماتریس متقارن باشد، که مجموعه‌ی درایه‌های هر سطر آن صفر است. این شرط، شرط لازم پایداری می‌باشد و عناصر غیر قطر آن نامنفی‌اند. یعنی

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,i} &= -\sum_{j=1, j \neq i}^n \varepsilon_{i,j} & i &= 1, 2, \dots, n \\ \varepsilon_{i,j} &= \varepsilon_{j,i} & \varepsilon_{i,j} &\geq 0 \quad i \neq j \end{aligned}$$

تعریف ۱. گوییم دستگاه  $\dot{x} = F(x)$  هم‌زمان سراسر است اگر برای هر جواب  $(x_1, \dots, x_n)$  داشته باشیم  $\forall i, j \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0$

تعریف ۲. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند با  $n$  راس و  $m$  یال باشد، به ازای هر زوج گرهی  $(i, j)$  یک مسیر از گرهی  $i$  ام به گرهی  $j$  ام انتخاب کرده، و با  $p_{i,j}$  نمایش می‌دهیم معمولاً  $p_{i,j}$  را کوتاهترین مسیر از گرهی  $i$  ام به گرهی  $j$  ام در نظر می‌گیریم و  $k \in p_{i,j}$  به این معنی است که یال  $k$  ام در مسیر  $p_{i,j}$  قرار دارد، و  $Z(p_{i,j})$  یعنی تعداد یال‌هایی که در مسیر  $p_{i,j}$  قرار دارد و  $b_k(n, m) = \sum_{j>i} Z(p_{i,j})$  مجموعه‌ی طول‌ها از همه‌ی مسیرهای انتخاب شده‌ی  $p_{i,j}$  است، که از یال  $k$  ام عبور می‌کند.

بلیخ در [۹] بررسی جدیدی برای پایداری گراف همبند ارائه دادند، و ثابت کردند که منیفلد هم زمانی سیستم ۱ پایدار مجانبی است، هرگاه  $\epsilon_k > \frac{a}{n} b_k(n, m), k = 1, 2, \dots, m$  (عناصر غیر صفر ماتریس  $G$ ) است، که نشان دهنده‌ی پیوند و پیوند قوی بین رئوس است که  $\epsilon_k = \epsilon_{i_k j_k}$  (مربوط به پیوندهایی است که ضریب پیوندی آنها وجود دارند)  $\epsilon$  آستانه‌ی هم زمانی در نوسانگرهای پیوند یافته است. در تئوری گراف مقدار  $\frac{b_k}{n}$  [۲] برای پیکربندی پیوند اصلی نظیر گراف حلقه، گراف ستاره و ستاره‌ها همبند محاسبه شده است و نشان داده شده است که  $\frac{b_k}{n}$  مقدار بهینه‌ای برای  $\frac{1}{\lambda_1}$  است زمانی که تعداد گره‌ها زیاد است مثال از یک شبکه با گراف متقارن پیوند یافته به صورت زیر می‌باشد:



بنابراین علاوه بر قوت اتصال نوروں‌ها تعداد نوروں‌ها در افزایش آستانه هم زمان موثر است.

قضیه ۱. فرض کنید  $n$  نوروں با متغیرهای ولتاژی  $x_1, \dots, x_n$  در یک شبکه با ماتریس اتصال  $G = (\epsilon_{ij})$  قرار داشته باشند، اگر  $\epsilon_k > \frac{a}{b} b_k(n, m)$  باشد، دستگاه زیر

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon_{i,j} (x_j - x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

دارای یک ریشه منحصر به فرد  $x = (x^*, x^*, \dots, x^*)$  است که  $F(x^*) = 0$  که  $x$  یک نقطه پایدار مجانب برآ این دستگاه م‌باشد.

با توجه به اینکه معادله  $F(z) = 0$  دارای یک یا سه یا پنج ریشه است [۵] و از آنجا که همیشه ریشه وسط (در حالتی که سه یا پنج ریشه داشته باشیم) یک نقطه ناپایدار در دینامیک  $\dot{z} = F(z)$  است، نتیجه می‌گیریم برای چنین  $z$  ی نقطه‌ی  $x = (z, z, \dots, z)$

یک نقطه ناپایدار برای دستگاه ۳ است و این متناقض با هم‌زمانی دستگاه ۳ است پس تحت این شرایط  $F(z) = 0$  نمی‌توان سه یا پنج ریشه داشته باشد در حالتی که دستگاه  $F(z) = 0$  یک ریشه  $x^*$  داشته باشد، آنگاه دستگاه دینامیکی یک بعدی  $\dot{z} = F(z)$  در آن نقطه پایدار می‌باشد، بنابراین دستگاه ۳ نیز در نقطه  $x = (x^*, x^*, \dots, x^*)$  پایدار می‌باشد، پس شبکه هم‌زمان سراسر است بنابراین هیچ نقطه تکین خارج از منیفولد هم‌زمانی موجود نمی‌باشد، زیرا اگر  $y = (y^*, y^*, \dots, y^*)$  یک نقطه تکین خارج از منیفولد هم‌زمانی باشد آنگاه  $i \neq j$  یافت می‌شود که  $y_i \neq y_j$  بنابراین  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i - y_j\| \neq 0$  و این یعنی همه نقاط تکین دستگاه ۳ باید روو منیفولد هم‌زمانی یعنی خط  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$  قرار گیرند. ماتریس ژاکوبی دستگاه عبارت است از:

$$J = \begin{pmatrix} F'(x^*) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon_{1j} & -\epsilon_{12} & \dots & -\epsilon_{1n} \\ -\epsilon_{21} & F'(x^*) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon_{2j} & \dots & -\epsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\epsilon_{n1} & \dots & \dots & F'(x^*) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon_{nj} \end{pmatrix}$$

در حالتی را که هذلولوی باشد همه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن منفی است و اگر یکی از مقادیر ویژه صفر باشد انشعاب گره‌ی زینی رخ می‌دهد.

## مراجع

- [1] Belykh, I. Hasler, M. Lauret, M. & Nijmeijer, H. [2005] "Synchronization and graph topology." Int. J. bifurcation and Chaos 15. 3423-3433.
- [2] Belykh, V. N. Belykh, I.V. & Hasler, M. [2004a] "Connection graph stability method for synchronization coupled systems," Physica D195, 159-187.
- [3] Kuznetsov, Y. [1983], one-dimensional invariant manifolds in ordinary differential equations depending upon parameters FORTRAN software series 8, Research computing centre USSR Academy of sciences pushchino. In Russian.
- [4] Eugene, M. Izhikevich, Dynamical Systems in Neuroscience [2007], Massachusetts Institute of Technology.

[۵] "انشعاب در مدل‌های مبتنی بر رسانایی مینیمال"، پایان‌نامه حامد زحمتی، دانشگاه شاهد، ۱۳۸۹.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین‌المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## برخی از کاربردهای $T$ -ماتریس ها در ماتریس‌های معین مثبت \*

عظیم ریواز

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی، a.rivaz@mail.uk.ac.ir

فرید صابری موحد

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی، math.nla.2010@gmail.com

### چکیده

در این مقاله با استفاده از  $T$ -ماتریس ها تجزیه ای جدید برای یک  
ماتریس  $n \times n$  متقارن معین مثبت ارائه می شود. همچنین با استفاده از ساختار  
 $T$ -ماتریس ها نشان داده می شود که با هر بردار دلخواه  $x \in \mathbb{R}^n$  می توان یک  
ماتریس نیمه معین مثبت ساخت.

واژه های کلیدی:  $T$ -ماتریس، تجزیه ماتریس، ماتریس معین مثبت.  
رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F30.

### ۱ مقدمه

روش های متعددی به منظور تجزیه یک ماتریس به فرم های متعارفی مانند فرم  
جردن و فرم شور مورد استفاده قرار گرفته است. ماتریس  $n \times n$  و متقارن  $A$  یک  
ماتریس معین مثبت (نیمه معین مثبت) است هرگاه برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  داشته باشیم  
 $x^T A x > 0$  ( $x^T A x \geq 0$ ). تجزیه چولسکی یکی از تجزیه های معروف  $A$  می باشد  
که برای جزییات بیشتر می توان به مرجع [۱] مراجعه نمود.

\* این مقاله از حمایت قطب جبرخطی و بهینه سازی برخوردار شده است.

تعریف ۱. [۲] یک ماتریس  $n \times n$  مانند  $T = (b_{ij})$  یک  $T$ -ماتریس نام دارد اگر  $b_{ij} = b_{ji} = t_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  و  $j = 1, \dots, n$  با فرض اینکه  $t_i \in \mathbb{R}$  و  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  به عبارت دیگر

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \quad (۱)$$

لم ۱. فرض کنید  $T$  یک  $T$ -ماتریس باشد. آنگاه

(۱)  $T$  معین مثبت است.

(۲)  $T^{-1} = (d_{ij})$  یک ماتریس سه قطری است که با فرض  $t_0 = 0$  داریم:

$$\begin{cases} d_{ii} = \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)} & i = 1, \dots, n-1 \\ d_{nn} = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \\ d_{i,i+1} = d_{i+1,i} = \frac{1}{t_i - t_{i+1}} & i = 1, \dots, n-1 \\ d_{ij} = 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲)$$

لم ۲. اگر در تعریف ۱ داشته باشیم  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  آنگاه ماتریس  $T$  نیمه معین مثبت است.

## ۲ تجزیه ماتریس معین مثبت $A$ به یک $T$ -ماتریس

قضیه ۱. برای هر ماتریس  $n \times n$  معین مثبت  $A$ ، یک ماتریس  $n \times n$  پایین مثلثی و منحصر به فرد  $L$  با درآیه های قطری واحد و یک  $T$ -ماتریس منحصر به فرد  $T$  وجود دارد که  $A = LTL^T$ .

برهان: اثبات قضیه با استفاده از استقرای ریاضی روی  $n$  انجام می گیرد. برای  $n = 2$ ،  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ ، اگر بگیریم  $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}-a_{11}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه  $A = L_2 T_2 L_2^T$  بطوریکه  $T_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{11} & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2+a_{11}^2}{a_{11}} \end{bmatrix}$ . به سادگی مشاهده می شود که:

برخی از کاربردهای  $T$ -ماتریس ها در ماتریس های معین مثبت ————— ۳۱۳

(۱)  $L_2$  و  $T_2$  منحصر به فرد می باشند.

(۲) با توجه به خواص  $A$ ،  $\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2+a_{11}^2}{a_{11}}$ ،  $0 < a_{11} < \infty$  و در نتیجه  $T_2$  یک  $T$ -ماتریس می باشد.

در ادامه با فرض اینکه قضیه برای هر ماتریس معین مثبت از مرتبه کوچکتر یا مساوی  $n-1$  برقرار باشد، می توان حکم قضیه را اثبات نمود.  $\square$

### ۳ ساخت یک ماتریس نیمه معین مثبت با استفاده از بردار دلخواه $x \in \mathbb{R}^n$

در این بخش با استفاده از هر بردار دلخواه  $x \in \mathbb{R}^n$  و ساختار  $T$ -ماتریس ها، یک ماتریس نیمه معین مثبت ارایه می دهیم. اگر  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  برای هر  $i, j = 1, \dots, n$  داریم:

$$|x_i| + |x_j| - |x_i - x_j| = \begin{cases} 0 & x_i x_j \leq 0 \\ 2|x_i| & 0 < x_i \leq x_j \\ 2|x_j| & x_j \leq x_i < 0 \end{cases} \quad (3)$$

اگر ماتریس  $C(x)$  را به صورت  $C(x) = (c_{ij})$  که  $c_{ij} = |x_i| + |x_j| - |x_i - x_j|$  تعریف کنیم، واضح است که  $C(x)$  یک ماتریس متقارن است. نشان می دهیم که  $C(x)$  یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

حالت اول: اگر  $0 < x_1 \leq \dots \leq x_n$ ، آنگاه طبق ۳

$$C(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_1 & \dots & 2x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \end{bmatrix}$$

ولذا طبق لم ۲،  $C(x)$  یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

حالت دوم: اگر  $0 < x_1 \leq \dots \leq x_n$  آنگاه طبق ۳ و مشابه با حالت اول،  $C(x)$  نیمه معین مثبت است.

حالت سوم: اگر برخی درایه های  $x$  مثبت، برخی منفی و برخی صفر باشند آنگاه بردار  $x$  را با استفاده از ماتریس جایگشت  $P$  به بردار  $y \in \mathbb{R}^n$  به صورت  $y = Px = (y_1, \dots, y_n)^T$  تبدیل می کنیم بطوریکه  $y_1 = \dots = y_m = 0$  و  $0 < y_{m+1} \leq \dots \leq y_{m+j} < \infty$  و  $y_n \leq \dots \leq y_{m+j+1} < 0$  در

این حالت  $C(y) = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  بطوریکه

$$C_1 = [e],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2|y_{m+1}| & 2|y_{m+1}| & \cdots & 2|y_{m+1}| \\ 2|y_{m+1}| & 2|y_{m+2}| & \cdots & 2|y_{m+2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2|y_{m+1}| & 2|y_{m+2}| & \cdots & 2|y_{m+j}| \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 2|y_{m+j+1}| & 2|y_{m+j+1}| & \cdots & 2|y_{m+j+1}| \\ 2|y_{m+j+1}| & 2|y_{m+j+2}| & \cdots & 2|y_{m+j+2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2|y_{m+j+1}| & 2|y_{m+j+2}| & \cdots & 2|y_n| \end{bmatrix}.$$

طبق لم ۲،  $C_2$  و  $C_3$  ماتریس های نیمه معین مثبت می باشند. بنابراین  $C(y)$  یک ماتریس نیمه معین مثبت می باشد. در ادامه می توان ماتریس جایگشت  $P'$  را به گونه ای یافت که  $C(x) = P'C(y)P'^T$  و لذا  $C(x)$  یک ماتریس نیمه معین مثبت می باشد.

بنابراین با توجه به حالات سه گانه فوق، برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  یک ماتریس نیمه معین مثبت می باشد.

## مراجع

- [1] J. W. DEMMEL, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [2] M. MOHSENI MOGHADAM, A. RIVAZ, *Algorithms for the Inverse Eigenvalues Problem Concerning Jacobi Matrices and T-matrices*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, vol 31, pp 111-118, 2007.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
پنجمین المپی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## جواب های کارا در مسائل برنامه ریزی خطی چند هدفی

فرهاد روحی میانایی

دانشگاه زنجان farhadrohi2010@gmail.com

محسن دربانانی

دانشگاه زنجان darbani\_m@yahoo.com

### چکیده

مسائل بهینه سازی خطی با چندین تابع هدف که به طور همزمان در نظر گرفته می شوند را مسائل بهینه سازی خطی چند هدفی می نامند. به طور معمول یک جواب بهینه برای تمام توابع هدف به طور همزمان وجود ندارد، لذا در این نوع از مسائل مجموعه ای از جواب های کارا به دست می آورند. در این مقاله الگوریتمی برای پیدا کردن مجموعه جواب مسائل برنامه ریزی خطی چند هدفی با متغیرهای تصمیم کراندار ارائه می دهیم.

واژه های کلیدی: برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی خطی چند هدفی، متغیرهای کراندار، متغیر کارا، جواب کارا.

### ۱ مقدمه

فرم استاندارد مسئله ی برنامه ریزی خطی چند هدفی با متغیرهای تصمیم کراندار به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} \max & Cx \\ & Ax = b \\ & d^- \leq x \leq d^+ \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $c$  و  $A$  به ترتیب ماتریس های  $k \times n$  و  $m \times n$  و  $b \in R^m$  و  $d^+ \in R^n, d^- \in R^n$ . مجموعه متغیرهای تصمیم شدنی  $S$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S = \{x \in R^n, Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}$$

تعریف ۱. متغیرشدنی  $x^\circ \in R^n$  برای مسئله (۱) کارا است اگر جواب شدنی دیگر  $x \in S$  وجود نداشته باشد به طوری که  $Cx \neq Cx^\circ, Cx \geq Cx^\circ$  و در صورتی که  $Cx > Cx^\circ$  متغیرشدنی  $x^\circ$  کارای ضعیف است.

قضیه زیر شرایط وجودی جواب های کارا و کارای ضعیف را تضمین می کند. مجموعه های زیر را در نظر می گیریم:

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R^k, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$$

$$\bar{\Lambda} = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R^k, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$$

قضیه ۱. جواب  $x^\circ \in S$  برای مسئله (۱) کارا (کارای ضعیف) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد به طوری که  $\lambda \in \bar{\Lambda}$

$$\max_{x \in S} \lambda^T Cx = \lambda^T Cx^\circ$$

## ۲ روشی برای به دست آوردن نقطه‌ی رأسی کارای اولیه

فرض کنید  $\lambda \in \Lambda$ ، برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \max & \lambda^T Cx \\ & Ax = b \\ & d^- \leq x \leq d^+ \end{cases} \quad (2)$$

در صورتی  $y = x - d^-$  باشد، خواهیم داریم:

$$\begin{cases} \max & \lambda^T Cy + \lambda^T C d^- \\ & Ay = b - A d^- \\ & y \leq d^+ - d^- \\ & y \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

برای  $x^\circ \in S$  دوگان مسئله فوق را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \min & U^T(-Cx^\circ + Cd^-) + \omega^T(b - Ad^-) + \gamma^T(d^+ - d^-) \\ & U^TC - \omega^TA - \gamma^T + \alpha^T = -e^TC \\ & U, \alpha, \gamma \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

روش مذکور دارای مراحل زیر است :

- گام (۱): یک نقطه شدنی  $x^\circ \in S$  پیدا می کنیم،  
 گام (۲): اگر  $S \neq \emptyset$ ، آنگاه یک جواب بهینه ی  $(U^\circ, \omega^\circ, \gamma^\circ, \alpha^\circ)$  برای برنامه ی (۴) پیدا می کنیم.  
 گام (۳): با قراردادن  $\lambda = (U^\circ + e)$  در مسئله (۲) یک جواب رأسی بهینه برای مسئله بامتغیرهای کراندار به دست می آوریم.  
 فرض کنید  $(U^\circ, \omega^\circ, \gamma^\circ, \alpha^\circ)$  یک جواب بهینه برای مسئله (۴) باشد.  
 قضیه ۲. مسئله (۴) یک جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر مسئله ی برنامه ریزی خطی چند هدفی (۱) یک جواب کارا داشته باشد.

### ۳ محاسبه ی تمام نقاط رأسی کارا

با شروع از یک نقطه ی رأسی کارای بهینه، جواب های دیگر را با استفاده از آن تعیین می کنیم. با معرفی متغیرهای غیر پایه ای غیر بهینه به پایه، همه ی نقاط رأسی کارا را پیدا می کنیم، یک آزمون کارایی متغیرهای غیر پایه ای که به عنوان جواب انتخاب شده اند لازم است، که به صورت زیر می باشد:

#### ۱.۳ آزمون کارایی یک متغیر غیر پایه ای

برای آزمون کارایی نقطه ی  $x^\circ$  در مسئله ی برنامه ریزی خطی چند هدفی (۱)، مسئله خطی زیر را جایی که  $S$  یک بردار ستونی  $k$ -بعدی است معرفی می کنیم:

$$\begin{cases} \max & h = eS \\ & Ax = b \\ & cx - S = cx^\circ \\ & d^- \leq x \leq d^+ \\ & S \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

قضیه ۳. اگر  $\max h = 0$  آنگاه  $x^\circ$  کارا است.

مثال ۱.

$$\begin{cases} \max z_1(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \max z_2(x) = 3x_1 + x_2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ -7x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2 \leq x_1 \leq 2, \\ -4 \leq x_2 \leq 4, \\ -6 \leq x_3 \leq 6. \end{cases}$$

فرض کنید  $x^0 = (0, 0, 1)$  یک جواب شدنی اولیه برای مسئله فوق باشد. در این صورت با به کار بردن الگوریتم، به دو نقطه رأسی کارای زیر می‌رسیم.

$$x^1 = \begin{pmatrix} -0.8696 \\ -4 \\ -0.0435 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0.8792 \\ 4 \\ 2.0472 \end{pmatrix}$$

مراجع

- [1] J.G. ECKER AND I.A. KOUADA, *Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs*. Mathematical programming, 14:249-261, 1978.
- [2] J.P. EVANS AND R.E. STEUER, *A revised simplex method for linear multipleobjective programs*. Mathematical Programming, 5(1):54-72, August 19763.
- [3] R. GABASOV *et al*, *Constructive method of optimization*, P.I. University Press, Minsk, 1984.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## محاسبه تجزیه $UL$ ناقص به عنوان محصول فرعی الگوریتم فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو

فاطمه شهلائی  
دانشگاه تربیت معلم سبزوار  
fateme.shahlaei@yahoo.com  
امین رفیعی  
دانشگاه تربیت معلم سبزوار  
rafiei.am@gmail.com

### چکیده

در این مقاله، روش جدیدی برای محاسبه تجزیه  $UL$  ناقص ماتریس  $A$  ارائه می‌شود. این تجزیه، به عنوان محصول فرعی روش فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو ساخته می‌شود. این تجزیه  $UL$  ناقص را به عنوان پیش شرط چپ، برای دستگاه‌های خطی به کار برده و کیفیت آن را با کیفیت تجزیه  $LU$  ناقص که به عنوان محصول فرعی روش فاکتورسازی معکوس تقریبی پیشرو [۴] به دست می‌آید مقایسه می‌کنیم.

واژه های کلیدی: تجزیه  $UL$  ناقص، روش BFAPINV، روش های زیرفضای کرلیف، پیش شرط سازی.

رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F08، 65F10، 65F50.

## ۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی

$$AX = b, \quad (1)$$

را در نظر بگیرید که  $A \in R^{n \times n}$ ، ماتریسی نامتقارن، نامنفرد، با بعد بزرگ و تنک می باشد. هم چنین،  $X, b \in R^n$  می باشند. برای حل چنین دستگاهی از روش های زیرفضای کرلیف

استفاده می‌شود [۵]. فرض کنید  $M \approx A$  باشد. دستگاه

$$M^{-1}AX = M^{-1}b, \quad (2)$$

دستگاه پیش شرط شده چپ دستگاه (۱) نامیده می‌شود و ماتریس  $M$  را ماتریس پیش شرط چپ می‌نامند [۵]. به منظور شتاب بخشیدن در روند یافتن جواب  $X$ ، می‌توان روش‌های زیر فضای کرلیف را برای حل دستگاه (۲) مورد استفاده قرار داد.

در این مقاله، الگوریتم جدیدی برای محاسبه ماتریس پیش شرط  $M$  معرفی می‌کنیم که  $M$  به شکل  $M = UL$  خواهد بود و  $U$  و  $L$  به ترتیب ماتریس‌های بالا مثلثی یکانی و پایین مثلثی است.

در الگوریتم ۱ این مقاله،  $A_{:,j}$  و  $A_{j,:}$  به ترتیب نشان دهنده ستون  $j$ ام و سطر  $j$ ام ماتریس  $A$  می‌باشند.

## ۲ الگوریتم IULBF

فرض کنید  $A$  ماتریس نامتقارن و  $W = [w_1^T, \dots, w_n^T]^T$ ،  $Z = [z_1, \dots, z_n]$  به ترتیب ماتریس‌های بالا مثلثی یکانی، پایین مثلثی یکانی و  $D$  ماتریس قطری باشد. با استفاده از الگوریتم فاکتورسازی معکوس پسرو یا BFINV (Backward Factored INverse) [۲]، می‌توان ماتریس‌های  $W$ ،  $Z$  و  $D$  را چنان ساخت که رابطه زیر برقرار باشد،

$$WAZ = D. \quad (3)$$

در گام  $j$ ام الگوریتم BFINV، سطر  $(n-j+1)$ ام از ماتریس  $W$  و  $(n-j+1)$ امین ستون ماتریس  $Z$  ساخته می‌شود و نام گذاری پسرو بدین دلیل است.

اگر در الگوریتم BFINV، بر روی درایه‌های بردارهای  $w_j$  و  $z_j$  فرآیند حذف به کار رود، یعنی به ازای  $j > l$ ،

$$if \ |z_{lj}| < \varepsilon_Z \rightarrow z_{lj} = 0, \quad (4)$$

$$if \ |w_{jl}| < \varepsilon_W \rightarrow w_{jl} = 0, \quad (5)$$

آنگاه تقریبی از فاکتورهای  $W$ ،  $Z$  و  $D$  در (۳) ساخته می‌شود و رابطه

$$WAZ \approx D,$$

برقرار است. در رابطه‌های (۴) و (۵)،  $\varepsilon_Z$  و  $\varepsilon_W$  به ترتیب برابر پارامتر حذف کردن، درایه‌های ماتریس‌های  $Z$  و  $W$  می‌باشند. در این حالت ماتریس‌های  $W$ ،  $Z$  و  $D$  فاکتورهای معکوس

تقریبی ماتریس  $A$  نامیده می‌شوند و فرآیند، فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو یا BFAPINV (Backward Factored APproximate INVerse) نامیده می‌شود [۳]. می‌توان یک تجزیه  $UL$  ناقص ( $IUL$ )، از ماتریس  $A$  را به عنوان محصول فرعی فرآیند BFAPINV به دست آورد که  $L$ ، ماتریس پایین مثلثی و  $U$ ، ماتریس بالا مثلثی یکانی است و رابطه

$$A \approx M = UL, \quad (6)$$

برقرار است. تجزیه  $UL$  ناقص ماتریس  $A$  در (۶) را IULBF (IUL factorization obtained from Backward Factored APproximate INVerse) می‌نامیم. در این حالت، بین فاکتورهای  $W, Z, D, L$  و  $U$  رابطه‌های زیر برقرار است

$$L \approx DZ^{-1}, \quad U \approx W^{-1}.$$

Algorithm 1 ( الگوریتم IULBF )

1.  $w_n = e_n^T, \quad z_n = e_n, \quad d_n = a_{nn}$ .
2. for  $j = n - 1$  to  $1$  do
3.  $w_j = e_j^T, \quad z_j = e_j$ .
4. for  $i = j + 1$  to  $n$  do
5.  $U_{ji} = \frac{A_{ji}z_i}{d_i}, \quad L_{ij} = \frac{w_i A_{ji}}{d_i}$
6. apply a dropping rule to  $U_{ji}$  and  $L_{ij}$
7.  $z_j = z_j - (\frac{w_i A_{ji}}{d_i})z_i, \quad w_j = w_j - (\frac{A_{ji}z_i}{d_i})w_i$
8. for all  $l \geq i$  apply a dropping rule to  $z_{lj}$  and to  $w_{jl}$
9. end for
10.  $d_j = w_j A_{jj}$  (if  $A$  is not positive definite)
11.  $d_j = w_j A w_j^T$  (if  $A$  is positive definite)
12. end for
13. Return  $L = (d_i L_{ij})$  and  $U = (U_{ij})$

در خط ۶ الگوریتم IULBF، فرآیند حذف بر روی درایه‌های  $L_{ij}$  و  $U_{ji}$  به کار می‌رود، یعنی

$$\begin{aligned} \text{if } |L_{ij}| < \varepsilon_L & \rightarrow L_{ij} = 0, \\ \text{if } |U_{ji}| < \varepsilon_U & \rightarrow U_{ji} = 0, \end{aligned}$$

که  $\varepsilon_L$  و  $\varepsilon_U$  به ترتیب برابر پارامتر حذف کردن، درایه‌های ماتریس‌های  $L$  و  $U$  می‌باشند. هم چنین در خط ۸ الگوریتم IULBF، به ازای  $j > l$ ، فرآیند حذف مطابق با رابطه‌های (۴) و (۵) به کار می‌رود.

## ۳ نتایج عددی

در این بخش، نتایج مربوط به حل دستگاه معادلات خطی پیش شرط شده چپ با روش GMRES(16) [۵] را ارائه می‌کنیم. پیش شرط‌ها ILUFF و IULBF (ILU factorization obtained from Forward Factored APproximate INVerse) [۴] می‌باشند. ماتریس‌های ضرایب فقط نامتقارن و از مرجع [۱] انتخاب شده‌اند. بردار  $b$  به صورت  $b = Ae$  است که  $e = [1, \dots, 1]^T$  می‌باشد. برنامه‌های ILUFF، IULBF و GMRES(16) با استفاده از نرم افزار MATLAB، نوشته شده و بر روی ماشینی با حافظه RAM 1G اجرا شده‌اند. در هنگام ساخت پیش شرط‌های ILUFF و IULBF هرگاه عنصر لولا ( $d_j$  در الگوریتم ۱)، برابر صفر شده است آن را با  $10^{-4}$  جایگزین کرده‌ایم. چگالی دوپیش شرط ILUFF و IULBF از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$density = \frac{nnz(L) + nnz(U)}{nnz(A)},$$

که  $nnz(L)$ ،  $nnz(U)$  و  $nnz(A)$  به ترتیب برابر تعداد عناصر غیر صفر ماتریس‌های  $U$ ،  $L$  و  $A$  می‌باشند. در تمام آزمایشات  $\varepsilon_U$ ،  $\varepsilon_L$ ،  $\varepsilon_W$  و  $\varepsilon_Z$  برابر با ۰.۱ انتخاب شده‌اند. جدول ۱ نتایج مربوط به حل دستگاه‌های خطی مختلف با روش GMRES(16)، بدون استفاده از ماتریس پیش شرط را نشان می‌دهد. در این جدول،  $n$ ، بعد ماتریس ضرایب را مشخص می‌کند. ستون مربوط به  $PD$ ، معین مثبت بودن ماتریس را نشان می‌دهد.  $Itime$ ، زمان اجرای GMRES(16) بدون پیش شرط سازی و  $it$ ، تعداد تکرارهای روش GMRES(16) را نشان می‌دهد. زمان  $Itime$  به ثانیه است. علامت +، در این جدول بدین معنی است که تعداد تکرارها بیش از ۱۰,۰۰۰ است. محک توقف در تمام آزمایش‌ها به صورت

$$\frac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2} \leq 10^{-8},$$

است که  $r_k$  بردار باقیمانده در تکرار  $k$  ام و  $r_0$  بردار باقیمانده ابتدایی می‌باشد. در تمام آزمایش‌ها جواب ابتدایی، برابر صفر در نظر گرفته شده است. در جدول ۲، اطلاعات مربوط به پیش شرط‌های ILUFF و IULBF و نتایج مربوط به حل دستگاه پیش شرط شده چپ ارائه شده است.  $Ptime$ ، زمان پیش شرط سازی و  $density$ ، چگالی مربوط به هریک از پیش شرط‌ها می‌باشد.  $Ttime$ ، مجموع زمان پیش شرط سازی و زمان اجرای GMRES(16) است. زمان‌های  $Ptime$  و  $Ttime$  نیز به ثانیه می‌باشند.

جدول ۱: اطلاعات مربوط به GMRES(16) بدون پیش شرط سازی

Matrix	$n$	$nnz$	$PD$	$Itime$	$it$
fs _ 183 _ 6	183	1000	No	+	+
hor _ 131	434	4182	No	67.594	4273
pde900	900	4380	Yes	0.203	10
cdde1	961	4681	No	1.469	67
epb0	1794	7764	No	+	+

جدول ۲: اطلاعات مربوط به GMRES(16) برای دستگاه‌های پیش شرط شده چپ

method	ILUFF				IULBF			
	density	Ptime	it	Ttime	density	Ptime	it	Ttime
fs _ 183 _ 6	0.743	2.141	1	2.375	0.631	2.062	1	2.109
hor _ 131	0.984696	22.031	5	23.031	0.893	21.86	3	22.454
pde900	1.273	125.531	2	126.953	1.288	126.578	2	128
cdde1	1.205	149.484	4	152.625	1.205	173.984	4	177.202
epb0	1.575	943.093	14	978.405	0.850	1121.75	24	1184.58

## ۴ نتیجه گیری

از جدول های ۱ و ۲ نتیجه می شود که تأثیر دوپیش شرط ILUFF و IULBF برای حل دستگاه خطی تقریباً یکسان بوده و هر دو پیش شرط ابزاری مناسب برای کاهش تعداد تکرارهای روش های زیر فضای کرلیف می باشند.

## مراجع

- [1] T. Davis, University of Florida Sparse Matrix Collection.  
<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices>. Accessed 2010.
- [2] G. Luo, A new class of decomposition for inverting asymmetric and indefinite matrices, Comput. Math. Appl., 25 (1993), 95-104.
- [3] D.K. Salkuyeh, A Sparse Approximate Inverse Preconditioner for Nonsymmetric Positive Definite Matrices, Journal of Applied Mathematics and Informatics., 28 (2010), 1131-1141.
- [4] D.K. Salkuyeh, A. Rafiei and H. Roohani, ILU preconditioning Based on the FAPINV Algorithm, arXiv:1010.2812., (2010).
- [5] Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS publishing, New York., (1996).

---

---

# Posters

---

---



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## SIMPLICITY OF THE FIRST EIGENVALUE OF A NONLINEAR ELLIPTIC SYSTEM

G.A. AFROUZI<sup>1</sup> AND M. MIRZAPOUR<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. This paper concerns a special property of the principle eigenvalue of non-linear elliptic system with Dirichlet boundary conditions. We study the simplicity of the first eigenvalue of system

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{\alpha-1} |v|^{\beta-1} v & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda |u|^{\alpha-1} |v|^{\beta-1} u & \text{in } \Omega, \\ (u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega), \end{cases}$$

with respect to the exponents  $p$  and  $q$ , where  $\Omega$  is a bounded domain in  $R^N$ .

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Eigenvalue problems for the p-Laplacian operator subject to Zero Dirichlet boundary conditions on a bounded domain have been studied extensively during the past two decades and many interesting results have been obtained. The investigations principally have relied on variational methods and deduced the existence of a *principal* eigenvalue as a consequence of minimization results of appropriate functionals.

In this article we study the eigenvalue system

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{\alpha-1} |v|^{\beta-1} v & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda |u|^{\alpha-1} |v|^{\beta-1} u & \text{in } \Omega, \\ (u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega), \end{cases}$$

where  $\Omega \subset R^N$  is a bounded domain,  $p, q > 1$  and  $\alpha, \beta$  are real numbers satisfying

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35J60; 35B30; 35B40.

*Key words and phrases.* Eigenvalue problems; Quasilinear operators; Eigenfunctions.

\* Speaker.

: **(H)**  $\alpha, \beta > 0$  such that  $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1$ .

We mention that problem (1.1) arises in several fields of application. For instance, in the case where  $p > 2$ , problem (1.1) appears in the study of non-Newtonian fluids, pseudo-plastics for  $1 < p < 2$ , and in reaction-diffusion problems, flows through porous media, nonlinear elasticity, petroleum extraction, astronomy and glaciology for  $p = \frac{4}{3}$  (see [3], [4]).

The principal eigenvalue  $\lambda_1(p, q)$  of (1.1) obtained by the Ljusternick-Schnirelman theory by minimizing the following functional

$$J(u, v) = \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} |\nabla v|^q dx,$$

on  $C^1$ -manifold:

$$\{(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega); \Lambda(u, v) = 1\},$$

where

$$\Lambda(u, v) = \int_{\Omega} |u|^{\alpha-1} |v|^{\beta-1} uv dx.$$

We recall that  $\lambda_1(p, q)$  can be variationally characterized as

$$(1.2) \quad \lambda_1(p, q) = \inf \{J(u, v), (u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega); \Lambda(u, v) = 1\}$$

From the maximum principle, we deduce that the corresponding eigenpair of  $\lambda_1(p, q)$ ,  $(u, v)$  are such that  $u, v > 0$ . We called them positive eigenvector.

## 2. MAIN RESULTS

Firstly introduce

$$\begin{aligned} A_p(u, \varphi) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + (p-1) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \left( \frac{|u|}{\varphi} \right)^p dx \\ &\quad - p \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi \nabla u \left( \frac{|u|^{p-2} u}{\varphi^{p-1}} \right) dx \\ (2.1) \quad &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} \frac{\Delta_p \varphi}{\varphi^{p-1}} |u|^p dx. \end{aligned}$$

**Lemma 2.1.** [2] For all  $(u, \varphi) \in (W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\gamma}(\Omega))^2$  with  $\varphi > 0$  in  $\Omega$  and  $\gamma \in (0, 1)$ , we have  $A_p(u, \varphi)$ , i.e.,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \int_{\Omega} \frac{\Delta_p \varphi}{\varphi^{p-1}} |u|^p dx,$$

and if  $A_p(u, \varphi) = 0$  there is  $c \in \mathbb{R}$  such that  $u = c\varphi$ .

**Theorem 2.2.** *Let  $\lambda_1(p, q)$  be defined in (2), then  $\lambda_1(p, q)$  is simple, i.e. if  $(u, v)$  and  $(\varphi, \psi)$  are two eigenvectors associated to  $\lambda_1(p, q)$ , then there exist real numbers  $k_1, k_2$  such that  $u = k_1\varphi$  and  $v = k_2\psi$ .*

*Proof.* Using Young' inequality ( by **(H)**) and the definition of  $\lambda_1(p, q)$ , we can write

$$\begin{aligned} J(\varphi, \psi) &= \lambda_1(p, q)\Lambda(\varphi, \psi) \\ &\leq \lambda_1(p, q) \int_{\Omega} u^{\alpha} v^{\beta} \frac{|\varphi|^{\alpha} |\psi|^{\beta}}{u^{\alpha} v^{\beta}} dx \\ &\leq \lambda_1(p, q) \int_{\Omega} u^{\alpha} v^{\beta} \left[ \frac{\alpha}{p} \frac{|\varphi|^p}{u^p} + \frac{\beta}{q} \frac{|\psi|^q}{v^q} \right] dx \\ &\leq \lambda_1(p, q) \int_{\Omega} \left[ \frac{\alpha}{p} \frac{u^{\alpha-1} v^{\beta}}{u^{p-1}} |\varphi|^p + \frac{\beta}{q} \frac{u^{\alpha} v^{\beta-1}}{v^{q-1}} |\psi|^q \right] dx \\ &\leq \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} \frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}} |\psi|^q dx. \end{aligned}$$

Due to Lemma 2.1, we obtain

$$J(u, v) = \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi|^p dx + \frac{\beta}{q} \int_{\Omega} \frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}} |\psi|^q dx$$

Thus

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dx = \int_{\Omega} \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} |\varphi|^p dx \qquad \int_{\Omega} |\nabla \psi|^q dx = \int_{\Omega} \frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}} |\psi|^q dx$$

By Lemma 2.1, there exist real numbers  $k_1$  and  $k_2$  such that  $u = k_1\varphi$  and  $v = k_2\psi$  and the theorem follows.  $\square$

## REFERENCES

1. R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. A. EL KHALIL, M. OUANAN, A. TOUZANI, *Bifurcation of nonlinear elliptic system from the first eigenvalue*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2003 (2003), no. 21, 1-18.
3. J.I. DIAZ, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries*, Vol. I. Elliptic Equations, Research Notes in mathematics. vol. 106, Pitman, Massachusetts, 1985.
4. A. EL KHALIL, *Autour de la premiere courbe propre du  $p$ -Laplacien*, These de Doctorat, 1999.
5. A. EL KHALIL, S. EL MANOUNI, M. OUANAN, *Simplicity and stability of the first eigenvalue of a nonlinear elliptic system*, International Journal of Mathematical Sciences, 10 (2005) 1555-1563.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MAZANDARAN UNIVERSITY, P. O. BOX 11111, BABOL SAR, IRAN.  
E-mail address: afrouzi@umz.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MAZANDARAN UNIVERSITY, P. O. BOX 22222, BABOL SAR, IRAN.  
E-mail address: mirzapour@stu.umz.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## EIGENVALUES OF THE P-LAPLACIAN WITH NOLINEAR BOUNDARY CONDITIONS VIA LJUSTERNIC-SCHNIRELMAN PRINCIPLE

G.A. AFROUZI<sup>1</sup> AND M. MIRZAPOUR<sup>2\*</sup>

ABSTRACT. This paper deals with the existence of nondecreasing sequence of nonnegative eigenvalues for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)u|u|^{p-2} & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \eta + b(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

by using the Ljusternic-Schnirelman principle, where the domain  $\Omega$  is a bounded domain in  $R^N$  ( $N \geq 2$ ) and  $\eta$  is the unit outward normal vector on  $\partial\Omega$ .

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

In this article we study the eigenvalue problem

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)u|u|^{p-2} & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \eta + b(x)|u|^{p-2}u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega \subset R^N$  is a bounded domain with smooth boundary .

**Definition 1.1.** We say that  $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$  is an eigenfunction of (1.1), if

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} b(s)|u|^{p-2}u v ds = \lambda \int_{\Omega} a(x)u|u|^{p-2}v dx,$$

for all  $v \in W^{1,p}(\Omega)$ . The corresponding real number  $\lambda$  is called the eigenvalue of (1.1).

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35J60; 35B30; 35B40.

*Key words and phrases.* p-Laplacian problem; Nonlinear boundary conditions; eigenvalue problem; Ljusternic-Schnirelman principle.

\* Speaker.

Define on  $W^{1,p}(\Omega)$  the functionals

$$(1.3) \quad F(u) = \int_{\Omega} a(x)|u(x)|^p dx,$$

$$(1.4) \quad G(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} b(s)|u(s)|^p ds,$$

where  $a \in L^{\infty}(\Omega)$  and  $b \in L^{\infty}(\partial\Omega)$  such that  $a, b \geq 0$  a.e. Then the directional derivatives of  $F$  and  $G$  in the direction  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$  are

$$\begin{aligned} \langle F'(u), \varphi \rangle &= p \int_{\Omega} a|u|^{p-2} u \varphi dx, \\ \langle G'(u), \varphi \rangle &= p \int_{\Omega} a|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + p \int_{\partial\Omega} b|u|^{p-2} u \varphi ds. \end{aligned}$$

Let  $A = \frac{1}{p}F'$  and  $B = \frac{1}{p}G'$ .

## 2. THE LJUSTERNIC-SCHNIRELMAN PRINCIPLE

Let  $X$  be a real Banach space and  $F, G$  be two functionals on  $X$ . For fixed  $\alpha > 0$ , we consider the eigenvalue problem

$$(2.1) \quad F'(u) = \mu G'(u), \quad u \in N_{\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

with the level set

$$N_{\alpha} := \{u \in X; G(u) = \alpha\}.$$

We assume that:

- : **(H<sub>1</sub>)**  $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$  are even functionals such that  $F, G \in C^1(X, \mathbb{R})$  and  $F(0) = G(0) = 0$ . In particular, it follows from this that  $F'$  and  $G'$  are odd potential operators.
- : **(H<sub>2</sub>)** The operator  $F'$  is strongly continuous (i.e.  $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow F'(u_n) \rightarrow F'(u)$ ) and  $F(u) \neq 0, u \in \overline{coN_{\alpha}}$  implies  $F'(u) \neq 0$ , where  $\overline{coN_{\alpha}}$  is the closed convex hull of  $N_{\alpha}$ .
- : **(H<sub>3</sub>)** The operator  $G'$  is uniformly continuous on bounded sets and satisfies  $(S_0)$ , i.e. as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$u_n \rightharpoonup u, \quad G'(u_n) \rightharpoonup v, \quad \langle G'(u_n), u_n \rangle \rightarrow \langle v, u \rangle \quad \text{implies} \quad u_n \rightarrow u.$$

- : **(H<sub>4</sub>)** The level set  $N_{\alpha}$  is bounded and

$$u \neq 0 \quad \text{implies} \quad \langle G'(u), u \rangle > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(tu) = +\infty,$$

and

$$\inf_{u \in N_\alpha} \langle G'(u), u \rangle > 0.$$

It is known that  $u$  is a solution of (2.1) if and only if  $u$  is a critical point of  $F$  with respect to  $N_\alpha$  (see Zeidler [3, Proposition 43.21]).

For any positive integer  $n$ , denote by  $A_n$  the class of all compact, symmetric subsets  $K$  of  $N_\alpha$  such that  $F(u) > 0$  on  $K$  and  $\gamma(K) \geq 0$ , where  $\gamma(K)$  denote the genus of  $K$ , i.e.,  $\gamma(K) := \inf\{k \in \mathbb{N}; \exists h : K \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \text{ such that } h \text{ is continuous and odd}\}$

We define:

$$a_n = \begin{cases} \sup_{H \in A_n} \inf_{u \in H} F(u) & \text{if } A_n \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } A_n = \emptyset. \end{cases}$$

Also let

$$\chi = \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N}; a_n > 0\} & \text{if } a_1 > 0, \\ 0 & \text{if } a_1 = 0. \end{cases}$$

Now, we state the L-S principle:

**Theorem 2.1** (3). *Under assumptions  $(H_1) - (H_4)$ , the following assertions hold:*

- [1] (*Existence of an eigenvalue*) If  $a_n > 0$ , then (1) possesses a pair  $\pm u_n$  of eigenvectors and an eigenvalue  $\mu_n \neq 0$ ; furthermore  $F(u_n) = a_n$ .
- [2] (*Multiplicity*) If  $\chi = \infty$ , (1) has infinitely many pairs  $\pm u_n$  of eigenvectors corresponding to nonzero eigenvalues.
- [3] (*Critical levels*)  $\infty > a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$  and  $a_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .
- [4] (*Infinitely many eigenvalues*) If  $\chi = \infty$  and  $F(u) = 0$ ,  $u \in \overline{coN_\alpha}$  implies  $\langle F'(u), u \rangle = 0$ , then there exists an infinite sequence  $\{\mu_n\}$  of distinct eigenvalues of (1) such that  $\mu_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .
- [5] (*Weak convergence of eigenvectors*) Assume that  $F(u) = 0$ ,  $u \in \overline{coN_\alpha}$  implies  $u = 0$ , Then  $\chi = \infty$  and there exists a sequence of eigenpairs  $\{(u_n, \mu_n)\}$  of (1) such that  $u_n \rightarrow 0$ ,  $\mu_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  and  $\mu_n \neq 0$  for all  $n$ .

*Proof.* This Theorem is proved in [1]. □

**Proposition 2.2.** *The functional  $F$  given by (1.3) satisfies  $(H_2)$ .*

**Lemma 2.3.** *For any  $u, v \in X$  we have*

$$\langle Bu - Bv, u - v \rangle \geq (\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1})(\|u\| - \|v\|).$$

**Proposition 2.4.** *Let  $G$  be defined in (1.4) then  $G'$  satisfies  $(H_3)$ .*

**Theorem 2.5.** (*Existence of L-S sequence*) Let  $F, G$  be defined in (1.3), (1.4), then there exists a nondecreasing sequence of nonnegative eigenvalues  $\{\lambda_n\}$  of (1.2) obtained by using the L-S principle such that  $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$ , where each  $\mu_n$  is an eigenvalues of the corresponding equation  $F'(u) = \mu G'(u)$  and  $\mu_n = \sup_{H \in A_n} \inf_{u \in H} F(u)$ .

## REFERENCES

1. E.ZEIDLER, *The Ljusternik-Schnirelman theory for indefinite and not necessarily odd nonlinear operators and its applications*, Nonlin. Anal. 4(1980), 451-489.
2. M.M. RAO, Z.D. REN, *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Mathematics, 146, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.
3. E.ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and applications*, vol.3, Variational Methods and Optimization, Springer, Berlin, 1985.
4. S.L. TROYANSKI, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces*, Studia. Math. 37 (1970/71) 173-180.
5. A. LE, *Eigenvalue problems for the p-Laplacian*, Nonlin. Anal., 64(2006).

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MAZANDARAN UNIVERSITY, P. O. BOX 11111, BABOLSAR, IRAN.  
E-mail address: afrouzi@umz.ac.ir

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MAZANDARAN UNIVERSITY, P. O. BOX 22222, BABOLSAR, IRAN.  
E-mail address: mirzapour@stu.umz.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## COASSOCIATED PRIMES OF LOCAL COHOMOLOGY MODULES

M. AGHAPOURNAHR<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. Let  $R$  be a noetherian ring,  $\mathfrak{a}$  an ideal of  $R$ . Certain sets of coassociated primes of top local cohomology modules over local rings are characterized.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Throughout  $R$  is a commutative noetherian ring. By a finite module we mean a finitely generated module. For basic facts about commutative algebra see [3] and [9] and for local cohomology we refer to [2].

A prime ideal  $\mathfrak{p}$  is said to be *coassociated* to  $M$  if  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/N)$  for some  $N \subset M$  such that  $M/N$  is artinian and is said to be *attached* to  $M$  if  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/N)$  for some arbitrary submodule  $N$  of  $M$ , equivalently  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$ . The set of these prime ideals are denoted by  $\text{Coass}_R(M)$  and  $\text{Att}_R(M)$  respectively. Thus  $\text{Coass}_R(M) \subset \text{Att}_R(M)$  and the two sets are equal when  $M$  is an artinian module. The two sets behave well with respect to exact sequences. If  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  is an exact sequence, then

$$\text{Coass}_R(M'') \subset \text{Coass}_R(M) \subset \text{Coass}_R(M') \cup \text{Coass}_R(M'')$$

and

$$\text{Att}_R(M'') \subset \text{Att}_R(M) \subset \text{Att}_R(M') \cup \text{Att}_R(M'').$$

There are equalities  $\text{Coass}_R(M \otimes_R N) = \text{Coass}_R(M) \cap \text{Supp}_R(N)$  and  $\text{Att}_R(M \otimes_R N) = \text{Att}_R(M) \cap \text{Supp}_R(N)$ , whenever the module  $N$  is required to be finite. We prove the second equality in 2.1. In particular  $\text{Coass}_R(M/\mathfrak{a}M) = \text{Coass}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$  and  $\text{Att}_R(M/\mathfrak{a}M) =$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 13D45; Secondary 13D07.

*Key words and phrases*. Local cohomology modules, Coassociated primes.

\* Speaker.

$\text{Att}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$  for every ideal  $\mathfrak{a}$ . Coassociated and attached prime ideals have been studied in particular by Zöschinger, [13] and [14].

## 2. MAIN RESULTS

First we prove a lemma using Vector space properties.

**Lemma 2.1.** *For all  $R$ -modules  $M$  and for every finite  $R$ -module  $N$ ,*

$$\text{Att}_R(M \otimes_R N) = \text{Att}_R(M) \cap \text{Supp}_R(N).$$

*Proof.* Let  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M \otimes_R N)$ , so  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R((M \otimes_R N) \otimes_R R/\mathfrak{p})$ . However this ideal contains both  $\text{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$  and  $\text{Ann}_R(N)$  and therefore  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$  and  $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(N)$ .

Conversely let  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(M) \cap \text{Supp}_R(N)$ . Then  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$  and we want to show that  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R((M \otimes_R N) \otimes_R R/\mathfrak{p})$ . Since

$$(M \otimes_R N) \otimes_R R/\mathfrak{p} \cong M/\mathfrak{p}M \otimes_{R/\mathfrak{p}} N/\mathfrak{p}N,$$

we may assume that  $R$  is a domain and  $\mathfrak{p} = (0)$ . Let  $K$  be the field of fractions of  $R$ . Then  $\text{Ann}_R M = 0$  and  $N \otimes_R K \neq 0$ . Therefore the natural homomorphism  $f : R \longrightarrow \text{End}_R(M)$  is injective and we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(N, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(N, \text{End}_R(M)).$$

But  $\text{Hom}_R(N, \text{End}_R(M)) \cong \text{Hom}_R(M \otimes_R N, M)$ . Hence we get

$$\begin{aligned} \text{Ann}_R(M \otimes_R N) &\subset \text{Ann}_R \text{Hom}_R(M \otimes_R N, M) \subset \text{Ann}_R \text{Hom}_R(N, R) \subset \\ &\quad \text{Ann}_R(\text{Hom}_R(N, R) \otimes_R K). \end{aligned}$$

On the other hand  $\text{Hom}_R(N, R) \otimes_R K \cong \text{Hom}_R(N \otimes_R K, K)$ , which is a nonzero vector space over  $K$ . Consequently  $\text{Ann}_R(M \otimes_R N) = 0$ .  $\square$

## 3. APPLICATIONS TO LOCAL COHOMOLOGY

Next we will study attached and coassociated prime ideals for the last nonvanishing local cohomology module.

**Theorem 3.1.** *Let  $(R, \mathfrak{m})$  be a complete local ring and let  $\mathfrak{a}$  be an ideal of  $R$ . Let  $t$  be a nonnegative integer such that  $H_{\mathfrak{a}}^i(R) = 0$  for all  $i > t$ .*

(a) *If  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R))$  then  $\dim R/\mathfrak{p} \geq t$ .*

(b) If  $\mathfrak{p}$  is a prime ideal such that  $\dim R/\mathfrak{p} = t$ , then the following conditions are equivalent:

- (i)  $\mathfrak{p} \in \text{Coass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R))$ .
- (ii)  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R))$ .
- (iii)  $H_{\mathfrak{a}}^t(R/\mathfrak{p}) \neq 0$ .
- (iv)  $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ .

*Proof.* (a) By the right exactness of the functor  $H_{\mathfrak{a}}^t(-)$  we have

$$(3.1) \quad H_{\mathfrak{a}}^t(R/\mathfrak{p}) \cong H_{\mathfrak{a}}^t(R)/\mathfrak{p} H_{\mathfrak{a}}^t(R)$$

If  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R))$ , then  $H_{\mathfrak{a}}^t(R)/\mathfrak{p} H_{\mathfrak{a}}^t(R) \neq 0$ . Hence  $H_{\mathfrak{a}}^t(R/\mathfrak{p}) \neq 0$  and  $\dim R/\mathfrak{p} \geq t$ .

(b) Since  $R/\mathfrak{p}$  is a complete local domain of dimension  $t$ , the equivalence of (iii) and (iv) follows from the local Lichtenbaum Hartshorne vanishing theorem.

If  $H_{\mathfrak{a}}^t(R/\mathfrak{p}) \neq 0$ , then by (3.1)  $H_{\mathfrak{a}}^t(R)/\mathfrak{p} H_{\mathfrak{a}}^t(R) \neq 0$ . Therefore  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$  for some  $\mathfrak{q} \in \text{Coass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R)) \subset \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R))$ . By (a)  $\dim R/\mathfrak{q} \geq t = \dim R/\mathfrak{p}$ , so we must have  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ . Thus (iii) implies (i) and since always  $\text{Coass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R)) \subset \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R))$ , (i) implies (ii).

If (ii) holds then the module  $H_{\mathfrak{a}}^t(R)/\mathfrak{p} H_{\mathfrak{a}}^t(R) \neq 0$ , since its annihilator is zero. Hence, using again the isomorphism (3.1), (ii) implies (iii).  $\square$

**Corollary 3.2.** *Let  $(R, \mathfrak{m})$  be a complete local ring,  $\mathfrak{a}$  an ideal of  $R$  and  $M$  a finite  $R$ -module and  $t$  a nonnegative integer such that  $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$  for all  $i > t$ .*

- (a) *If  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$  then  $\dim R/\mathfrak{p} \geq t$ .*
- (b) *If  $\mathfrak{p}$  is a prime ideal in  $\text{Supp}_R(M)$  such that  $\dim R/\mathfrak{p} = t$ , then the following conditions are equivalent:*
  - (i)  $\mathfrak{p} \in \text{Coass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ .
  - (ii)  $\mathfrak{p} \in \text{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ .
  - (iii)  $H_{\mathfrak{a}}^t(R/\mathfrak{p}) \neq 0$ .
  - (iv)  $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ .

*Proof.* Passing from  $R$  to  $R/\text{Ann } M$ , we may assume that  $\text{Ann } M = 0$  and therefore using Gruson's theorem, see [?, Theorem 4.1],  $H_{\mathfrak{a}}^i(N) = 0$  for all  $i > t$  and every  $R$ -module  $N$ . Hence the functor  $H_{\mathfrak{a}}^t(-)$  is right exact and therefore, since it preserves direct limits, we get

$$H_{\mathfrak{a}}^t(M) \cong M \otimes_R H_{\mathfrak{a}}^t(R).$$

The claims follow from 3.1 using the following equalities

$$\text{Coass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M)) = \text{Coass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R)) \cap \text{Supp}_R(M)$$

by [?, Folgerung 3.2] and

$$\operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M)) = \operatorname{Att}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(R)) \cap \operatorname{Supp}_R(M)$$

by 2.1. □

## REFERENCES

- [1] M. Aghapournahr, L. Melkersson, *A natural map in local cohomology*, preprint.
- [2] M.P. Brodmann, R.Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [3] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, revised ed., 1998.
- [4] D. Delfino and T. Marley, *Cofinite modules and local cohomology*, J. Pure Appl. Alg. **121**(1997), 45–52.
- [5] K. Divaani-Aazar, A. Mafi *Associated primes of local cohomology modules of weakly Laskerian modules* Comm. Algebra **34**(2006), 681–690.
- [6] K. Divaani-Aazar, A. Mafi, *Associated primes of local cohomology modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 655–660.
- [7] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [8] R. Hartshorne, *Affine duality and cofiniteness*, Invent. Math. **9** (1970), 145–164.
- [9] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [10] L. Melkersson, *Modules cofinite with respect to an ideal*, J. Algebra. **285**(2005), 649–668.
- [11] L. Melkersson, *Properties of cofinite modules and applications to local cohomology*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **125** (1999), 417–423.
- [12] H. Zöschinger, *Koatomare Moduln*, Math. Z. **170**(1980) 221–232.
- [13] H. Zöschinger, *Über koassozierte Primideale*, Math Scand. **63**(1988), 196–211.
- [14] H. Zöschinger, *Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen*, Arch Math. **41**(1983), 121–130.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATIC, FACULTY OF SCIENCE, ARAK UNIVERSITY, ARAK, 38156-8-8349, IRAN.

*E-mail address:* m-aghapour@araku.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## APPROXIMATION OF THE GROWTH OF A NUMBER THEORETIC DETERMINANT

MEHDI HASSANI<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. We consider the matrix  $A_n = [a_{ij}]_{n \times n}$  defined by  $a_{ij}$  = the greatest common divisor of  $i$  and  $j$ , and we show that

$$\ln(\det(A_n)) = n \ln n + \beta n + \frac{1}{2} \ln n + O(\ln \ln n),$$

where  $\beta$  is an absolute certain constant. We recall more examples showing deep relation between Matrix Theory and Number Theory.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Computing determinant of matrices with elements related to number theoretical functions is a classical subject (see [2], pp 127-130). Most interested examples contain elements involving  $\gcd(i, j)$ , which denote the greatest common divisor of  $i$  and  $j$ ; indeed, if we let

$$(1.1) \quad A_n = [a_{ij}]_{n \times n} \quad \text{with} \quad a_{ij} = \gcd(i, j),$$

then it is known [3] that

$$\det(A_n) = \prod_{1 \leq k \leq n} \varphi(k),$$

where  $\varphi$  denote the Euler function defined by  $\varphi(k) = |\{d \in \mathbb{N} : d \leq k \text{ and } \gcd(d, k) = 1\}|$ . Our main result (Theorem 2.1 below) gives an approximation for the size of  $\det(A_n)$  as  $n \rightarrow \infty$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 15A15; Secondary 11C20, 11A25.

*Key words and phrases*. determinants, arithmetic functions

\* Speaker.

Before introducing the main result and its detailed proof, let us clear the situation. We consider a diagonal matrix and its determinant. It is known that

$$\det(\text{diag}[1, 2, \dots, n]) = n!.$$

But,  $n!$  is only a notation and in computational approaches, we need a true approximation for it. This is well-known as Stirling's approximation:  $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1 + O(1/n))$ . Because of its great size, sometimes we consider this approximate formula in logarithmic form

$$(1.2) \quad \ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Now, since  $\varphi(k) \sim k$  for a part of integers with positive density, we expect a big size for  $\det(A_n)$ , too. So, it is natural to work with its logarithm.

## 2. MAIN RESULT

**Theorem 2.1.** *For the matrix  $A_n$  defined by (1.1) we have*

$$\ln(\det(A_n)) = n \ln n + \beta n + \frac{1}{2} \ln n + O(\ln \ln n),$$

where  $\beta$  is an absolute constant, and it is defined by the following summation over all prime numbers

$$\beta = -1 + \sum_p \frac{1}{p} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

*Proof.* We recall the classical formula  $\varphi(m) = m \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p})$ . We have

$$\ln(\det(A_n)) = \sum_{m \leq n} \ln \varphi(m) = \sum_{m \leq n} \left( \ln m + \sum_{p|m} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right) = \ln(n!) + S,$$

where

$$S = \sum_{m \leq n} \sum_{p|m} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

We change the order of summations in  $S$  to obtain

$$\begin{aligned} S &= \sum_{p \leq n} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{m \leq n \\ m \equiv 0 \pmod{p}}} 1 = \sum_{p \leq n} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \\ &= \sum_{p \leq n} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left( \frac{n}{p} + O(1) \right) = n \sum_p \frac{1}{p} \ln \left(1 - \frac{1}{p}\right) + E, \end{aligned}$$

where in the last sum  $p$  runs over all primes, and

$$E = -n \sum_{p > n} \frac{1}{p} \ln \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + O \left( \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \right) = O(\ln \ln n).$$

Note that to obtain the last approximation we use  $\sum_{p \leq n} 1/p = \ln \ln n + O(1)$ . Therefore, we obtain

$$S = n \sum_p \frac{1}{p} \ln \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + O(\ln \ln n).$$

Now, we consider the above expression for  $S$  and the relation (1.2). We have

$$\ln(\det(A_n)) = n \ln n - n + n \sum_p \frac{1}{p} \ln \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{2} \ln n + O(\ln \ln n).$$

This completes the proof. □

### 3. SOME REMARKS

*Remark 3.1.* The matrix  $A_n$  is a special case of a family of matrices with elements involving gcd. More precisely, it is known that [3] if  $f$  is an arithmetical function (a function defined on the set  $\mathbb{N}$ ), and if we let  $F(m) = \sum_{d|m} f(d)$ , then

$$\det([F(\gcd(i, j))]_{n \times n}) = \prod_{1 \leq k \leq n} f(k).$$

To approximate the above determinant, we can follow same method as the proof of Theorem 2.1.

*Remark 3.2.* We consider the matrix

$$(3.1) \quad M_n = [m_{ij}]_{n \times n} \quad \text{with} \quad m_{ij} = \left\lfloor \frac{1}{\gcd(i, j)} \right\rfloor.$$

In fact,  $M$  is a 0 – 1 matrix in which  $m_{ij} = 1$  iff  $\gcd(i, j) = 1$ , and  $m_{ij} = 0$  otherwise. This matrix is related to the problem of finding “the probability that two randomly chosen integers are coprime”; the answer is  $6/\pi^2 \approx \%61$ , which is the density of elements 1 in  $M_n$ , as  $n \rightarrow \infty$ . About this matrix, we have

$$\det(M_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, 3, \\ -1 & \text{if } n = 2, \\ 0 & \text{if } n \geq 4. \end{cases}$$

We imply the validity of this result directly for  $n = 1, 2, 3$ . For  $n \geq 4$  we note that  $\gcd(i, 2) = 1$  iff  $\gcd(i, 4) = 1$ . So, second and forth columns of  $M_n$  are similar. This completes the proof.

*Remark 3.3.* Finally, we recall a reasonable known result, which explains “why approximation of the size of determinants is important subject?”. Our example is related to the well-known and important problem “the Riemann hypothesis” [1]. The Riemann zeta function is defined for  $\Re(s) > 1$  by  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ , and extended by analytic continuation to the complex plan with one simple pole at  $s = 1$  with residue 1. The Riemann hypothesis states that non-trivial zeros of the Riemann zeta function all lie on the line  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ . Among various equivalences for the Riemann hypothesis, the following one is about some certain matrices.

Let  $R_n$  be the 0 – 1 matrix with size  $n \times n$  defined by  $R_{ij} = 1$  if  $j = 1$  or if  $i$  divides  $j$ , and  $R_{ij} = 0$  otherwise. Then, the Riemann hypothesis holds if and only if for every  $\varepsilon > 0$  there is a  $C(\varepsilon) > 0$  such that

$$|\det(R_n)| < C(\varepsilon)n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

#### REFERENCES

1. J. BRIAN CONREY, *The Riemann Hypothesis*, Notices of the AMS, **51** (2003) 341-353.
2. LEONARD E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I, AMS, 2002.
3. HAROLD N. SHAPIRO, *Introduction to the Theory of Numbers*, Dover Publication Inc., 2008.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ZANJAN UNIVERSITY, P. O. Box 313, Postal Code 45371-38111, ZANJAN, IRAN.

*E-mail address:* mehdi.hassani@znu.ac.ir



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## APPLICATION OF SOME NEW WEIGHTS IN BARYCENTRIC RATIONAL INTERPOLATION

H. R. MOFIDI<sup>1\*</sup> AND F. HADADI<sup>2</sup>

**ABSTRACT.** The barycentric form of rational interpolations has some advantages among other representations of rational interpolants [2]. Some authors have suggested many different kinds of weights for barycentric rational formula. We suggest some new weights that are obtainable via the Maclaurin expansion of the given function and solution of an optimization problem. The efficiency of new barycentric rational interpolating formula is then investigated with several examples.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

**Theorem 1.1.** Let  $\{(x_j, f_j)\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  be  $(n + 1)$  pairs of real numbers with  $x_j \neq x_k$ ,  $j \neq k$ , and let  $\{u_j\}$  be  $n + 1$  real numbers. Then

a) if  $u_k \neq 0$ , the rational function

$$(1.1) \quad r(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{u_j}{x-x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{u_j}{x-x_j}},$$

interpolates  $f_k$  at  $x_k$ . Conversely, every rational interpolant  $r \in \mathcal{R}_{n,n}$  of the given values  $f_j$  may be written as in (1.1) for some  $u_j$ .

b) if  $u_k \neq 0$  for all  $k$ , if the interpolation points have been ordered as  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  and if  $\text{sign}(u_j) = \text{sign}(u_{j+1})$ , then  $r(x)$  in (1.1) has an odd number of poles between  $x_j$  and  $x_{j+1}$ .

*Proof.* [2]. □

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65D05, 65D15.

*Key words and phrases.* barycentric formula, Rational Interpolation.

\* Speaker.

Berrut in [1] proved that with weights

$$u_i = (-1)^i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

(1.1) is a rational function, with no pole in  $\mathbb{R}$ . Another pole free rational interpolation suggested by Floater and Hormann [4]. The weights for the barycentric form  $r(x)$  of (1.1) are given explicitly as

$$(1.2) \quad u_i = \sum_{j \in J_i} (-1)^j \prod_{\substack{k=j \\ k \neq i}}^{j+d} \frac{1}{x_i - x_k},$$

where

$$I = \{0, 1, \dots, n\}, \quad J_i = \{j \in I; i - d \leq j \leq i\}.$$

It is shown in [4] that  $r(x)$  in (1.1) has no pole in  $\mathbb{R}$ , so the weights as defined by (1.2) alternate in sign.

## 2. MAIN RESULTS

As seen in Theorem 1.1 one can change every rational function  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  to barycentric rational interpolation of the form (1.1). It means that there are  $u_j$ 's with which we can obtain  $2(n+1)$  unknown coefficients of  $f(x)$ , in fact  $r(x_j) = f_j$ ,  $u_j = \frac{q(x_j)}{\ell'(x_j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . But, generally there is not enough information about  $f(x)$  to be used. Thus we cannot obtain  $u_j$ 's from the above relations. Then we should use some other  $(n+1)$  conditions for this interpolation. To this end, we use the coefficients of terms  $x^k$  in the Maclaurin expansion of function  $f(x)$ . Now suppose that the Maclaurin expansion of  $f(x)$  is  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ . Then  $r(x)$ , as given by (1.1), has a Maclaurian expansion which agrees with  $f(x)$  through the orders  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . That is,

$$(2.1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{u_i}{x - x_i} f_i}{\sum_{i=0}^n \frac{u_i}{x - x_i}} + O(x^{n+1}).$$

By multiplying  $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$  in both the numerator and denominator of  $r(x)$  we obtain

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{\sum_{i=0}^n (u_i f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j))}{\sum_{i=0}^n (u_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j))} + O(x^{n+1}).$$

Now let  $\alpha_k^i$  be the coefficient of  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  in  $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$  we then have

$$(2.2) \quad \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^n \left( u_i \sum_{k=0}^n (\alpha_k^i x^k) \right) \right) = \sum_{i=0}^n \left( u_i f_i \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k^i x^k \right) \right) + O(x^{n+1}).$$

Let  $U = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T$  and  $A$  be the following  $(n+1) \times n$  matrix:

$$A = \begin{pmatrix} (c_0 - f_0)\alpha_1^0 + c_1\alpha_0^0 & \dots & (c_0 - f_0)\alpha_n^0 + c_1\alpha_{n-1}^0 + \dots + c_n\alpha_0^0 \\ (c_0 - f_1)\alpha_1^1 + c_1\alpha_0^1 & \dots & (c_0 - f_1)\alpha_n^1 + c_1\alpha_{n-1}^1 + \dots + c_n\alpha_0^1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (c_0 - f_n)\alpha_1^n + c_1\alpha_0^n & \dots & (c_0 - f_n)\alpha_n^n + c_1\alpha_{n-1}^n + \dots + c_n\alpha_0^n \end{pmatrix}^T.$$

Then (2.2) is equivalent to find a vector  $U$  satisfying  $AU = 0$ . Existence of a nontrivial solution for  $AU = 0$  depends on  $f$ , so in application we look for an approximate solution which satisfies the desired conditions of the given problem as close as possible.

**Theorem 2.1.** *Let  $n \geq 0$  be even and absolute values of  $u_j$ 's satisfy (2.3) below. Then with these weights, the barycentric rational interpolant  $r(x)$ , as expressed in (1.1), is exactly equal to  $\frac{a}{b + cx^2}$ .*

$$(2.3) \quad |u_j| = \begin{cases} b + cx_j^2 & , \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{1}{2}(b + cx_j^2) & , \quad j = \frac{N}{2} \end{cases}.$$

As mentioned before there is not necessarily a nontrivial solution  $U$  for  $AU = 0$ . Hence in order to obtain a satisfactory approximate solution of this system we use the following optimization problem:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \min \|CU\|_2^2 \\ s.t, \\ \forall i, \varepsilon \leq |u_i| < 1 \quad \text{with } U = [u_0, \dots, u_n]^T, \end{cases}$$

where  $\varepsilon$  is a positive number and small enough. It is obvious that there is a solution for (2.4). We then solve this problem for vector  $U$  and change the sign of its even entries to obtain the desired weights. Substituting these weights, for  $u_i$ 's, into the barycentric formula (1.1) we get the desired rational interpolant.

### 3. Numerical Results

For the solution of each problem we first obtained the desired vector  $U$  via the solution of (2.4) and then the weights  $u_i$  from  $U$  are inserted in  $r(x)$  to obtain the desired

rational interpolation. We have used the MATLAB code Lsqlin to solve the optimization problem (2.4) and also the MATLAB code of Berrut and Trefethen [3] for barycentric interpolation. We have chosen  $\varepsilon = 10^{-12}$  to solve (2.4) in our computations. We tested this method for a large class of functions a few of which are reported here. We compare our method with *Flo – Hor* interpolant in (1.2) as a rational interpolant, and also with cubic spline (perfect form) which is a strong piecewise interpolant, as a non-rational interpolant. We denote our method by “*New – Barycentric*”. Our mean of error in tables is  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - r(x)|$ , where  $r(x)$  is an approximation of function  $f(x)$  on  $[a, b]$ .

**Example 1.** As we saw in theorem 2.1, we have the weights for which the New-Barycentric formula is exactly equal to  $f(x) = \frac{a}{b + cx^2}$  for  $n$  even. Error of *New – Barycentric* for *Runge* example  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , for  $x \in [-5, 5]$ , and  $n = 2$ . is  $4.4 \times 10^{-16}$ .

**Example 2.** Similar behavior happens for other sufficiently differentiable rational functions, as it is shown in Tables 1 for function  $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}$  on interval  $[-5, 5]$ . The second, third and forth column of this Table show the numerically computed errors for *Flo – Hor*, *Cubic spline* and *New – Barycentric* interpolants, respectively. As we see in Table, *New – Barycentric* is a suitable interpolant for rational functions, and if  $A$  were not ill-conditioned for larger  $n$ , the results would be better.

TABLE 1. Error in rational interpolation for  $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}$

$n$	<i>Flo – Hor</i> ( $d = 3$ )	<i>Cubic Spline</i>	<i>New – Barycentric</i>
4	—	$4.9 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-10}$
6	$5.7 \times 10^{-2}$	$5.4 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^{-10}$
8	$5.7 \times 10^{-2}$	$5.3 \times 10^{-2}$	$5.3 \times 10^{-16}$
10	$4.1 \times 10^{-2}$	$4.4 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-16}$

## REFERENCES

1. J.P. Berrut, Rational functions for Guaranteed and Experimentally Well-Conditioned Global Interpolation, *Comput. Math. Applic.* **15**(1) (1988) 1-16.
2. J.P. Berrut, R. Baltensperger, H.D. Mittelmann, Recent Developments in Barycentric Rational Interpolation, *International Series of Numerical Mathematics*, **151** (2005) 27-51.
3. J.P. Berrut, L.N. Trefethen, Barycentric Lagrange Interpolation, *SIAM Rev.* **46** (3) (2004) 501-517.
4. M.S. Floater, K. Hormann, Barycentric Rational Interpolation with no Poles and High Rates of Approximation, *Numerische Mathematik* **107** (17) (2007) 315-331.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES, TARBIAT MODARES UNIVERSITY, P. O. BOX 14115-175, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* `h.mofidi@modares.ac.ir`

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES, TARBIAT MODARES UNIVERSITY, P. O. BOX 14115-175, TEHRAN, IRAN.

*E-mail address:* `f.hadadi@modares.ac.ir`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## SOME NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS ON THE REGULARITY OF INTERVAL MATRICES \*\*

S. MOLLAHASANI<sup>1\*</sup>, N. GHAFARI<sup>2</sup>

ABSTRACT. In this paper Interval matrices and their regularity is defined. Furthermore, several necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices are given.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

During the last 35 years (1973-2008), considerable interest has been dedicated to the problem of regularity of interval matrices. It has resulted in formulations of altogether forty necessary and sufficient conditions. Here, we investigate some of these conditions. The details and proofs are discussed in [1].

**Definition 1.1.** [1] Given two  $n \times n$  matrices  $A_c$  and  $\Delta \geq 0$ , the set of matrices  $\mathbf{A}^I = \{A \mid |A - A_c| \leq \Delta\}$  which is equivalent to  $\mathbf{A}^I = \{A \mid \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\} = [\underline{A}, \overline{A}]$  where  $\underline{A} = A_c - \Delta$  and  $\overline{A} = A_c + \Delta$  is called an interval matrix with midpoint matrix  $A_c$  and radius matrix  $\Delta$ .

**Definition 1.2.** [1] A square interval matrix  $\mathbf{A}^I$  is called regular if each  $A \in \mathbf{A}^I$  is nonsingular, and it is said to be singular otherwise (i.e., if it contains a singular matrix).

It is the purpose of this paper to show that this property can be reformulated in surprisingly many surprisingly various ways. We do not include the proof of theorem since it would take a very lengthy paper.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A24; Secondary 65G40.

*Key words and phrases.* Interval Matrix, Regularity, Necessary and Sufficient Conditions .

\* Speaker

\*\* This work has been partially supported by the center of excellent in Linear Algebra and optimization of Shahid Bahooar University of kerman.

## 2. NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS

The following theorem sums up some necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices.

**Theorem 2.1.** *For an  $n \times n$  interval matrix  $\mathbf{A}^I$ , the following assertions are equivalent [1]:*

- (1)  $\mathbf{A}^I$  is regular,
- (2) The inequality:

$$|A_c x| \leq \Delta |x|,$$

and the equation:

$$|A_c x = d\Delta |x|,$$

have only the trivial solution  $x = 0$ , for each  $d \in [0, 1]$  [3].

- (3) If  $A'x' = A''x''$  for some  $A', A'' \in \mathbf{A}^I$  and  $x' \neq x''$ , then there exists a  $j$  such that  $A'_j \neq A''_j$  and  $x'_j x''_j > 0$  where  $A'_j$  denotes the  $j$ th column of  $A'$  [2].
- (4) For each  $B$  with  $|B| \leq \Delta$  and for each  $b \in \mathfrak{R}^n$ , the equation:

$$A_c x + B|x| = b,$$

has a unique solution [4].

- (5) For each  $y \in Y_n$  the equation:

$$A_c x - T_y \Delta |x| = y,$$

has a unique solution, where  $Y_n = \{y ||y| = e\}$ ;  $e = (1, \dots, 1)^T$ , and  $T_y = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$  [2].

- (6) For each  $b > 0$  and for each  $y \in Y_n$  the equation:

$$|A_c x| = \Delta |x| + b,$$

has a unique solution  $x_y$  satisfying  $A_c x_y \in \mathfrak{R}_y^n$  [5].

- (7) For each  $y \in Y_n$  the equation:

$$|A_c x| = \Delta |x| + e,$$

has a unique solution  $x_y$  satisfying  $A_c x_y \in \mathfrak{R}_y^n$  [5].

- (8)  $A_c$  is nonsingular and for each  $b > 0$  the equation:

$$|x| = \Delta |A_c^{-1} x| + b,$$

has a unique solution in each orthant [5].

(9)  $A_c$  is nonsingular and the equation:

$$|x| = \Delta |A_c^{-1}x| + e,$$

has a unique solution in each orthant [5].

(10) For each  $y \in Y_n$  the matrix equation:

$$A_c x - T_y \Delta |x| = I,$$

has a unique solution  $X_y$  [2].

(11) For each  $y \in Y_n$  the matrix equation:

$$QA_c - |Q|\Delta T_y = I,$$

has a unique solution  $Q_y$  [4].

(12)  $\det(A_c)\det(A_{yz}) > 0$  for each  $y, z \in Y_n$  [2].

(13)  $\det(A_{yz})\det(A_{y'z'}) > 0$  for each  $y, z, y', z' \in Y_n$  [2].

(14)  $\det(A_{yz})\det(A_{y'z}) > 0$  for each  $y, z, y' \in Y_n$  such that  $y$  and  $y'$  differ in exactly one entry [2].

(15) For each interval n-vector  $b$  the set:

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}^I, \mathbf{b}) = \{x | Ax = b \text{ for some } A \in \mathbf{A}^I, b \in \mathbf{b}\},$$

is compact and connected.

(16) Each matrix of the form:

$$A = A_c - dT_y \Delta T_z,$$

where  $d \in [0, 1]$  and  $y, z \in Y_n$ , is nonsingular [3].

(17) Each matrix of the form:

$$A_{ij} = \begin{cases} (A_{yz})_{ij}, & \text{if either } i \neq k, \text{ or } i = k \text{ and } j \in \{1, \dots, m-1\}, \\ (A_{-yz})_{ij}, & \text{if } i = k \text{ and } j \in \{m+1, \dots, n\}, \end{cases}$$

$$A_{km} \in [\underline{A}_{km}, \overline{A}_{km}],$$

where  $y, z \in Y_n$  and  $k, m \in 1, \dots, n$ , is nonsingular [2].

(18) Each matrix of the form:

$$A_{i,j} \in \begin{cases} \{\underline{A}_{i,j}, \overline{A}_{i,j}\}, & \text{if } (i,j) \neq (k,m), \\ [\underline{A}_{i,j}, \overline{A}_{i,j}], & \text{if } (i,j) = (k,m), \end{cases}$$

where  $k, m \in \{1, \dots, n\}$ , is nonsingular [2].

(19) For each  $y \in Y_n$ ,  $A_{ye}$  is nonsingular and the system

$$\begin{aligned} A_{ye}^{-1} A_{-ye} x &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

has a solution, where  $A_{ye} = A_c - T_y \Delta$ ,  $A_{-ye} = A_c + T_y \Delta$  [2].

### 3. CONCLUSION

We described some important conditions for regularity of interval matrices in this paper and more general results are achieved in [1]

### REFERENCES

1. JIRI ROHN, *Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey*, Electronic Journal of Linear Algebra, 18, 500–512, 2009.
2. JIRI ROHN, *Systems of linear interval equations*, Linear Algebra and its Applications, 126:39–78, 1978.
3. JIRI ROHN, *Interval matrices: Singularity and real eigenvalues*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 14:82–91, 1993.
4. JIRI ROHN, *A handbook of results on interval linear problems*, Internet text available at <http://www.cs.cas.cz/rohn/handbook>, 2005.
5. JIRI ROHN, *Regularity of interval matrices and theorems of the alternatives*, Reliable Computing, 12:99–105, 2006.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAR UNIVERSITY OF KERMAN, P. O. Box 76169-14111, KERMAN, IRAN.

<sup>2</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHAHID BAHONAR UNIVERSITY OF KERMAN, P. O. Box 76169-14111, KERMAN, IRAN.

*E-mail address:* somayehmi31@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## MODIFICATION OF ALLOCATING THE FIXED COST WITH PRIORITIZATION USING FACET ANALYSIS

S. DANESHVAR<sup>1</sup>, F. HEIDARI AND F. NAJAFZADEH\*

**ABSTRACT.** Data Envelopment Analysis (*DEA*) is a technique based on Linear Programming (*LP*) to measure the relative efficiency of Decision Making Units (*DMUs*). Recently, an important application of *DEA* technique is on allocating the fixed cost among peer *DMUs* so that the allocated cost to each *DMU* combines with other cost measures (inputs). One of the important problems of this method is that some weight get zero and as a result the corresponding inputs (outputs) used in evaluation of some of the *DMUs* become ineffective. On the other hand, the aforementioned zero weights may result in finding infinite cost values for allocation through *DMUs*. In this paper, to solve these problems we have modified cost allocation model using facet analysis.

### 1. INTRODUCTION

When the expense exceeds the budget, an organization may require its subunits to pay some expense. In 1999, Cook and Kress [1], proposed *DEA* approach to allocate the fixed cost among *DMUs*. They treated the allocated fixed cost as an additional input in performance evaluation. Generally based on [3], if each *DMU* has other cost measures, then the allocated cost should be combined with these costs to form a single input during performance measurement [4]. In section 2, by presentation fixed cost allocation with prioritization, the relative efficiency and the allocated cost  $R_j$  of *DMUs* can be computed. Our proposed model that Modified the cost allocation model by facet analysis is provided in section 3. A numerical example is presented to illustrate the proposed method in section 4. The paper ends with some conclusions.

---

*Key words and phrases.* Data Envelopment Analysis (*DEA*), Facet Analysis, Cost allocation.

\* F. Najafzadeh.

## 2. ALLOCATING THE FIXED COST WITH PRIORITIZATION

Suppose there are  $n$  *DMUs*, where each  $DMU_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) consumes  $m$  inputs  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) to produce  $s$  outputs  $y_{rj}$  ( $r = 1, \dots, s$ ). Suppose that a total fixed cost  $R$  is to be assigned among  $n$  *DMUs*, and each  $DMU_j$  is to be allocated a cost  $R_j$  such that  $\sum_{j=1}^n R_j = R$ . In this paper, the  $(m)$ th input  $x_{mj}$  is defined as the input which is combined with the allocated cost  $R_j$  to make a single input with a common weight  $v_m$ . Taking into assumption, the efficiency rating for each  $DMU_o$  can be computed using the *CCR* ratio model as follows:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \text{Max } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{i0} + v_m(x_{m0} + R_0)}, \\ & \text{s.t. } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{ij} + v_m(x_{mj} + R_j)} \leq 1 \quad \forall j, \\ & \sum_{j=1}^n R_j = R, \quad u_r, v_j, R_j \geq 0 \quad \forall r, i, j. \end{aligned}$$

The ratio form of model (2.1) can be transferred to the multiplier form by applying Charnes-Cooper transformation. Also by placing  $d_j = v_m \times R_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) in model (2.1), it can be transformed to the following linear programming model:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \text{Max } \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}, \\ & \text{s.t. } \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{ij} - v_m x_{mj} - d_j \leq 0 \quad \forall j, \\ & \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{i0} + v_m x_{m0} + d_0 = 1, \\ & \sum_{j=1}^n d_j = v_m \times R, \quad \mu_r, v_i, d_j \geq 0 \quad \forall r, i, j. \end{aligned}$$

Model (2.2) is considered as the fixed cost allocation with Prioritization. When  $DMU_o$  is under evaluation, preference is with this unit. In fact,  $DMU_o$  distributes the fixed cost  $R$  among *DMUs* to maximize its efficiency.

## 3. MODIFIED COST ALLOCATION WITH PRIORITIZATION MODEL USING FACET ANALYSIS

First based on [5] consider the following model for all efficient *DMUs*:

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad & \text{Max } \sum_{i=1}^m s_j^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ = s_0^* \\
& s.t \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - x_{i0} + s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{mj} + \eta R - x_{m0} + s_m^- = 0, \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \\
& \eta \geq \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq 0, \\
& \eta + 1 \geq \lambda_0, \\
& s_i^-, s_r^+, \lambda_j \quad \forall r, i, s, \eta \text{ free.}
\end{aligned}$$

Let  $B = \{0 \in j | s_0^* = 0\}$  where  $j = 1, \dots, n$ . Then for  $t \in B$ , solve the following models:

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad & \text{Max } v_i = v_i^{t*} \\
& s.t \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rt} = 1, \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{ij} - v_m x_{mj} - d_j \leq 0, \quad \forall j, \\
& \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{it} + v_m x_{mt} + d_t = 1, \\
& \sum_{j=1}^n d_j = v_m \times R, \\
& \mu_r, v_i, d_j \geq 0 \quad \forall r, i, j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad & \text{Max } \mu_r = \mu_r^{t*} \\
& s.t \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rt} = 1, \\
& \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{ij} - v_m x_{mj} - d_j \leq 0, \quad \forall j, \\
& \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{it} + v_m x_{mt} + d_t = 1, \\
& \sum_{j=1}^n d_j = v_m \times R, \\
& \mu_r, v_i, d_j \geq 0 \quad \forall r, i, j.
\end{aligned}$$

Take  $\varepsilon_i$  and  $\varepsilon_r$  as follow:  $\varepsilon_i = \text{Min } \{v_i^{t*} | t \in B\}$ ,  $\varepsilon_r = \text{Min } \{\mu_r^{t*} | t \in B\}$ . By placing  $\varepsilon_i$  and  $\varepsilon_r$  as lower bound for respectively  $v_i$  and  $\mu_r$ , model (2.2) is modified as follow:

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad & \text{Max } \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\
& s.t \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_{ij} - v_m x_{mj} - d_j \leq 0 \quad \forall j, \\
& \sum_{r=1}^{m-1} v_i x_{i0} + v_m x_{m0} + d_0 = 1, \\
& \sum_{j=1}^n d_j = v_m \times R, \\
& \mu_r \geq \varepsilon_r, v_i \geq \varepsilon_i, d_j \geq 0 \quad \forall r, i, j.
\end{aligned}$$

**3.1. Numerical Example.** We consider *DMUs* with two inputs and one output in Table 1.

Table 1: Inputs and output of 10 *DMUs*.

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_1$	205	142	208	112	147	168	196	246	112	102
$X_2$	35	28	14	16	28	24	21	28	40	27
$Y$	651	243	227	512	212	512	883	583	512	292

Suppose  $X_2$  is the input, which needs to be combined with the allocated cost, and the total fixed cost to be distributed is  $R = 10$ . Table 2 and 3 show efficiency score and the optimal solutions  $(v_1, v_2, \mu)$  of (2.2) and allocated cost based on different prioritization.

Table 2: Solving model (2.2) for  $DMUs$ .

$DMU$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_1$	0.005	0.007	0	0.009	0.007	0	0.005	0	0.009	0.01
$V_2$	0.001	0.001	0.071	0	0.001	0.042	0.002	0.036	0	0
$\mu$	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002
$Eff$	0.700	0.376	0.546	1.000	0.317	0.718	1.000	0.702	1.000	0.626

Table 3: The result of model (2.2) for allocated cost in different prioritization.

$DMU$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_4$	10	10	1.25	$\infty$	10	1.25	10	1.25	$\infty$	$\infty$
$R_7$	0	0	8.75	$\infty$	0	8.75	0	8.75	$\infty$	$\infty$
$R_j$ ( $j = 1, \dots, 10, j \neq 4, 7$ )	0	0	0	$\infty$	0	0	0	0	$\infty$	$\infty$

As seen in Table 2, when preference is with  $DMU_4$ ,  $DMU_9$  and  $DMU_{10}$ , the optimal value of  $V_2$  is equal to zero. Therefore, by replacing  $v_2$  in  $R_j = \frac{d_j}{v_m}$ , the obtained value for allocated costs among  $DMUs$  are infinite. By applying model (3.1) for efficient  $DMU_4$ ,  $DMU_7$  and  $DMU_9$ , it is clear that  $DMU_4$  and  $DMU_7$  belong to  $B$ . Then by solving model (3.2) and (3.3) for  $DMU_4$  and  $DMU_7$  the value of lower bound for respectively  $v_1, v_2$  and  $u_1$  can be obtained as follow:

$$\varepsilon_1 = \text{Min} \{0.0009, 0.0005\} = 0.0005$$

$$\varepsilon_2 = \text{Min} \{0.0062, 0.0048\} = 0.0048$$

$$\varepsilon_3 = \text{Min} \{0.0002, 0.0001\} = 0.0001$$

By placing above values in model (3.4), the results are summarized in Table 4 and table 5.

Table 4: Solving model (3.4) for  $DMUs$ .

$DMU$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_1$	0.004	0.006	0.001	0.008	0.006	0.001	0.001	0.001	0.007	0.009
$V_2$	0.005	0.005	0.064	0.005	0.005	0.038	0.005	0.031	0.005	0.005
$\mu$	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.005
$Eff$	0.689	0.366	0.515	1.000	0.310	0.715	1.000	0.680	0.899	0.598

Table 5: The result of model (3.4) for modified allocated cost in different prioritization.

$DMU$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_1$	0	0	0	8.33	0	0	0	0	0	0
$R_4$	2.14	2.59	1.23	0	2.55	1.27	0	1.27	2.84	3.12
$R_7$	7.86	7.41	8.76	1.66	7.45	0.33	0	8.73	7.16	6.88
$R_j$ ( $j = 1, \dots, 10, j \neq 1, 4, 7$ )	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

As seen in Tables 2 and 4 it is clear that model (3.4) reduces the number of efficient  $DMUs$ . Therefore, improves the discrimination power. Also by using model (3.4), the required cost values for allocation between  $DMUs$  in different prioritization are obtained correctly.

## REFERENCES

1. W. D. COOK AND M. KRESS, *characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach*, European Journal of Operational Research, 119,652-661,1999.
2. L. JENKINS AND M. ANDERSON, *A multivariate statistical approach to reducing the number of variables in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research, 147,51-61,2003.
3. Y. LI, F. YANG, L. LIANG AND Z. HUA, *Allocating the fixed cost as a complement of other cost inputs: A DEA approach*, European Journal of Operational Research, 197,389-401,2009.
4. S. DANESHVAR, *Facet Analysis in Data Envelopment Analysis, Thesis Submitted for Degree of Philosophy*, Islamic Azad University (Science and Research Branch), 2002.

<sup>1</sup> APPLIED MATHEMATICS DEPARTMENT, ISLAMIC AZAD UNIVERSITY TABRIZ BRANCH, TABRIZ, IRAN.

*E-mail address:* Sahandaneshvar1@yahoo.com

*E-mail address:* fe-heidari@yahoo.com, el.najafzadeh@gmail.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## COMPUTING THE DETERMINANT FOR BLOCK HEPTADIAGONAL AND BLOCK ANTI-HEPTADIAGONAL MATRICES

MARYAM SHAMS SOLARY<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. In this short note, we present a reliable process for computing the determinant of any general block pentadiagonal and block heptadiagonal matrices. Then we extend this process for block anti-pentadiagonal and block anti-heptadiagonal matrices. We do this work by determinant of a block tridiagonal matrix.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The  $n - block \times n - block$  general pentadiagonal ( $n \geq 6$ ) and heptadiagonal ( $n \geq 8$ ) matrices are the forms:

$$(1.1) \quad P = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 & & & \\ C_1 & A_2 & B_2 & D_2 & & \\ E_1 & C_2 & A_3 & B_3 & D_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & E_{n-3} & C_{n-2} & A_{n-1} & B_{n-1} \\ & & & E_{n-2} & C_{n-1} & A_n \end{pmatrix}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65F40, Secondary 15B36.  
*Key words and phrases*. Determinant, Heptadiagonal, Pentadiagonal, Block.

\* Speaker.

$$(1.2) \quad H = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 & E_1 & & & & & & \\ C_1 & A_2 & B_2 & D_2 & E_2 & & & & & \\ Q_1 & C_2 & A_3 & B_3 & D_3 & E_3 & & & & \\ S_1 & Q_2 & C_3 & A_4 & B_4 & D_4 & E_4 & & & \\ & S_2 & Q_3 & C_4 & A_5 & B_5 & D_5 & E_5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & S_{n-6} & Q_{n-5} & C_{n-4} & A_{n-3} & B_{n-3} & D_{n-3} & E_{n-3} \\ & & & & S_{n-5} & Q_{n-4} & C_{n-3} & A_{n-2} & B_{n-2} & D_{n-2} \\ & & & & & S_{n-4} & Q_{n-3} & C_{n-2} & A_{n-1} & B_{n-1} \\ & & & & & & S_{n-3} & Q_{n-2} & C_{n-1} & A_n \end{pmatrix}$$

These types of matrices frequently appear in a variety of applications such as parallel computing, telecommunication system analysis and in solving differential equations using finite differences. In many of these areas determinant and inverse of general anti-pentadiagonal(AP) or anti-heptadiagonal(AH) matrices are required.

$$(1.3) \quad AP = \begin{pmatrix} & & & & D_1 & B_1 & A_1 \\ & & & & D_2 & B_2 & A_2 & C_1 \\ & & & D_3 & B_3 & A_3 & C_2 & E_1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ B_{n-1} & A_{n-1} & C_{n-2} & E_{n-3} & & & & \\ A_n & C_{n-1} & E_{n-2} & & & & & \end{pmatrix}$$

$$(1.4) \quad AH = \begin{pmatrix} & & & & & E_1 & D_1 & B_1 & A_1 \\ & & & & & E_2 & D_2 & B_2 & A_2 & C_1 \\ & & & & E_3 & D_3 & B_3 & A_3 & C_2 & Q_1 \\ & & & E_4 & D_4 & B_4 & A_4 & C_3 & Q_2 & S_1 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ B_{n-1} & A_{n-1} & C_{n-2} & Q_{n-3} & S_{n-4} & & & & & \\ A_n & C_{n-1} & Q_{n-2} & S_{n-3} & & & & & & \end{pmatrix}$$

In this note we derive recurrence sequences for computing the determinant of a block pentadiagonal and block heptadiagonal matrices then we advance this process for finding determinant of block anti-pentadiagonal and anti-heptadiagonal matrices. We will often use the following convention: BTD for block tridiagonal, BPD for block pentadiagonal and BAPD for block anti-pentadiagonal matrices. BHD for block heptadiagonal and BAHD for block anti-heptadiagonal matrices.

## 2. MAIN RESULTS

In [2, 4], Molinari and Salkuyeh proposed different processes for finding determinant of BTD. We try to change these process for BPD and BHD matrices. Also we extend this process for BAPD and BAHM matrices. Suppose:

$$(2.1) \quad N = \begin{pmatrix} G_1 & H_1 & & & \\ F_1 & G_2 & H_2 & & \\ & F_2 & G_3 & H_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & F_{l-2} & G_{l-1} & H_{l-1} \\ & & & & F_{l-1} & G_l \end{pmatrix}$$

Salkuyeh shows:

$$(2.2) \quad \det N = \prod_{i=1}^l \det \Lambda_i, \quad \Lambda_i = G_i - F_{i-1} \Lambda_{i-1}^{-1} H_{i-1}, \quad \Lambda_1 = G_1$$

For computing  $\det(\Lambda_i)$  and  $\Lambda_{i-1}^{-1}$  use of BSI Algorithm in [3].

Molinari [2] described a transfer matrix  $T$  that built as the product of  $n$  matrices of size  $(2m \times 2m)$  for finding  $\det(N)$ ,  $[G_i, H_{i-1} \text{ and } F_{i-1} \ (i = 1, \dots, l) \text{ are complex and nonsingular } m \times m \text{ matrices}]$ . Now by transfer matrix in [2], where  $T(i)$  is the partial product of  $i$  matrices, we have:

$$T(i) = \begin{pmatrix} -H_i^{-1} G_i & -H_i^{-1} F_{i-1} \\ I_{2m} & 0 \end{pmatrix} T(i-1), \quad T(0)_{11} = I_{2m}, \quad T(1)_{11} = -H_1^{-1} G_1$$

$$T(i)_{11} = -H_i^{-1} G_i T(i-1)_{11} - H_i^{-1} F_{i-1} T(i-2)_{11}$$

$$(2.3) \quad \det(N) = \det[T_{11}(l)] \det(H_1 \dots H_{l-1})$$

**Theorem 2.1.** For a BPD matrix similar matrix  $P$  in Equation( 1.1), when  $A_i$ ,  $D_i$  and  $E_i$  are nonsingular blocks, we can find determinant matrix  $P$  by a BTD matrix.

*Proof.* We can make some partitions similar:

$$F_i = \begin{pmatrix} E_{2i-1} & C_{2i} \\ 0 & E_{2i} \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} A_{2i-1} & B_{2i-1} \\ C_{2i-1} & A_{2i} \end{pmatrix}, \quad H_i = \begin{pmatrix} D_{2i-1} & 0 \\ B_{2i} & D_{2i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l \text{ that } l = \frac{n}{2}$$

This work helps us for finding  $\det(P)$  by BTD matrix  $N$  in Equations( 2.1), ( 2.2) and ( 2.3):

$$\det(P) = \det(N)$$

□

**Theorem 2.2.** For a BHD matrix similar matrix  $H$  in Equation ( 1.2), when  $A_i$  ,  $E_i$  and  $S_i$  are nonsingular blocks, we can find determinant of matrix  $H$  by a BTD matrix.

*Proof.* For matrix  $H$  and  $(i = 1, 2 \dots, l \text{ that } l = \frac{n}{3})$ , suppose:

$$F_i = \begin{pmatrix} S_{3i-2} & Q_{3i-1} & C_{3i} \\ 0 & S_{3i-1} & Q_{3i} \\ 0 & 0 & S_{3i} \end{pmatrix}, G_i = \begin{pmatrix} A_{3i-2} & B_{3i-2} & D_{3i-2} \\ C_{3i-2} & A_{3i-1} & B_{3i-1} \\ Q_{3i-2} & C_{3i-1} & A_{3i} \end{pmatrix}, H_i = \begin{pmatrix} E_{3i-2} & 0 & 0 \\ D_{3i-1} & E_{3i-1} & 0 \\ B_{3i} & D_{3i} & E_{3i} \end{pmatrix}$$

Now by BTD matrix  $N$  in Equations ( 2.1), ( 2.2) and ( 2.3), we have:

$$\det(H) = \det(N)$$

□

*Remark 2.3.* If  $n$  is even for Theorem ( 2.1) or  $n \bmod 3$  is zero for Theorem ( 2.2), we can use above partitions.

For finding determinant of BAPD and BAHD matrices, we use the permutation matrix.

**Example 2.4.**  $W = \text{wilkinson}(n)$  returns Wilkinson matrix in Matlab. It is a symmetric, tridiagonal matrix. So by permutation matrix( $Q$ ) we have:

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q \times W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For permutation matrix similar matrix  $Q$ , see [1], we can proof:

$$Q = \text{Inverse}(Q) = \text{Transpose}(Q)$$

For finding determinant of BAPD and BAHD matrices, we use of permutation matrix:

$$P = Q_{n\text{-block} \times n\text{-block}} \times AP \text{ and } H = Q_{n\text{-block} \times n\text{-block}} \times AH$$

Transfer BAPD and BAHD matrices to BTD matrices, by block permutation matrices and devised matrices in Theorems ( 2.1) and ( 2.2).

## REFERENCES

1. M.E. MIKKAWY AND E.D. RAHMO , *A New Recursive Algorithm for Inverting General Periodic Pentadiagonal and Anti-pentadiagonal Matrices*, Appl. Math. Comput. 207, 164-170, 2009.
2. L.G. MOLINARI, *Determinants of Block Tridiagonal Mtrices* , Linear Algebra and its Applications, 429, 2221-2226, 2008.
3. H. SABERI AND M. SHAMS SOLARY, *Developing an Improved Shift-and-Invert Arnoldi Method*, Application and Applied Mathematics, 5, No. 1, 167-180, 2010.
4. D.K. SALKUYEH, *Comments on "A Note on a Three-term Recurrence for a Tridiagonal Matrix"*, Appl. Math. Comput. 176, 442-444, 2006.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, PAYAME NOOR UNIVERSITY, 19395-4697 TEHRAN, I.R. OF IRAN.  
E-mail address: `shamssolary@pnu.ac.ir` or `shamssolary@gmail.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## AN ALGORITHM FOR COMPUTING THE INERTIA

MARYAM SHAMS SOLARY<sup>1\*</sup>

ABSTRACT. In this note we try to design an algorithm for Computing the Inertia of  $n \times n$  complex matrix. Inertia is defined the nature and location of eigenvalues for complex matrix. This algorithm helps us for finding inertia without compute eigenvalues.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The inertia of a  $n \times n$  complex matrix  $A$ , is defined to be an integer triple,  $In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$  where  $\pi(A)$  is the number of eigenvalues of matrix  $A$  with positive real parts,  $\nu(A)$  is the number of eigenvalues with negative real parts and  $\delta(A)$  is the number of eigenvalues with zero real parts. In this paper, is developed the shift- and- invert Arnoldi method by a suitable shift for converting generalized system to standard system. Then by a block matrix method and Gerschgorin theorem, the nature and location of eigenvalues were determined.

### 2. MAIN RESULTS

In [4], the authors have shown that the shift- and- invert Arnoldi method for the eigenproblem  $A\varphi_i = \lambda_i B\varphi_i$  is mathematically equivalent to the standard Arnoldi method for the transformed eigenproblem:

$$A\varphi_i = \lambda_i B\varphi_i$$

$$A\varphi_i - \sigma B\varphi_i = \lambda_i B\varphi_i - \sigma B\phi_i$$

$$(A - \sigma B)\varphi_i = (\lambda_i - \sigma)B\varphi_i \Rightarrow 1/(\lambda_i - \sigma)\varphi_i = (A - \sigma B)^{-1}B\varphi_i$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65F25, Secondary 65N25.

*Key words and phrases*. Eigenvalue , Shift, Norm , Gerschgorin Theorem , Inertia.

\* Speaker.

$$M\varphi_i = \theta_i\varphi_i$$

Where  $\sigma$  is a shift. We gain the first shift by this process:

$$\begin{aligned} Ax = \lambda Bx &\Rightarrow \|Ax\| = |\lambda| \|Bx\| \leq |\lambda| \|B\| \|x\| \\ \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} &\leq |\lambda| \|B\| \|A\|^\star = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \end{aligned}$$

$\|\cdot\|^\star$  is a matrix norm, see [2]. So we have:

$$\frac{\|A\|}{\|B\|} \leq |\lambda|$$

$$\begin{aligned} Ax = \lambda Bx &\Rightarrow B^{-1}Ax = \lambda x \Rightarrow \|B^{-1}Ax\| = |\lambda| \|x\| \Rightarrow \|B^{-1}\| \|A\| \|x\| \geq |\lambda| \|x\| \\ &\Rightarrow \|B^{-1}\| \|A\| \geq |\lambda| \end{aligned}$$

Suppose  $\sigma = \frac{\|A\|}{\|B\|}$ , If shift  $\sigma$  is not suitable, i.e.  $(A - \sigma B)$  is not invertible, we find a new shift by bisection on the interval  $[\frac{\|A\|}{\|B\|}, \|B^{-1}\| \|A\|]$ .

This process does not need Hessenberg form of matrices A and B. Therefore it saves time compared with the defined method in [4]. Also we use norm 1 ( $\|\cdot\|_1$ ) for saving time. Now we explain another proof of Gerschgorin theorem. This proof will help us for better describing the Inertia Algorithm: Let  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}_{n \times n}$  be a square matrix of order n with complex entries and let

$$D^i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\} = B(a_{ii}, \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|), \quad i = 1, \dots, n$$

**Theorem 2.1.** (Gerschgorin) 1. Every eigenvalue of A lies in some  $D^i$ .

2. If M is the union of m disks  $D_i$  such that M is disjoint from all other disks of this type, then M contains precisely m eigenvalues of A (counting multiplicities).

*Proof.* See [3]. □

By above theorem, all eigenvalues of A can be found in the union of disks

$$\{z : |z - a_{ii}| \leq r_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

So by Gerschgorin theorem we can describe

$$rp_i = \text{real}(A(i, i)) - r_i, \quad rn_i = \text{real}(A(i, i)) + r_i$$

and use them for finding the nature and location of eigenvalues. For example, if  $rp_i > 0$  for  $1 \leq i \leq n$  agreement definition  $rp_i$  then ith eigenvalue situated in positive part of real numbers. If  $rn_i < 0$  for  $1 \leq i \leq n$  agreement definition  $rn_i$  then ith eigenvalue

situated in negative part of real numbers. Else eigenvalue may be zero but we do not sure, so we must examine more.

*Remark 2.2.* The Gerschgorin Circles for matrix A show that eigenvalues are in the  $[-14, 8.5]$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 1 & .5 & 0 & 0 \\ .5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

By defining  $rp_i$  and  $rn_i$  we can see 4 eigenvalues are situated in Positive Circle , 2 eigenvalues are in Negative Circle and 1 eigenvalue is in Zero Circle.  $R_i \quad i = 1, 2, 3$  give us lower bound and upper bound for circles on real axes, see Figure 1.

$$R_1 = [1.5, 8.5] \rightarrow \text{Positive eigenvalues}$$

$$R_2 = [-14, -3] \rightarrow \text{Negative eigenvalues}$$

$$R_3 = [-1, 1] \rightarrow \text{must be examined more}$$

Note that if these circles overlap with each other, we can not determine the number of eigenvalues in every circle. Thus we must try to plot another circle which contains both circles.

*Remark 2.3.* The Gerschgorin Circles for matrix A show that eigenvalues are in the  $[-7, 6]$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & .5 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

We can see Negative Circle and Zero Circle overlap with each other. So for describing the situation of the eigenvalues needs to determine another circle, this circle must contain two negative and zero circles, see Figure 2. This process is showed in Step4 of Inertia Algorithm. The following is a modification of Inertia Algorithm in [4]. This Inertia Algorithm works faster and more efficient than last algorithm.

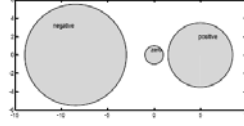


FIGURE 1. Circles show the regions including the Negative, Positive and may be Zero eigenvalues .

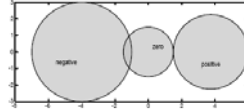


FIGURE 2. Circles show the regions including the Negative, Positive and may be Zero eigenvalues .

### Inertia Algorithm

**Step 1:** Input matrices A,B.

**Step 2:** If B is singular or ill-conditioned, then first shift is:  $\sigma = \frac{\|A\|}{\|B\|}$ , else:  $\sigma = 0$

**Step 3:**  $M = (A - \sigma B)^{-1}$  and use block inverse method for computing inverse of matrix M.

**Step 4:** Gain  $rp_i$  and  $rn_i$  for matrix M by:

$$rp_i = \text{real}(M(i, i)) - r_i, \quad rn_i = \text{real}(M(i, i)) + r_i$$

a- If  $rp_i > 0$  for  $1 \leq i \leq n$ : It shows ith eigenvalue is in Positive Circle.

b- If  $rn_i < 0$  for  $1 \leq i \leq n$ : It shows ith eigenvalue is in Negative Circle.

c-Else: eigenvalue may be zero but we are not sure. Therefore we must examine more.

Note: If upper bound of Negative Circle is bigger than lower bound of Zero Circle, try to gain another circle that contains both of them. If lower bound of Positive Circle is smaller than upper bound of Zero Circle, try to gain another circle that contains both of them.

**Step 5:** By Step(4-a) and Step(4-b) we have:

$\pi(M)$ : The number of eigenvalues with positive real parts in Positive Circle.

$\nu(M)$ : The number of eigenvalues with negative real parts in Negative Circle.

$\delta(M)$ : The number which we do not have information about their nature in Zero Circle.

**Step 6:** Gain eigenvalues  $(\theta_i), i = 1, 2 \dots \delta(M)$  for  $M = (A - \sigma B)^{-1}B$  in Zero Circle.

**Step 7:** Set  $zero(M) = 0$

**For**  $j=1, 2, \dots, \delta(M)$  **do**,  $\lambda_i = \sigma + 1/\theta_i$

If  $\text{real}(\lambda_i) > 0$  then  $\pi(M) = \pi(M) + 1$

If  $\text{real}(\lambda_i) < 0$  then  $\nu(M) = \nu(M) + 1$

Else if  $\text{real}(\lambda_i) = 0$  then  $zero(M) = zero(M) + 1, \delta(M) = zero(M)$

**Step 8:**  $In(A) = (\pi(A), \nu(A), \delta(A))$ .

**Example 2.4.** Let  $A = \text{gallery}('lesp', n)$ ,  $B = \text{eye}(n)$   $n=1500$ .  $\text{eig}(A,B)$  after 247s and Inertia algorithm after 46.443s gives us the nature of eigenvalues (All eigenvalues are negative).

Note: Matrix A is in Matlab Gallery and "eig" is a Matlab function for computing eigenvalues.

**Example 2.5.** Let  $A = \text{BCSSTK13}$ ,  $B = \text{BCSSTM13}$  where A is a real symmetric positive definite matrix of size 2003 and B is a real symmetric positive semi-definite matrix of size 2003 (Matrices A and B are in Harwell-Boeing matrix market).

$\text{Rank}(A)=2003$  and  $\text{Rank}(B)=1241$  (Fluid flow generalized eigenvalues).  $\text{eig}(A,B)$  cannot work because A,B are sparse and  $\text{eigs}(A,B)$  also is the same because B is not symmetric positive definite. So we use  $\text{eig}(\text{full}(A), \text{full}(B))$ , this function needs 735s for doing but Inertia Algorithm needs 342.2653s. Both of them give us similar results (All eigenvalues are positive).

*Remark 2.6.* If in Inertia algorithm we replaced  $\text{inv}(A) \times B$  by  $(A \setminus B)$  we need only 60.4891s. We know that in Matlab software both of them give us similar results (i.e  $\text{inverse}(A)$  multiply B) with different times.

## REFERENCES

1. F. CHATLIN, *Eigenvalues of Matrices*, John Wiley and Sons, 1993.
2. B.N. DATTA, *Numerical Linear Algebra and Applications*, ITP, An International Thomson Company, 1994.
3. D.GOMEZ, *A more direct proof of Gerschgorin's theorem*, *Matematicas Enseñanza Universitaria*, Vol.XIV No 2:119-122, 2006.
4. H. SABERI NAJAFI, M. SHAMS SOLARY, *A New algorithm for computing the inertia of eigenproblems*, *Appl.Math.Comput.* 201: 138-148, 2008.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, PAYAME NOOR UNIVERSITY, 19395-4697 TEHRAN, I.R. OF IRAN.

*E-mail address:* `shamssolary@pnu.ac.ir` or `shamssolary@gmail.com`



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## INVERSE THE WORKING MARTRIX BY LU FACTORIZATION IN THE MULTICOMMODITY FLOW PROBLEMS

MARYAM SOLEIMANI ALYAR

ABSTRACT. This paper presents the algorithnm which may be used to maintain the inverse of working matrix as an LU factorization. The working matrix that used in this paper applied for solve the multicommodity flow problem by the primal simplex algorithm obtain from the partition of basis matrix corresponding to the multicommodity flow problem.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Multicommodity flow problem (which will be referred to as the MCF) is a network flow problem where several commodities must share resources in a common capacitated network. Practical instances of MCF problems can become very large. Many large-scale production, communications, logistics, distribution planning, transportation and manegment problems can be formulated as MCF problems.

Let  $G = (N, A)$  be a directed graph consists of a set  $N$  of  $n$  nodes and a set  $A$  of  $m$  arcs. Let  $\mathcal{N}$  denote the node-arc incidence matrix for this graph. The flow of commodity  $k$  on arc  $(i, j)$  is denoted by  $x_{ij}^k$  while the whole flow vector for commodity  $k$  is denoted by  $x^k$  and its corresponding cost vector  $c^k$ . If  $u_{ij}$  is the capacity of arc  $(i, j)$ ,  $b^k$  is a supply/demand vector for commodity  $k$  and  $U_{ij}^k$  is the individual capacity for commodity  $k$  and  $K$  is the total number of commodities. Then, with these notations, we can the formulate the MCF problem as follow:

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 90-XX; Secondary 00X00, 00X00.

*Key words and phrases*. multicommodity flow, working matrix, LU factorization, simplex alorithm.

\* Speaker.

$$(1.1) \quad \min \sum_{1 \leq k \leq K} c^k x^k$$

subject to

$$(1.2) \quad \sum_{1 \leq k \leq K} x_{ij}^k \leq u_{ij} \text{ for all } (i, j) \in A,$$

$$(1.3) \quad \mathcal{N}x^k = b^k \text{ for } k = 1, \dots, K,$$

$$(1.4) \quad 0 \leq x_{ij}^k \leq U_{ij}^k \text{ for } k = 1, \dots, K, \text{ for } (i, j) \in A.$$

The restriction (1.2) is the bundle constraint and the restriction (1.3) is the mass balance constraint.

The paper is organized as follows: In section 2, the working matrix is recommend. In section 3, a description of an LU update for maintain the inverse of working matrix as an LU factorization is given. Finally, in section 4, we have the results.

## 2. COMPUTING THE WORKING MATRIX

Suppose  $B$  is the basic matrix associated with the initial basic feasible solution(BFS) for the MCF problem. Every basis in the basis partitioning method can be decomposed as follow:

$$(2.1) \quad \begin{pmatrix} L_1 & R_1 & 0 \\ L_2 & R_2 & 0 \\ L_3 & R_3 & I \end{pmatrix}$$

where  $L_1$ ,  $R_2$  and  $I$  being square matrices. In this matrix  $L_1$  refers to network constraints and arcs of the  $K$  spanning trees and it is a nonsingular matrix, then the inverse of this matrix is exist and denoted by  $L_1^{-1}$ . During the optimization process in the simplex algorithm systems  $Bx = b$  and  $\pi^T B = c^T$  must be solved at each iteration. By partitioning the  $x$ ,  $\pi$  and also  $c$ ,  $b$  corresponding to matrix  $B$  we have:

- For  $Bx = b$ :
 
$$x_2 = (R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1)^{-1} (b_2 - L_2 L_1^{-1} b_1),$$

$$x_1 = L_1^{-1} R_1 - L_1^{-1} R_1 x_1,$$

$$x_3 = b_3 - L_3 x_1 - R_3 x_2.$$

- For  $\pi^T B = c^T$ :  
 $\pi_3 = 0$ ,  
 $\pi_2 = (c_2 - c_1 L_1^{-1} R_1)(R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1)^{-1}$ ,  
 $\pi_1 = (c_1 - {}_2 L_2) L_1^{-1}$ .

In this process we denoted the matrix  $(R_2 - L_2 L_1^{-1} R_1)$  by  $Q$  and will be referred to as the working matrix or cycle matrix.

### 3. THE INVERSE UPDATE

The inverse update requires a technique for obtaining a new  $Q^{-1}$  after a basis exchange. In this paper we use an LU update for this aim.

$$\text{Let } U^i = \begin{pmatrix} I & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \text{ and } L^i = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & l_i & 0 \\ 0 & l & I \end{pmatrix}.$$

$U^i$  and  $L^i$  are upper and lower triangular matrices,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{i-1})^t$  and  $l = (l_{i+1}, \dots, l_m)^t$ . Suppose we have a factorization of  $Q^{-1}$  in the form

$$(3.1) \quad Q^{-1} = U^1 U^2 \dots U^m F^s F^{s-1} \dots F^1$$

where  $F^1, \dots, F^s$  are a combination of row and column triangular matrices. Consider the  $m$  by  $m$  working basis of  $Q$  and denoted by  $\bar{Q}$ . Suppose that the  $k^{th}$  column of  $Q$  is replaced by  $\bar{Q}(k)$ .

**3.1. Nonkey column leaves the basis.** If  $k=m$ , then let  $\beta = F^s \dots F^1 \bar{Q}(k)$ , let  $\bar{L}^m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_m} \end{pmatrix}$ .

$$\bar{U}^m = \begin{pmatrix} & -\beta_1 \\ I & \vdots \\ & -\beta_{m-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ then we have } \bar{Q}^{-1} = U^1 \dots U^{m-1} \bar{U}^m \bar{L}^m F^s \dots F^1.$$

$$\textbf{Proposition 3.1.} \text{ Let } U^{p+1} = \left( \begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & \eta & \\ 0 & & I \end{array} \right) \text{ and } D^p = \left( \begin{array}{c|c} I & \\ \hline \gamma & \\ \hline & I \end{array} \right), \text{ where}$$

$$\eta \text{ is in the column } l, \gamma \text{ in the row } r^* \text{ and } l \neq l^*. \text{ If } \bar{U}^p = \left( \begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & \alpha & \\ 0 & & I \end{array} \right) \text{ and}$$

$$D^{p+1} = \left( \begin{array}{c|c} I & \\ \hline & \beta \\ \hline & I \end{array} \right), \text{ where } \alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{if } i = l^* \\ n_i, & \text{o.w.} \end{cases} \text{ and } \beta_i = \begin{cases} n\gamma, & \text{if } i = l \\ \gamma_i, & \text{o.w.} \end{cases}$$

then  $D^p U^{p+1} = \bar{U}^p D^{p+1}$ .

**3.2. Key column leaves the basis.** In this subsection we used a switch between a key column and a nonkeycolumn for updating the working basis. That is,  $\bar{Q}^{-1} = DQ^{-1}$ , where

$$D = \left( \begin{array}{c|c} I & \\ \hline -e^j L_1^{-1} R_1 & \\ \hline & I \end{array} \right). \text{ We wish to obtain } \bar{Q}^{-1} \text{ in the same form as (3.1).}$$

For this point we begin with  $\bar{Q}^{-1} = RU^1U^2 \dots U^m F^s F^{s-1} \dots F^1$ . We apply proposition 3.1 for this matrix until we obtain  $\bar{Q}^{-1} = \bar{U}^1 \dots \bar{U}^{k-1} R^k U^k \dots U^m F^s F^{s-1} \dots F^1$ .

**Acknowledgements:** For solve the MCF problem by working matrix, we only need to compute the inverse of working basis ( $Q^{-1}$ ). The dimension of  $Q$  is at most equal to number of network arcs and independent of number of commodities. By an Lu update we have less computation than usual matrix computational. Therefore we could save running time.

## REFERENCES

1. R. K. AHUJA, T. L. MAGNANTI AND J. B. ORLIN, *Network flows: Theory, algorithms and applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
2. R. BARTEL AND G. GOLUB, *The simplex method of linear programming using LU decomposition*, Communications of ACM, 12, (1969), 266-268.
3. J.L. KENNINGTON AND R. HELGASON, *Algorithms for network programming*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ZANJAN UNIVERSITY, P. O. BOX 313, ZANJAN, IRAN.

E-mail address: soleimany\_znu@yahoo.com



Extended Abstract of 6<sup>th</sup> Seminar on  
Linear Algebra and its Applications,  
18-19 Khordad 1390, 8-9 June 2011,  
Arak University, Arak, Iran



## A SUBGENERATOR FOR THE CATEGORY OF QUASI-HOPF BIMODULES

SAEID BAGHERI

**ABSTRACT.** It has been already shown that for a bialgebra  $H$  over a field  $k$ , the category  $\mathbb{M}_H^H$  of right Hopf modules is a Grothendieck category and  $H \otimes_k H$  is a subgenerator in it. Furthermore, if  $H$  is a Hopf algebra, this category is equivalent to the category of  $k$ -vector spaces.

Over a quasi-Hopf algebra  $H$  (as introduced by Drinfeld in 1990), the category  ${}_H\mathbb{M}_H^H$  of quasi-Hopf  $H$ -bimodules has been introduced by F. Hasser and F. Nill in 1999. In this paper we will find a subgenerator for this category.

### 1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Throughout this paper,  $k$  will be a field and all (bi)algebras will be over  $k$ , unadorned  $\otimes$  and  $\text{Hom}$  mean  $\otimes_k$  and  $\text{Hom}_k$  respectively.

Let  $A$  be a  $k$ -algebra and  $M$  be a left  $A$ -module. An  $A$ -module  $N$  is called  **$M$ -generated** if there exists an epimorphism

$$M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$$

for some set  $\Lambda$ . The class of all  $M$ -generated modules is denoted by **Gen**( $M$ ). We say a left  $A$ -module  $N$  is  **$M$ -subgenerated**, if  $N$  is isomorphic to a submodule of an  $M$ -generated left  $A$ -module (equivalently, if  $N$  is the kernel of a morphism between  $M$ -generated left  $A$ -modules). The *full* subcategory of  ${}_A\mathbb{M}$ , whose objects are the  $M$ -subgenerated left  $A$ -modules is denoted by  $\sigma[{}_A M]$ . In fact  $\sigma[{}_A M] \subseteq {}_A\mathbb{M}$  is the *smallest* Grothendieck full subcategory containing  $M$ .

The reader is referred to [4] for the well developed theory of categories of this type.

For a bialgebra  $H$  over a field  $k$ , a  $k$ -vector space  $M$  is called a **right  $H$ -Hopf module** if  $M$  is

- i) a right  $H$ -module by  $\varrho_M : M \otimes_k H \rightarrow M$ ,
- ii) a right  $H$ -comodule by  $\varrho^M : M \rightarrow M \otimes_k H$ ,
- iii) for all  $m \in M$  and  $h \in H$ ,  $\varrho^M(mh) = \varrho^M(m)\Delta(h)$ , for  $m \in M, h \in H$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 16W30; Secondary 18A40, 18D10.

*Key words and phrases.* Subgenerator, Hopf module, quasi-Hopf algebra, quasi-Hopf bimodule.

**Example 1.1.  $H$ -modules and Hopf modules.** Let  $H$  be a  $k$ -bialgebra. For a right  $H$ -module  $N$ , the right  $H$ -module  $N \otimes_k^b H$  is a right  $H$ -Hopf module with the canonical comodule structure

$$\varrho_{N \otimes H} = id_N \otimes \mu : N \otimes_k H \otimes_k H \rightarrow N \otimes_k H, \quad n \otimes h \otimes h' \mapsto n \otimes hh'.$$

$$\varrho^{N \otimes H} = id_N \otimes \Delta : N \otimes_k H \rightarrow N \otimes_k H \otimes_k H, \quad n \otimes h \mapsto n \otimes \Delta h.$$

For every  $H$ -module morphism  $f : N \rightarrow N'$ , the map

$$f \otimes id : N \otimes_k H \rightarrow N' \otimes_k H$$

is an  $H$ -Hopf module morphism.

In particular,  $H \otimes_k H$  is a right  $H$ -Hopf module. (see [1, 14.2, 14.3 and 15.8]).

**The category  $\mathbb{M}_H^H$ .** Let  $H$  be a  $k$ -bialgebra. The right  $H$ -Hopf modules, together with the maps which are both right  $H$ -comodule and right  $H$ -module morphisms, form a category that is denoted by  $\mathbb{M}_H^H$ .

In case  $H$  has an antipode, the comparison functor  $- \otimes H : \text{Vect}_k \rightarrow \mathbb{M}_H^H$  is an equivalence of categories.

The right  $H$ -Hopf module  $H \otimes_k H$  with the above construction is a subgenerator in  $\mathbb{M}_H^H$ . (see [1, 14.5, 14.6 and 14.15]).

### 1.1. Quasi-Bialgebras and Quasi-Hopf Algebras. [2]

A four tuple  $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$  is called a **quasi-bialgebra** if  $H$  is an associative  $k$ -algebra with unit,  $\phi$  an invertible element in  $H \otimes H \otimes H$ ,  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  and  $\varepsilon : H \rightarrow k$  are algebra maps, satisfying the following identities:

$$(1.1) \quad (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(h) = h \otimes 1, \quad (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(h) = 1 \otimes h \quad \forall h \in H$$

$$(1.2) \quad (I \otimes \Delta) \circ \Delta(h) = \phi \cdot (\Delta \otimes I) \circ \Delta(h) \cdot \phi^{-1} \quad \forall h \in H$$

$$(1.3) \quad (I \otimes I \otimes \Delta)(\phi)(\Delta \otimes I \otimes I)(\phi) = (1 \otimes \phi)(I \otimes \Delta \otimes I)(\phi)(\phi \otimes 1)$$

( 3-cocycle)

$$(1.4) \quad (I \otimes \varepsilon \otimes I)(\phi) = 1 \otimes 1$$

We use the version of Sweedler's notation:  $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$ .

A **quasi-antipode**  $(S, \alpha, \beta)$  for a quasi-bialgebra  $H$  consists of an invertible algebra anti-automorphism  $S : H \rightarrow H$  and elements  $\alpha, \beta \in H$  such that the following equalities hold:

$$(1.5) \quad \sum_h S(h_1) \alpha h_2 = \varepsilon(h) \alpha \quad \text{and} \quad \sum_h h_1 \beta S(h_2) = \varepsilon(h) \beta$$

$$(1.6) \quad \sum X^1 \beta S(X^2) \alpha X^3 = 1 \quad \text{and} \quad \sum S(x^1) \alpha x^2 \beta x^3 = 1$$

for all  $h \in H$ .

A **quasi-Hopf algebra** is a quasi-bialgebra  $H$  together with a quasi-antipode  $(S, \alpha, \beta)$ .

**1.2. Quasi-Hopf Bimodules.** Following F. Hausser and F. Nill [3], we define the notion of **quasi-Hopf  $H$ -bimodules** as a generalization of the concept Hopf bimodules over Hopf algebras.

**Definition 1.2.** Let  $H$  be a quasi-bialgebra, and  $M$  be an  $(H, H)$ -bimodule and let

$$\varrho : M \longrightarrow M \otimes H, \quad \varrho(m) = \sum m(0) \otimes m(1)$$

be an  $(H, H)$ -bimodule homomorphism. Then  $(M, \varrho)$  is called a right **quasi-Hopf  $H$ -bimodule** if the following relations, for all  $m \in M$ ,  $h \in H$ , are satisfied:

$$(1.7) \quad (id_M \otimes \varepsilon) \circ \varrho = id_M,$$

$$(1.8) \quad \phi \cdot (\varrho \otimes id_H)(\varrho(m)) = (id_M \otimes \Delta)(\varrho(m)) \cdot \phi.$$

A morphism of right quasi-Hopf  $H$ -bimodules is an  $(H, H)$ -bimodule morphism such that it preserves also the right weak  $H$ -coaction  $\varrho : M \longrightarrow M \otimes H$ . The category of right quasi-Hopf  $H$ -bimodules with the above morphisms is denoted by  ${}_H\mathbb{M}_H^H$ .

A trivial example is given by  $M = H$  and  $\varrho = \Delta$ . Now we see another important example:

**Example 1.3.** Let  $N$  be a left  $H$ -module. Then  $N \otimes H$  with the following constructions, becomes a right quasi-Hopf  $H$ -bimodule.  $\forall a, b, h \in H, m \in M$ ;

$$(1.9) \quad a \cdot (m \otimes h) \cdot b := \sum a_1 \cdot m \otimes a_2 h b = \Delta(a)(m \otimes h)(1 \otimes b)$$

and the coaction:  $\varrho : N \otimes H \longrightarrow (N \otimes H) \otimes H$  defined by:

$$\varrho(m \otimes h) := \phi^{-1} \cdot (I \otimes \Delta)(m \otimes h) = \sum x^1 \cdot m \otimes x^2 h_1 \otimes x^3 h_2$$

## 2. MAIN RESULT

Let  $H$  be a quasi-bialgebra. We will find a subgenerator for the category  ${}_H\mathbb{M}_H^H$  of quasi-Hopf bimodules.

**Proposition.** For any quasi-bialgebra  $H$ , with the structures given for  $h, a, b \in H$  by

$$\begin{aligned} h \cdot (a \otimes b) &= \Delta(h)(a \otimes b) = \sum h_1 a \otimes h_2 b \\ (a \otimes b) \cdot h &= a \otimes b h = (a \otimes b)(1 \otimes h) \\ \varrho^{H \otimes H}(a \otimes b) &= \sum x^1 a \otimes x^2 b_1 \otimes x^3 b_2 = \phi^{-1} \cdot (id \otimes \Delta)(a \otimes b), \end{aligned}$$

$H \otimes H$  is a subgenerator for the category  ${}_H\mathbb{M}_H^H$  of quasi-Hopf  $H$ -bimodules.

## REFERENCES

1. Brzeziński, T., Wisbauer, R., *Corings and comodules*, London Math. Soc. LNS **309**, Cambridge University Press (2003).
2. Drinfeld, V.G., *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1**, 1419-1457 (1990).
3. Hausser, F., Nill, F., *Integral theory for quasi-Hopf Algebras*, arxiv:Math QA/9904164 V2 (1999).
4. R. Wisbauer, *Foundations of Module and ring Theory*, Gordon and Breach, Reading (1991).

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MALAYER UNIVERSITY, P. O. BOX 65719-95863, MALAYER, IRAN.

E-mail address: bagheri\_saeid@yahoo.com



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## حل تحلیلی مساله‌ی معکوس سهمی گون

احمد عالی کالجیان

دانشگاه تبریز : aali.ahmad62@gmail.com

هادی علیاری قطورلار

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان : h.aliyari@gmail.com

یاسین عشقه‌علی

دانشگاه آزاد اراک : yasin.eshghali@gmail.com

### چکیده

در این مقاله مساله‌ی معکوس سهمی گون با یک پارامتر کنترل در نظر گرفته می‌شود ایده‌ی اصلی این است که ابتدا تابعی را پیدا می‌کنیم که در شرایط آغازین، مرزی و همچنین شرط اضافی داده شده صدق کند و برای این کار از توابع لاگرانژ استفاده می‌شود و سپس تابع کنترل یا همان « $p$ » را با استفاده از تابع « $u$ » پیدا شده و با جایگذاری در معادله‌ی دیفرانسیل به دست می‌آوریم و واضح است که « $p$ » به دست آمده همراه با « $u$ » جواب مساله خواهند بود.

واژه‌های کلیدی: مساله‌ی معکوس، پارامتر کنترل، توابع لاگرانژ، معادلت سهمی گون، رده بندی موضوعی (MSC2000): .

### ۱ مقدمه

مسائل معکوس سهموی در زمینه‌های مختلف مهندسی به وجود می‌آیند (به عنوان برای مثال به منابع [۱، ۲] رجوع شود. این گونه از مسائل توسط بسیاری از دانشمندان مورد بررسی قرار گرفته است (برای مثال به منبع [۳] مراجعه شود). اما بیشتر این بحث‌ها به آنالیز کیفی معادلات مانند وجود و منحصر به فردی جواب اختصاص داده شده اند و در این مقاله، جواب تحلیلی برای مساله معکوس سهموی یک بعدی با یک

پارامتر کنترل ارائه می‌شود و جواب عددی برای این مساله در [۴] بررسی شده است، مساله به صورت زیر است

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t)u + \phi(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T \quad (1)$$

با شرط آغازین:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

و شرط های مرزی:

$$u(0, t) = g_0(t), \quad 0 < t \leq T \quad (3)$$

$$u(1, t) = g_1(t), \quad 0 < t \leq T \quad (4)$$

به شرطی که  $u$  در شرط اضافی زیر نیز صدق کند:

$$u(x_0, t) = E(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

که  $x_0$  در دامنه‌ی فضایی  $(0 \leq x \leq 1)$  قرار داشته باشد و  $f, g_0, g_1, E, \alpha$  معلوم هستند و توابع  $u, p$  مجهول هستند و توجه شود که  $\alpha$  ضریب انتشار است. انواع خاصی از مسائل فیزیکی را، می‌توان به وسیله‌ی روابط  $(1-5)$  مدل سازی کرد. معادله‌ی (۱) می‌تواند برای توصیف فرایند انتقال حرارت با پارامتر منبع به کار برده شود و معادله‌ی (۵) را می‌توان به عنوان دما در نقطه‌ی داده شده  $x_0$  و در بازه زمانی مشخص در  $t$  فرض کرد. بنابراین هدف از حل مساله معکوس، شناسایی پارامتر منبع است که در هر زمان دلخواه، درجه حرارت مورد نظر را در یک نقطه‌ی داده شده‌ی  $x_0$  در دامنه را، به دست می‌دهد.

## ۲ پیدا کردن $u(x, t)$

در این بخش  $u(x, t)$  چنان پیدا می‌شود که در شرایط داده شده صدق کند برای این منظور  $u(x, t)$  به صورت زیر در نظر گرفته شود

$$u(x, t) = k(x, t)f(x) \quad (6)$$

با اعمال شرطهای (۵ - ۲) برای جواب ۶ شرطهای زیر نتیجه می شود

$$\begin{cases} k(x, \circ) = \mathbf{1}, & \circ \leq x \leq \mathbf{1} \\ k(\circ, t) = \frac{g_{\circ}(t)}{f(\circ)} = G_{\circ}(t), & \circ < t \leq T \\ k(\mathbf{1}, t) = \frac{g_{\mathbf{1}}(t)}{f(\mathbf{1})} = G_{\mathbf{1}}(t), & \circ < t \leq T \\ k(x_{\circ}, t) = \frac{E(t)}{f(x_{\circ})} = E'(t), & \circ \leq t \leq T \end{cases}$$

### ۳ توابع لاگرانژ

در این بخش توابع لاگرانژ به صورت زیر تعریف می شود

$$L_{\circ}(x) = \frac{(x - \mathbf{1})(x - x_{\circ})}{x_{\circ}}, L_{\mathbf{1}}(x) = \frac{x(x - x_{\circ})}{\mathbf{1} - x_{\circ}}, L_{x_{\circ}} = \frac{x(x - \mathbf{1})}{x_{\circ}(x_{\circ} - \mathbf{1})}$$

با استفاده از این توابع تابع  $k(x, t)$  به صورت زیر پیدا می شود

$$k(x, t) = \begin{cases} L_{\circ}(x)G_{\circ}(t) + L_{\mathbf{1}}(x)G_{\mathbf{1}}(t) + L_{x_{\circ}}(x)E'(t) & t > \circ \\ \mathbf{1} & t = \circ \end{cases}$$

به طور واضح  $k(x, t)$  در شرایط صدق می کند.

### ۴ پیدا کردن $p(t)$

در این بخش با استفاده از  $u$  به دست آمده در بخش های قبلی  $p(t)$  را از معادله دیفرانسیل (۱) به دست می آوریم به عبارت دیگر داریم

$$p(t) = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi(x, t)}{u(x, t)}$$

و  $p$  به دست آمده همراه با  $u$  جواب مساله خواهند بود.

### مراجع

- [1] J. R. CANNON, Y. LIN, S. XU , *Numerical procedurs for the de-termination of an unknown coefficient in semi- linear parabolic differential equations*,  
Inverse Probl. 10(1994)227243.
- [2] J. R. CANNON, H.M. YIN , *Numerical solutions of some parabolic inverse problems*, Numer. Meth. Partial Differential equations.2(1990)177191. Inverse Probl. 10(1994)227243.
- [3] J. R. CANNON, H.M. YIN , *On a class of nonlinear parabolic equations with nonlinear trace type functional inverse problems*, Inverse Probl.7(1991)49161.
- [4] M. DEGHAN , *Numerical solution of one-dmensional parabolic inverse problem*, Applied Mathematical and Computation 136(2003)333344.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین‌المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## بررسی عملگر انتگرال $L_\alpha$ روی دوره $(k, n) - CC$ و $(k, n) - S^*$

عاطفه عباسی

دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده ریاضی atefehabbasi98@gmail.com

احمد زیره

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده ریاضی azireh@gmail.com

### چکیده

در این مقاله به بیان عملگر  $D^n$  پرداخته و دوره  $(k, n) - S^*$  و  $(k, n) - CC$  از توابع ستاره گون و تقریباً محدب که توسط عملگر مشتق سالکین  $D^n$  بیان می‌شوند تعریف و برخی خواص این دوره را بررسی و عملگر انتگرال  $L_\alpha$  را روی دوره مزبور بررسی می‌کنیم و نشان خواهیم داد تحت چه شرایطی دوره مزبور نسبت به این عملگر انتگرال بسته هستند.

واژه‌های کلیدی: عملگر مشتق سالکین - عملگر انتگرال - تابع ستاره گون - تابع محدب - تابع تقریباً محدب .  
رده بندی موضوعی (MSC2000): ۳۰C45 .

## ۱ مقدمات

دیسک باز  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  در صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  را در نظر می‌گیریم مجموعه توابع تحلیلی  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  را با نماد  $H(U)$  نمایش می‌دهیم و  $A = \{f \in H(U) : f(0) = 0, f'(0) = 1\}$  و  $S$  را زیر مجموعه ای از  $A$  در نظر بگیریم که عناصر آن یک به یک می‌باشد.

تعریف ۱. میدان  $D$  رانسبت به مبدا ستاره گون گوئیم اگر پاره خط مستقیمی که هر نقطه از  $D$  را به مبدا وصل می کند در  $D$  بیفتد. تابع  $f \in S$  راستاره گون گوئیم اگر چنانچه تصویر دیسک باز  $U$  توسط  $f(z)$  بر میدانی نگاشته شود که نسبت به مبدا ستاره گون است. این زیر دایره  $S$  را با  $S^*$  نمایش می دهیم .

قضیه ۱. ([۳]) فرض کنیم  $f(z) \in S$  در این صورت  $f(z) \in S^*$  اگر و تنها اگر:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

مثال ۱. تابع  $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  در دایره  $S^*$  قرار دارد زیرا تصویر دیسک باز  $U$  توسط  $K(z)$  بر کل صفحه مختلط در امتداد پرتو  $\frac{1}{2}$  تا  $\infty$  نگاشته می شود. همچنین :

$$Re\left\{\frac{zK'(z)}{K(z)}\right\} = Re\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} > 0$$

تعریف ۲. میدان  $D$  را محدب گوئیم اگر چنانچه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از  $D$  را بهم وصل می کند در  $D$  بیفتد. تابع  $f(z) \in S$  را محدب گوئیم اگر تصویر  $U$  توسط  $f(z)$  بر میدانی نگاشته شود که محدب باشد. این دایره را با  $C$  نمایش می دهیم .

قضیه ۲. ([۳]) فرض کنیم  $f(z) \in S$  در این صورت  $f(z) \in C$  اگر و تنها اگر:

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

مثال ۲. تابع  $f(z) = \frac{z}{1-z}$  در دایره  $C$  قرار دارد زیرا تصویر دیسک باز  $U$  توسط  $f(z)$  بر میدان محدب  $Re w > \frac{1}{2}$  نگاشته می شود.

تعریف ۳. تابع  $f(z) \in A$  را تقریباً محدب گوئیم اگر تابع  $g(z) \in C$  وجود داشته باشد به طوری که در شرط زیر صدق کند:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0$$

عملگر مشتق  $D^n : A \rightarrow A$  توسط [2] Salagean به صورت زیر تعریف و بررسی شده

$$D^n f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z)$$

$$D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z))$$

اگر  $f \in S$  و  $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$  در این صورت :

$$D^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j$$

عملگرانتگرال  $L_a : A \rightarrow A$  برای  $a \in C$  که  $\operatorname{Re} a \geq 0$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(z) = L_a F(z) = \frac{1+a}{z^a} \int_0^z F(t) t^{a-1} dt$$

الکساندر بدست می آید.

## ۲ عملگرانتگرال $L_a$ روی رده $CC - (k, n)$ و $(K, n) - S^*$

تعریف ۴.

فرض کنیم  $f \in A$  و  $k \in [0, \infty)$  و  $n \in N$  گوئیم تابع  $f$  در رده  $(k, n) - S^*$  قرار دارد اگر در شرط زیر صدق کند :

$$\operatorname{Re} \left( \frac{D^n f(z)}{f(z)} \right) > k \mid \frac{D^n f(z)}{f(z)} - 1 \mid$$

باقرار دادن  $k = 0$  و  $n = 1$  حالت خاص توابع ستاره گون بدست می آید.

قضیه ۳. ([۱]) فرض کنیم  $F(z) \in (k, n) - S^*$  با  $k \in [0, \infty)$  و  $n \in N$  در این صورت

$$f(z) = L_a F(z) \in (k, n) - S^*$$

تعریف ۵. فرض کنیم  $f \in A$  و  $k \in [0, \infty)$  و  $n \in N$  گوئیم تابع  $f$  در رده  $CC - (k, n)$  قرار دارد اگر وجود داشته باشد  $g(z) \in (k, n) - S^*$  که در شرط زیر صدق کند:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{D^n f(z)}{g(z)} \right) > k. \mid \frac{D^n f(z)}{g(z)} - 1 \mid (z \in U)$$

با قراردادن  $n = 1$  و  $k = 0$  حالت خاص توابع تقریباً محدب بدست می آید.

ما در این مقاله به اثبات قضیه زیر می پردازیم :

قضیه ۴. فرض کنیم  $F(z) \in (k, n) - CC$  نسبت به تابع  $G(z) \in (k, n) - S^*$  برای  $G(z) \in (k, n) - S^*$  و  $f(z) = L_a F(z)$  و  $n \in N$  و  $k \in [0, \infty)$  در این صورت  $g(z) = L_a G(z)$  و  $f(z) \in (k, n) - S^*$  نسبت به  $g(z) \in (k, n) - CC$

## مراجع

- [1] M.ACU, *on subclass of n-uniformly close to convex functions* , *General Mathematics Vol .14*, 2006, 55-64.
- [2] GR.SALAGEAN ,*subclass of univalent function complex analysis* ,*Fifth Roumanian-Finnish Seminar,Lectures Notes in Mathematics1013* ,springer-Verlage, 1983.
- [3] H.SILVERMAN,*complex variables with applications,Houghton Mifflinco,Boston,1975*

## معکوس $M$ - ماتریسهای سرانجام نامنفی تحويل ناپذیر

دکتر مجید ادیب

دانشگاه زنجان [madib@znu.ac.ir](mailto:madib@znu.ac.ir)

رسول بهلولی

دانشگاه زنجان [rasoul.bahlouly@znu.ac.ir](mailto:rasoul.bahlouly@znu.ac.ir)

### چکیده

در این مقاله،  $M$  - ماتریسهایی به فرم  $\alpha I - P$  که در آن  $\alpha \geq \rho(P)$  و  $P$  یک ماتریس سرانجام نامنفی تحويل ناپذیر است تحت عنوان شبه  $M$  - ماتریس، مطالعه می شوند. نشان می دهیم هنگامیکه  $1 \leq \text{index}_*(P)$  عدد مثبت  $\lambda$  وجود دارد به طوری که اگر  $\alpha > \rho(P)$  آنگاه معکوس  $\alpha I - P$  مثبت است. مثالهایی مبنی بر اینکه اگر  $1 > \text{index}_*(P)$  ممکن است معکوس  $\alpha I - P$  برای هر انتخاب  $\alpha > \rho(P)$  نامنفی نباشد ارائه می شوند.

واژه های کلیدی: ماتریس نامنفی،  $M$  - ماتریس.

رده بندی موضوعی MSC2000: 15-xx, 65xx.

## ۱ تعاریف و نمادگذاری

قرار می دهیم:  $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ . فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{R})$  یک ماتریس  $n \times n$  با درایه های حقیقی باشد. در این صورت گوییم:

- $A \geq B$  اگر برای هر  $i, j \in \langle n \rangle$ ،  $a_{ij} \geq b_{ij}$ ،
- $A > B$  اگر برای هر  $i, j \in \langle n \rangle$ ،  $a_{ij} > b_{ij}$ ،  $A \neq B$ ،
- $A \gg B$  اگر برای هر  $i, j \in \langle n \rangle$ ،  $a_{ij} > b_{ij}$ .

اگر در روابط مذکور  $B = 0$  باشد آنگاه ماتریس  $A$  را به ترتیب ماتریس نامنفی، نیمه مثبت و اکیدا مثبت می نامیم.

گوییم ماتریس  $A \in M_n(\mathbb{R})$  سرانجام نامنفی است اگر عدد صحیح  $N$  وجود داشته باشد به طوری که برای اعداد صحیح  $g \geq N$ ،  $A^g \geq 0$ . ماتریس  $A$  سرانجام مثبت است اگر برای اعداد صحیح  $g \geq N$  داشته باشیم  $A^g \gg 0$ . برای نمایش درجه  $\lambda$  به عنوان ریشه چند جمله ای مینیمال  $A$  از  $index_\lambda(A)$  استفاده می کنیم.

ماتریس  $A$  تحویل پذیر گفته می شود اگر ماتریس جایگشت  $P$  موجود باشد به طوری که  $P^T A P = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ ، که در آن  $B$  و  $D$  ماتریسهای مربعی ناتهی اند. ماتریس  $A$  تحویل ناپذیر نامیده می شود اگر تحویل پذیر نباشد.

## ۲ خواص شبه $M$ -ماتریسها

شبه  $M$ -ماتریسهای ساخته شده از ماتریسهای سرانجام نامنفی، باید ویژگیهایی شبیه  $M$ -ماتریسها داشته باشند. در حالت خاص، اگر  $P$  یک ماتریس سرانجام نامنفی تحویل ناپذیر با  $index_0(P) \leq 1$  باشد آنگاه بنا به [2]،  $P$  برخی ویژگیهای ماتریسهای نامنفی را خواهد داشت. اگر  $index_0(P) > 1$  آنگاه برخی از این ویژگیها برقرار نیستند. مثال زیر نشان میدهد که معکوس یک شبه  $M$ -ماتریس ساخته شده از یک ماتریس سرانجام نامنفی تحویل ناپذیر، ممکن است یک معکوس نامنفی (یا سرانجام نامنفی) نداشته باشد.

مثال ۱. ماتریس  $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید:

توجه کنید که  $P$  یک ماتریس سرانجام نامنفی تحویل ناپذیر،  $\rho(P) = 1$  یک مقدار ویژه باچندگانگی ۲،  $index_0(P) = 2$  و نیز مجموعه مقادیر ویژه  $P$ ،  $\sigma(P) = \{1, 1, 0, 0\}$  میباشد و برای  $g > 1$  داریم:

$$P^g = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ g/2 & g/2 & 1/2 & 1/2 \\ g/2 & g/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

همچنین توجه کنید که  $P^g$  برای  $g > 1$  تحویل پذیر است. برای هر  $\alpha > 1$  داریم:

$$(\alpha I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-1}{2\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{2\alpha^2} & -\frac{1}{2\alpha^2} \\ \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)} & \frac{\alpha-1}{2\alpha(\alpha-1)} & -\frac{1}{2\alpha^2} & \frac{1}{2\alpha^2} \\ \frac{1}{2(\alpha-1)^2} & \frac{1}{2(\alpha-1)^2} & \frac{\alpha-1}{2\alpha(\alpha-1)} & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha(\alpha-1)} \\ \frac{1}{2(\alpha-1)^2} & \frac{1}{2(\alpha-1)^2} & \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)} & \frac{\alpha-1}{2\alpha(\alpha-1)} \end{bmatrix}.$$

به وضوح  $(\alpha I - P)^{-1}$  برای هر انتخاب  $\alpha > 1$  یک ماتریس مثبت نیست.

مثال ۲. ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{11}{\sqrt{244}} & \frac{1}{\sqrt{244}} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{11}{\sqrt{244}} & \frac{1}{\sqrt{244}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{244}} & \frac{-11}{\sqrt{244}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{244}} & \frac{-11}{\sqrt{244}} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$D = \text{diag}(1, -0.9, -0.8, -0.8).$$

توجه کنید که برای ماتریس  $Q$  تعریف شده با

$$Q = RDR^T = \begin{bmatrix} \frac{45}{488} & \frac{2177}{2440} & \frac{209}{2440} & \frac{209}{2440} \\ \frac{2177}{2440} & \frac{45}{488} & \frac{209}{2440} & \frac{209}{2440} \\ \frac{209}{2440} & \frac{209}{2440} & \frac{-411}{2440} & \frac{-103}{2440} \\ \frac{209}{2440} & \frac{209}{2440} & \frac{-411}{2440} & \frac{-103}{2440} \end{bmatrix},$$

داریم  $Q^g = (RDR^T)^g = RD^gR^T$  و از اینرو به سادگی می توان دید که  $Q^g$  برای  $g \geq 52$  مثبت است. همچنین توجه کنید که

$$(\alpha I - Q)^{-1} = (\alpha RR^T - RDR^T)^{-1} = (R(\alpha I - D)R^T)^{-1} = RBR^T$$

که در آن  $B$  یک ماتریس قطری با عناصر قطری  $\frac{1}{1-\alpha+8}, \frac{1}{1-\alpha+8}, \frac{1}{1-\alpha+9}, \frac{1}{\alpha-1}$  است. بعلاوه می توان نشان داد که این ماتریس برای  $\alpha > \frac{717}{518}$  مثبت است.

در این ارتباط نتایج زیر قابل اثباتند:

لم ۱. فرض کنید  $P$  یک ماتریس سرانجام نامنفی تحویل ناپذیر  $n \times n$  با  $\text{index}_0(P) \leq 1$  باشد و  $e^{(j)}$ ،  $j$ امین بردار واحد باشد، آنگاه وجود دارد  $\lambda_j > 0$  که اگر  $\lambda_j > \alpha > \rho(P)$  آنگاه  $(\alpha I - P)^{-1}e^{(j)} \gg 0$ .

قضیه ۱. فرض کنید  $P$  یک ماتریس سرانجام نامنفی تحویل ناپذیر  $n \times n$  با  $index_o(P) \leq 1$  باشد. در این صورت وجود دارد  $\lambda > \rho(P)$  که اگر  $\lambda > \alpha > \rho(P)$  آنگاه  $(\alpha I - P)^{-1} \gg 0$ .

مثال ۳. ماتریس  $P = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

$P$  یک ماتریس تحویل ناپذیر نامنفی است و  $\rho(P) = 12$  یک مقدار ویژه با چندگانگی یک است اما  $index_o(P) = 2$  و برای هر  $\alpha > 12$  داریم  $(\alpha I - P)^{-1} \gg 0$ . این مثال نشان می دهد که عکس قضیه ۱ برقرار نیست.

## مراجع

- [1] A. BERMAN , R. J. PLEMMONS , *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York, 1979.
- [2] S. CARNOCHAN NAQVI , J.J. McDONALD , *The Combinatorial Structure of Eventually Nonnegative Matrices*, Electronic Journal of Linear Algebra, Volume 9 (2002), 255-269.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## میزان نفوذ در مدل‌های اصلاح شده‌ی IDEA با بازده به مقیاس متغیر

عادل حبیبی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز،  
habib\_kushesh@yahoo.com

احمد ابراهیمی بهنام\*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز،  
ahad.ebrahimi@yahoo.com

### چکیده

در سال‌های اخیر مقالات و پایان‌نامه‌هایی ارائه شده‌اند که در آنها با در نظر گرفتن مدل‌های اساسی DEA میزان نفوذ داده‌های کارا و بررسی کارایی داده‌های ناکارا را بحث شده است. نظر به اصلاح مدل‌های اساسی IDEA با استفاده از آنالیز رویه‌ای تاکنون بحثی برای میزان نفوذ واحدهای ناکارا روی تعداد ناکاری واحدهای دیگر در مدل‌های اصلاح شده IDEA صورت نگرفته است. در این مقاله، سعی شده است میزان نفوذ برای مدل‌های اصلاح شده IDEA با بازده به مقیاس متغیر انجام شود و تأثیر تغییر مرزهای ضعیف ناکارایی برای میزان نفوذ بررسی شود. بدین ترتیب مقادیر دقیق‌تری از میزان نفوذ واحدهای ناکارا برای تعداد ناکارایی واحدهای ناکارا حاصل خواهد شد که این برای تأکید روی این موضوع با مقایسه روش‌های قبلی با روش جدید انجام خواهد شد.

کلمات کلیدی:  $I_{OP}$ , IDEA, IBCC (میزان نفوذپذیری)

## مقدمه

مطمئناً ارزیابی دقیق هدف اصلی بسیاری از دستگاه های ارزیابی می باشد بنابراین تحلیل پوششی داده ها ( $DEA$ ) بعنوان عضوی از این گونه سیستمها بایستی به این هدف توجه کند. در تحلیل پوششی داده ها ارزیابی توسط مدل های ریاضی انجام می شود که در حالت های خاص منجر به نتیجه واقعی نمی شود. بسیاری از مقالات روشهایی برای اصلاح این مدل های ریاضی و حذف مشکلات آنها ارائه می کنند. اما این روش ها نیز خود مشکلاتی دارند. اخیراً مقالات و پایان نامه هایی در خصوص میزان نفوذ مشاهدات روی مدل های اساسی  $DEA$  صورت گرفته همچنین اصلاح مرزهای مدل های مذکور توسط سهند دانشور روی مدل های اصلاح شده انجام گرفته است ولی میزان نفوذ مشاهدات روی مدل های اساسی  $IDEA$  و همچنین بعد از اصلاح این مدل ها هیچ گونه اقدامی انجام نگرفته است که در این پایان نامه میزان نفوذ را روی مدل  $I - BCC$  اصلاح شده ارائه می کنیم.

قضیه ۱. رتبه ناکارایی  $DMU_i$  هایی که در مدل  $IBCC$  کلاسیک با مرز ضعیف مقایسه می شوند بیشتر از رتبه ناکارایی آن در مدل اصلاح شده است.

نتیجه ۱. میزان نفوذ در مدل اصلاح شده  $IBCC$  برای  $DMU_H$  که با مرز ضعیف مقایسه می شود کمتر از میزان نفوذ در مدل  $IBCC$  کلاسیک می باشد یعنی:  $IBCC$  اصلاح شده  $I'_{HP} \cdot I'_{HP}$  و  $IBCC$  کلاسیک.

نتیجه ۲. مقدار نفوذ  $DMU_P$  روی  $DMU_H$  غیر ناکارا که با مرز ضعیف مقایسه می شود در مدل های اساسی  $IDEA$  بیشتر از مقدار نفوذ آن در مدل  $IBCC$  اصلاح شده می باشد

مثال عددی: فرض کنید ۱۳ تا  $DMU$  با ورودی و خروجی های زیر موجود باشد مطلوبست تعیین ناحیه ی پایداری  $DMU$  موجود در اشتراک مرز ضعیف و قوی.

جدول (۱): ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیری

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
$Input_1$	۱,۵	۱,۲۵	۰,۹	۰,۲۵	۱,۵	۱,۲۵	۰,۹	۰,۲۵	۱,۲۵	۱	۰,۹	۰,۲۵	۰,۹
$Input_2$	۰,۲۵	۰,۲	۱	۱,۵	۰,۲۵	۰,۲	۱	۱,۵	۰,۱	۰,۲۵	۰,۴	۰,۷۵	۱
$Output$	۱	۱,۲۵	۱,۲۵	۱	۱,۵	۱,۵	۱,۵	۱,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۲۵	۰,۵	۱

جدول (۲): مقادیر ناکارایی  $DMU$  های جدول (۱)

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
ناکارایی	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱,۱۳	۱	۱,۰۲	۱

جدول (۳): مقادیر  $u_o^{+*}$  و  $u_o^{-*}$  برای  $DMU$  های ناکارا

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
$u_o^{-*}$	۰,۵۸	۰,۶۹	۱	۰,۰۲	۱	۱	۱	۱	۰,۴	---	۰	---	۰,۵۲
$u_o^{+*}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰,۹	۰,۸	---	۱

با استفاده از جدول (۳) دیده می‌شود  $DMU$  های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ ناکارای ضعیف می‌باشند و  $DMU$  های ۱ و ۲ و ۴ و ۱۳ در اشتراک مرز ضعیف و قوی‌اند و  $DMU$  های ۹ و ۱۱ ناکارای قوی هستند. میزان نفوذپذیری در حالت کلاسیک:

$$DMU_1 = 1,1391 \text{ ناکارایی}$$

$$DMU_1 \text{ بعد از حذف حرف } DMU_1 = 1,1234$$

$$I'_{0,2} = \frac{1 - 1/1391}{1 - 1/1234} = 1/1272 \text{ میزان نفوذپذیری در حالت کلاسیک}$$

حال برای بدست آوردن کران بالا  $\varepsilon$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon = \max\{0,52, 0,58, 0,02, 0,69\} = 0,69$$

با قرار دادن  $\varepsilon$  به عنوان کران بالای  $u_o$  مرز ضعیف به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & U^t y_o + u_o \\ & V^t x_o = 1 \\ & U^t y_j - V^t x_j + u_o \geq 0 \\ & U \geq 0 \\ & V \geq 0 \\ & u_o \leq \varepsilon \end{aligned}$$

جدول (۴): مقادیر ناکارایی  $DMU$  های جدول (۱) بعد از اصلاح

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
ناکارایی	۱	۱	۱,۰۷	۱	۱,۱۵	۱,۰۶	۱,۱۵	۱,۱۵	۱	۱,۱۹	۱	۱,۰۲	۱

داریم:  $۱,۱۹۷۱ =$  ناکارایی  $DMU_۱$  بعد از اصلاح  
 برای پیدا کردن ناکارایی  $DMU_۱$  پس از حذف  $DMU_۱$  در حالت اصلاح شده بایستی  
 مرز جدید دوباره اصلاح شود.  $\varepsilon'$  را با استفاده از جدول زیر به صورت زیر محاسبه  
 می کنیم.

جدول (۵): مقادیر  $u_o^{+*}$  و  $u_o^{-*}$  برای  $DMU$  های ناکارا بعد از اصلاح

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
$u_o^{-*}$	---	۰,۵۹۷۷	---	۰,۰۲	---	---	---	---	۰,۴۴	---	۰	---	۰,۵۲
$u_o^{+*}$	---	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	---	۰,۸۸	---	۱

$$\varepsilon' = \max\{۰,۵۹۷۷, ۰,۵۲۷۳, ۰,۰۲\} = ۰,۵۹۷۷$$

با قرار دادن  $\varepsilon'$  به عنوان کران بالای  $u_o$  مرز ضعیف به صورت زیر اصلاح می شود (بعد  
 از حذف  $DMU_۱$ )

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & U^t y_o + u_o \\ & V^t x_o = ۱ \\ & U^t y_j - V^t x_j + u_o \geq ۰ \\ & U \geq ۰ \\ & V \geq ۰ \\ & \text{آزاد} \quad u_o \leq ۰,۵۹۷۷ \end{aligned}$$

$$\text{ناکارایی } DMU_۱ \text{ بعد از حذف } DMU_۱ = ۱,۲۳۴۹$$

$$I'_{۱,۲} = \frac{۱ - ۱/۱۹۷۱}{۱ - ۱/۲۳۴۹} = ۰/۸۳۹۰ \text{ میزان نفوذپذیری در حالت اصلاح شده برابر } ۰/۸۳۹۰ \text{ است.}$$

نتیجه گیری:

میزان نفوذپذیری در حالت کلاسیک بزرگتر از میزان نفوذپذیری در حالت اصلاح شده  
 است.

- [1] S. Mehrabian, G.R. Jahanshahloo, M.R. Alirezaee, G.R. Amin, "An Assurance Interval for the Non - Archimedean Epsilon in DEA Models", *Operation Research*, Vol. 48, pp. 344-347. 2000.
- [2] S. Mehrabian, G.R. Jahanshahloo, M.R. Alirezaee, "an Assurance Interval for the Non - Archimedean Epsilon in DEA Models", *Operation research*, (1998)
- [3] R.D. Banker, A. Chares, w.w. Cooper, "some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis", *Manegmant Science*, 30(9), 1078-1092. 1984



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## بعد تزریقی دنباله های تقریباً شکافته شده

عفت فخار

دانشگاه اصفهان e86.fakhar@yahoo.com

### چکیده

دنباله های آسلاندر-ریتن یا همان دنباله های تقریباً شکافته شده در نظریه نمایش روی جبرهای آرتینی قبل از سال ۱۹۷۰ معرفی شد. در این مقاله نشان می دهیم که بعد تزریقی تعداد شمارش پذیری از دنباله های تقریباً شکافته شده به صورت  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  رابطه ای  $\text{id}B < \max\{\text{id}A, \text{id}C\}$  برقرار است.

واژه های کلیدی: جبر آرتینی Artin Algebra تقریباً شکافته شده Almost Split.

## ۱ تعاریف

تعریف ۱. فرض کنید  $R$  و  $\Lambda$  دو حلقه (یکدار) و  $\phi: R \rightarrow \Lambda$  همریختی حلقه ها باشد. به علاوه فرض کنیم  $\phi(R)$  در مرکز  $\Lambda$  باشد یعنی

$$\forall r \in R, \lambda_1 \in \Lambda \quad \begin{aligned} \phi(r)\lambda_1 &= \lambda_1\phi(r) \\ r \cdot \lambda_1 &= \lambda_1 \cdot r \end{aligned}$$

بنابراین  $\Lambda$  یک  $R$ -مدول (دوطرفه) است. در این صورت  $\Lambda$  را یک  $R$ -جبر نامیم.

تعریف ۲. فرض کنید  $R$  حلقه جابجایی، آرینی و  $\Lambda$  یک  $R$ -جبر باشد. گوئیم  $\Lambda$  یک  $R$ -جبر آرینی است، هرگاه  $\Lambda$  به عنوان  $R$ -مدول با تولید متناهی باشد. یعنی

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \Lambda \quad s.t. \quad \Lambda = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$$

لم ۱. فرض کنید  $\delta : \circ \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \circ$  یک دنباله تقریباً شکافته شده و  $X \in \text{mod } \Lambda$ . در این صورت

$$l_R(\delta^*(X)) = C(C, X).l_R(\text{End}(C)/\text{rad}(\text{End}(C)))$$

به ویژه  $\delta^*(X) \neq \circ$  اگر و فقط اگر  $C \mid X$ .

لم ۲. فرض کنید  $\delta : \circ \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \circ$  یک دنباله تقریباً شکافته شده باشد.

(آ) اگر  $\text{id} B < \max\{\text{id} A, \text{id} C\}$  آنگاه برای هر  $m$  یی که  $\text{id} B \leq m < \text{id} A$  و  $\alpha_m$  و  $\gamma_m$  یکریختی هستند.

(ب) شرایط زیر هم ارزند:

$$\text{id} B < \max\{\text{id} A, \text{id} C\} \quad (۱)$$

(۲) عدد  $m$  یی که  $m < \text{id} A$  موجود است به طوری که  $\alpha_m$  و  $\gamma_m$  یکریختی هستند.  
( $\alpha_m$  و  $\gamma_m$  ریختارهای معرفی شده در لم قبل هستند.)

قضیه ۱. فرض کنید  $\delta : \circ \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \circ$  یک دنباله تقریباً شکافته شده باشد.  $\delta^*(\Omega^m(\Lambda/r)) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^{m+1}(\Lambda/r, A)$  از  $R$ -مدول های ناصفر است. اگر و فقط اگر  $X$  موجود است به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

$$(۱) \quad \text{عدد } t \text{ موجود است به طوری که } C^t \oplus X \cong \Omega^m(\Lambda/r)$$

$$(۲) \quad \underline{\text{End}}_{\Lambda}(C) \text{ حلقه ی تقسیم است.}$$

$$(۳) \quad \underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(C, X) = \circ$$

## ۲ قضیه اصلی

قضیه ۲. فرض کنید  $\circ \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \circ$  یک دنباله تقریباً شکافته شده باشد. در این صورت  $\text{id}B < \max\{\text{id}A, \text{id}C\}$  اگر و فقط اگر عدد  $m$  و مدول  $X$  موجود باشد به طوری که در پنج شرط زیر صدق کند.

$$(۱) \circ \rightarrow t > 0 \text{ موجود باشند به طوری که } C^t \oplus X \cong \Omega^m(\Lambda/r)$$

$$(۲) \underline{\text{End}}_{\Lambda}(C) \text{ حلقه‌ی تقسیم است.}$$

$$(۳) \underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(C, X) = 0$$

$$(۴) l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(X, C)) = C(\Omega^1, C).l_R(\underline{\text{End}}_{\Lambda}(C))$$

$$(۵) l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(X, C)) = C(\Omega^1, C).l_R(\underline{\text{End}}_{\Lambda}(C))$$

علاوه بر این اگر  $\text{id}B < \max\{\text{id}A, \text{id}C\}$  آنگاه پنج شرط بالا برای هر  $m$  پی که  $\text{id}B \leq m < \text{id}A$  برقرار است.

برهان: فرض کنید عدد  $m$  و مدول  $X$  موجود باشد که در پنج شرط بالا صدق کند. بنابه گزاره‌ی قبل،  $\alpha_m$  یکریختی از  $R -$  مدول های ناصفر است و لذا  $\text{Ext}_{\Lambda}^{m+1}(\Lambda/r, A) \neq 0$  و در نتیجه  $\text{id}A > m$ . بنابه شرط (۱)،

$$l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^{m+1}(\Lambda/r, A)) = l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(\Omega^m(\Lambda/r), C)) = l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(X, C)) + t.l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^1(X, C))$$

$$l_R(\delta^*(\Omega^{(m+1)}(\Lambda/r))) = t.l_R(\delta^*(\Omega^1(C))) + l_R(\delta^*(\Omega^1(X)))$$

بنابه شرایط (۴) و (۵) و لم ۱،  $l_R(\delta^*(\Omega^{(m+1)}(\Lambda/r))) = l_R(\text{Ext}_{\Lambda}^{m+1}(\Lambda/r, C))$  و چون  $\gamma_m$  بروریکتی است، بنابه تساوی قبل،  $\gamma_m$  یکریختی می‌شود و در نتیجه  $\alpha_m$  و  $\gamma_m$  یکریختی می‌شوند و  $\text{id}A > m$ . در نتیجه بنابه لم ۲ (ب)،  $\text{id}B < \{\text{id}A, \text{id}C\}$ . برعکس: فرض کنید  $m$  عدد مثبتی باشد به طوری که  $\text{id}B \leq m < \text{id}A$ . از اینکه  $\delta$  دنباله‌ای تقریباً شکافته شده با نامساوی اکید است، بنابر لم ۲ (آ)،  $\alpha_m$  و  $\gamma_m$  یکریختی هستند. و  $\text{Ext}_{\Lambda}^m(\Lambda/r, C) \neq 0$ . بنابه قضیه ۱، شرایط (۱) و (۲) و (۳) برقرارند. از آنجا که  $\text{id}B \leq m$  لذا

$$0 = \text{Ext}_{\Lambda}^{m+1}(\Lambda/r, B) \cong \text{Ext}_{\Lambda}^1(\Omega^m(\Lambda/r), B) \cong \text{Ext}_{\Lambda}^1(C, B)^t \oplus \text{Ext}_{\Lambda}^1(X, B)$$

و در نتیجه  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(X, B) = 0$  و  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(C, B) = 0$  و در نتیجه ریختارهای  $\text{Ext}_{\Lambda}^1(C, B) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^1(C, C) \xrightarrow{\gamma_C} \delta^*(\Omega^1(C)) \rightarrow 0$

و  $\text{Ext}_\Lambda^1(X, B) \longrightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(X, C) \xrightarrow{\gamma_X} \delta^*(\Omega^X) \longrightarrow 0$  و  
(۲)،  $\text{rad}(\overline{\text{End}}_\Lambda(A)) = 0$  در نتیجه

$$\text{End}_\Lambda(C)/\text{rad}(\text{End}_\Lambda(C)) \cong \underline{\text{End}}_\Lambda(C)/\text{rad}(\underline{\text{End}}_\Lambda(C)) \cong \underline{\text{End}}_\Lambda(C)$$

بنابراین، طبق لم ۱، شرایط (۴) و (۵) برقرار می‌شوند.  $\square$   
اثبات مستقیم قضیه نشان می‌دهد که اگر  $\delta$  دنباله تقریباً شکافته شده با نامساوی اکید  
باشد آنگاه پنج شرط برای هر  $m$  بی که  $\text{id}C \leq m < \text{id}A$  برقرار می‌باشد.  
اگر  $\delta$  دنباله تقریباً شکافته شده با نامساوی اکید متناهی باشد آنگاه شرایط (۴) و (۵)  
ساده‌تر می‌شود.  $\square$

## مراجع

- [1] M. Auslander, I. Reiton, and o. smolo, representation theory of artin algebras.
- [2] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [3] D. Madsen, Projective dimensions and almost split sequences, Elsevier, Journal of algebra, 2002.
- [4] J. J. Rotman, An introduction to homological Algebra, Academic, New York, 1979.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بیسن الملی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## برد عددی مشترک ماتریس ها

سمیه قیاسی

گروه ریاضی دانشگاه زنجان — rozh42@yahoo.com

فرض اله میرزاپور

گروه ریاضی دانشگاه زنجان — f.mirza@znu.ac.ir

چکیده

برای ماتریس های هرمیتی  $A_1, \dots, A_n$  که همه آنها از مرتبه  $m$  و درایه های آنها از اعداد مختلط هستند برد عددی مشترکشان را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$JNR(A_1, \dots, A_n) = \{[(A_1 w, w), \dots, (A_n w, w)]; \|w\| = 1, w \in \mathbb{C}^n\}$$

می خواهیم بدانیم که تحت چه شرایط اضافی از  $m, n$  و یا چه شکلی از برد عددی مشترک  $J$ ،  $n$  تایی  $A_1, \dots, A_n$  به صورت تشابه یکانی نوشته می شود؟ برای حالت  $m = 2$  و  $n$  دلخواه و  $m = n = 3$  جزئیات را به طور کامل بررسی می کنیم.

واژه های کلیدی: برد عددی مشترک، تشابه یکانی.

رده بندی موضوعی (MSC2000): 15A60 (AMS classification).

## ۱ مقدمه

تعریف ۱. فرض می کنیم  $\mathbb{C}^{m \times m}$  مجموعه تمام ماتریس های  $m \times m$  با درایه هایی از اعداد مختلط باشد. برای ماتریس های هرمیتی  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}^{m \times m}$  برد عددی

مشترک شان را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$JNR(A_1, \dots, A_n) := J = \{[(A_1 w, w), \dots, (A_n w, w)]; \|w\| = 1, w \in \mathbb{C}^n\}$$

که به وضوح  $J \subset \mathbb{R}^n$  است.

با توجه به تعریف بالا، برد عددی مشترک تحت تشابه یکانی تغییر نمی کند به عبارت دیگر

$$JNR(A_1, \dots, A_n) = JNR(B_1, \dots, B_n)$$

به شرطی که

$$B_j = U^* A_j U \quad \text{for } j = 1, \dots, n$$

برای تعدادی از ماتریس های یکانی  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$

لم ۱. فرض کنید  $J$  برد عددی مشترک ماتریس های  $A_1, \dots, A_n$  که همه آن ها از مرتبه  $m$  هستند باشد در این صورت: (۱) تصویر  $J$  روی محور مختصات  $k$ ام، برد عددی ماتریس  $A_k$  است به عبارت دیگر پاره خط بسته شامل مقادیر ویژه می نیم یا ماکزیمم  $A_k$  است. در حالت کلی، تصویر  $J$  روی صفحه مختصات  $(j, k)$  برد عددی مشترک  $A_j + iA_k$  است.

(۲) فرض کنید  $T$  یک تبدیل آفین از  $\mathbb{R}^n$  باشد که  $T(x) = Mx + l$  به طوری که  $M = [m_{jk}]_{j,k=1}^n$  و  $B_j = \sum_{k=1}^n m_{jk} A_k + l_j I$  و  $j = 1, \dots, n$  آن گاه

$$JNR(B_1, \dots, B_n) = T(J)$$

$$JNR(A_1, \dots, A_n) = J \quad (3)$$

(۴) فرض کنید  $A_j$  جمع مستقیم دو ماتریس  $A_1^j, A_2^j$  که به ترتیب از اندازه  $m_1, m_2$  هستند باشد (برای همه  $j$  های یکسان) در این صورت  $J$  جمع برابر با جمع محدب  $J_1 = JNR(A_1^{(1)}, \dots, A_n^{(1)})$  و  $J_2 = JNR(A_1^{(2)}, \dots, A_n^{(2)})$  است یعنی:

$$J = \{tx^{(1)} + (1-t)x^{(2)} : t \in [0, 1], x^k \in J_k, k = 1, 2\}$$

## ۲ نتایج اصلی

قضیه ۱. فرض کنید  $J$  برد عددی مشترک  $n$  تایی  $A_1, \dots, A_n$  که از مرتبه  $m$  و دارای  $m$  نقطه مخروطی هستند باشد در این صورت  $A_1, \dots, A_n$  به صورت تشابه یکانی نوشته می‌شوند.

قضیه ۲. فرض کنید سه تایی  $A_1, A_2, A_3$  به فرم زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \beta_2 & \xi_3 - i\xi_4 \\ \xi_2 & \xi_3 + i\xi_4 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \xi_5 + i\xi_6 & \xi_7 + i\xi_8 \\ \xi_5 - i\xi_6 & \gamma_2 & \xi_9 + i\xi_{10} \\ \xi_7 - i\xi_8 & \xi_9 - i\xi_{10} & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

که  $\xi_1, \xi_2 \geq 0$  و همه  $\xi_j$  ها حقیقی هستند و  $\xi_4 = 0, \xi_3 \geq 0$  اگر  $\xi_1 \xi_2 = 0$ . به طوریکه برد عددی  $A_1 + iA_2$  بیضی واراست و همه تصویرهای مسطح دیگر  $J = JNR(A_1, A_2, A_3)$  نیز بیضی وار هستند. آنگاه سه تایی  $(B_1, B_2, B_3)$  دیگر از ماتریس هایی که همان برد عددی مشترک  $J$  را دارد وجود دارد اگر و تنها اگر به صورت زیر باشند:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & \beta_2 & x_3 - ix_4 \\ x_2 & x_3 + ix_4 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & x_5 + ix_6 & x_7 + ix_8 \\ x_5 - ix_6 & \gamma_2 & x_9 + ix_{10} \\ x_7 - ix_8 & x_9 - ix_{10} & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

که  $x_j$  هاریشه های حقیقی دستگاه  $F_j(x_1, \dots, x_{10}) = F_j(\xi_1, \dots, \xi_{10})$  برای  $j = 1, \dots, 10$  هستند و چند جمله ای های  $F_j$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1^2 - (x_2^2 + x_3^2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_7^2 - (x_9^2 + x_{10}^2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\ &\Rightarrow x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2 = 1 \\ &\Rightarrow x_1 x_5 - (x_2 x_9 - x_3 x_{10}) = 0 \\ &\Rightarrow x_2 x_7 + 2(x_3 x_9 + x_4 x_{10}) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 x_2 x_3 = 0 \\ &\Rightarrow x_5 x_7 x_9 + x_5 x_8 x_{10} - x_6 x_7 x_{10} + x_6 x_8 x_9 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 x_2 x_9 + x_2 x_3 x_5 - x_2 x_4 x_7 + x_1 x_3 x_7 + x_1 x_4 x_8 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 x_7 x_9 + x_1 x_8 x_{10} + x_2 x_5 x_9 - x_2 x_7 x_{10} + x_3 x_5 x_7 \\ &\Rightarrow + x_4 x_5 x_8 + x_3 x_6 x_8 - x_4 x_6 x_7 = 0. \end{aligned}$$

که این سه تایی ها تحویل ناپذیر یکانی هستند و دو بدو تشابه یکانی نیستند.

## مراجع

- [1] N. KRUPNIK, I.M. SPITKOVSKY, *Linear Algebra and its Applications*, 419(2006), 569-585.
- [2] R. A. HORN , C. R. JUHNSON , *Topics in Matrics Analysis*, Cambridge- University Press, Cambridge, 1991.
- [3] D. KEELER, L. RODAM, I. SPITKOVSKY , *The numerical range of  $3 \times 3$  matrices*, Linear Algebra Appl. 252(1997)115-139.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بیسن المثلّی جبر خطّی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## درونیابی $(0, m)$ بیرخوف

فاضل حدادی فرد \*

تهران - پل گیشا - دانشگاه تربیت مدرس - دانشکده ریاضی - گروه ریاضی کاربردی f.hadadi@modares.ac.ir

سید حمیدرضا مفیدی

تهران - پل گیشا - دانشگاه تربیت مدرس - دانشکده ریاضی - گروه ریاضی کاربردی h.mofidi@modares.ac.ir

### چکیده

در این مقاله درونیاب  $(0, m)$  بیرخوف برای حالت خاصی که تعداد گروه ها برابر  $m$  (مرتبه مشتقی که اطلاعات تابع با این مرتبه در دست است) است حل می شود. فرم صریح چندجمله ای درونیاب ارائه می شود و در انتها یکتایی این چندجمله ای اثبات می شود. در این مقاله برخلاف کارهایی که تا حال در زمینه درونیاب بیرخوف صورت گرفته، به جای ارائه چندجمله ای های پایه ای، از دستور کرامر برای بدست آوردن ضرایب چند جمله ای استفاده شده است.

واژه های کلیدی: ماتریس وندرموند، درونیابی بیرخوف و چندجمله ای درونیاب.

رده بندی موضوعی (MSC2000): 41A05; 65D05

۱

درونیابی توابع بوسیله چندجمله ای ها یکی از مباحث قدیمی در ریاضیات است. به نظر می رسد اولین کار در این زمینه در قرن هفدهم توسط نیوتن انجام شد. کمی بعد لاگرانژ فرمول نیوتن را گسترش داد. در سال ۱۸۷۸ هرمیت درونیاب معروف خود را ارائه داد.

در سال ۱۹۰۶ بیرخوف در سن ۱۸ سالگی اولین مقاله در زمینه درونیابی حفره ای یا

\*مختران

درونیابی بیرخوف را ارائه داد. در این نوع درونیابی اطلاعاتی که از تابع اولیه در دست است شامل مقادیر تابع و مقادیر مشتقات بالاتر تابع در برخی نقاط دیگر است که نظم و ترتیب خاصی ندارند.

بیرخوف مسئله درونیابی خود را به صورت زیر مطرح کرد:  
برای داده های  $c_{i,k}$  و  $x_{i=1}^N$  چند جمله ای درونیاب  $P_n(x)$  از درجه حداکثر  $n$  را پیدا کنید که در شرط

$$P_n^{(k)}(x_i) = c_{i,k} \quad (1)$$

صدق کند. ثابت می شود که این درونیاب در صورت وجود یکتا است. برای برای پیدا کردن چند جمله ای درونیاب  $P_n(x)$  از اطلاعات اولیه ای که از تابع در دست است استفاده می شود. شرایط درونیابی (۱) یک سیستم معادلات خطی شامل  $n+1$  معادله و  $n+1$  مجهول می دهد که با توجه به دستور کرامر می توان آن را حل کرد و ضرایب چند جمله ای را بدست آورد. برای این کار فرض کنید فرم ستونی ماتریس های  $n \times n$  حاصل شده از درونیاب به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} D(E, X) &= \det[\mathbf{1}^{(k)}, x_k^{(k)}, (x_i^{\mathbf{1}})^{(k)}, \dots, (x_i^n)^{(k)}] \\ D(E, X_i) &= \det[\mathbf{1}^{(k)}, x_i^{(k)}, (x_i^{\mathbf{2}})^{(k)}, \dots, (x_i^{j-1})^{(k)}, f, (x_i^{j+1})^{(k)}, \dots, (x_i^n)^{(k)}] \end{aligned} \quad (2)$$

(که در آن  $k$  نشان دهنده مشتق  $k$ -ام است) آنگاه با توجه به قاعده کرامر

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{D(E, X_j)}{D(E, X)} x^j. \quad (3)$$

اما مشکل اینجاست که اگر تعداد گره ها زیاد باشد، در هر مرحله باید این دترمینان ها حساب شوند. به طور کلی به دلیل ظاهر شدن ماتریس های وندرموند در هر ماتریس پیدا کردن یک فرم صریح برای محاسبه این دترمینان ها نیز مشکل است. به همین دلیل محققان به جای حل دستگاه معادلات به دنبال پیدا کردن چند جمله ای های پایه هستند. در اینجا درونیابی  $(\circ, m)$  بیرخوف در حالت خاص حل می شود. در این حل، به جای پیدا کردن چند جمله ای های درونیاب، سعی می شود ماتریس ضرایب حل شود. منظور از درونیاب  $(\circ, m)$  این است که اطلاعاتی که از تابع اولیه در دست است شامل مقادیر تابع در گره ها (مشتق صفرم) و همینطور مقادیر مشتق  $m$ -ام تابع در همان گره ها است. لازم به ذکر است که تا حال روشی که بتواند فرم صریح چند جمله ای درونیاب  $(\circ, m)$  را ارائه دهد، مطرح نشده است.

قضیه ۱. فرض کنید گره های درونیابی  $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{n-1}$  و  $\{(x_i, f_i^{(n)})\}_{i=1}^{n-1}$  در دست باشند. چندجمله ای منحصر بفرد  $P(x) = \sum_{i=1}^{2n-1} a_i x^i$  از درجه حداکثر  $2n-1$  موجود است که شرایط درونیابی  $P(x_i) = f_i$  و  $P^{(n)}(x_i) = f_i^{(n)}$  را برآورده می کند. اگر  $P_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^i$  و  $P_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x^i$  چندجمله ایهای درونیاب لاگرانژ باشند که به ترتیب  $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{n-1}$  و  $\{(x_i, f_i^{(n)})\}_{i=1}^{n-1}$  را درونیابی کنند آنگاه

$$\begin{aligned} a_i &= b_i & \text{for } i &= 0, 1, \dots, n-1 \\ a_i &= c_j & \text{for } i &= n+j = n, n+1, \dots, 2n-1 \end{aligned} \quad (4)$$

برهان: برای اثبات این قضیه از خواص ماتریس های وندرموند و همینطور خواص درمیان ها استفاده می شود.

□

## مراجع

- [1] P. BORWIN, T. ERDELYI, *Polynomials and inequalities*, springer- verlag, 1995.
- [2] A. SHARMA, *Some poised and nonposed problems of interpolation*, SIAM Rev, **14**(1972), 129-151.
- [3] YING GUANG SHI, *Theory of birkhoff interpolation*, New York, 2003.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## الگوریتم‌های تقریبی به روش اولیه-دوگان و کاربردهای آن

مرژگان حسن‌زاده

دانشگاه زنجان، گروه ریاضی [mozhgan.hasanzade@yahoo.com](mailto:mozhgan.hasanzade@yahoo.com)

محمدرضا قائمی

عضو هیأت علمی دانشگاه زنجان، گروه ریاضی [mr.ghaemi@yahoo.com](mailto:mr.ghaemi@yahoo.com)

### چکیده

روش اولیه-دوگان به عنوان یک روش جایگزین برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است که در محتوای بسیاری از الگوریتم‌های تقریبی قرار گرفته است. در این مقاله ابتدا مسأله درخت فراگیر می‌نیم شناخته شده و یک تعبیر اولیه-دوگان از الگوریتم کروسکال را برای حل آن به صورت خلاصه بیان می‌کنیم. در بخش دوم مدل‌سازی مسائل شبکه را در قالب مسأله  $r$ -همبندی بیان خواهیم کرد. در ادامه کاربردی از تقریب‌های اولیه-دوگان مطرح می‌شود.

واژه‌های کلیدی:

الگوریتم‌های تقریبی، درخت اشتاینر، تضمین کارایی، نابع سره

### مقدمه

مسأله درخت فراگیر می‌نیم-هزینه: ورودی برای این مسأله گراف بدون جهت  $G = (V, E)$  و هزینه‌های بالی دلخواه  $c_e$  برای هر یال  $e \in E$  است و هدف یافتن مجموعه‌ای از یال‌ها است که درختی شامل تمام رئوس تشکیل دهند و نیز مجموع وزن‌های تمام یال‌ها در درخت می‌نیم باشد. از اولین الگوریتم‌های شناخته شده برای این مسأله که از تقریبی برای رشد درخت استفاده می‌کند الگوریتم کروسکال است. الگوریتم کروسکال: با جنگل فراگیر تهی  $F = (V, \emptyset)$  شروع می‌کند و در هر مرحله

ارزان‌ترین یال  $uv \in E$  را که نقاط انتهایی آن در دو مولفه همبند متفاوت از  $F$  قرار گرفته، اضافه می‌کند. در پایان الگوریتم، جنگل  $F$  تنها یک مولفه خواهد داشت و یک درخت فراگیر می‌نیمم – هزینه از گراف را به دست می‌دهد. الگوریتم کروسکال قابل اجرا در زمان  $O(|E| \log |V|)$  است.

## ۱ تعبیر اولیه – دوگان از الگوریتم کروسکال

ایده اصلی در روش اولیه – دوگان آن است که برای مسأله می‌نیمم‌سازی مورد نظر، برنامه‌ریزی خطی ( $LP$ ) اولیه و دوگان متناظر با آن داده می‌شود، که مقدار جواب شدنی دوگان از جواب اولیه بهینه بیشتر نیست. از این رو اگر بتوانیم یک جواب اولیه و یک جواب دوگان صحیح بسازیم طوری که مقدار جواب اولیه از  $\alpha$  برابر مقدار جواب دوگان بیشتر نباشد، در آن صورت یک جواب صحیح  $\alpha$  – تقریبی خواهیم داشت.  $LP$  یک متغیر  $x_e$  برای هر یال  $e \in E$  دارد و جواب‌های 0 و 1 – مقداری آن مطابق با بردارهای وقوع از درخت‌های فراگیر است. فرض کنید  $\Pi$  مجموعه همه افرازها از رئوس  $V$  و نیز رتبه  $r(\pi)$  تعداد بخش‌های افراز  $\pi \in \Pi$  است.  $E_\pi$  نمایش مجموعه یال‌هایی است که دو انتهای آن‌ها در بخش‌های متفاوتی از  $\pi$  قرار گرفته‌اند.

$$\begin{aligned} \min \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (P_{SP}^+) \quad & \max \sum_{\pi \in \Pi} (r(\pi) - 1) \cdot y_\pi \quad (D_{SP}^+) \\ \text{s.t. } \sum_{e \in E_\pi} x_e \geq r(\pi) - 1 \quad \forall \pi \in \Pi \quad & \text{s.t. } \sum_{\pi: e \in E_\pi} y_\pi \leq c_e \quad \forall e \in E \\ x \geq 0 \quad & y \geq 0 \end{aligned}$$

$(P_{SP}^+)$  مسأله اولیه و  $(D_{SP}^+)$  مسأله دوگان است.  $(D_{SP}^+)$  یک متغیر  $y_\pi$  برای هر افراز  $\pi \in \Pi$  و یک قید برای هر یال  $e \in E$  دارد. می‌توان نشان داد که در شکل اولیه – دوگان الگوریتم کروسکال مقادیر نهایی مسأله‌های اولیه و دوگان با هم برابرند و در نتیجه طبق قضیه دوگان در برنامه‌ریزی خطی این جواب‌ها بهینه هستند.

## ۲ مدل‌سازی مسائل شبکه: $f$ – همبندی

در یک مسأله  $f$  – همبندی، گراف بدون جهت  $G = (V, E)$ ، هزینه‌های نامنفی  $c_e$  برای یال‌های  $e \in E$  و تابع برش – لازم ( $cut$  – requirement)،  $f: 2^V \rightarrow \{0, 1\}$

داده شده است. هدف پیدا کردن یک زیرگراف می نیمم - هزینه  $H$  از  $G$  است طوری که  $H$  حداقل  $f(S)$  یال عبوری از هر مجموعه  $S \subseteq V$  داشته باشد. فرض می کنیم  $f(V) = 0$ . در ادامه یک فرمول بندی  $LP$  از مسأله داده شده است:

$$\begin{aligned} \min \sum_{e \in E} c_e x_e & \quad (IP_f) & \max \sum_{S \subseteq V} f(S) \cdot y_S & \quad (D_f) \\ s.t. \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S) \quad \forall S \subseteq V & & s.t. \sum_{S: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \quad \forall e \in E \\ x_e \in Z & \quad \forall e \in E. & y \geq 0. \end{aligned}$$

$(IP_f)$  مسأله اولیه و  $(D_f)$  مسأله دوگان است. قرار دادن شرط نامنفی به جای قید صحیح بودن  $x_e$  فرم کانونی  $LP$  را به دست می دهد.  $\delta(S)$  مجموعه یال هایی است که فقط یک سر آنها در  $S$  قرار دارد. نکته: مسأله درخت فراگیر را می توان با این چارچوب با استفاده از تابع  $f(S) = 1$  برای تمام  $S \notin \{\emptyset, V\}$  و  $f(\emptyset) = f(V) = 0$ ، قالب بندی کرد.

### ۳ کاربرد تقریب اولیه - دوگان: درخت های اشتاینر:

تعریف: دو مجموعه از رئوس  $S$  و  $T$  متقاطع اند هرگاه  $S \setminus T$ ،  $S \cap T$  و  $T \setminus S$  غیر تهی باشند.

مسأله درخت اشتاینر با فرض  $f(S) = 1$  اگر  $S$  و  $R$  متقاطع باشند و در غیر این صورت  $f(S) = 0$ ، مدل سازی می شود. چنین مجموعه ای یک برش اشتاینر نامیده می شود. مسأله اشتاینر  $NP - hard$  است و بهترین الگوریتمی که تاکنون برای آن شناخته شده است دارای تضمین کارایی  $1/55 \approx 1 + \frac{Ln^3}{P}$  است. این بخش را با یک الگوریتم تقریبی اولیه - دوگان برای این مسأله منسوب به Agrawal آغاز می کنیم. این الگوریتم که  $AKR$  خوانده می شود یک الگوریتم تقریبی اولیه - دوگان است که یک جواب اولیه  $(P_f)$  و دوگان  $(D_f)$  را به طور هم زمان می سازد. همانند الگوریتم های اولیه - دوگان برای درخت فراگیر می نیمم - هزینه، این الگوریتم نیز از یک مدل افزایشی استفاده می کند. فرض کنید  $x^\tau$  و  $y^\tau$  به ترتیب بردار وقوع اولیه و جواب شدنی دوگان در زمان  $\tau$  باشند. از نماد  $F^\tau$  برای نمایش جنگل متناظر با  $x^\tau$  استفاده می کنیم. در ابتدا  $x_e^0 = 0$  برای هر  $e \in E$  و  $y_S^0 = 0$  برای هر  $S \subseteq V$ . فرض کنید جنگل  $F^\tau$

در زمان  $\tau$  شدنی نیست. از نماد  $\bar{F}^\tau$  برای نمایش زیرگراف القایی از  $G$  توسط یال‌های مانع ( $\sum y_S = c_e$ ) برای  $y^\tau$  دوگان استفاده می‌کنیم. و نیز از عبارت خندق (*moat*) برای یک مولفه‌ی همبند از  $\bar{F}^\tau$  استفاده می‌کنیم. تا زمانی که  $F^\tau$  شدنی نیست الگوریتم  $AKR$  متغیرهای دوگان از تمام خندق‌ها را به‌طور یکنواخت بالا می‌کشد. فرض کنید  $S_1$  و  $S_2$  دو مولفه‌ی همبند مجزا از جنگل ایجاد شده در الگوریتم باشند، گوئیم این مولفه‌ها در زمان  $\tau$  متقاطع‌اند اگر  $\tau$  اولین زمان در طول اجرای الگوریتم باشد که  $S_1$  و  $S_2$  در یک خندق مشترک مشمول می‌شوند. اگر این اتفاق رخ دهد، یال‌های روی کوتاهترین  $S_1$  و  $-S_2$  مسیر را به  $F^\tau$  اضافه می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. الگوریتم در زمان  $\tau^*$  متوقف می‌شود که  $F^{\tau^*}$  یک درخت اشتاینرشدنی است. تضمین کارایی الگوریتم  $AKR$  برابر  $2 - \frac{2}{|R|}$  است.

فرض کنید  $P = \{p_1, \dots, p_q\}$  مجموعه‌ی مسیرهایی باشد که الگوریتم در طول فرایند ساخت  $F^{\tau^*}$  اضافه می‌کند و فرض کنید  $\tau_i$  زمانی باشد که  $p_i$  اضافه شده است،  $1 \leq i \leq q$ . مسیرها را طوری مرتب می‌کنیم که  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_q$ . گیریم  $S_i^1$  و  $S_i^2$  مولفه‌هایی باشند که در اثر تقاطع آن‌ها،  $AKR$  مسیر  $p_i$  را اضافه کرده است. لم زیر نتیجه می‌شود:

لم: برای تمام زمان‌های  $0 \leq \tau \leq \tau^*$  و برای خندق‌های  $S \in \bar{F}^\tau$ :

$$\sum_{e \in E(S)} c_e x_e^\tau \leq 2 \cdot \sum_{S' \subseteq S} y_{S'}^\tau - 2\tau$$

## مراجع

- [1] M.X. GOEMANS, D.P. WILLIAMSON, *The primal-dual method for approximation algorithms and its application to network design problems*, in: D.S. Hochbaum (Ed.), *approximation algorithms for NP-hard problems*, PWS Publishing, 1997.
- [2] F.K. HWANG, D.S. RICHARDS, P. WINTER, *The Steiner Tree Problem*, in: *Annals of Discrete Mathematics, Number 53*, Elsevier Science Publishers B.V, 1992.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## جبر خطی و صدای انسان

افشین خاصی خان  
دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

### چکیده

در این مقاله تلاش می‌شود تا رابطه‌ای بین جبرخطی و صدای انسان برقرار شود. به این ترتیب که صدای هر فرد به صورت ترکیبی خطی از اعضای یک پایه نشان داده شود. این پایه شامل هفت فرکانس اصلی از صدای انسانهاست که در یک بازه زمانی پیوسته، متعامد و نرمال‌اند. به عبارت ساده‌تر فضایی خطی برای انسانها تعریف می‌شود که در آن برای فرکانس صدای هر فرد، مختصاتی وجود دارد.

کلید واژه‌ها: جبر خطی، پایه ترکیب خطی، فرکانس صدای انسان

### ۱ مقدمه

از وقتی که علم فیزیک صوت را مدلسازی ریاضی کرد، بسیاری از ریاضی‌دانان در این زمینه تحقیق و تفحص کرده‌اند. دانیال آرتور در مقاله خود به نام ریاضیات و هندسه موسیقی از بعد هندسی به موسیقی پرداخته است [۲]. میشل بیر در مقاله خود، رابطه بین ریاضیات و موسیقی را همان رابطه بین علم و هنر معرفی کرده است؛ او همچنین زیبایی ترکیبات موسیقی را به زیبایی با دنباله فیبوناتچی مرتبط ساخته است [۱]. مارک پترسن تجزیه و تحلیل موسیقی را با نرم‌افزار MATLAB در [۳] به زیبایی نشان داده است. در مقاله‌ای با عنوان استفاده از اعداد دو دویی در موسیقی، وی هارت ثابت کرده است که این اعداد به عنوان ریتم در موسیقی می‌تواند به کار رود [۴].

### ۲ امواج سینوسی و کسینوسی

قبل از تعریف فضای خطی شامل صدای انسانها، ابتدا نحوه سیر صوت در هوا و فعل و انفعالاتی را که در گوش انجام می‌گردد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. تمامی صداها من جمله صدای انسان از ارتعاش به

وجود می‌آیند. این ارتعاش فشار هوا را برای گسترش خود تحت تاثیر قرار می‌دهد. با قرار دادن یک انگشت روی حنجره، به راحتی می‌توان این ارتعاش را حس کرد. وقتی صدا از منبع صوتی به گوش می‌رسد پس از عبور از مجرای خارجی گوش به پرده صماخ برخورد می‌کند و ارتعاش آن موجب حرکت موجی مایع گوش داخلی می‌گردد. این مایع که غشای مویی را احاطه کرده است با عصبهای شنوایی در ارتباط است. فرکانسهای متفاوت امواج متفاوتی در مایع و سپس در غشاء ایجاد می‌کند و از طریق عصبهای شنوایی به مغز می‌رسد [۵].

یک مدل خام از آنچه را که در یک نقطه روی غشاء اتفاق می‌افتد، می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (1)$$

که در آن  $t$  زمان و  $y$  فاصله‌ایست که نقطه ارتعاش یافته روی غشاء از حالت سکون اولیه دارد. به راحتی می‌توان ثابت کرد که جواب معادله دیفرانسیل بالا برابر است با:

$$y = A \sin \sqrt{kt} + B \sin \sqrt{kt} \quad (2)$$

یعنی هر جواب معادله دیفرانسیل (۲.۱) ترکیب خطی از  $\sin \sqrt{kt}$  و  $\cos \sqrt{kt}$  است. و یا به طور معادل [۵]:

$$y = c \sin (\sqrt{kt} + \varphi) \quad (3)$$

## ۳ انواع فرکانسها در صدای انسانها

برای فرکانس صدای انسانها تقسیم‌بندی‌های بسیاری صورت گرفته است. با این حال تمامی آنها در زیر شاخه یکی از هفت فرکانس اصلی زیر قرار می‌گیرند [۶]:

الف) صدای زنان:

(۱) سوپرانو (soprano): بلندترین صدای زنان سوپرانو نامیده می‌شود دامنه فرکانس سوپرانو تقریباً بین  $C_4$  (۲۶۲ هرتز) و  $C_6$  (۱۰۷۴ هرتز) است البته پایین‌تر از  $C_4$  و بالاتر از  $C_6$  نیز وجود دارد که بسیار نادرند.

(۲) مزو-سوپرانو (mezzo-soprano): مزو-سوپرانو دامنه میانی صدای زنان را تشکیل می‌دهد و تقریباً فرکانس صدای اکثریت زنان در این دامنه قرار دارد. دامنه سوپرانو از  $A_3$  (۲۲۰ هرتز) تا  $A_5$  (۸۸۰ هرتز) است.

(۳) کنترالتو (contralto): کنترالتو پایین‌ترین فرکانس صوتی زنان می‌باشد این نوع فرکانس در زنان بسیار نادر است. دامنه فرکانس این نوع صدا از  $F_3$  (۱۷۵ هرتز) تا  $F_5$  (۶۹۸ هرتز) است.

ب) صدای مردان:

(۱) کانترتنر (countertenor): این نوع فرکانس، بالاترین دامنه فرکانس مردان را تشکیل می‌دهد. معمولاً مردانی که قادر به خواندن اپرا هستند در این نوع از دامنه فرکانس قرار می‌گیرند. دامنه فرکانس کانترتنر از  $G_3$  (۱۹۶ هرتز) تا  $E_5$  (۶۵۹ هرتز) می‌باشد.

(۲) تنر (tenor): دامنه فرکانس این نوع از صدای مردان بین  $C_3$  (۱۳۱ هرتز) تا  $C_5$  (۵۲۳ هرتز) است.

(۳) بریتون (baritone): تعداد مردانی که در این فرکانس قرار می‌گیرند نسبت به بقیه بیشترند. دامنه

فرکانس بریتون از  $F_2$  (۸۷ هرتز) شروع می‌شود و در  $F_4$  (۳۹۴ هرتز) خاتمه می‌یابد. (۴) بیس (bass): این نوع از فرکانس، پایین‌ترین دامنه فرکانس مردان را تشکیل می‌دهد که از  $E_2$  (۸۲ هرتز) شروع و به  $E_4$  (۳۲۹ هرتز) ختم می‌شود [۷]. هفت دامنه فرکانس اصلی که در بالا اشاره شد، زیرشاخه‌های بسیاری دارد که حتی صدای کودکان و افراد مسن و صدای انسانها در حالت‌های مختلف را نیز در بر می‌گیرد که در این مختصر، شرح تمامی آنها نمی‌گنجد. همچنین که در بخش ۲ اشاره شد رابطه (۲.۳) پایه‌ای برای فضای جوابهای معادله (۲.۱) تشکیل می‌دهد. حال اگر برای هر دامنه از فرکانس‌ها، فرکانس میانگین را به عنوان فرکانس اصلی آن دامنه در نظر بگیریم مجموعه متشکل از توابع زیر می‌تواند پایه‌ای برای فضای خطی، صدای انسانها در نظر گرفته شود.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \sin(2\pi \cdot 206t), \sin(2\pi \cdot 218t), \sin(2\pi \cdot 227t), \sin(2\pi \cdot 228t), \sin(2\pi \cdot 237t), \\ \sin(2\pi \cdot 550t), \sin(2\pi \cdot 654t) \end{array} \right\} \quad (4)$$

می‌دانیم که این توابع در یک بازه زمانی پیوسته بایستی متعادل و نرمال باشند. فرض می‌کنیم  $t = [0, 2]$  ثابته باشد در این صورت بایستی برای هر  $f_i$  و  $f_j$  از  $S$  داشته باشیم:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_0^2 f_i(t) f_j(t) dt = 0, \quad i \neq j \quad (5)$$

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_0^2 f_i(t) f_j(t) dt = 1, \quad i = j \quad (6)$$

با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB* به آسانی می‌توان درستی روابط (۳.۲) و (۳.۳) را بررسی کرد همچنین نمودار هر یک از توابع را رسم و با هم مقایسه کرد. علاوه بر آن صدای تولید شده از این فرکانس‌ها را نیز با استفاده از این نرم‌افزار تولید کرده و آنها را نیز با هم مقایسه نمود. لازم به ذکر است که چون انتگرال‌ها به صورت عددی محاسبه می‌شوند ارقام کمتر از  $10^{-14}$  صفر فرض می‌شوند. در زیر دستورالعمل تولید صدا با فرکانسهای معلوم و نیز دستور محاسبه روابط (۳.۲) و (۳.۳) آمده است:

— دستورالعمل تولید صدا با فرکانس معلوم در دو حالت آکادمیک و واقعی بودن فرکانس ۲۰۶ هرتز:

```
>> t = linspace(0, 2, 16000);
>> f1 = sin(2*pi*206*t);
>> soundsc(f1, 8000);
>> f01 = exp(-5), * sin(2*pi*206*t);
>> soundsc(f01, 8000)
```

— دستورالعمل محاسبه روابط (۳.۲) و (۳.۳):

```
>> t = linspace(0, 2, 16000);
>> f1 = sin(2*pi*206*t);
>> soundsc(f1, 8000);
>> f2 = sin(2*pi*206*t);
>> trapz(t, f1.*f2)
```

```
>> ans =

>> -۵.۴۰۴۴e - ۰۱۶

>> trapz(t, f\.*f\ )

>> ans =

>> ۱.۰۰۰۰
```

نتیجه:

به این ترتیب می‌توان گفت هر فرکانسی که از مجموعه صداهای انسانها در نظر گرفته شود می‌توان آن را به صورت ترکیبی خطی از اعضای پایه  $S$  نوشت. یعنی فرکانس‌های مذکور می‌توانند به عنوان فرکانس‌های ایجاد کننده صدای انسانها در نظر گرفته شوند.

## مراجع

- [1] M. Beer *Mathematics and Music: Relating Science to Arts?* (2005), Department of Quantitative Economics, University of Freiburg/Fribourg Switzerland, Bd.
- [2] D. Arthur, *The math & Geometry of music Linking Sight and Sound*, (2006) new media arts college in suburban Chicago.
- [3] Mark R. Petersen, *Musical Analysis and Synthesis in Matlab*, (2003) Applied Mathematics Department, University of Colorado, Boulder,
- [4] Vi Hart, *Using Binary Numbers in Music*, Music Department Stony Brook University Stony Brook, NY, USA
- [5] D. Benson, *Music: A Mathematical offering*, (2006), Department of Mathematical Sciences, Meston Building, King's College, University of Aberdeen, Aberdeen AB43UE, Scotland, UK
- [6] Online Wikipedia of voice type: [http://en.wikipedia.org/wiki/Voice\\_type](http://en.wikipedia.org/wiki/Voice_type)
- [7] Online Wikipedia of voice type: [http://en.wikipedia.org/wiki/musical\\_note](http://en.wikipedia.org/wiki/musical_note)



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## ارزیابی عملکرد بخش های یک بیمارستان با استفاده از برنامه ریزی خطی

علاءالدین ملک

دانشگاه تربیت مدرس - دانشکده علوم ریاضی mala@modares.ac.ir

سهیلا ابراهیم خانی

دانشگاه تربیت مدرس - دانشکده علوم ریاضی seheila.ebrahimkhani@modares.ac.ir

### چکیده

در این مقاله به معرفی روش تحلیل پوششی داده ها برای ارزیابی کارایی ۱۵ بخش مختلف بیمارستان پرداخته شده است. پس از جمع آوری اطلاعات و نرمال کردن داده های خام با مدل  $CCR$  ورودی محورمدل بندی شده و مقادیر کارایی نسبی هر بخش با استفاده از روش برنامه ریزی خطی  $M$ -بزرگ و در محیط برنامه نویسی MATLAB محاسبه شده است.

واژه های کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، روش برنامه ریزی خطی  $M$  بزرگ، ارزیابی عملکرد داده ها  
رده بندی موضوعی (65F99): .

### ۱ مقدمه

در دنیای پر تحول و رقابت امروزی، توجه به کیفیت و اثربخشی مدیریت و عملکرد آن از جمله عوامل تعیین کننده در تحقق برنامه های توسعه ای و رقابتی به شمار می آید. ارزیابی عملکرد روشی جامع نگر بوده که کلیه عوامل درگیر در کار سازمان را تحت مدیریت قرار می دهد تا در نهایت عملکرد مطلوبی بدست آید. یکی از ابزارهای مناسب و کارآمد در این زمینه، تحلیل پوششی داده ها می باشد که به عنوان یک روش غیرپارامتری به منظور محاسبه کارایی واحدهای تصمیم گیرنده استفاده می شود. امروزه استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده ها با سرعت زیادی در حال گسترش بوده

و در ارزیابی سازمان‌ها و صنایع مختلف مانند صنعت بانکداری، پست، بیمارستان‌ها استفاده می‌شود. در بخش بهداشت و درمان، ارزیابی عملکرد امری اجتناب ناپذیر است. امروزه حفظ و تامین سلامتی مردم از اولویت‌های توسعه‌ای هر کشوری به شمار می‌آید و دست اندرکاران بخش سلامت همواره در تلاش اند با بهره‌گیری از منابع در دسترس خود، بهترین و کیفی‌ترین مراقبت‌ها و خدمات بهداشتی و درمانی را به جامعه ارائه دهند. کسب اطمینان از ارائه چنین خدماتی، مستلزم ارزیابی عملکرد بخش سلامت می‌باشد. همچنین، محدودیت منابع بخش سلامت، اهمیت پایش عملکرد، ماهیت انسانی بودن فعالیت‌ها و خدمات ارائه شده در این بخش، از دیگر دلایل انجام ارزیابی دقیق و صحیح عملکرد آن به شمار می‌آیند. استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف بیمارستان را در شاخص‌های مختلف تعیین کرده و با ارائه میزان مطلوب آن‌ها، خط مشی بیمارستان را به سوی ارتقای کارایی و بهره‌وری مشخص می‌کند. همچنین الگوهای کارا که ارزیابی واحدهای ناکارا بر اساس آن‌ها انجام گرفته است به واحدهای ناکارا معرفی می‌شوند. الگوهای کارا واحدهایی هستند که با ورودی‌های مشابه واحد ناکارا، خروجی‌های بیشتری یا همان خروجی‌ها را با استفاده از ورودی‌های کمتر تولید کرده‌اند.

## ۲ روش

استفاده از ملاک‌ها و اصولی که خصوصیات کیفی را در قالب کمیت بیان کرده و آنها را قابل بررسی و ارزشیابی می‌کند، شاخص نام دارد. شاخص‌ها معمولاً از نظریه‌ها، نگرش‌ها و یا موقعیت‌ها سرچشمه می‌گیرند و مانند علائمی که مسیر را مشخص می‌کند، می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. شاخص‌های بیمارستانی مهم‌ترین عامل نشان دهنده عملکرد بیمارستان می‌باشد که باید به طور منظم و در دوره زمانی مشخص مورد بررسی قرار گیرد. بررسی شاخص‌های بیمارستانی یکی از مهم‌ترین وظایف مدیران بخش‌ها و واحدهای بیمارستان است. در این مقاله شاخص‌هایی که بعنوان شاخص‌های ورودی و خروجی مطرح شده به صورت زیر می‌باشد. شاخص‌های ورودی: ۱. تعداد تخت‌های موجود در هر بخش ۲. تعداد پزشکان در هر بخش ۳. هزینه اولیه در هر بخش ۴. FTE. شاخص‌های خروجی: ۱. تعداد واحدهای درسی گذرانده شده در هر بخش ۲. تعداد بیماران بستری شده در هر بخش ۳. درآمد اختصاصی توسط هر بخش. در این مقاله برای ارزیابی عملکرد ۱۵ بخش بیمارستان پس از جمع‌آوری اطلاعات و نرمال کردن داده‌های خام، با مدل  $CCR$  ورودی محور با استفاده از فرمول ۱ مدل بندی شده است.

فرم کلی مسئله

$$\begin{aligned} \max Z_o &= \sum_{r=1}^s \frac{u_r y_{r_o}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_o}} \\ St : \quad &\sum_{r=1}^s \frac{u_r y_{r_j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_j}} \leq 1 \quad \forall (j = 1, 2, \dots, n) \\ &u_r, v_i \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

برای تبدیل مدل به یک مدل برنامه ریزی خطی کفایت مخرج کسر را معادل یک عدد ثابت در نظر گرفته و صورت کسر حداکثر شود.

$$\begin{aligned} \max Z_o &= \sum_{r=1}^s u_r y_{r_o} \\ St : \quad &\sum_{i=1}^m v_i x_{i_o} = 1 \\ &\sum_{r=1}^s u_r y_{r_j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_j} \leq 0 \quad \forall (j = 1, 2, \dots, n) \\ &u_r, v_i \geq 0 \end{aligned}$$

اطلاعات مندرج در جدول ذیل با استفاده از روش برنامه ریزی خطی M-بزرگ و در محیط برنامه نویسی MATLAB محاسبه شده است

بخش ها	INPUT				OUTPUT			کارایی
	تعداد تخت	تعداد پزشک	خزینه اولیه	FTE	تعداد بستری	تعداد	تعداد	
۱.جراحی زنان وایمان	۵۸,۷۳	۵۳,۸۶۶۲	۳,۳۷۸۳	۱۰۰	۱۰۰	۲۲,۵۲۵	۱۲,۳۷۵۲	۱,۰۰۰۱۲۰۳۷۸۸۷۶۵۲۲
۲.جراحی مردان	۵۷,۱۴	۱۰۰	۳,۰۳۳۵	۱۰۰	۱۰۰	۲۲,۷۶۳۲	۲۷,۳۲۴۷	۱
۳.جراحی زنان	۵۰,۷۹۳	۹۲,۳۰۷۷	۳,۳۷۸۳	۱۰۰	۱۰۰	۵۱,۸۰۱۸	۵۷,۲۲۷۷	۱
۴.فک و عصب	۵۰,۷۹۳	۱۳,۰۷۶۹	۳۰,۳۳۳۸	۴۵,۳۳۳۲	۰	۴۸,۱۹۸۲	۴۲,۷۷۲۳	۰,۹۰۰۳۱۲۶۸۱۰۹۸۶۸۹
۵.CCU	۲۳,۸۰۹	۴۸,۴۶۱۵	۳۰,۳۳۳۸	۴۴,۴۸۰۵	۱۰۰	۷۵,۲۲۵۲	۳۳,۴۶۵۳	۱,۰۰۰۱۲۴۰۴۳
۶.ICU	۱۷,۲۴	۱۳,۰۷۶۹	۷۳,۹۱۳	۴۴,۴۸۰۵	۰	۲۰,۷۷۰۳	۸,۱۱۸۸	۰,۳۳۳۳۳۳۳۱۸
۷.اطفال	۷۱,۴۲۸۴	۴۹,۲۳۰۸	۷,۸۲۴۱	۸۷,۱۳۴۹	۱۰۰	۳,۴۰۳۴	۵۰,۰۹۹	۰,۴۹۲۵۷۹۴۰۲
۸.لارتنجی	۵۰,۷۹۳۷	۴۳,۱۵۳۸	۳,۹۱۳	۵۸,۵۰۶۲	۱۰۰	۵۱,۸۰۱۸	۳۹,۵۰۵	۱,۰۰۰۴۸۸۲۳۷
۹.لارتنجی	۵۰,۷۹۳۷	۴۰,۷۶۹۲	۳,۳۳۳۸	۴۵,۳۳۳۲	۵۰	۴۱,۷۶۱۴	۵۸,۶۱۴۹	۱
۱۰.سوختگی	۲۳,۸۰۹۵	۴۰,۷۶۹۲	۳,۳۷۸۳	۴۵,۳۳۳۲	۰	۱۴,۲۱۶۲	۳,۹۵۰۵	۰,۵۹۲۹۸۲۳۸
۱۱.جراحی قلب و عروق	۲۴,۱۹۰۵	۴۸,۴۶۱۵	۴۵,۲۱۷۲	۴۸,۱۳۴۸	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱,۰۰۰۰۶۸۵۹۸
۱۲.لوزیس	۱۰۰	۴۴,۱۵۳۸	۸,۴۹۵۷	۸۲,۹۸۷۶	۰	۸۲,۹۸۷۶	۰	۰,۹۷۵۴۲۲۸۸۵
۱۳.PICU	۱۷,۴۹۸۴	۴۱,۵۳۸۵	۳۷,۸۲۴۱	۸۷,۱۳۴۹	۱۰۰	۲,۲۵۲۳	۷,۹۲۰۸	۱
۱۴.NICU	۱۷,۴۹۸۴	۵۳,۸۶۶۲	۴۸,۴۹۵۷	۸۷,۱۳۴۹	۱۰۰	۳,۱۵۳۲	۱۰,۸۹۱۱	۱
۱۵.بلوک زایمان	۳۴,۹۲۰۴	۵۳,۸۶۶۲	۱۰۰	۱۰۰	۰	۷۱,۴۲۱۴	۳۴,۴۵۴۵	۱

## ۳ نتیجه

با مقایسه مقادیر کارایی مندرج در جدول بالا نتایج زیر حاصل می‌شود: کمترین کارایی مربوط به بخش ICU با مقدار ۰.۴۳۴۶۴ و بیشترین کارایی مربوط به بخش‌های جراحی زنان و زایمان، جراحی مردان، جراحی زنان، بلوک زایمان، ارتوپدی، ارولوژی، جراحی قلب و عروق، PICU، NICU، CCU با مقدار ۱ می‌باشد. بررسی کارایی بخش ICU: بخش ICU به دلیل استفاده از امکانات زیاد و درآمد کم و عدم ارائه واحد درسی کمترین کارایی را به خود اختصاص داده است. با مقایسه داده‌های بخش ICU با داده‌های بخش CCU (با ورودی تقریباً یکسان) این نتیجه حاصل می‌شود: در صورتی که بخش ICU بتواند تعداد بیماران بیشتری را بستری کند و درآمد بیشتری حاصل کند و واحدهای درسی ارائه دهد، کارایی‌اش افزایش می‌یابد. با مقایسه داده‌های بخش ICU با داده‌های بخش سوختگی (با خروجی تقریباً یکسان) این نتیجه حاصل می‌شود: در صورتی که بخش ICU بتواند هزینه اولیه خود را کاهش دهد کارایی‌اش افزایش می‌یابد. با مقایسه داده‌های بخش سوختگی با داده‌های بخش CCU (با ورودی تقریباً یکسان) نتیجه زیر حاصل می‌شود: در صورتی که بخش سوختگی بتواند واحد درسی ارائه نماید و تعداد بیماران بیشتری بستری نماید کارایی‌اش افزایش می‌یابد. با مقایسه داده‌های بخش اطفال با داده‌های بخش جراحی زنان (با ورودی تقریباً یکسان) نتیجه زیر حاصل می‌شود: در صورتی که بخش اطفال بتواند درآمد خود را افزایش دهد کارایی‌اش افزایش می‌یابد.

## مراجع

[۱] م. ر. مهرگان، مدل‌های کمی در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها (تحلیل پوششی داده‌ها، انتشارات دانشکده مدیریت دانشگاه تهران. ۱۳۸۳

[2] A. H. Taher, A. Malek, *Novel Method for Determining the Maximally Productive Units Using DEA*, 2005

## کاربرد تجزیه مقادیر تکین ماتریس در فشرده سازی تصاویر

علاء الدین ملک\*، احمد ایمانی، معصومه گرجی

تربیت مدرس، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی

mala@modares.ac.ir

### چکیده

یکی از فنون ریاضی برای کاهش حجم در ذخیره سازی اطلاعات یک عکس استفاده از ماتریس متناظر یک تصویر داده شده ( $A$ ) و بررسی تجزیه مقادیر تکین آن ماتریس می باشد. ابتدا بر اساس روش تجزیه مقادیر تکین که مرتبط با مقادیر ویژه ماتریس  $AA^T$  می باشد، مقادیر تکین را به صورت نزولی مرتب می کنیم. سپس با ارائه فرم خطی ماتریس  $A$  را بر اساس ترکیب خطی ای از مقادیر تکین و بردارهای تکین می نویسیم. این نحوه ارائه ماتریس  $A$  ما را قادر می سازد تا بعضی از اطلاعات غیرمفید برای وضوح تصویر را در نظر نگیریم. معنی این عمل آنست که ما توانسته ایم تا اطلاعات کمتری را بدون از دست دادن وضوح مناسب ذخیره سازی نماییم. این موضوع به نام فشرده سازی تصاویر با استفاده از تجزیه مقادیر تکین ماتریس متناظر با آن مشهور است. برای نشان دادن قدرت روش ارائه شده در این مقاله مسائل متعددی حل و نتایج عددی آن آورده شده است.

واژه های کلیدی: . مقادیر ویژه، فشرده سازی تصاویر، تجزیه مقادیر تکین، پردازش تصویر رده بندی موضوعی (65F99): .

### ۱ تجزیه مقادیر تکین

تجزیه مقادیر تکین یکی از مفاهیم جبر خطی است که در گذشته توسط بسیاری از ریاضی دانان مورد بررسی قرار گرفته است. تجزیه مقادیر تکین کاربردهای فراوان و نتایج تئوری زیادی از جمله در فشرده سازی تصاویر دارد. یکی از جنبه های تجزیه مقادیر تکین این است که می تواند روی هر ماتریس حقیقی مثل  $A$  با بعد  $m \times n$  پیاده سازی شود. در این روش ماتریس  $A$  به سه ماتریس  $U$ ،  $S$  و  $V$  طوری تجزیه می شود که  $A = USV^T$ ، که در آن  $U$  و  $V$  ماتریس های متعامد و مربعی و  $S$  ماتریسی قطری است و همچنین ماتریس  $U$  شامل بردارهای تکین چپ، ماتریس  $V$  شامل بردارهای تکین راست و ماتریس قطری  $S$

\*ارائه کننده

شامل مقادیر تکین است که مقادیر تکین نزولی روی قطراصلی ماتریس  $S$  بصورت زیر قرار می گیرند

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

جایی که  $r$  رتبه ماتریس  $A$  و  $p$  از کوچکترین مقدار  $m$  یا  $n$  کمتر می باشد.

## ۲ پیاده سازی روش تجزیه مقادیر تکین

فرض کنیم  $A$  ماتریسی باشد که دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون می باشد. حال نیاز داریم که آن را به عامل های  $U$ ،  $S$  و  $V^T$  تجزیه کنیم. در اولین گام  $V$  را پیدا می کنیم، برای اینکار  $A^T$  را در طرفین معادله  $A = USV^T$  ضرب می کنیم. خواهیم داشت  $U^T U = I$  و چون ماتریس  $A^T A = (USV^T)^T (USV^T) = V^T U^T U S V^T = V^T S V^T$  است. حال نیاز داریم که  $A^T A = V^T S V^T$  را به صورت قطری بنویسیم. برای پیدا کردن  $V$  و  $S$  نیاز داریم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $A^T A$  را بدست آوریم که این مقادیر ویژه توان دوم اعضای روی قطراصلی ماتریس  $S$  (مقادیر تکین) و بردارهای ویژه، ستون های  $V$  (بردارهای تکین راست) هستند. حذف کردن  $V$  از معادله  $A = USV^T$  شبیه به حذف  $U$  می باشد. به جای آن،  $A^T$  را از چپ در معادله ضرب کنیم. خواهیم داشت  $AA^T = (USV^T)(USV^T)^T = USV^T V^T U^T U S = US^2 U^T$  و چون  $V^T V = I$  داریم  $AA^T = US^2 U^T$ . حال این بار مقادیر ویژه و بردارهای ویژه  $AA^T$  را بدست می آوریم که بردارهای ویژه  $AA^T$  همان ستون های  $U$  (بردارهای تکین چپ) هستند. چون  $A$  ماتریسی  $m \times n$  و  $S$  نیز ماتریسی  $m \times n$  است پس  $A^T A$  ماتریسی  $n \times n$  و  $AA^T$  ماتریسی  $m \times m$  تولید می کند.

$$A = (u_1 \dots u_r \dots u_n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

به طوری که  $U$  ماتریسی  $m \times n$  و  $V$  ماتریسی  $n \times n$  است.

مثال ۱. فرض کنید  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  داریم

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

حال مقادیر ویژه  $AA^T$  را به دست می آوریم

$$\left| \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 8$$

حال ماتریس  $S$  را به دست می آوریم

$$S^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

حال به بردارهای ویژه  $AA^T$  که همان ستون های  $V$  هستند نیاز داریم

$$\begin{aligned} \lambda = 8 \quad v_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \lambda = 2 \quad v_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow V = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

حال بردارهای ویژه  $AA^T$  را به دست می آوریم که همان ستون های  $U$  هستند

$$\begin{aligned} \lambda = 8 \quad u_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda = 2 \quad u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow U = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

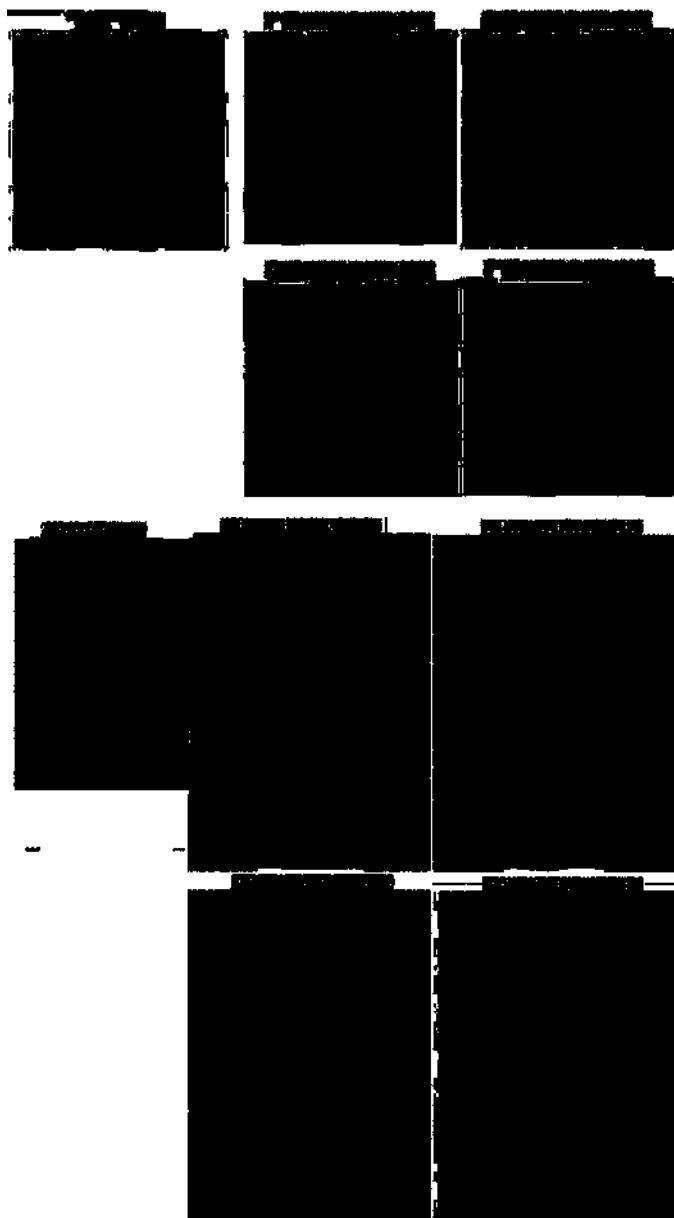
$$A = USV^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

### ۳ پردازش تصویر با استفاده از تجزیه مقادیر تکین

هدف از تبدیل ماتریس  $A$  به  $USV^T$  چیست؟ هدف ما تقریب ماتریس  $A$  با استفاده از تعداد کمتری از درایه ها نسبت به ماتریس اصلی است. با استفاده از مرتبه ماتریس، اطلاعات اضافی را در صورتی که  $r < m$  یا  $r < n$  باشد، حذف می کنیم.

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T + 0 u_{r+1} v_{r+1}^T + \dots$$

چون مقادیر تکین همیشه بزرگتر از صفر است، اضافه کردن مولفه های وابسته به مقادیر تکین صفر تأثیری در تصویر ندارد. در نتیجه  $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$  و چون مقادیر تکین به صورت نزولی مرتب می شوند، مولفه های آخر تأثیر کمتری در تصویر دارند.



که آخرین تکرار عکسی نظیر عکس اصلی با ۵۵ درصد حجم کمتر را ارائه می دهد.

## مراجع

- [1] Kalman, Dan. A Singularly Valuable Decomposition. The College Mathematics Journal. Vol.27 No.1 Jan 1998, 2-23.
- [2] Lay, David C. Linear Algebra and Its Applications. Addison Wesley Longman, Inc., 1997
- [3] Strang, Gilbert. Introduction to Linear Algebra. Wellesley-Cambridge Press, 1998.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## نتایج جدید درباره ماتریس های منفرد

میرکمال میرنیا

دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تبریز [mirnia-kam@tabrizu.ac.ir](mailto:mirnia-kam@tabrizu.ac.ir)

محرم نیکوئی

عضو باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تبریز [nikoie-m@yahoo.com](mailto:nikoie-m@yahoo.com)

نادر دسترنج

دانشگاه پیام نور استان آذربایجان غربی - مرکز ارومیه [n-dastranj@yahoo.com](mailto:n-dastranj@yahoo.com)

### چکیده

ماتریس های مربع حتی ماتریس های منفرد دارای یک معکوس منحصر  
بفرد بنام معکوس درازین هستند. برای بدست آوردن معکوس درازین یک  
ماتریس ابتدا شاخص آن را بدست می آورند. شاخص یک ماتریس مفهوم  
جدیدی درباره ماتریس های مربع است. در این مقاله نتایج جدیدی را درباره  
معکوس درازین و شاخص ماتریس های منفرد ارائه کرده ایم.

واژه های کلیدی: شاخص ماتریس، ماتریس منفرد، معکوس درازین، شبه معکوس.  
رده بندی موضوعی (MSC2000): 15A09.

### ۱ مقدمه

تعریف ۱. شاخص ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  را با  $ind(A)$  نشان می دهند. کوچکترین عدد  
صحیح نامنفی  $k$  شاخص ماتریس  $A$  است هرگاه  $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$ .

تعریف ۲. معکوس درازین ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  با  $A^D$  نشان داده می شود. هرگاه در روابط زیر صدق کند که در آن  $ind(A) = k$

$$AA^D = A^D A, A^D AA^D = A^D, A^k A^D A = A^k$$

قضیه ۱. شاخص و معکوس درازین هر ماتریس دلخواه  $A \in C^{n \times n}$  موجود و منحصر بفرد است.

□

برهان: به [۲] مراجعه کنید.

## ۲ نتایج جدید درباره ماتریس های منفرد

در این قسمت، نتایج جدید درباره شاخص ماتریس و معکوس درازین برای نوع خاصی از ماتریس های بلوکی منفرد ارائه شده است. اهمیت ارائه این نتایج جدید در کاربرد آن ها در حل آن دسته از دستگاه معادلات خطی فازی منفرد است که تمام درایه های ماتریس ضرائب آن مثبت هستند. برای آشنایی با کاربرد و نحوه حل دستگاه معادلات خطی فازی منفرد به مراجعه [۳] نمائید.

قضیه ۲. ماتریس منفرد  $A \in C^{n \times n}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $ind(A) = k$  باشد در اینصورت نشان دهید

$$ind\left(\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}\right) = k$$

و

$$ind\left(\begin{pmatrix} \circ & A \\ A & \circ \end{pmatrix}\right) = k$$

برهان: به ازای هر عددی طبیعی  $n \in \mathbb{N}$  داریم

$$\text{rank}\left(\begin{pmatrix} A^n & \circ \\ \circ & A^n \end{pmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}^n\right) = 2 \times \text{rank}(A^n)$$

بنا به فرض  $\text{ind}(A) = k$ ، حال با توجه اینکه

$$\text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}^k\right) = 2 \times \text{rank}(A^k)$$

و

$$\text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}^{k+1}\right) = 2 \times \text{rank}(A^{k+1})$$

که بنا به تعریف ۱ حکم ثابت می شود. اثبات رابطه ی دوم بطور مشابه می باشد.  $\square$

**قضیه ۳.** ماتریس منفرد  $A \in C^{n \times n}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\text{ind}(A) = k$  باشد، در اینصورت نشان دهید

$$\left(\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}\right)^D = \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix}$$

و

$$\left(\begin{pmatrix} \circ & A \\ A & \circ \end{pmatrix}\right)^D = \begin{pmatrix} \circ & A^D \\ A^D & \circ \end{pmatrix}$$

برهان: بنا به تعریف ۲ و روابط بین یک ماتریس با معکوس درازینش داریم

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^D & \circ \\ \circ & AA^D \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^D AA^D & \circ \\ \circ & A^D AA^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^{k+1} & \circ \\ \circ & A^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^k A^D A & \circ \\ \circ & A^k A^D A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^k & \circ \\ \circ & A^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

با توجه به روابط فوق

$$\left(\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}\right)^D = \begin{pmatrix} A^D & \circ \\ \circ & A^D \end{pmatrix}$$

خواهد بود. اثبات رابطه دوم بطور مشابه می باشد.  $\square$

### ۳ نتایج عددی

مثال ۱. روابط قضایای ۲ و ۳ را برای ماتریس منفرد  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  را بررسی کنید.

حل: معکوس درازین آن عبارت است از

$$A^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

برای آشنایی با نحوه بدست آوردن معکوس درازین یک ماتریس منفرد [۱، ۲] را ببینید. حال داریم

$$\begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \circ & \circ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \circ & \circ & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

و روابط بین یک ماتریس و معکوس درازینش بر اساس تعریف ۲ نیز برقرار است. □  
سایر روابط به سادگی و بطور مشابه قابل بررسی است.

### مراجع

- [1] M. NIKUIE, M. K. MIRNIA , Y. MAHMOUDI , *On the index of matrix and drazin inverse*, 41st Annual Iranian Mathematics conference, 2010.
- [2] M. NIKUIE, M. K. MIRNIA , Y. MAHMOUDI, *Some results about the index of matrix and Drazin inverse*, IAU-Karaj Branch, 2010 , 4(3) , 283-294
- [3] M. S. HASHEMI, M. K. MIRNIA AND S. SHAHMORAD , *Solving Fuzzy Linear Systems by using the Schur Complement when Coefficient Matrix is an M-Matrix*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2008,5(3), 15-31.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## شاخص ماتریس و دستگاه معادلات خطی فازی

میرکمال میرنیا

دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تبریز *mirnia - kam@tabrizu.ac.ir*

محرم نیکوئی

عضو باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تبریز *nikoie - m@yahoo.com*

### چکیده

شاخص ماتریس  $A$  مرتبه بزرگترین بلوک زوردان متناظر با مقدار ویژه صفر آن است. شاخص ماتریس فقط برای ماتریس های مربع تعریف شده است و برای ماتریس های منفرد نیز موجود و منحصر بفرد است. در این مقاله، نقش شاخص ماتریس درباره دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار را توسعه داده و آن را برای حل دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار ارائه داده ایم. واژه های کلیدی: شاخص ماتریس، دستگاه فازی ناسازگار، درازین، اعداد فازی. رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F05.

### ۱ مقدمه

در این قسمت، فقط مقدمات ارائه شده است. جزئیات را در [۱، ۲، ۴] ببینید. تعریف ۱. شاخص ماتریس  $A \in C^{n \times n}$  را با  $\text{ind}(A)$  نشان می دهند. کوچکترین عدد صحیح نامنفی  $k$  شاخص ماتریس  $A$  است هرگاه

$$\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1}).$$

این تعریف معادل است با اینکه شاخص ماتریس  $A$  مرتبه بزرگترین بلوک زوردان متناظر با مقدار ویژه صفر آن است. برای هر ماتریس دلخواه  $A \in C^{n \times n}$  شاخص ماتریس موجود و منحصر بفرد است.

تعریف ۲. فرم پارامتری هر عدد فازی دلخواه  $b$  بصورت زوج مرتب  $(\underline{b}(r), \bar{b}(r))$  است. که در آن توابع  $\underline{b}(r)$  و  $\bar{b}(r)$  دارای شرایط ویژه‌ای هستند.

تعریف ۳. دستگاه معادلات خطی فازی منفرد

$$Ax = b \quad (1)$$

را که در آن  $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$  یک ماتریس قطعی منفرد و  $b$  یک  $n$  - بردار متشکل از اعداد فازی است را در نظر بگیرید. چنین دستگاهی را یک دستگاه معادلات خطی فازی منفرد می‌نامیم. با توجه به تعریف ۲ بردار فازی  $b$  را به شکل زیر می‌نویسیم

$$b_2 = \begin{pmatrix} \bar{b}_1(r) \\ \bar{b}_2(r) \\ \vdots \\ \bar{b}_n(r) \end{pmatrix} \text{ و } b_1 = \begin{pmatrix} \underline{b}_1(r) \\ \underline{b}_2(r) \\ \vdots \\ \underline{b}_n(r) \end{pmatrix}$$

دستگاه (۱) سازگار است هرگاه دستگاه  $SX = Y, S \in R^{2n \times 2n}$  که در آن

$$a_{ij} \geq 0 \Rightarrow s_{ij} = a_{ij}, \quad s_{i+n, j+n} = a_{ij}$$

$$a_{ij} < 0 \Rightarrow s_{i, j+n} = -a_{ij}, \quad s_{i+n, j} = -a_{ij}$$

و  $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  سازگار باشد. در غیر اینصورت گوئیم (۱) ناسازگار است.

قضیه ۱. فرض کنید  $Ax = b$  یک دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار یا ناسازگار باشد که در  $ind(A) = k$  است. در اینصورت دستگاه معادلات خطی  $A^k Ax = A^k b$  یک دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار است.

□

برهان: به [۲] مراجعه نمائید.

هدف از نگارش این مقاله، توسعه قضیه بالا برای دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار است. با توجه به اهمیت و کاربرد فراوان دستگاه معادلات خطی فازی منفرد، توسعه نقش شاخص ماتریس در سازگاری دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار اهمیت ویژه‌ای دارد. تاکنون هیچ روشی برای حل دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار ارائه نشده است. برای آشنایی با کاربرد و نحوه حل دستگاه معادلات خطی فازی به [۳، ۴] مراجعه نمائید.

## ۲ شاخص ماتریس و دستگاه معادلات خطی فازی منفرد

فرض کنید  $A \in R^{n \times n}$  و

$$Ax = b$$

یک دستگاه معادلات خطی فازی منفرد باشد. با توجه به تعریف ۳ دستگاه معادلات

$$SX = Y, S \in R^{2n \times 2n} \quad (2)$$

را تشکیل می دهیم. حال قضیه ۱ را در مورد دستگاه (۲) اعمال می کنیم. واضح است که دستگاه معادلات خطی

$$S^k SX = S^k Y \quad (3)$$

که در آن  $k$  شاخص ماتریس  $S$  است، یک دستگاه سازگار خواهد بود. هر چند که دستگاه (۲) یک دستگاه سازگاریا ناسازگار باشد.

به عبارت دیگر، شاخص ماتریس در دستگاه معادلات خطی فازی منفرد سازگاریا ناسازگار، در دستگاه معادلات خطی توسعه یافته متناظر با آن کاربرد دارد و موفق عمل می کند. اهمیت کاربرد شاخص ماتریس در سازگاری دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار در این است که این امر زمینه را برای ارائه روشهای عددی حل دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار را تسهیل می کند.

## ۳ نتایج عددی

مثال ۱. نقش شاخص ماتریس را در سازگاری دستگاه معادلات خطی فازی منفرد ناسازگار زیر بررسی کنید.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) \\ ((\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2r, 9 - 3r \\ 8 + 4r, 18 - 6r \end{pmatrix}$$

حل : دستگاه معادلات خطی توسعه یافته متناظر با آن عبارت است از

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r) \\ \bar{x}_1(r) \\ \bar{x}_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2r \\ 8 + 4r \\ 9 - 3r \\ 18 - 6r \end{pmatrix}$$

که شخص ماتریس ضرائب آن یک است و یک دستگاه ناسازگار است. حال با انجام محاسبات لازم می بینیم که دستگاه توسعه یافته سازگار (۳) برای دستگاه معادلات خطی فازی منفرد مذکور بفرم زیر خواهد بود

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \end{pmatrix}^2 X = \begin{pmatrix} -60 + 30r \\ -180 + 90r \\ -5 - 25r \\ -15 - 75r \end{pmatrix}$$

□ که یک دستگاه سازگار است .

## مراجع

- [1] M. NIKUIE, M. K. MIRNIA , *On the consistecy of singular Fuzzy Linear Systems*, 41st Annual Iranian Mathematics conference, 2010.
- [2] M. NIKUIE, M. K. MIRNIA , Y. MAHMOUDI, *Some results about the index of matrix and Drazin inverse*, IAU-Karaj Branch, 2010 , 4(3) , 283-294
- [3] M. S. HASHEMI, M. K. MIRNIA AND S. SHAHMORAD , *Solving Fuzzy Linear Systems by using the Schur Complement when Coef-ficient Matrix is an M-Matrix*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2008,5(3), 15-31.
- [4] S. ABBASBANDY , M. OTADI AND M.MOSLEH , *Minimal solution of general gual fuzzy linear systems* , Choas, solution and Fractals , 2008,37, 1113-1124.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## تخصیص مقادیر ویژه برای کنترل سیستم خطی مثبت

فاطمه محمدی زاده سورویی

دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده علوم *fatemeh\_mohamadi\_84@yahoo.com*

حجت احسنی طهرانی

دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده علوم *hahsani@gmail.com*

زیبا ارجمند زاده

دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده علوم *Ziba.arjmandzadeh@gmail.com*

### چکیده

در این مقاله ماتریس کنترلگر  $K$  را برای سیستم های گسسته زمانی مثبت با استفاده از فرم همدم برداری به گونه ای تعیین می کنیم که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد. واژه های کلیدی: سیستم گسسته خطی، ماتریس کنترلگر و طیف مقادیر ویژه. رده بندی موضوعی (MSC2000):

## ۱ مقدمه

سیستم گسسته

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

را در نظر می گیریم که در آن بردار حالت  $x$  بردار ورودی  $u$  بردار  $n \times 1$  و  $x(0)$  بردار حالت اولیه است. سیستم گسسته (۱) مثبت خوانده می شود اگر برای هر حالت اولیه  $x(0) \geq 0$  بردارهای حالت  $x(k)$  نیز مثبت باشند. به طور معادل سیستم مثبت خوانده

می‌شود اگر درایه‌های ماتریس‌های  $A$  و  $B$  آن مثبت باشند. در این مقاله روشی جدید جهت کنترل سیستم (۱) ارائه می‌گردد به گونه‌ای که سیستم حلقه بسته  $A + BK$  مثبت باشد و مقادیر ویژه دلخواه را مشروط بر اینکه در شرایط خاصی صدق کند را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد.

## ۲ فرمولبندی مسئله

اکنون سیستم حلقه باز را به گونه‌ای به سیستم حلقه بسته تبدیل می‌کنیم که سیستم (۱) مثبت باقی بماند و مقادیر ویژه مشخصی را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد. بنابراین به روش زیر عمل می‌کنیم:  
ابتدا ماتریس  $A$  و  $B$  را با استفاده از تبدیلات تشابهی به فرم همدم برداری زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن  $B_0$  یک ماتریس  $m \times m$  بالا مثلثی و معکوس پذیر است و  $G_0$  ماتریس دلخواه  $m \times n$  می‌باشد. حال اگر بخواهیم مقادیر ویژه  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  طیف یک ماتریس حلقه بسته باشد لازم است که در شرایط زیر صدق نماید:  
(۱) یک عدد حقیقی  $\rho \in \Lambda$  وجود داشته باشد که  $\rho = \max |\lambda_i| \geq 0$ .  
(۲) اعداد مختلط به صورت مزدوج ظاهر شوند:  $\Lambda = \bar{\Lambda}$ .  
(۳) گزاره زیر برقرار باشد:

گزاره (ناحیه شدنی برای طیف): فرض کنید  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  یک مجموعه از اعداد حقیقی و مختلط باشد که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند و

$$(-1)^j S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

که  $S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  زامین عنصر تابع متقارن اعداد  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  است که به وسیله  $S_j$  زیر داده شده است:

$$S_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} \prod_{s=1}^j \lambda_{i_s}$$

آن گاه  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  طیف برخی از ماتریس‌های نامنفی  $n \times n$  در سیستم حلقه بسته می‌باشد.

### ۳ روش تخصیص مقادیر ویژه

ابتدا ماتریس پارامتری زیر را در نظر می‌گیریم (برای راحتی کار ماتریس را  $3 \times 3$  در نظر می‌گیریم):

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و با استفاده از طیف مقادیر ویژه  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  داریم:

$$|\tilde{A}_\lambda - \lambda I| = 0$$

اگر قرار دهیم

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix}$$

آن گاه برای ماتریس کنترلگر پارامتری تعریف می‌کنیم:

$$K_\lambda = B_o^{-1} G_\lambda T^{-1}$$

به طوری که  $T$  ماتریس تبدیل تشابهی است که ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را به فرم همدم برداری  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  تبدیل می‌نماید.

ماتریس کنترلگر اولیه  $F$  را که مقادیر ویژه صفر را به ماتریس حلقه بسته اختصاص می‌دهد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = -B_o^{-1} G_o T^{-1}$$

سپس ماتریس کنترلگری که مقادیر ویژه مشخص شده را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد به گونه‌ای که مثبت بودن سیستم حفظ شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K = K_\lambda + F = B_o^{-1} (G_\lambda - G_o) T^{-1}$$

حال جهت محاسبه پارامترهای ماتریس کنترلگر  $K$  ناحیه شدنی که در آن  $A + BK \geq 0$  باشد را به دست آورده و با توجه به مشخص بودن مقادیر ویژه و تشکیل معادله مشخصه ماتریس  $A_\lambda$  و تعیین دستگاه معادلات غیر خطی [۲] و شرط مثبت بودن ماتریس حلقه بسته پارامترها تعیین می‌گردند. لذا با بکارگیری روش ارائه شده ماتریس پس خورد حالت را به گونه‌ای محاسبه

نمودیم که علاوه بر مثبت بودن سیستم حلقه بسته مقادیر ویژه مشخصی را به سیستم اختصاص می‌دهد.

مثال ۱. سیستم خطی  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  را در نظر بگیرید که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0/7 & 0/4 & 0/6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0/1 & 0 \\ 0 & 0/2 \end{bmatrix}$$

می‌توانیم ماتریس پس‌خورد حالت (کنترلگر) را به گونه‌ای تعیین کنیم که مقادیر ویژه  $\{0, 1, 5\}$  را به سیستم فوق اختصاص دهد. با استفاده از عملیات تشابهی زوج  $(B, A)$  را به  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  تبدیل می‌کنیم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0/4 \\ 0 & 0/6 & 0/47 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و با بکارگیری روش ارائه شده داریم:

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 0 \\ 8/5 & 10 & 17 \end{bmatrix}$$

## مراجع

- [1] H. MINC, *Nonnegative Matrices*, New York: Wiley, 1988.
- [2] S. M. KARBASSI, H. A. TEHRANI, *Parametrizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems*, Computer and Mathematics with Applications, Volume 44, Issues 8-9, October- November 2002, Pages 1054-1065.
- [3] T. KACZOREK, *Positive 1-D and 2-D Systems*, Berlin, Germany: Springer, 2002.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## الگوریتم جستجوی کوانتومی نقطه تعادلی نش

زهره محسنی

دانشگاه بزد - دانشکده ریاضی

محمدرضا هوشمنداصل

دانشگاه بزد - دانشکده ریاضی [hooshmandasl@yazduni.ac.ir](mailto:hooshmandasl@yazduni.ac.ir)

علی دلاور خلفی

دانشگاه بزد - دانشکده ریاضی [delavarkh@yazduni.ac.ir](mailto:delavarkh@yazduni.ac.ir)

چکیده

نقطه تعادلی نش در یک بازی دونفره مجموع غیر صفر، نقطه‌ای است که هیچ بازیکنی نمی‌تواند با تغییر استراتژی خود، نتیجه بهتری را کسب کند. در این مقاله با استفاده از روش بهینه سازی کوانتومی، الگوریتمی برای پیدا کردن نقطه تعادلی نش در یک بازی دونفره مجموع غیر صفر، ارائه شده است. روش بهینه سازی کوانتومی بر پایه الگوریتم جستجوی گروور عمل می‌کند. در این روش به دلیل استفاده از ویژگی موازی سازی کوانتومی، پیچیدگی زمانی به نسبت روشهای کلاسیک بهبود یافته و از مقدار  $O(NM)$  به مقدار  $O(M \ln N + N \ln M)$  تقلیل یافته است.

واژه های کلیدی: نقطه تعادل نش، الگوریتم گروور، عملگر هادامارد.

رده بندی موضوعی: 90C26-49M30SC.

### ۱ مقدمه

در محاسبات کوانتومی هر حالت بصورت کیوبیت  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  بیان می‌شود. که  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط و  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . حالت هر کیوبیت را می‌توان بصورت یک بردار در فضای برداری دو بعدی مختلط در نظر گرفت که  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  بردارهای پایه‌ی سازنده این فضا هستند که بر هم عمودند.

ماتریس  $n \times n$  یکانی  $(UU^* = U^*U = I)U$  را یک عملگر کوانتومی نامند. از جمله عملگرهای مهم، عملگر هادا مارد می باشد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

که در حالت  $n$  بیتی از  $n$  بار ضرب تانسوری بدست می آید، بنابراین

$$H^{\otimes n}|x\rangle = H \otimes \cdots \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle.$$

از ویژگی های محاسبات کوانتومی، محاسبات موازی می باشد. بطور مثال اگر عملگر  $U$  روی  $|R\rangle$  که بصورت

$$|R\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$$

تعریف شده است عمل کند، خواهیم داشت:

$$U|R\rangle = \alpha_1 U|00\rangle + \alpha_2 U|01\rangle + \alpha_3 U|10\rangle + \alpha_4 U|11\rangle$$

در واقع  $U$  در یک گام و یا واحد زمانی روی هر چهار وضعیت  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  عمل می کند.

الگوریتم کوانتومی همیشه با مقدار دهی اولیه  $|0 \dots 0\rangle$  شروع می شود. زیرا با عمل کردن عملگر هادامارد بر روی تمام کیوبیت، ضرایب آنها در بر هم نهی یکسان و هم علامت است. بعبارتی:

$$H|0 \dots 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0 \dots 0\rangle + \dots + |1 \dots 1\rangle).$$

ویژگی دیگری که در محاسبات کوانتومی می بایستی در نظر داشت این است که محاسبات کوانتومی در یک سیستم بسته است و برای مشاهده نتایج به عملگر اندازه گیری نیاز است که عملگر اندازه گیری یک عملگر مخرب است.

## ۲ الگوریتم جستجوی گروور

(۱) مقدار دهی اولیه بر هم نهی با:

$$|x\rangle = H|0 \dots 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0 \dots 0\rangle + \dots + |1 \dots 1\rangle)$$

(۲) عمل کردن عملگر  $G_n = -H_n R_n H_n V_f$  بر روی  $|x\rangle$  به تعداد  $r = \lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \rfloor$  مرتبه

که  $H_n = H^{\otimes n} = H \otimes \dots \otimes H$ ،  $V_f|x\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle$  و

$$R_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{2^n \times 2^n}$$

(۳) اندازه‌گیری بر هم نهی.

در جستجوی کلاسیک پیچیدگی زمانی جستجو  $O(N)$  و در الگوریتم گروور  $O(\sqrt{N})$  می‌باشد.

### ۳ الگوریتم بهینه سازی کوانتومی

مساله بهینه سازی  $\max_{x \in S} f(x)$  تحت  $S = \{0, 1\}^n$  مفروض است. با استفاده از الگوریتم گروور بهبود یافته تحت الگوریتم زیر می‌توان جوابی برای آن پیدا نمود.

(۱) انتخاب تصادفی یک  $x_0$  و مقدار دهی اولیه متغیر  $c = 1$ ،  $l_0 = f(x_0)$ ،  $M_c = \{x \in S | f(x) > l_{c-1}\}$ .

(۲) به ازای  $i = 1, 2, \dots$  مراحل ۳ و ۴ انجام شود.

(۳) انجام الگوریتم جستجوی گروور برای جستجوی یک  $x \in M_c$ .

(۴) اگر  $x \in M_c$  باشد، قرار می‌دهیم  $x_c = x$ ،  $l_c = f(x_c)$ ،  $c = c + 1$  و به مرحله ۲ بر می‌گردیم.

شرط توقف  $M_c = \emptyset$  می‌باشد.

قضیه ۱. زمان پیدا کردن نقطه در الگوریتم بهینه سازی کوانتومی برابر  $O(\ln |S|)$  است.

### ۴ نقطه تعادلی نش در یک بازی دونفره مجموع غیر

#### صفر

نقطه تعادلی نش در یک بازی دونفره مجموع غیر صفر، نقطه‌ای است با این ویژگی که هیچ بازیکنی نمی‌تواند با تغییر استراتژی خود نتیجه بهتری را کسب کند. اگر هدف دو بازیکن  $P_1$  و  $P_2$  به ترتیب با توابع پرداخت  $f_1$  و  $f_2$ ، ماکزیمم سازی امتیازهایشان باشد، نقطه‌ای در سطر  $i^*$  و ستون  $j^*$  در ماتریس بازی نقطه تعادلی نش گوئیم اگر در شرایط زیر صادق باشد:

$$\forall j \quad f_1(i^*, j^*) \geq f_1(i, j^*), \quad f_2(i^*, j^*) \geq f_2(i^*, j)$$

اگر استراتژی‌های بازیکن اول برابر  $\{0, 1\}^n$  و استراتژی‌های بازیکن دوم برابر با  $\{0, 1\}^m$  باشد، در این صورت ماتریس بازی، یک ماتریس  $2^n \times 2^m$  خواهد بود و

درآیه ماتریس بازی درسطر  $i$  وستون  $j$ ، زوج مرتب  $(f_1(i, j), f_2(i, j))$  است. پس برای تحقق نقطه تعادلی نش میبایستی  $(i^*, j^*)$  در شرایط زیر صدق کند:

$$\forall i \quad f_1(i^*, j^*) \geq f_1(i, j^*), \quad \forall j \quad f_2(i^*, j^*) \geq f_2(i^*, j).$$

حال با استفاده از الگوریتم بهینه سازی کوانتومی، می توان الگوریتم جستجوی کوانتومی نقطه تعادلی نش را بصورت زیر بیان نمود:

## ۵ الگوریتم جستجوی کوانتومی نقطه تعادلی نش

(۱)  $H = \emptyset$  و  $Z = \emptyset$

(۲) به ازای  $e = 1 \dots M$  مراحل ۳ و ۴ تکرار شود.

(۳) الگوریتم بهینه سازی کوانتومی، برای ستون  $e$  ام روی تابع  $f_1$  اجرا شود.

(۴) پس از اندازه گیری نتیجه به شکل  $xy$  که  $x$  سطر عنصر بهینه (اندیس بهینه یافته شده در ۴ پس از عمل اندازه گیری) و  $y$  همان  $e$  فعلی (ستون عنصر بهینه) به  $H$  اضافه شود.

(۵) به ازای  $g = 1 \dots M$  مراحل ۶ و ۷ تکرار شود.

(۶) الگوریتم بهینه سازی کوانتومی، برای ستون  $g$  ام روی تابع  $f_2$  اجرا شود.

(۷) پس از اندازه گیری نتیجه به شکل  $xy$  که  $x$  سطر عنصر بهینه (همان  $g$  فعلی) و  $y$  ستون عنصر بهینه (اندیس بهینه یافته شده در ۷ پس از عمل اندازه گیری) به  $Z$  اضافه شود.

(۸) نقاط واقع بر  $Z \cap H$  نقاط تعادلی نش هستند.

قضیه ۲. پیچیدگی زمانی الگوریتم جستجوی کوانتومی نقطه نش برابر با  $O(M \ln N + N \ln M)$  است.

## مراجع

- [1] P. D. STRAFFIN, *Game theory and strategy*, The mathematical association of America, 1993.
- [2] M. A. NIELSEN, I. L. CHUANG, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge, 2000.
- [3] Y. LIU, G. J. KOEHLER, *Using modifications to Grover's search algorithm for quantum global optimization*, European journal of operational research, 207 (2010) p. 620-632.

## استفاده از بعد فراکتال در تشخیص وجود بیماری قلبی

مرتضی رحمانی

دانشیار پژوهشکده توسعه تکنولوژی rahmanimr@yahoo.com

نرجس علی بخشی

کارشناسی ارشد دانشگاه شاهد alibakhshi@shahed.ac.ir

### چکیده

مطالعاتی که در سال های اخیر بر روی قلب و سیگنال الکتروکاردیوگرام (ECG) انجام گرفته نشان می دهد که فعالیت آن حاوی یک بی نظمی پیچیده و در عین حال قانونمند است به طوری که می توان آن را در دسته فعالیت های آشوبگونه قرار داد. در این مقاله به کمک ابزارهای ریاضی و استفاده از روشهای تعیین بعد فراکتالی، ضربان قلب افراد در چهار دسته مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نتیجه حاصل از بررسی ها و تحلیل عددی نشان می دهد که ضربان قلب در حالت نرمال از همبستگی بالاتری نسبت به دیگر حالات برخوردار است که از این مطلب می توان در تشخیص وجود بیماریهای قلبی بهره گرفت.

واژه های کلیدی: سیستم دینامیکی، آشوب، فراکتال، بعد فراکتال، سری زمانی نوار قلب.  
رده بندی موضوعی (MSC2000): 62M10، 62M20.

## ۱ مقدمه

مبحث آشفتگی در بسیاری از سیستم های دینامیکی حضوری غیرقابل انکار دارد. رفتار بسیاری از سیستم های مقید به معادلات دیفرانسیل غیرخطی و حتی زمینه های بیولوژیکی نیز بطور ذاتی نمود آشوبگونه دارند. مشخصه شهودی آنها تکرار الگوهای خود متشابه است. مشخصه بارز در این مقوله مفهوم تکرار است که تکرار الگوها منجر به بروز رفتارهای خاص در سیستم می گردد. الگوهای این رفتارها یا در حقیقت الگوهای این آشفتگی ها به صورت اشکال و نمودهای منظمی هستند که آنها را فراکتال می نامند. در بسیاری از موارد نشان داده شده است که تکرار یک یا چند الگو می تواند منجر به بروز پدیده آشفتگی و ایجاد الگوهای فراکتالی گردد [۱] در مقاله حاضر در بخش اول به معرفی روشهای تجزیه و تحلیل سریهای زمانی آشوبی پرداخته و سپس در بخش بعد نتایج حاصل از بررسی ضربان قلب سه نفر در چهار حالت متفاوت تحلیل می گردد.

## ۲ روشهای تجزیه و تحلیل فراکتالی سری زمانی

### ۱.۲ روش همبستگی

سری زمانی مجموعه ای از مشاهدات است که بر حسب زمان (یا هر کمیت دیگر) مرتب شده باشد. با در نظر گرفتن سری زمانی  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) با طول  $N$  و زمان تاخیر  $\tau$ ، تابع همبستگی را از رابطه زیر بدست می آوریم و از این مقادیر برای یافتن بعد محاطی و مقدار بعد همبستگی استفاده می شود.

$$A(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i \quad (1)$$

در این روش به جای تجزیه و تحلیل آنچه اتفاق می افتد سعی می کنیم سری را در فضای محدودی محاط کنیم. این تابع با شمارش مجموعه نقاطی که دارای فاصله مشخصی هستند و یا فاصله آنها از عدد مشخصی کوچکتر است، مشخص می گردد. وقتی شعاع شامل تمام نقاط را افزایش می دهیم، بعد همبستگی که از ایده بعد هاسدورف نتیجه می شود، بدست می آید. فرض کنیم  $R$  شعاع دایره و  $N(R)$  تعداد نقاط اشغال شده در شعاع دایره باشد. بعد همبستگی به صورت

$$N(R) \sim R^C \quad (2)$$

که در آن  $C$  بعد همبستگی است، تعریف می شود. با لگاریتم گرفتن از دو طرف خواهیم داشت

$$\log N = C \log R \quad (۳)$$

با استفاده از دایره هایی در اندازه های مختلف و رسم نمودار  $\log N$  نسبت به  $\log R$ ، شیب خط نشان دهنده بعد همبستگی خواهد بود [۲].

## ۲.۲ روش هاسدورف

اگر  $F$  زیرمجموعه ای از  $R^n$  و  $s$  عدد نامنفی باشد،  $H_\delta^s(F)$  که به صورت زیر تعریف می شود یک  $\delta$ -پوشش برای  $F$  است.

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \right\} \quad (۴)$$

بنابراین با جستجو در تمام پوشش های  $F$  توسط مجموعه های با قطر حداکثر  $\delta$ ، کمترین مجموع این قطر ها را انتخاب می کنیم. لذا بعد هاسدورف که در آن  $0 \leq s \leq n$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dim_H F = \inf \{s : H^s(F) = 0\} = \sup \{s : H^s(F) = \infty\} \quad (۵)$$

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & s < \dim_H F \\ 0 & s > \dim_H F \end{cases}$$

اگرچه ظاهراً تعریف فوق مسئله ای ساده است و بعد هاسدورف برای هر مجموعه مفروضی قابل بیان است اما در عمل محاسبه آن امکان پذیر نیست. با توجه به رابطه بعد هاسدورف و نمای هارست این بعد را از رابطه  $D = H - 2$  که در آن  $H$  نمای هارست است، بدست می آوریم. [۳]

## ۳.۲ روش جعبه شمارش

با فرض قرار داشتن فراکتال در فضای اقلیدسی  $d$ -بعدی،  $D_B$  نشان دهنده مقیاس بندی بین تعداد جعبه های  $d$ -بعدی مورد نیاز برای پوشش کامل مجموعه و  $\varepsilon$  اندازه جعبه هاست.

$$D_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (۶)$$

محاسبه مستقیم این تعاریف هندسی برای سیستم های آشوبی دشوار است، زیرا وقتی  $\varepsilon$  کاهش می یابد، محاسبه تمام جعبه هایی که اطلاعات را شامل می شوند تقریباً غیر ممکن می شود [۴].

### ۳ نتایج حاصل از به کارگیری روشهای فراکتالی

در این بخش با استفاده از داده های پایگاه *physionet* [۵] و نرم افزارهای *box counting* و *Fractan* نوار قلب افراد مختلف با شرایط جسمی یکسان مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته اند. نتایج عددی نشان می دهند که بعد همبستگی و بعد هاسدورف از سازگاری بهتری برخوردارند. کاهش بعد نشان دهنده کم شدن پیچیدگی و در نتیجه احتمال وجود بیماری قلبی است. از این مطلب می توان در جستجوی بیماریهای قلبی بهره گرفت.

### مراجع

- [1] A. J. SEELY AND P. MACKLEM , *complex system and the technology of variableity analysis* , crit care, 8: 367-384, 2004.
- [2] A. T. RINGER, A. P. ROTH, *Properties of the correlation dimension of bounded sets*, Pennselvania state University summer Mthematics REU, 2006.
- [3] K. FALCONER, *FRACTAL GEOMETRY: MATHENATICAL FOUNDATIONS AND APPLICATIONS*, second edition, new York: John Wily and sons, 2005.
- [4] P. SO, E. BARRETO, B. R. HUNT, *Box- counting dimension without boxes: Computing  $D_0$  from average expansion rates*, in physical Reviw, 60: pp. 378-385, 2008.
- [5] [HTTP://PHYSIONET.ORG/TUTORIAL/NCD/](http://physionet.org/tutorial/ncd/).RETRIVED ON MAY 2009.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین‌المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## کران‌های مقادیر ویژه ماتریس‌های بازه‌ای \*

عظیم ریواز

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی arivaz@mail.uk.ac.ir

سمیه زنگویی زاده

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی s.zangoeizadeh@gmail.com

چکیده

در این مقاله به بررسی و مطالعه مقادیر ویژه و بیان کران‌هایی برای مقادیر ویژه یک ماتریس بازه‌ای می‌پردازیم. اینگونه مسائل در زمینه‌هایی مانند دستگاه‌های ارتعاشی، مسائل بهینه‌سازی، علم ریاضیات و غیره کاربرد فراوان دارد.

واژه‌های کلیدی: ماتریس‌های بازه‌ای، مقادیر ویژه، کران‌های مقادیر ویژه.  
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 65F30.

## ۱ مقدمه

تعریف ۱.۱ یک بازه حقیقی بسته و کراندار مانند  $[a, b]$  برابر است با

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

معمولاً بازه‌ها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می‌دهند و نقاط چپ و راست یک بازه چون  $X$  را با  $\underline{X}$  و  $\overline{X}$  نشان داده و داریم  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ .  
(۲) دو بازه  $X$  و  $Y$  را مساوی گوئیم اگر نقاط انتهایی چپ و راست آنها با هم برابر  
این مقاله از حمایت‌های قطب جبر خطی و بهینه‌سازی برخوردار شده است.

باشند یعنی  $\underline{X} = \underline{Y}$  و  $\overline{X} = \overline{Y}$ .

(۳) بازه  $X$  را متقارن گوئیم اگر  $\underline{X} = -\overline{X}$ .

(۴) اگر  $\underline{X} < \underline{Y}$  گوئیم  $X < Y$ .

(۵) بازه  $X$  را مثبت (نامنفی) گوئیم هرگاه به ازای هر  $x \in X$  داشته باشیم  $x > 0$  و با نماد  $(x \geq 0) X > 0$  نشان می دهیم.

تعریف ۲. فرض کنیم ماتریس های حقیقی  $A_c, \Delta \in R^{n \times n}$  که  $\Delta \geq 0$  داده شده باشند. مجموعه زیر را ماتریس بازه ای  $A^I$  در نظر می گیریم.

$$A^I = [A_c - \Delta, A_c + \Delta] = \{A : A_c - \Delta \leq A \leq A_c + \Delta\}$$

تعریف ۳. اگر  $A^I = [\underline{A}, \overline{A}]$  یک ماتریس بازه ای باشد آنگاه ماتریس های  $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A})$  و  $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$  را به ترتیب ماتریس های مرکزی و شعاعی ماتریس بازه ای  $A^I$  می نامیم.

تعریف ۴. ماتریس بازه ای مربعی  $n \times n$  چون  $A^I = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  را منظم گوئیم هرگاه هر  $A \in A^I$  نامنفرد باشد، و در غیر این صورت  $A^I$  را نامنظم (منفرد) گوئیم.

تعریف ۵. فرض کنیم  $A^I = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  یک ماتریس بازه ای باشد. آنگاه مجموعه تمام مقادیر ویژه حقیقی عبارت است از

$$L = \{\lambda \in R ; Ax = \lambda x : A \in A^I, x \neq 0\}$$

به دست آوردن مجموعه  $L$  با تعریف عملاً دوراز دسترس است. حتی بررسی اینکه آیا  $0 \in L$  می باشد، مساله ای کاملاً دشوار بوده و هم ارز بررسی منظم بودن یک ماتریس بازه ای است.

قضیه ۱. اگر  $\lambda \in L$  اگر و تنها اگر ماتریس  $[(A_c - \lambda I) - \Delta, (A_c - \lambda I) + \Delta]$  منفرد باشد.

## ۲ نتایج مهم

در این بخش به بیان کران هایی برای مقادیر ویژه ماتریس های بازه ای در قالب چند قضیه می پردازیم.

قضیه ۲. اگر  $A^I = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  یک ماتریس بازه ای مربعی باشد، آنگاه برای هر مقدار  $\lambda$  از  $A^I$  داریم

$$\lambda_{\min}(A_c^*) - \sigma(\Delta^*) \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq \lambda_{\max}(A_c^*) + \sigma(\Delta^*)$$

$$\lambda_{\min}(A_c^+) - \sigma(\Delta^+) \leq \operatorname{Im}(\lambda) \leq \lambda_{\max}(A_c^+) + \sigma(\Delta^+)$$

به گونه ای که

$$A_c^* = \frac{1}{2}(A_c + A_c^T) \quad \Delta^* = \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^T)$$

$$A_c^+ = \begin{pmatrix} \circ & \frac{1}{2}(A_c - A_c^T) \\ \frac{1}{2}(A_c^T - A_c) & \circ \end{pmatrix} \quad \Delta^+ = \begin{pmatrix} \circ & \Delta^* \\ \Delta^* & \circ \end{pmatrix}$$

$\lambda_{\min}$  و  $\lambda_{\max}$  به ترتیب دلالت بر ماکزیمم و مینیمم مقادیر ویژه ماتریس دارد و  $\sigma(A)$  شعاع طیفی ماتریس  $A$  می باشد.

قضیه ۳. فرض کنیم ماتریس مرکزی  $A_c$  از ماتریس بازه ای  $A^I$  قطری پذیر باشد، یعنی  $V^{-1}A_cV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  برای  $V \in C^{n \times n}$  و  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in C$ . همچنین فرض کنیم  $\operatorname{Re}(\lambda_{\min})$  و  $\operatorname{Re}(\lambda_{\max})$  به ترتیب مینیمم و ماکزیمم قسمت حقیقی مقادیر ویژه  $A_c$  باشند. آنگاه  $L \subseteq \lambda^I = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  که

$$\underline{\lambda} = \operatorname{Re}(\lambda_{\min}) - k_2(V)\sigma_{\max}(\Delta)$$

$$\bar{\lambda} = \operatorname{Re}(\lambda_{\max}) + k_2(V)\sigma_{\max}(\Delta)$$

و  $k_2(V)$  عدد شرطی ماتریس  $V$  می باشد.

قضیه ۴. اگر  $A_c$  قطری پذیر باشد آنگاه  $L \subseteq (\cup_{i=1}^n \lambda_i^I)$  به طوری که

$$\underline{\lambda}_i = \operatorname{Re}(\lambda_i(A_c)) - \sqrt{(k_2(V).\sigma_{\max}(\Delta))^2 - \operatorname{Im}(\lambda_i(A_c^*))}$$

$$\bar{\lambda}_i = \operatorname{Re}(\lambda_i(A_c)) + \sqrt{(k_2(V).\sigma_{\max}(\Delta))^2 - \operatorname{Im}(\lambda_i(A_c^*))}$$

مشروط بر آنکه  $(k_2(V).\sigma_{\max}(\Delta))^2 \geq \operatorname{Im}(\lambda_i(A_c^*))$  و در غیر این صورت  $\lambda_i^I = \phi$ .

مثال ۱. برای ماتریس بازه ای

$$A^I = \begin{pmatrix} [-5, -4] & [-9, -8] & [14, 15] & [4.6, 5] & [-1.2, -1] \\ [17, 18] & [17, 18] & [1, 2] & [4, 5] & [10, 11] \\ [17, 17.2] & [-3.5, -2.7] & [1.9, 2.1] & [-13, -12] & [6, 6.4] \\ [18, 19] & [2, 3] & [18, 19] & [5, 6] & [6, 7] \\ [13, 14] & [18, 19] & [9, 10] & [-18, -17] & [10, 11] \end{pmatrix}$$

حل: از قضیه (۲) بازه  $[-22.104, 35.4999]$  حاصل می گردد و از قضیه (۳) بازه  $[-24.486, 29.3101]$  به دست می آید.

ماتریس مرکزی  $A_c$  دارای مقادیر ویژه  $15.8973, -4.0671, 15.125 + 15.9556i, 15.9556i$  و  $20.7214$  می باشد و همچنین  $k_2(V). \sigma_{max}(\Delta) = 8.5887$ .

لذا از قضیه (۴) داریم

$$\lambda_1^I = \lambda_2^I = \phi, \lambda_3^I = [-12.6559, 4.5216], \lambda_4^I = [-24.486, -7.30853]$$

$$\lambda_5^I = [12.1327, 29.3101] \text{ و بنابراین}$$

$$L \subseteq [-24.486, -7.30853] \cup [-12.6559, 4.5216] \cup [12.1327, 29.3101] \\ = [-24.486, 4.5216] \cup [12.1327, 29.3101]$$

□

## مراجع

[۱] ع. ربواز، ع. سعید، ماتریس های بازه ای، پایان نامه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۸۹.

[2] M. HLADIK, DAVID DANEY, ELIAS P. TSIGARIDAS, *Bounds on Eigenvalue and Singularvalues of Interval Matrices*, Center de Recherche INRIA Sophia Antipolis-Mediterranee, 2008.

[3] J. ROHN, *Bounds on Eigenvalues of Interval Matrices*, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## کاربرد روش تکراری منظم شده متمم شور در حل مسئله معکوس سهموی در فضای دو بعدی

علی ذاکری

گروه ریاضی - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی azakeri @ kntu.ac.ir

رقیه جعفری سامانی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی r.jafari @ gmail.com

### چکیده

این مقاله به بیان کاربرد روش تکراری متمم شور برای حل دستگاه معادلات خطی متفارق بدووضع می‌پردازد. دستگاه معادلات منظم شده از گسسته‌سازی مسائل معکوس سهموی، از قبیل محاسبه منبع مجهول در یک مسئله هدایت گرمایی در فضای دو بعدی حاصل می‌گردد. این روش به بررسی و حل دستگاه معادلات خطی منظم شده با روش منظم‌سازی تیخانوف می‌پردازد. سرانجام یک مثال عددی در این خصوص ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسئله بدووضع، روش متمم شور، منظم‌سازی، مسائل معکوس، رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 74G15, 74G10, 35R30, 17B30, 17B60

### ۱ مقدمه

...در این مقاله بر آن هستیم تا دستگاه معادلات خطی حاصل از گسسته‌سازی مسئله مزبور را با استفاده از روش متمم شور که توسط روش منظم‌سازی تیخانوف بهبود یافته است حل کنیم. لذا در بخش دوم این مقاله ابتدا به معرفی مسئله معکوس پرداخته و سپس در بخش سوم الگوریتم حل دستگاه معادلات مزبور را با استفاده از روش تکراری متمم شور بیان می‌کنیم. در بخش آخر یک نمونه عددی ارائه می‌شود.

## ۲ بیان مسأله و تبدیل آن به یک دستگاه معادلات خطی

فرض کنید  $D$  یک ناحیه مربعی به طول واحد در  $R^2$  و  $(x^*, y^*) \in D$  یک نقطه درونی  $D$  باشد. اکنون مسأله هدایت گرمایی مربوط به درون و روی ناحیه  $D$  با شرایط اولیه و کرانه‌ای به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho C \partial_t T(x, y, t) = K \nabla^2 T(x, y, t) + g(t) \delta(t)(x - x^*, y - y^*), \quad (x, y) \in D, 0 < t < t_f$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in D \cup \partial D,$$

$$\partial_x T(0, y, t) = 0, \quad \partial_x T(1, y, t) = P(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq t_f,$$

$$\partial_y T(x, 0, t) = 0, \quad \partial_y T(x, 1, t) = Q(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_f, \quad (1)$$

که در آن  $\delta(\cdot)$  نمایش تابع دلتای دیراک،  $\rho$ ،  $K$ ،  $t_f$  و  $C$  اعداد ثابت و معلوم می‌باشند. با قرار دادن  $T(x, y, t) = U(x, y, t) + V(x, y, t)$  مسأله (۱) به دو مسأله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\partial_t U(x, y, t) = \nabla^2 U(x, y, t), \quad (x, y) \in D, 0 < t < t_f$$

$$U(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in D \cup \partial D,$$

$$U(0, y, t) = 0, \quad U(1, y, t) = P(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq t_f,$$

$$\partial_y U(x, 0, t) = 0, \quad \partial_y U(x, 1, t) = Q(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_f,$$

$$\partial_t V(x, y, t) = \nabla^2 T(x, y, t) - g(t) \delta(t)(x - x^*, y - y^*), \quad (x, y) \in D, 0 < t < t_f,$$

$$V(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in D \cup \partial D,$$

$$\partial_n V(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \partial D, 0 \leq t \leq t_f, \quad (2)$$

که در آن  $\hat{n}$  بردار یکه برون‌سوی قائم بر مرز  $\partial D$  می‌باشد. با استفاده از محاسبات صورت گرفته در [1]، توابع مجهول  $U$  و  $V$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= \int_D \int_0^t N(x, \xi, y, \eta, t - \tau) T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^t \theta(x - \eta, y - \eta, t - \tau) P(\eta, \tau) d\tau d\eta \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^t \theta(x - \xi, y - 1, t - \tau) Q(\xi, \tau) d\tau d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$V(x, y, t) = \int_0^t N(x, x^*, y, y^*, t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (4)$$

که در آن  $N$  و  $\theta$  و  $K$  به ترتیب عبارت‌اند از:

$$N(x, \xi, y, \eta, t) = \theta(x - \xi, y - \eta, t) + \theta(x + \xi, y + \eta, t)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(x + \sqrt{m}, y + \sqrt{n}, t)$$

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{4t}\right\}$$

رابطه (۴) ارتباط بین  $V$  و  $g$  را نمایش می‌دهد. در صورتی که  $g$  داده شده باشد، آنگاه مسأله فوق مستقیم و دارای جواب یکتا است ([2,1]). در غیر این صورت  $U$  و  $g$  هر دو مجهول خواهند بود. بنابراین برای محاسبه  $g$  شرط فوق اضافی  $0 \leq t \leq t_f$  را به کار می‌بندیم، که در آن  $(x_1, y_1)$  یک نقطه درونی  $D$  می‌باشد. با جایگذاری روابط (۳) و (۴) در رابطه  $T(x, y, t) = U(x, y, t) + V(x, y, t)$  معادله انتگرالی ولترا با هسته پیچشی زیر به دست خواهد آمد:

$$f(t) = y(t) - U(x, y, t) = \int_0^1 N(x_1, x^*, y_1, y^*, t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad (5)$$

مسأله (۵) یک مسأله بدوضع می‌باشد ([2]). اکنون فرض کنید  $\phi_m(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_m(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} & t_{m-1} \leq t \leq t_m \\ \frac{t_{m+1} - t}{t_{m+1} - t_m} & t_m \leq t \leq t_{m+1} \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

$g_i$  به ازای  $i = 0, 1, 2, \dots, M$  مقادیر ثابت و مجهول می‌باشند. در ادامه برای محاسبه بردار  $g^* = (g_1^*, \dots, g_M^*)$  از روش منظم‌سازی تیخانوف که یک تقریب مناسب برای  $f = (f(t_1), \dots, f(t_M))$  می‌باشد، بهره می‌گیریم. با استفاده از روابط فوق داریم:

$$f(t_1) = g_1^* \int_0^{t_1} N(x_1, x^*, y_1, y^*, t_1 - \tau) \phi_1(\tau) d\tau$$

$$f(t_i) = \sum_{m=1}^{i-1} g_m^* a_{i-m+1} g_i^* a_{1,1} = 2, \dots, M$$

$$a_1 = \int_0^{t_1} N(x_1, x^*, y_1, y^*, t_1 - \tau) \phi_1(\tau) d\tau$$

$$a_i = \int_0^{t_i} N(x_1, x^*, y_1, y^*, t_i - \tau) \phi_1(\tau) d\tau \quad i = 2, \dots, M$$

که در آن

دستگاه معادلات  $Ag^* = f$  حاصل می‌شود که در آن  $A \in R^{m \times m}$  یک ماتریس پایین مثلثی توپلیتز می‌باشد.

### ۳ کاربرد روش متمم شور در حل مسأله

الگوریتم روش متمم شور برای حل دستگاه  $Ax = b$  که در آن  $M = L^T L$  یک ماتریس SPD و معکوس پذیر به صورت زیر می باشد:

گام اول: قرار دهید  $i = 0$  و:

$$x^{(0)} = \phi A_{11}^{-1} \phi^T b, \quad r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, \quad y^{(0)} = M^{-1} r^{(0)}, \quad d^{(0)} = r^{(0)}, \quad \rho^{(0)} = y^{T(0)} r^{(0)}$$

گام دوم: مقادیر و بردارهای زیر را به ازای مقادیر مختلف  $i$  محاسبه نمایید:

$$\begin{aligned} v^{(i)} &= (I - \phi A_{11}^{-1} \phi^T A) Z^{(i)}, \quad w^{(i)} = A v^{(i)}, \quad g^{(i)} = M^{-1} w^{(i)}, \quad \beta^{(i)} = \frac{\rho^{(i)}}{d^{T(i)} g^{(i)}} \\ x^{(i+1)} &= x^{(i)} + \beta^{(i)} v^{(i)}, \quad r^{(i+1)} = r^{(i)} - \beta^{(i)} w^{(i)}, \quad y^{(i+1)} = y^{(i)} - \beta^{(i)} g^{(i)}, \\ \rho^{(i+1)} &= y^{T(i+1)} r^{(i+1)}, \quad \gamma^{(i+1)} = \frac{\rho^{(i+1)}}{\rho^{(i)}}, \end{aligned}$$

$$d^{(i+1)} = r^{(i+1)} + \gamma^{(i+1)} d^{(i)}, \quad z^{(i+1)} = y^{(i+1)} + \gamma^{(i+1)} d^{(i)},$$

مثال ۱. با در نظر گرفتن  $(x_1, y_1) = (0.25, 0.25)$ ,  $(x^*, y^*) = (0.5, 0.5)$

$$g(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

جواب واقعی برابر  $Q(x, t) = x$  و  $P(y, t) = y^2$

جواب های دستگاه معادلات  $Ax = g$  با استفاده از روش متمم شور به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0.190264 & g_2 &= 0.223716 & g_3 &= 0.265816 & g_4 &= 0.326627 \\ g_5 &= 0.449151 & g_6 &= 0.56066 & g_7 &= 0.681274 & g_8 &= 0.817775 \\ g_9 &= 0.971953 & g_{10} &= 1.14449 \end{aligned}$$

### مراجع

- [1] SHIDFAR A., ZAKERI A. AND NEISY A., *Two-dimensional inverse heat conduction problem for estimation heat source*, International Journal of Mathematics and Mathematical science, Vol. 10, pp. 1633 - 1641, 1976.
- [2] P. K. LAMM AND L. ELDEN, *Numerical solution of first - kind Volterra equations by sequential Tikhonov regularization*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 34, no. 4, pp. 1432 - 1450, 1997.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## بررسی و مقایسه روش های جستجوی تک بعدی برای بهینه سازی

اعظم بلند طلعت

عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آیت الله آملی، آمل، مازندران، ایران  
A.Bolandtalat@iauamol.ac.ir

محمد سلیمانی ورکی

عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آیت الله آملی، آمل، مازندران، ایران  
M.S.Vareki@iauamol.ac.ir

چکیده

در این مقاله ابتدا سه روش  $\frac{1}{2}$ ، درونیابی خطی و فیبوناچی اصلاح شده برای بهینه سازی غیرخطی و نامقید معرفی شده و سپس با روش های موجود از قبیل درونیابی درجه دو، نسبت طلایی، RMS و AM با توجه به متداول ترین معیار های موجود یعنی تعداد تکرارها، تعداد محاسبه  $f$  در نقاط و محاسبه ی زمان پردازش کامپیوتر با استفاده از ده تابع تست می شود و در پایان از بین این سه روش که روش های پایه ای اند، کاراترین روش معرفی می شود.

واژه های کلیدی: بهینه سازی غیر خطی، روش فیبوناچی اصلاح شده، اعداد لوکاس، روش درونیابی خطی، تابع تست و جستجوی تک بعدی  $\frac{1}{2}$ .

### ۱ مقدمه

تعریف ۱. اگر  $y(x)$  بطور یکنواخت به ماکسیمم خود تغییر پیدا کند، یعنی برای  $x^* < x_2 < x_1$  داشته باشیم  $y^* < y_2 < y_1$  و برای  $x_2 < x_1 < x^*$  داشته باشیم  $y^* < y_1 < y_2$  در این صورت تابع را اکیدا تکمندی گوئیم. [۲]

تعریف ۲. رکن اصلی بسیاری از الگوریتم ها برای حل یک مساله برنامه ریزی غیر خطی جستجوی تک بعدی است. در این الگوریتم نقطه ای مانند  $x_k$  را در نظر می

گیریم و یک بردار جهتی  $d_k$  را پیدا می کنیم و سپس با طول گام مناسب  $\lambda$  به نقطه جدید  $X_{k+1}$ . و به همین شکل الگوریتم تکرار می شود و به نقاط جدیدتر می رسیم. و پیدا کردن طول گام  $\lambda$  شامل حل زیر مساله ی مینیمم سازی  $x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$  می باشد که یک مساله ی جستجوی یک بعدی با متغیر  $\lambda$  است. [۱]

## ۲ بیان الگوریتم ها

تعریف ۳. روش  $\frac{5}{4}$  بر پایه ارتباط بین سه نقطه ی جستجوی بازه اولیه نامعین بنا شده است و با روش جستجوی خطی که طول بازه ی نامعین را در هر تکرار کاهش می دهد و شرط  $(c_k - a_k) = \frac{1}{4}(b_k - a_k)$  در هر تکرار آن برقرار است. به منظور بدست آوردن یک زیر بازه ی  $[a_k, b_k]$  شامل  $x^*$ ، لازم است تا  $f(x)$  حداقل در  $[a_k, b_k]$  دو بار مقدار یابی می شود. ابتدا  $f(c_k)$  را بدست می آوریم که مقدار تابع در نقطه ی جستجوی درونی است. سپس  $f(x_k)$  را محاسبه می کنیم. موقعیت  $x_k$  نسبت به  $[a_k, b_k]$  باید بررسی شود:

اگر  $x_k \in [a_k, c_k]$  آنگاه  $x_k = a_k + \frac{1}{4}(b_k - a_k)$

اگر  $x_k \in [c_k, b_k]$  آنگاه  $x_k = a_k + \frac{5}{4}(b_k - a_k)$

اگر  $x_k$  روی بازه قرار بگیرد سه زیر بازه خواهیم داشت با مقایسه  $f(x_k)$  و  $f(c_k)$  زیر بازه ی را حذف می کنیم در صورت برقرار نبودن بازه باقی مانده در شرط  $(c_k - a_k) = \frac{1}{4}(b_k - a_k)$  توجه داریم که نقطه درونی جدید  $c'_k$  یا نقطه انتهایی جدید  $b'_k$  را طوری بدست می آوریم که TPP جدید  $[a_{k+1}, c_{k+1}, b_{k+1}]$  در شرط فوق صدق کند. [۳]

تعریف ۴. روش درونیابی خطی مبتنی بر پیدا کردن یک نقطه ی اشتراک خطوطی است که از نقاط انتهایی بازه ی نامعین  $[a_k, b_k]$  و نقاط همسایگی آنها می گذرد فرض می کنیم که  $f(x)$  یک مینیمم روی بازه ی نامعین اولیه  $[a_1, b_1]$  دارد و در تکرار  $k$ -ام بازه را  $[a_k, b_k]$  در نظر می گیریم.  $a'_k$  و  $b'_k$  را نقاطی در همسایگی  $a_k$  و  $b_k$  طوری می گیریم که  $a'_k < a_k$  و  $b_k < b'_k$  و در این روش  $x_k$  در هر تکرار از فرمول تکراری زیر بدست می آید:

$$x_k = \frac{(f(b_k) - f(a_k) + m_a a_k - m_b b_k)}{m_a - m_b}$$

اگر  $f(x_k) > f(c_k)$ ، بازه ی  $[a_k, c_k]$  را که نقطه ی مینیمم در آن وجود ندارد حذف می شود و بازه ی نامعین جدید  $[c_k, b_k]$  است.

به منظور اینکه بتوانیم رابطه ی  $(c_k - a_k) = \frac{1}{4}(b_k - a_k)$  را تضمین می کنیم TPP جدید در تکرار بعد  $[a_k, c_k, b_k]$  است.  $a_k$  جدید به عنوان  $a_k$  معین می شود. به ترتیب نقاط جدید در  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  می توانند به صورت زیر جایگزین

شوند.  $a'_{k+1} = a_k, b_{k+1} = b_k, a_{k+1} = x_k, b'_{k+1} = b'_k, c_{k+1} = c_k$ . اگر  $f(x_k) < f(c_k)$  بازه  $[c_k, b_k]$  را که نقطه‌ی مینیمم در آن وجود ندارد حذف می‌کنیم. بنابراین بازه نامعین جدید  $[a_k, c_k]$  است. [۳]

تعریف ۵. روش فیبوناچی بر پایه دنباله فیبوناچی تعریف می‌شود که تنها یک نقطه درونی در هر مرحله تعیین می‌شود. ولی در روش اصلاح شده آن در هر مرحله با دونقطه کار می‌کنیم که بر پایه اعداد لوکاس می‌باشد و از دستور زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_k = a_k + (b_k - a_k) \frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k+3}}$$

$$x'_k = a_k + (b_k - a_k) \frac{L_{n-k+2}}{L_{n-k+3}}$$

به طوری که:  $L_1 = 2, L_2 = 1, L_j = L_{j-1} + L_{j+2}$  و در هر مرحله با محک زیر قسمتی از بازه حذف می‌شود تا در نهایت به دقت مورد نظر برسیم. [۴]

اگر  $f(x_k) \leq f(x'_k)$  آنگاه  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x'_k]$ . در غیر این صورت  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$ .

### ۳ مقایسه روشها

برای مقایسه روش ها از چند تابع تست تکمندی که در جداول زیر آورده ایم استفاده می‌کنیم.

تعداد	توابع تست	ناحیه محدب	$X^*$
۱	$f(x) = (1 - 100x)^2$	$(0, 389/7)$	$718/2$
۲	$f(x) = \frac{3774/522}{x} + 2/27x - 181/599, x > 0$	$(0, \infty)$	$777/40$
۳	$f(x) = \frac{10/7}{x} + 0/2x, x > 0$	$(0, \infty)$	$861/0$
۴	$f(x) = \frac{100}{x} + 0/2x, x > 0$	$(0, \infty)$	$361/2$
۵	$f(x) = \frac{20x^{0.7}}{1-e^{0.7/5x}}, x > 0$	$(0, \infty)$	$895/1$

زمان پردازش	تعداد محاسبه $f$	تعداد تکرارها
$LININ \frac{5}{9} fib$	$LININ \frac{5}{9} fib$	$LININ \frac{5}{9} fib$
۵۹ ۶۶ ۴۰	۳۴ ۲۲ ۱۶	۳۳ ۱۰ ۱۵
۳۰ ۴۵ ۲۹	۳۷ ۳۵ ۱۹	۳۶ ۱۶ ۱۸
۳۵ ۴۲ ۳۴	۳۴ ۲۲ ۱۳	۳۳ ۱۰ ۱۲
۹۰/۲۸ ۳۸ ۲۸	۳۶ ۳۰ ۱۹	۳۵ ۱۳ ۱۸
۵۴/۱۳۶ ۱۷۰ ۳۹	۳۱ ۲۳ ۱۵	۳۰ ۱۰ ۱۴

## ۴ نتیجه گیری

زمان پردازش کامپیوتر معیار مناسبی برای سنجش کارایی روش ها نیست و بهترین معیار تعداد تکرارها است. از نظر تعداد تکرارها و تعداد محاسبه ی مقادیر  $f$  روش  $\frac{5}{9}$  بر روش درونیابی خطی برتری دارد، ولی زمان پردازش روش  $\frac{5}{9}$  بیشتر از زمان پردازش روش درونیابی خطی است. روش فیبوناتچی اصلاح شده تعداد تکرار آن مابین تعداد تکرار این دو روش است ولی زمان پردازش آن تقریباً از هر دو روش دیگر کمتر است. پس روش  $\frac{5}{9}$  حداقل به کارایی کاراترین روش هاست و از این سه روش فیبوناتچی اصلاح شده از نظر کارایی دوم است.

## مراجع

- [1] D.G.LUENBERGER, *Linear and Nonlinear Programming, Second edition, Wesley Publishing Company, Inc. 1984*
- [2] EMIN KAHYA, *A new Unidimensional Search Method For optimization: Linear interpolation method, Applied Mathematics and computation, 2005.*
- [3] EMIN KAHYA, *A new Unidimensional Method Search For optimization: The 5/9 method, Applied Mathematics and computation, 2005.*
- [4] EMIN KAHYA, *On Fibonateci search method with k-lucas numbers, Applied mathematics and computation, 162(3) (2005) 1321-1324.*



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## مشخص کردن هم مثبت بودن ماتریس به کمک نرم افزار CVX

مصطفی جعفری

دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد [mostafa-jaafari@stu.yazduni.ac.ir](mailto:mostafa-jaafari@stu.yazduni.ac.ir)

رضاقاسم پور

دانشگاه غیرانتفاعی شیخ بهائی [ghasempoor@shbu.ac.ir](mailto:ghasempoor@shbu.ac.ir)

جبرائیل زمانی

دانشگاه غیرانتفاعی شیخ بهائی [jcbrail.zamani@gmail.com](mailto:jcbrail.zamani@gmail.com)

### چکیده

برای تشخیص هم مثبت بودن یک ماتریس قضایای مطرح شده است که شرایطی را برای چنین مسئله ای فراهم می کند . مسئله برنامه ریزی نیم معین مثبت و مسئله برنامه ریزی هم مثبت کاربردهای در حوزه های مختلف ریاضیات از جمله در بهینه سازی ترکیباتی دارد. نرم افزار CVX برای حل مسئله برنامه ریزی معین مثبت معرفی شده است ، در این مقاله ضمن معرفی این نرم افزار یکی از قضایای مطرح برای تشخیص هم مثبت بودن مطرح می شود و از این نرم افزار جهت اجرای شرایط قضیه استفاده می شود .

واژه های کلیدی: ماتریس هم مثبت — برنامه ریزی معین مثبت - CVX

رده بندی موضوعی: 15A48

تعریف ۱. ماتریس  $M \in S_n$  هم مثبت است هرگاه:

$$\forall x \geq 0 \quad x^T M x \geq 0$$

قضیه ۱. مسئله  $SDP$  را بفهم زیر در نظر می گیریم :

$$M - A^i \succeq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$A_{ii}^i = 0$$

$$A_{jj}^i + A_{ji}^j + A_{ij}^j = 0 \quad i \neq j$$

$$A_{jk}^i + A_{ki}^j + A_{ij}^k \geq 0 \quad i \neq j \neq k$$

که در آن  $n$  ماتریس  $A^i$  عبارت است از ماتریس های متقارن. اگر مسئله فوق جواب شدنی داشته باشد در این صورت  $M$  یک ماتریس هم مثبت می باشد و عبارت  $P_1(Z) = \sum_{i,j,k} m_{i,j,k} Z_i^* Z_j^* Z_k^*$  نامنفی خواهد بود. [۳]

لم ۱. مسئله برنامه ریزی کوادراتیک زیر را در نظر می گیریم:

$$f = \min x^T Q x$$

$$Ax \geq 0$$

$$x^T x = 1$$

اگر برای مسئله نیم معین مثبت  $Q - A^T C A \succeq rI$  ماتریس  $C$  به عنوان یک ماتریس هم مثبت موجود باشد آنگاه  $f \geq r$ .

قضیه فوق شرایطی را که برای ماتریس  $M$  لازم است بیان می کند و لم نیز در واقع یکی از کاربردهای چنین ماتریسی را نشان می دهد. شرایط ایجاد شده برای این ماتریس را می توان با استفاده از نرم افزار  $CVX$  بررسی کرد.

## ۱ معرفی نرم افزار $CVX$

نرم افزار  $CVX$  تحت  $MATLAB$  بوده و توسط دانشگاه استنفورد برای حل انواع مسایل برنامه ریزی معین مثبت طراحی شده است. [۱] مسائل برنامه ریزی مختلفی را که در حوزه های کاربردی متفاوت مطرح می شود می توان به یک مسئله معین مثبت تبدیل کرد لذا این نرم افزار و مسئله برنامه ریزی معین مثبت اهمیت ویژه ای خواهند داشت. [۲] در این مقاله استفاده از این نرم افزار را برای مشخص کردن هم مثبت بودن یک ماتریس نشان می دهیم.

مثال: ماتریس  $M$  را به صورت یک ماتریس  $3 \times 3$  هم مثبت در نظر می گیریم.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

و دستورات زیر را وارد می‌کنیم.

```
cvx-begin \\  
variables X(n,n) Y(n,n) Z(n,n)\\  
X(1,1)==0;  
Y(2,2)==0;  
Z(3,3)==0;\\  
X(2,2)+Y(2,1)+Y(1,2)==0;\\  
X(3,3)+Z(3,1)+Z(1,3)==0;\\  
Y(1,1)+Y(1,2)+X(2,1)==0;\\  
Y(3,3)+Z(3,2)+Z(2,3)==0;\\  
Z(1,1)+X(1,3)+X(3,1)==0;\\  
Z(2,2)+Y(2,3)+Y(3,2)==0;\\  
X(3,2)+Y(3,2)+Z(1,2)$>$= 0;\\  
X(3,2)+Y(1,3)+Z(2,1)$>$= 0;\\  
X(2,3)+Y(3,1)+Z(1,2)$>$= 0;\\  
X(3,2)+Y(3,1)+Z(2,1)$>$=0;\\  
X(3,2)+Y(1,3)+Z(2,1)$>$= 0;\\  
X(2,3)+Y(3,1)+Z(1,2)$>$= 0;\\  
(M-X)==semidefinite(n);\\  
(M-Y)==semidefinite(n);\\  
(M-Z)==semidefinite(n);\\  
cvx-end
```

خروجی این برنامه برای ماتریس فوق که هم مثبت است وضعیت شدنی می‌باشد و چنانچه ماتریس هم مثبت نباشد، وضعیت آن نشدنی خواهد بود.

## مراجع

- [۱] رضا قاسم‌پور - جبرائیل زمانی ، معرفی نرم افزار *CVX* ، سومین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، (اردیبهشت ۱۳۸۹).

[۲] مصطفی جعفری — رضا قاسم پور — جبرائیل زمانی ، تبدیل مدل مارکویتز برای انتخاب سهام بهینه به مسئله برنامه ریزی معین مثبت ، دومین سمینار ریاضیات مالی و ریاضیات شبکه های اجتماعی تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان ، (بهمن ۱۳۸۹).

- [3] PABLO A. PARILO , *Semidefinite programming relaxation for semi-algebraic problems*, Mathematical programming manuscript.
- [4] CHARLES R. JOHNSON, ROBERT REAMS , *on copositive Matrices and their spectrum*, Department of Mathematics, college of wiliam and mary , P.O.



چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار  
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن  
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک



## طراحی کنترل کننده های بهینه برای سیستم های حلقه-بسته خطی ناوردای زمانی

فرزانه صوفی وند

دانشگاه آزاد اسلامی واحد دورود [soufievand@yahoo.com](mailto:soufievand@yahoo.com)

### چکیده

در این مقاله با کمک معادلات خطی و غیر خطی به بهینه سازی ماتریس حلقه بسته  $\Gamma$  پرداخته شده است. ماتریس پس خورد حالت  $K$  به عنوان ماتریس مجهولی است که با یک روش خطی پارامتری بهینه شده جدید آن را بدست آورده ایم. با کمک ماتریس بهینه  $K$  بهینه سازی دو سیستم حلقه بسته مجزا به طور کامل با مثالهای متنوع ارائه شده است.

واژه های کلیدی: ماتریس پس خورد حالت، سیستم حلقه-بسته، معادله ریکانی، کنترل، رده بندی موضوعی (MSC2000):

## ۱ عنوان بخش اول

سیستم های حالت به دو شکل

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1), \quad d(Ax(t))/dt = Cx(t) + Bu(t) \quad (2)$$

با شرایط اولیه  $(BK)^T = B^T K^T$ ,  $A^T K = K^T A$  را در نظر می گیریم.

مثال ۱. سیستم حلقه-بسته (۱) به صورت  $\Gamma = A - BK$  و سیستم حلقه بسته (۲) به صورت  $\Gamma = A^{-1}(C - BK)$  است با توجه به این تعریف ماتریس  $A$  باید وارونپذیر باشد.

اگر در سیستم (۱) داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = I_3, R = 1, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

با توجه به شریط اولیه ماتریس  $\Gamma$  به صورت متقارن می باشد. با قراردادن ماتریس  $\Gamma$  در معادله ریکاتی زیر [۱] معادلاتی غیر خطی زیر حاصل خواهد شد.

$$-B^T A^T (\Gamma - A) - (\Gamma - A)^T (AB) - (\Gamma - A)^T [(\Gamma - A)^T B R^{-1} B^T]^T + B^T W^T B = 0$$

$$2a_1 = a_2 a_2 + a_1(a_5 + 1) + a_1(a_9 + 1)$$

$$2a_2 = a_3(a_1 + 1) + a_2 a_1 + a_3(a_9 + 1)$$

$$2a_3 = a_2(a_1 + 1) + a_2(a_5 + 1) + a_1 a_3$$

$$2a_1 + 3 = (a_1 + 1)^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$2a_9 + 2 = a_2^2 + a_1^2 + (a_9 + 1)^2$$

$$2a_5 + 2 = a_2^2 + (a_5 + 1)^2 + a_1^2$$

جواب بهینه برای ماتریس  $\Gamma$  به صورت زیر حاصل می شود:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.41 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه  $\Gamma = A - BK$  ماتریس  $K$  به صورت زیر حاصل می شود.

$$K = \begin{bmatrix} 0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس، ماتریس پس خورد بهینه با مینیمم نرم می باشد با توجه به این که سیستم پایدار است.

مثال ۲. اگر در سیستم (۲) داشته باشیم

$$A, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

با توجه به شرط اولیه ماتریس متقارن  $\Gamma$  حاصل می شود. این ماتریس را در معادله ریکاتی زیر قرار می دهیم.

$$-B^T C^T (A\Gamma - C) - (A\Gamma - C)^T (CB) - (A\Gamma - C)^T [(A\Gamma - C)^T B R^{-1} B^T]^T + B^T W^T B = 0$$

معادلات غیر خطی زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} 2a_1 &= a_2 a_3 + a_4 (a_5 + 1) + a_6 (a_9 + 1) \\ 2a_3 &= a_3 (a_1 + 1) + a_2 a_4 + a_3 (a_9 + 1) \\ 2a_2 &= a_2 (a_1 + 1) + a_2 (a_5 + 1) + a_4 a_3 \\ 2a_1 + 3 &= (a_1 + 1)^2 + a_4^2 + a_3^2 \\ 2a_9 + 2 &= a_4^2 + a_3^2 + (a_9 + 1)^2 \\ 2a_5 + 2 &= a_4^2 + (a_5 + 1)^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

جواب بهینه شده به صورت زیر حاصل می شود.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.41 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه  $\Gamma = A^{-1} (C - BK)$  ماتریس پس خورد بهینه  $K$  با مینیمم نرم به صورت زیر بدست می آید:

$$K = \begin{bmatrix} -0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

منابع

[1]- Bryson, A. E. and Ho, Y., "Applied optimal control", Hemisphere Publishing Corp., London, 1975.

- [2]- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F., “*The mathematical theory of optimal processes*”, Interscience, NewYork, 1962.