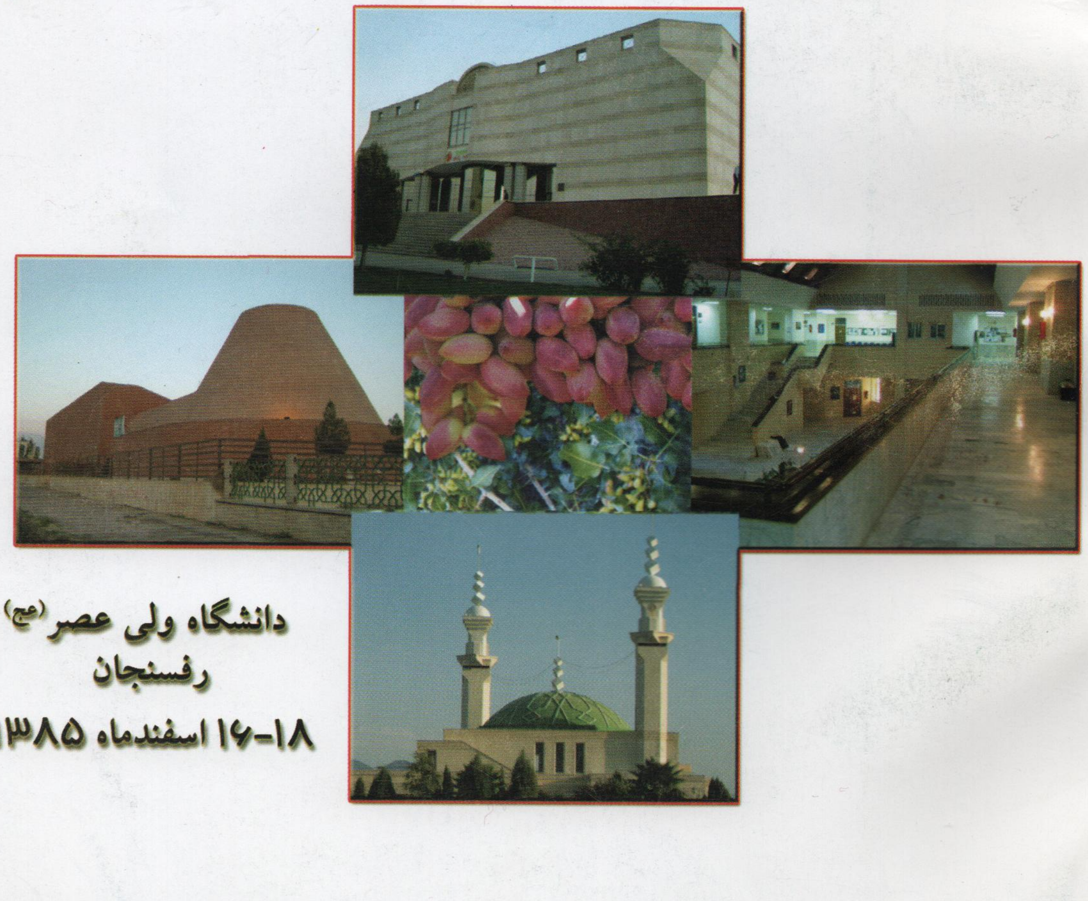
چکیده مبسوط مقالات

چهارمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن همراه با کارگاه موجک



دانشگاه ولی عصر (عج)

رفسنجان

۱۸-۱۶ اسفندماه ۱۳۸۵

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده مبسوط مقالات

چهارمین سمینار جبر خطی و کاربردهای آن

و

کار گاه موجک

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

۱۶، ۱۷ و ۱۸ اسفند ۱۳۸۵

نام کتاب : چکیده مبسوط مقالات
چهارمین سمینار جبر خطي و کاربردهاي آن
همراه با کارگاه موجك

تدوین کنندگان : حسن جمالي و عطا الله عسكري همت
ویراستاران :احمد صفا پور
طراح جلد: سید علیرضا حسيني دهميري
ناشر: كميته برگزار کننده سمینار
سال انتشار: اسفند ۱۳۸۵
امور فني و چاپ: انتشارات دانشگاه ولي عصر (عج)
محل انتشار: قـــــم

بسمه تعالی

به چهارمین سمینار جبرخطی خوش آمدید. از طرف کمیته‌ی برگزارکننده سمینار مقدم شرکت‌کنندگان محترم را گرامی داشته، و در این سفر علمی اقامت خوشی را برای شما آرزومندیم.دانشگاه ولی عصر(عج) افتخار دارد در برگزاری سمینارهای جبر خطی (و نیز کارگاه موجک‌ها) که هر دو سال یک بار برگزار می‌شود شرکت فعال داشته و برای سومین بار میزبانی این سمینار را به عهده دارد.همچون گذشته این سمینار با همکاری دانشگاه شهیدباهنر کرمان و انجمن ریاضی ایران برگزار می گردد.

از معاونت پژوهشی محترم دانشگاه جناب آقای دکتر موسوی ریاست محترم دانشگاه شهید باهنر کرمان جناب آقای دکتر احمد امیری خراسانی و از ریاست محترم انجمن ریاضی ایران جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی که همدوش با دانشگاه ولی عصر رفسنجان مسئولیت برگزاری این همایش را بر عهده گرفته‌اند تشکر و قدردانی نمائیم.

جبر خطی که محور اصلی این همایش می‌باشد در علوم مختلف کاربرد دارد و زیربنای بسیاری از مقوله‌های ریاضی است تقریبات خطی در محاسبات عددی فضاهای مماس در هندسه منیفلد عملگرهای خطی در ریاضی فیزیک، ماتریس‌ها در ساختارهای مهندسی و اقتصاد،... همه و همه سرچشمه‌های الهام بخش مباحث گوناگون جبر خطی بوده‌اند.

مطمئناً برگزاری این سمینار مدیون همت و اقدام‌های صمیمانه همکاران گرامی، اعم از کادر هیئت علمی و اداری است که مراتب تشکر و قدردانی خود را از آنان ابرازمی‌داریم. از افراد، مقامات و نهادهای زیر به خاطر حمایت‌های معنوی و مالی صمیمانه سپاسگزاری می گردد.

جناب آقای دکتر محمد مهدی زاهدی مقام عالی وزارت علوم تحقیقات و فناوری، جناب آقای مهندس کرمی شاهرخی مدیر محترم مجتمع مس سرچشمه، جناب آقای دکتر گرامی رئیس محترم مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی.

مجدداً از کلیه شرکت کنندگان و میهمانان داخلی و خارجی که رنج سفر را بر خود هموار نموده تا بر غنای این سمینار بیفزایند تشکر نموده و از این که با دیده اغماض بر اشکالات و کاستی‌های ما می‌نگرند، سپاسگزاریم. امید این که اقامت چند روزه با خاطراتی خوب همراه بوده و در آینده نیز میزبان شما عزیزان باشیم. در خاتمه از همه معاونان و مسئولین ذیربط دانشگاه و نیز از برگزارکنندگان این همایش که اسامی آنان به تفکیک در این دفترچه آمده است تشکر می‌نماییم.

دکتر مهدی ابراهیمی نژاد
رئیس دانشگاه ولی عصر(عج)

دکتر عطاءا...عسکری همت
دبیر اجرایی سمینار

کميته اجرايي

علي آرمند نژاد

حميد رضا افشين(رياست دانشكده علوم)

مرتضي جعفر پور

حسن جمالي

سيد عليرضا حسيني دهميري

محمد علي دهقان

حبيب الله سعيدي

حسين سلمه اي

محمد شفيعي (مدير گروه رياضي)

احمد صفا پور

محمد عبدي عربلو

مسعود عجمي

عطا الله عسكري همت(دبير كميته ي اجرايي)

علي محمد محسن الحسيني

مهدي مصباح

سيد شاهين موسوي مير كلايي

عليرضا هومان

کمیته ی علمی

Invited Speakers

NO	Name	Degree	Article	From
1	Rajendra Bhatia	Prof	*	India
2	Ole Christensen	Prof	*	Denmark
3	Munibur Rahman Chowdhury	Prof	*	Bangladesh
4	S. L. Lee	Prof	*	Singapoor
5	A. Mayeli	Prof	*	Germany
6	Md. Shafiqul Islam	Prof	*	Bangladesh

اسامي شركت كنندگان

رديف	نام	نام خانوادگي	مرتبه	مقاله	نام موسسه
1	مهديه	ابراهيم پور	دانشجوی کارشناسی ارشد	--	دانشگاه ولی عصر
2	سعيد	ابراهيمي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
3	فرزانه	ابراهيمي پور	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
4	فرزانه	ابوطالبي	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه ولی عصر
5	فرزانه	ابوطالبي باقرآباد	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
6	مطهره	اتابكي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
7	احمد	احمدي	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
8	گلاويژ	احمدي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
9	حميده	اذرمي	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه ولی عصر
10	طاهره	اسمعيل پور جهرمي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
11	فرزانه	اصفهاني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
12	حميدرضا	افشين	استاديار		دانشگاه ولی عصر
13	سعيد	اكبري	استاديار	*	دانشگاه صنعتي شريف
14	فاطمه	اكبري پوركاني	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
15	مجيد	اميرزاده	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
16	سهيلا	امين			دانشگاه يزد
17	هاجر	امين فرد			
18	علي	ايرانمنش	استاديار		دانشگاه تربيت مدرس
19	شراره	ايزدنيا	دانشجوی کارشناسی ارشد	*	دانشگاه ولی عصر
20	جعفر	ايزدي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
21	حميده	آذرمي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
22	علي	آرمند نژاد	دكتري	*	دانشگاه ولی عصر
23	غلامرضا	آقاملايي	استاديار	*	دانشگاه آزاد بافت
24	ندا	آهنجيده	دانشجوي دكتري	*	دانشگاه تربيت مدرس
25	فاطمه	بازوبند	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
26	رقيه	باغستاني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
27	حميدرضا	باغشاهي	مربي		دانشگاه ولی عصر

28	محبوبه	باقري پور	استاديار		دانشگاه ولی عصر
29	بهروز	بصيرت	دانشجو	*	دانشگاه آزاد واحد بيرجند
30	خدا خواست	بي باك	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
31	محمدحسين	بي كينه	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شيراز
32	سيدمهدي	بيضايي	استاديار		دانشگاه ولی عصر
33	حسين	پارسيان	استاديار	*	دانشگاه بوعلي همدان
34	اميد	پاكروان	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
35	مهدي	پناهي	استاديار		دانشگاه بيرجند
36	نجمه	پور افغان	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
37	نجمه	پور افغان	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
38	رضا	پوركاني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
39	مهدي	تاج الديني	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
40	پريسا	ترابيان	دانشجوي دكتري		دانشگاه باهنر كرمان
41	راضيه	تقي آبادي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
42	نرگس	تولايي	دانشجوي دكتري	*	دانشگاه فردوسي مشهد
43	طاهره	جباري	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه سيستان و بلوچستان
44	مرتضي	جعفرپور	مربي		دانشگاه ولی عصر
45	وحيده	جعفري	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه ولی عصر
46	حسن	جمالي	مربي		دانشگاه ولی عصر
47	فيروزه	جهانشاهي	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
48	نيره	حاذقي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شيراز
49	فاخته	حسامي فرد			
50	اعظم	حسن زاده ساماني	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
51	محمد علي	حسنخاني فرد	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
52	مجيد	حسني دستجردي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
53	سيدمحمد	حسيني	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
54	فاطمه	حسيني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
55	عليرضا	حسيني دهميري	مربي	*	دانشگاه ولی عصر
56	محبوبه	حسيني يزدي	دانشجوي دكتري	*	دانشگاه شيراز
57	مهدي	حميدي	دانشجوي كارشناسي ارشد	*	دانشگاه سيستان و بلوچستان
58	زهرا	حيدري	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
59	مريم	خاكسار قلاتي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر

60	احمد	خاكزار بفروني	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
61	فاطمه	خالويي	دانشجو دكتري		دانشگاه باهنر كرمان
62	محمد	خان زاده بيركي	دانشور		دانشگاه ولی عصر
63	لاله	خجسته	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
64	سيد مصطفي	خرمی زاده	دانشجوي دكتري		دانشگاه صنعتی شريف
65	صغري	خسرواني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
66	شهرزاد	خلوصي	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه شيراز
67	محمد جواد	خيرده	دانشجوی كارشناسی ارشد	*	دانشگاه ولی عصر
68	منصور	دانا	استاديار	*	دانشگاه سنندج
69	ندا	دانشور حكيمي ميبدي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
70	مريم	درستي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
71	زينب	ده دست	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه سيستان و بلوچستان
72	محمد علي	دهقان	دانشيار	*	دانشگاه ولی عصر
73	عاليه	ذبيحي	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
74	ريحانه	رئيسي طوسي	دانشجو دكتري		دانشگاه فردوسي مشهد
75	مهدي	رجبعلي پور	استاد	*	دانشگاه باهنر كرمان
76	محبوبه	رحمانيان	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
77	مجتبي	رحيمي	مربي		دانشگاه ولی عصر
78	اصغر	رحيمي	استاديار		مجتمع آموزش عالي مراغه
79	بتول	رستم زاده	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
80	محسن	رستمي	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
81	عليرضا	رستمي چپانه	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه سيستان و بلوچستان
82	جان محمد	رستمی قربانی	دانشجوي كارشناسي ارشد	*	دانشگاه سيستان بلو چستان
83	مهدي	رشيدي	دانشجو	*	دانشگاه تربيت مدرس
84	اسما	رضايي استخروييه	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
85	مهدي	رضوي	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه شيراز
86	محمدعلي	رنجبر صيقسرايي	دانشجوی كارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
87	حسن	رنجبر عسكري	استاديار		دانشگاه ولی عصر
88	زهره	رهباني	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
89	مرضيه	رهباني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
90	جعفر	ريخته گرزاده	استاديار		دانشگاه اراك
91	سجاد	زارعي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر

92	محمد داوود	زارعين	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
93	یوسف	زماني	استاديار	*	دانشگاه صنعتي تبريز
94	آزیتا	زندي	مربي		دانشگاه ولي عصر
95	مصطفي	زنگي آبادي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
96	علي	زين الديني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
97	عباس	سالمی	دانشیار		دانشگاه باهنر کرمان
98	حسن	سبحاني	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
99	پرويز	سرگلزايي	استاد يار	*	دانشگاه سيستان و بلوچستان
100	حبيب الله	سعيدي	مربي	*	دانشگاه ولي عصر
101	علي	سقائيان	دانشجو		دانشگاه ولي عصر
102	ليلا	سلطاني	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
103	حميدرضا	سلطاني فر	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
104	حسين	سلمه اي	مربي		دانشگاه ولي عصر
105	مرتضي	سنجراني پور	استاديار	*	دانشگاه سيستان و بلوچستان
106	عليرضا	سهيلي	دانشيار	*	دانشگاه سيستان و بلوچستان
107	موسی	شا محمدی	دانشجوي کارشناسي ارشد		دانشگاه سيستان و بلوچستان
108	نصرت الله	شجره پورصلواتی	استاديار	*	دانشگاه باهنر کرمان
109	محمد	شفيعي	استاديار		دانشگاه ولي عصر
110	مهدي	شفيعي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
111	مريم	شفيعي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
112	مهناز	شمس	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
113	صديقه	شهاب الديني			دانشگاه ولي عصر
114	احمد	صفاپور	استاديار		دانشگاه ولي عصر
115	مرجانه	صمدي راد	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
116	سيد عباس	ضيائي	استاديار		دانشگاه شهيد باهنر
117	مجيد	عابدي اصطهباناتي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
118	پروانه	عبادي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
119	فاطمه	عباسي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
120	محمد	عبدي عربلو	مربي		دانشگاه ولی عصر
121	مسعود	عجمي بختيار وند	مربي		دانشگاه ولی عصر
122	مجيد	عرفانيان	مربي	*	دانشگاه زابل
123	عباس	عسکري	دانشجوي دکتري		دانشگاه ولی عصر
124	عطا الله	عسکري همت	استاديار		دانشگاه ولی عصر

125	مهرداد	عصفوري	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
126	سهراب	عفتي			
127	ایمان	علي شريفي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
128	اسما	علي نژاد	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
129	آزاده	عليجاني	داشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
130	صديقه	عوض يار	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
131	مهديه	فاطمي دخت	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
132	مهديه	فاطمي دخت	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
133	سمانه	فخروي	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه ولی عصر
134	سمانه	فخروي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
135	منصور	فرهادي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
136	رضا	فرهي مقدم	استادیار		دانشگاه ولی عصر
137	رضا	فروتن	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه سیستان و بلوچستان
138	مهناز	فرودی قاسم آبادی	دانشجوي دكتري		دانشگاه شهرکرد
139	ابوالحسن	فريدوني	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شیراز
140	رضا	فلاح	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
141	حمزه	فيضي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
142	مهديه	قرباني هرمزآبادي	استادیار		دانشگاه آزاد زاهدان
143	رضا	قلي زاده عباس آبادي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
144	خدارحم	قندي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
145	رجبعلي	كامیابي گل	دانشیار	*	دانشگاه فردوسي مشهد
146	مليحه	کشاورز	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شیراز
147	مهدي	کوهپایه	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
148	ساره	كياني نژاد	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
149	رحمت الله	لشكري پور	دانشیار	*	دانشگاه سیستان و بلوچستان
150	ماشاء ا...	ماشين چي	استاد	*	دانشگاه باهنر کرمان
151	فريد	مالك	استادیار	*	دانشگاه یزد
152	مرضيه	مانیان	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
153	مهيار	ماهجويي	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
154	سید مجتبي	مجتهدي			

[illegible]	وحيد	محبي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	سید علي محمد	محسن الحسيني	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	مهدي	محسني	مربي		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	زهرا	محمدي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	عباسعلي	محمدي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شیراز
[illegible]	زهرا	محمديان	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	عظيم	محمودي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	سید عباد الله	محموديان	استاد	*	دانشگاه صنعتي شريف
[illegible]	زهره	مختاري	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	باقر	مرادی	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه سيستان و بلوچستان
[illegible]	مهدي	مصباح	دانشجوي دكتري		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	علي	معدنكن	مربي	*	دانشگاه زابل
[illegible]	مسلم	ملكشاهي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	داؤد	منشادي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	مرضيه	منفرد پور	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شیراز
[illegible]	نظام	مهدوي اميري	استاد	*	دانشگاه صنعتي شريف
[illegible]	سید میثم	مهدوي شهري	دانشجوي كارشناسي ارشد		دانشگاه سيستان و بلوچستان
[illegible]	محمدعلي	مهرجوفرد	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	نجمه	موسوي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	شاهين	موسوي ميركلايي	استاديار		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	حسين	مومنايي	استاديار		دانشگاه باهنر کرمان
[illegible]	مهتاب	ميرزايي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	سیده فرزانه	نيوي	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	شهرام	نجفي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شیراز
[illegible]	علي اكبر	نصيري	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
[illegible]	اكبر	نظري	استاديار	*	دانشگاه باهنر کرمان
[illegible]	علي محمد	نظري	استاديار	*	دانشگاه اراك
[illegible]	محمد علي	نقي پور	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه شیراز
[illegible]	[illegible]	نكو فرد			

184	مرجان	نوبهاري	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
185	مريم	نوروزي كورگاهي	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
186	محبوبه	هنرمند	دانشجو		دانشگاه ولی عصر
187	محمدرضا	هوشمند اصل	استادیار	*	دانشگاه يزد
188	عليرضا	هومان	مربي		دانشگاه ولی عصر
189	الهام	وفايي نژاد	دانشجوی کارشناسی ارشد		دانشگاه ولی عصر
190	بامدادرضا	ياحقي	استادیار	*	مركز تحقيقات فيزيك نظري و رياضي

فهرست مقالات فارسی

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های
آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) —
رفسنجان

تطبیق موجک باپهنای باند محدود بر سیگنال دلخواه

شراره ایزدنیا
دانشگاه ولی عصر رفسنجان (عج) . بخش فیزیک
علیرضا بهرامپور
دانشگاه صنعتی شریف . بخش فیزیک
دانشگاه ولی عصر رفسنجان (عج) . بخش فیزیک

چکیده

در این مقاله فاصله یک موجک پهنای باند محدود را از سیگنال مورد علاقه به عنوان تابع معیار در نظر می گیریم ومحدودیت های ناشی از آنالیز چند ریزه ساز را به عنوان قید به مسئله کمینه سازی تحمیل شده است. قید ها را با ضرایب نامعین لاگرانژ به مسئله اضافه کرده وسرانجام با استفاده از روش وردشی معادلات حاکم بر دامنه و فاز موجک بهینه را به دست می آوریم .

واژه های کلیدی:آنالیز چند ریزه ساز، موجک با پهنای باند محدود، موجک بهینه.

۱ مقدمه

در این مقاله هدف ما این است که یک روش موثر برای به دست آوردن یک موجک متعامد با پهنای باند محدود که با سیگنال داده شده ، تطبیق داده شود را ارائه‌دهیم.تا کنون روش های زیادی توسط محققان ارائه شده است .از جمله می توان روش رائو و چاپا را نام برد،در واقع آن ها مربع خطای بین سیگنال و موجک را می نیمم کردند. اما روش آن ها چندان

مطلوب نیست ، زیرا آن ها فاصله بین دامنه سیگنال و موجک متناظر با آن و همچنین فاصله بین فاز طیف سیگنال مورد نظر و موجک منطبق بر آن را به صورت جداگانه کمینه کرده اند.ولی همان طور که می دانیم دامنه و فاز به یک دیگر وابسته می باشند و نمی توان از این وابستگی چشم پوشی کرد. پس ما در جهت برطرف کردن این مشکل‌برآمدیم، به صورتی که ما مربع خطای دامنه وفاز را با هم می نیمم می کنیم . به این ترتیب ابتدا روش رائو و چاپا را بیان می کنیم وسپس روشی را که خودمان پیشنهاد کردیم را آوردیم.

۲ انطباق سیگنال و موجک با روش رائو و چاپا

برای بیان الگوریتم سه قضیه‌ی مهم که از آن هااستفاده خواهیم کرد را ذکر می کنیم .

۱.۲ قضیه. سه شرط روی یک تابع Φ با $\|\Phi\| = 1$ ، باتوجه به این که Φ یک تابع مقیاس برای یک آنالیز چند ریزه سازمتعامد(OMRA) برای $L^2(R)$ باشد، وجود دارد. $\hat{\Phi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\Phi}(\omega),\ \ lim_{j\longrightarrow\infty}\hat{\Phi}(2^{-j}\omega) = 1,\ \sum_k |\hat{\Phi}(\omega + 2\pi(k))|^2 = 1$. اولین شرط (معادله پواسون)برابر با متعامد بهنجار بودن $\Phi(t-k)$ است . دومین شرط به طور ذاتی خاصیت (OMRA)است. سومین شرط بسطتابع مقیاس توسطتوابع H با دوره تناوب 2π است. البته اثبات آن ها در [۱],[۲] آورده شده است .

۲.۲ قضیه. در یک(OMRA) تابع مقیاس با باند محدود، $\hat{\Phi}(\omega)$ ، که دارای تعداد شمارایی صفر است ، یک محمل فشرده که در رابطه (۱) می بینیم دارد.

$$\omega \in [\pi-\alpha, \pi+\alpha] \qquad 0 \le \alpha \le \pi/3$$

و همچنین $\quad |\omega| < \pi-\alpha \qquad |\hat{\Phi}(\omega)| = 1$

و در $\pi-\alpha < |\omega| < \pi+\alpha \quad |\hat{\Phi}(\omega)|^2 + |\hat{\Phi}(2\pi-\omega)|^2 = 1$ بر قرار می باشند.

۳.۲ قضیه. در یک(OMRA) با یک تابع مقیاس با باند محدود، موجک مطابق باآن یعنی $\hat{\Psi}(\omega)$ دارای یک محمل فشرده می باشد که در رابطه (۲) بیان کردیم.

$$\omega \in [\pi-\alpha, 2\pi+2\alpha] \qquad 0 \le \alpha \le \pi/3$$

و همچنین رابطه زیر نیز برقرار می باشد.

$$|\Psi(\omega)| = \begin{cases} 0 & 0 \le |\omega| < \pi-\alpha \\ |\Phi(2\pi-\omega)| & \pi-\alpha \le |\omega| < \pi+\alpha \\ 1 & \pi+\alpha \le |\omega| \le 2\pi-2\alpha \\ |\Phi(\omega/2)| & 2\pi-2\alpha \le |\omega| < 2\pi+2\alpha \\ 0 & 2\pi+2\alpha \le |\omega|. \end{cases}$$

می توان $|\hat{\Psi}|$ را به صورت ترم های از $g(\omega) = |\hat{\Phi}(\omega)|$ بیان کرد که $g(\omega) > 0$ است ، البته اثبات کامل دو قضیه‌اخیر در[۳] − [۴] آمده است .

۱.۲ کمینه سازی فاصله بین دامنه طیف سیگنال و موجک متناظر با آن

برای این که دامنه موجک با باند محدود را از دامنه سیگنال دلخواه به دست آوریم ، باید نرم خطای بین دامنه ها را می نیمم کرد.

$$Y(k) = |\Psi(k\triangle\omega)|^2 \qquad k \in Z \tag{4}$$

$\triangle\omega = 2\pi/2^\ell$ می باشد و از طرفی معادله پواسون نیز به رابطه (۵) تبدیل می شود.

$$\Sigma_{p=0}^{\ell}\Sigma_{m=-\infty}^{\infty}Y((\frac{k2^\ell}{2p}) + 2^{\ell+1}m) = 1 \tag{5}$$

با توجه به [۳] چنین داریم : $\frac{2^{\ell-1}}{3} < |(\frac{k2^\ell}{2p}) + 2^{\ell+1}m| < \frac{2^{\ell+2}}{3}$ حال رابطه (۵) را می توان با توجه به [۳] به صورت یک رابطه قیدی که در زیر آوردیم بیان کنیم.

$$AY = 1 \tag{6}$$

از طرفی $Y = |\Psi(k\triangle\omega)|^2$, $W = |\Phi(k\triangle\omega)|^2$ برای $k = [\frac{2^\ell}{3}], ..., [\frac{2^{\ell+2}}{3}]\}$ می باشند.
که F سیگنال است و a پارامتر مقیاس است . نرم خطای بین سیگنال و موجک با توجه به [۳] به شکل $L = \frac{(W-aY)^T(W-aY)}{W^TW} + \lambda^T(AY - 1)$ که یک معادله لاگرانژی در می آید . بااستفاده از روش وردشی به $Y = \frac{1}{a}W + A^T(AA^T)^1(1 - \frac{1}{a}AW)$ و $a = \frac{1^T(AA^T)^{-1}AW}{1^T(AA^T)^{-1}1}$ می رسیم . که اثبات آن در [۳],[۴] آمده است .

۲.۲ کمینه سازی فاصله بین فاز سیگنال و موجک متناظر با آن

در این جا نیز تعدادی فرض اولیه در نظر می گیریم. $\Lambda_\Psi(\omega) = \frac{d\theta_\Psi(\omega)}{d\omega}$ و $\Lambda_\Phi(\omega) = \frac{d\theta_\Phi(\omega)}{d\omega}$ و $\lambda(\omega) = \frac{d\theta_H(\omega)}{d\omega}$ ، $\Gamma_\Psi(\omega) = \Lambda_\Psi + 1/2$ و همچنین

$$\Pi(\omega) = \begin{cases} 1 & (-1/2) \le \omega < 1/2 \\ 0 & elsewhere \end{cases} \tag{7}$$

برای این کار یک دوره تناوب از $\lambda(\omega)$ را به صورت $\lambda_T(\omega) = \Sigma_{r=0}^{R/2}c_r\omega^{2r}\Pi(\frac{\omega}{2\pi})$ که یک چند جمله ای از مرتبه R است، در نظر می گیریم . و به این ترتیب $\lambda(\omega) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_T(\omega - 2\pi k)$ که در حالت گسسته به صورت $\lambda_(n) = \Sigma_{r=0}^{R/2}c_r\Sigma_{k=-p/2}^{p/2-1}(n-kT)^{2r}\Pi(\frac{n-kT}{T})$ می باشد، که $p = N/T$ و N تعداد نمونه ها و همچنین $-N/2 \le n < N/2$ می باشد، پس رابطه بالا را می توان به صوزت رابطه (۸)نوشت.

$$\lambda = Bc \tag{8}$$

که ۱ یک بردار $N \times 1$ و B یک ماتریس $N \times (\frac{R}{2} + 1)$ و c یک بردار $1 \times (1 + \frac{R}{2})$ می باشند. در نتیجه Γ_Ψ را به صورت رابطه(۹) تعریف می کنیم.

$$\Gamma_\Psi = D_\Psi c \tag{9}$$

که $D_\Psi = -\frac{1}{2}B_{q+T/2} + \Sigma_{m=2}^{\infty}2^mB_{(q/2^m)}$ حال به سراغ قسمت اصلی می رویم ، در واقع $\gamma_\Omega = \Sigma_{n=-N/2}^{N/2-1}[\Omega(n)(\Gamma_F(n) - \Gamma_\Psi(n))]^2$ را که در یک تابع وزن نرمالیزه یعنی $\Omega(n) = Y(n)/\Sigma Y(n)$ ضرب شده را به صورت ماتریسی بیان می کنیم. $\gamma = (\overline{\Gamma}_F - \overline{D}_\Psi c)^T(\overline{\Gamma}_F - \overline{D}_\Psi c)$ و در نهایت با استفاده از روش وردشی رابطه $\hat{c} = (\overline{D}_\Psi^T\overline{D}_\Psi)^{-1}\overline{D}_\Psi^t\Gamma_F$ را مطابق با [۴] به دست آورده و با جایگزین کردن آن در رابطه (۹) و (۸) چنین به دست می آوریم. $\Gamma_\Psi = D_\Psi\hat{c}$ و $\lambda = B\hat{c}$ و در نهایت روابط زیر را به دست می آوریم .

$$\Lambda_\Phi = D_\Phi\hat{c} - \overline{D_\Phi\hat{c}} \qquad و \qquad \Lambda_\Psi = (D_\Psi\hat{c} - \overline{D_\Psi\hat{c}}) - \frac{\Delta\omega}{2}$$

۳.۲ کمینه سازی همزمان فاصله بین دامنه وفاز طیف سیگنال و موجک

در این قسمت روشی را که خودمان پیشنهاد دادیم را بیان می کنیم . در این روش نیز از قضیه های (۱) و (۲) و (۳) نیز استفاده می کنیم . $\alpha = \pi/3$ در نظر می گیریم درنتیجه باره ها در رابطه های (۱) و (۲) به ترتیب به $\omega \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ و $\omega \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$ تبدیل می شود.باید رابطه (۱۰) را کمینه می کنیم .

$$E(\Psi, a) = \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} |a\hat{\Psi}(\omega) - \hat{F}(\omega)|^2 d\omega \tag{10}$$

با جایگذاری رابطه (۳) به جای Ψ و همچنین $q(\omega) = -g(\omega)|F(\omega)|sin(\theta_\Psi(\omega) - \theta_F(\omega))$ قرار می دهیم.از طرفی رابطه بین فاز موجک و فاز تابع مقیاس به صورت $\theta_\Psi(\omega) = -\frac{\omega}{2} - \theta_\Phi(\omega + 2\pi) + \theta_\Phi(\frac{\omega}{2} + \pi) + \theta_\Phi(\frac{\omega}{2})$ می باشد . یک قید نیز روی فاز تابع مقیاس داریم که به صورت $\theta_\Phi(2\omega) - \theta_\Phi(\omega) + \theta_\Phi(4\pi - 2\omega) - \theta_\Phi(2\pi - \omega) = 0$ می باشد. بااستفاده‌از این روابط وجایگذاری آن در رابطه (۱۰)و با استفاده از روش وردشی ، نتایج بسیار جالبی را به دست می آوریم که آن رابه صورت یک قضیه بیان می کنیم.

۴.۲ قضیه. در یک آنالیز OMRA طراحی یک موجک با پهنای باند محدود متناسب با سیگنال مورد نظرنتایج زیر رابه دست می دهد.

۵.۲ نتیجه.۱ـفاز طیف سیگنال مورد نظر با فاز طیف موجک مناسب منطبق بر آن در بازه‌های $[\frac{2\pi}{3}, \pi], [2\pi, \frac{8\pi}{3}]$ مساوی می باشند .
۲ـتابع $q(\omega)$ مطابق با موجک مناسب که درگذشته آن را تعریف شده‌است حول

$\omega = ۳\pi/۲$ در بازه $[\pi, ۲\pi]$ پاد متقارن می باشد و معادلات زیر را ارضا می کند.

$$q(\omega) - ۲q(۲\omega - ۲\pi) = ۰ \qquad \omega \in [۳\pi/۲, ۲\pi] \qquad (۱۱)$$

$$q(\omega) + ۲q(۴\pi - ۲\omega) = ۰ \qquad \omega \in [\pi, ۳\pi/۲] \qquad (۱۲)$$

۳– دامنه موجک را از رابطه زیر به دست می آوریم و سپس دامنه تابع مقیاس از رابطه (۳) به دست می آید.

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \tfrac{۱}{۳a}(|\hat{F}(۲\pi - \omega)| cos(\theta_{\Psi}(۲\pi - \omega) - \theta_F(۲\pi - \omega))) \\ &+ \tfrac{۲}{۳a}(|\hat{F}(۲\omega)| cos(\theta_{\Psi}(۲\omega) - \theta_F(۲\omega))) \quad \omega \in [\tfrac{۲\pi}{۳}, \tfrac{۴\pi}{۳}] \end{aligned}$$

۴.۲ نتیجه‌گیری

با استفاده از محاسبات وردشی یک روش مناسب برای به دست آوردن موجک با پهنای باند محدود منطبق بر یک سیگنال دلخواه ارائه شده است. در روش رائو و چاپا برای انطباق موجک با پهنای باند محدود به دلیل مشکلات متعدد انطباق دامنه طیف موجک بر دامنه تبدیل فوریه سیگنال مورد علاقه و فاز آنها بطور جداگانه انجام شده است. به همین دلیل روش مذکور بعنوان روش زیر بهینه نامیده شده است. در روش ارائه شده در این مقاله فاصله دامنه و فاز تبدیل فوریه سیگنال مورد علاقه و طیف موجک با پهنای باند محدود بطور همزمان کمینه شده است. محاسبات عددی ادعای تئوری را تائید نموده‌اند.

مراجع

[1] S. Mallat, *"A Wavelet Tour of Signal Processing"*, Academic Press,1999.

[2] L. Debnath, *"Wavelet Transform and Their Application"*, Birkauser, Boston, 2002.

[3] J.O.Chapa,R.M.Rao, *"Algorithm for designing wavelets to match a specified signal"*, IEEE Trans.signal process.48(12)(2000) 3395-3406.

[4] J.O.Chapa, *"Matched wavelet construction and its application to target detecton"*, Ph.D.Dissertation,Rochester Inst.Technol,Rochester,NY,Aug.1995.

مشخص سازی تبدیلی

بهروز بصیرت
دانشگاه آزاد اسلامی واحد بیرجند
b.basirat@iau-birjand.ac.ir
مهدی پناهی
دانشگاه بیرجند، دانشکده علوم، گروه ریاضی
mpanahi@birjand.ac.ir

چکیده

به هر قضیه یا شروط معادلی که عضویت یک ماتریس در رده‌ی ماتریسی خاصی را مشخص کند، یک مشخص سازی می‌گوییم [۲]. در این مقاله نوع دیگری از مشخص سازی، تحت عنوان مشخص سازی تبدیلی را تعریف می‌کنیم. سپس این نوع مشخص سازی را برای رده‌های PN–، P– و M–ماتریس‌ها ارائه می‌دهیم.

واژه های کلیدی: مشخص سازی، مشخص سازی تبدیلی.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 15A57.

۱ مقدمه

در ابتدا تعریف چند رده‌ی ماتریسی که در این مقاله از آنها استفاده می‌کنیم را در زیر می‌آوریم [۴]. سپس ضرب آدامار و خاصیت درعلامت وابسته بودن را تعریف می‌کنیم. در آخر تعریف مشخص سازی تبدیلی را برای یک رده‌ی ماتریسی خاص بیان می‌کنیم.

ماتریس $A \in M_n(R)$ را نامنفرد اصلی یا PN–ماتریس گوییم، اگر هر زیر ماتریس اصلی آن نامنفرد باشد. ماتریس $A \in M_n(R)$ را یک P–ماتریس نامیم، هرگاه همه‌ی

مینورهای $k \times k$ ماتریس A، $k = 1, \ldots, n$ مثبت باشند. ماتریس مربعی $A \in M_n(R)$ که همه درایه‌های غیر قطری آن نامثبت باشند را یک Z—ماتریس می‌نامیم. ماتریسی که هم P—ماتریس و هم Z—ماتریس باشد را یک M—ماتریس می‌نامیم.

ضرب آدامار دو بردار (یا دو ماتریس) با بعد یکسان، ضرب درایه‌وار آن دو است و با $\circ$ نمایش داده می‌شود. دو بردار مخالف صفر $x, y \in R^n$ را در علامت وابسته گوییم اگر و تنها اگر $x \circ y \not\leq 0$ (یعنی ضرب آدامار دو بردار x و y دارای حداقل یک درایه‌ی مثبت باشد).

به خاصیت یا رابطه‌ای بین بردار x و تصویر بردار x تحت ماتریس A یعنی Ax، که نشان دهنده‌ی عضویت ماتریس A در رده‌ی ماتریسی Ω باشد، مشخص سازی تبدیلی رده‌ی ماتریسی Ω می‌گوییم.

با این موضوع تا حدودی آشنایی داریم. به عنوان مثال می‌دانیم برای هر بردار $x \in R^n(C^n)$ و هر ماتریس $A \in M_n(R)(M_n(C))$، اگر ضرب داخلی Ax و x مثبت شود، ماتریس A معین مثبت (معین مثبت هرمیتی) است.

۲ مشخص سازی تبدیلی برای PN—، P— و M—ماتریس‌ها

در این بخش مشخص سازی تبدیلی را به ترتیب برای PN—، P— و M—ماتریس‌ها ارائه می‌کنیم.

۱.۲ قضیه. $A \in M_n(R)$ یک PN—ماتریس است اگر و تنها اگر برای هر بردار غیر صفر $x \in R^n$، $x \circ Ax \neq 0$.

اثبات. فرض کنیم A یک PN—ماتریس باشد. نشان می‌دهیم برای هر $x \neq 0$، $x \circ Ax \neq 0$. فرض کنیم (فرض خلف) برداری غیر صفر مانند $x \in R^n$ وجود داشته باشد به طوری که $x \circ Ax = 0$. با استفاده از ماتریس جایگشت P بردار x را به صورت $x' = Px = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ که $X_1 \neq 0$، افراز می‌کنیم. از طرفی $PAx = PAP^{-1}Px$. قرار می‌دهیم $A' = PAP^{-1}$، A' یک PN—ماتریس است [۱]، [۳]. همچنین

$$x' \circ A'x' = Px \circ PAP^{-1}Px = x \circ Ax = 0$$

ماتریس $A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ را مطابق x' افراز می‌کنیم. داریم

$$A'x' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 \\ A_{21}X_1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه $A_{11}X_1 = 0$ و این متناقض است با این حقیقت که A_{11} یک زیر ماتریس اصلی نامنفرد A' است. پس فرض خلف باطل است و برای هر بردار غیر صفر $x \in R^n$،

$x \circ Ax \neq 0$. برعکس، فرض کنیم $A(J)$، $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ یک زیر ماتریس اصلی دلخواه A و $x(J)$ بردار دلخواه مخالف صفر هم مرتبه با $A(J)$ باشد. بردار $x \in R^n$ را از روی بردار $x(J)$، طوری تعریف می‌کنیم که در هر مولفه‌ی موجود در J درایه‌ی نظیرش را در بردار $x(J)$ اختیار کرده و بقیه‌ی درایه‌هایش برابر صفر باشد. این انتخاب بردار $x \in R^n$، $x \neq 0$ را بدست می‌دهد. چون $x \circ Ax \neq 0$ پس $x(J) \circ A(J)x(J) \neq 0$ و در نتیجه برای هر بردار $x(J) \neq 0$، $A(J)x(J) \neq 0$، به عبارت دیگر $A(J)$ نامنفرد می‌باشد. □

۲.۲ قضیه. $A \in M_n(R)$ یک P—ماتریس است اگر و تنها اگر برای هر بردار غیر صفر $x \in R^n$، بردارهای x و Ax در علامت وابسته باشند به عبارتی $x \circ Ax \not\leq 0$.

اثبات. به مراجع [۱]، [۳] مراجعه شود. □

برای اینکه یک مشخص سازی تبدیلی برای M—ماتریس‌ها ارائه دهیم، احتیاج به تعریفی اصلاح شده از خاصیت در علامت وابسته بودن بردارها داریم. فرض کنیم $0 \neq x \in R^n$ و $y \in R^n$. ماتریس جایگشت P را چنان انتخاب می‌کنیم که $Px = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ که در آن افرازهای X_1، X_2 و X_3 به‌صورت، $X_1 > 0$ (همه درایه‌هایش مثبت)، $X_2 < 0$ (همه درایه‌هایش منفی) و $X_3 = 0$، باشند. فرض کنیم $Py = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ مطابق Px افراز شده است (بدین معنا که تعداد مولفه‌های Y_1 مطابق X_1، Y_2 مطابق X_2 و Y_3 مطابق X_3 باشد.).

۳.۲ تعریف. دو بردار مخالف صفر $x, y \in R^n$ را دوبرابر در علامت وابسته گوییم اگر در خواص (۱) و (۲) زیر صدق کنند.

(۱) $\qquad X_1 \circ Y_1 \not\leq 0 \quad$ و $\quad X_2 \circ Y_2 \not\leq 0$

(۲) اگر X_1 تهی باشد و X_2 تهی نباشد، آنگاه $Y_2 \geq 0$ و اگر X_2 تهی باشد و X_1 تهی نباشد، آنگاه $Y_1 \leq 0$. (توجه کنید که شرط (۱) در علامت وابسته بودن دو بردار x و y را نتیجه می‌دهد.) □

۴.۲ مثال. دو بردار $x = (0 \ \ -1 \ \ -2 \ \ 0 \ \ -2)^T$ و $y = (1 \ \ -1 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 3)^T$ مفروض‌اند. ماتریس جایگشت P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

داریم $Px = (-2 \;\; -1 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 0)^T$ و $Py = (3 \;\; -1 \;\; -3 \;\; 0 \;\; 1)^T$. پس X_1 و Y_1 تهی هستند و $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$، $Y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$، $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
شرط (۱) برقرار است زیرا

$$X_2 \circ Y_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \not\leq 0$$

شرط (۲) نیز برقرار است زیرا X_1 تهی است و X_3 تهی نیست و $Y_3 \geq 0$. پس x و y دوبرابر در علامت وابسته هستند.

۵.۲ قضیه. $A \in M_n(R)$ یک M−ماتریس است اگر و تنها اگر برای هر بردار غیر صفر $x \in R^n$، x و Ax دوبرابر در علامت وابسته باشند.

اثبات. به مرجع [۱] مراجعه شود. □

مراجع

[۱] ، "درونیابی بوسیله ماتریس‌ها"، بهروز بصیرت، پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بیرجند، آبان ۱۳۸۵.

[2] A. Berman, R. J. Plemmons, *"Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences"*, Academic Press, San Diego, 1979.

[3] M. Fiedler, V. Ptak, *"On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors"*, Czech. Math. J. **12** (1962) 382-400.

[4] R. A. Horn, C. R. Johnson, *"Topics in Matrix Analysis"*, Cambridge University Press, New York, 1991.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا ۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) - رفسنجان

بررسی مسیر حرکت مساله اولیه و دوگان در روش نقطه درونی نیوتن

سید علیرضا حسینی دهمیری ، آسیه کیانی
دانشگاه ولی عصر(عج) ، دانشکده علوم ، گروه ریاضی
E-mail:dehmiry@mail.vru.ac.ir

چکیده

یکی ازجدیدترین روشها درگروه الگوریتمهای نقطه درونی روش نیوتن می باشد که توسط Roos,Terlaky,Vial در سال ۲۰۰۲ ارائه شده است.در این مقاله بعد از معرفی این الگوریتم ، سعی شده است که مسیر حرکت این روند در فضای جواب اولیه و دوگان مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه های کلیدی: روش نیوتن ، ضرب مولفه ای ، ماتریس کج ـمتقارن .

۱ مقدمه

در این مقاله یک مساله برنامه ریزی خطی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\min\ c^T x \qquad s.t: Ax \ge b, x \ge \circ$$

که در آن c, x بردارهای n بعدی و b برداری m بعدی و ماتریس A ، $(m \times n)$ بعدی خواهد بود.
دوگان مساله فوق بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\max\ b^T y \qquad s.t: A^T y \ge c, y \ge \circ$$

لم: فرض کنید x یک جواب شدنی مساله (P) و y یک جواب شدنی مساله (D) باشد که $b^T y \ge c^T x$. در اینصورت x و y جوابهای بهینه ی (P) و (D) خواهند بود.
اثبات [۳]. □

لم قبل این ایده را تقویت می کند که برای حل یک مساله (P) کافیست که جوابی برای سیستم معادلات زیر بیابیم:

$$\begin{cases} Ax \ge b, x \ge \circ \\ -A^T y \ge -c, y \ge \circ \\ b^T y - c^T x \ge \circ \end{cases} \qquad (۱)$$

اما یافتن یک جواب برای سیستم فوق بسادگی میسر نیست.
در صورتیکه $\kappa = ۱$ باشد، سیستم معادلات (۱) معادل سیستم زیر است:

$$\begin{bmatrix} o_{m\times m} & A & -b \\ -A^T & o_{n\times n} & c \\ b^T & -c^T & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ k \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} o_m \\ o_n \\ o \end{bmatrix} \quad , \quad x \ge \circ\ ,\ y \ge \circ\ ,\ k \ge \circ \qquad (۲)$$

متغیر جدید κ را متغیر همگن ساز می نامند. در صورتیکه سیستم (۲) دارای جوابی با شرط $\kappa > \circ$ باشد ، آنگاه $(y/\kappa, x/\kappa, ۱)$ نیز جواب (۲) خواهد بود و به تبع آن $(y/\kappa, x/\kappa)$ جواب (۱) خواهد شد.

حال فرض کنید ماتریس M را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} o_{m\times m} & A & -b \\ -A^T & o_{n\times n} & c \\ b^T & -c^T & o \end{bmatrix} & r \\ -r^T & \circ \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

که در آن :

$$r = \begin{bmatrix} e_m - Ae_n + b \\ e_n + A^T e_m - e \\ ۱ - b^T e_m + c^T e_n \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

که منظور از e برداری است که همه مولفه های آن ۱ هستند.
تعریف: گوئیم یک سیستم معادلات و نامعادلات خطی در شرایط نقطه درونی *Interior Point Condition(IPC)*، صدق می کند هر گاه‌یک جواب شدنی در آن موجود باشد که بطور اکید در تمامی نامعادلات سیستم صادق باشد.
می توان با در نظر گرفتن متغیر جدید ν و تعریف $z = (y, x, \kappa, \nu)^T$ و $q = (o_{m+n+۱}, m+n+۱)^T$ سیستم معادل زیر را نوشت:

$$s(z) = Mz + q \ge \circ \ :\ z \ge \circ \qquad (۵)$$

واضح است در حالتی $\nu = \circ$ ،یک تناظربین جوابهای سیستم (۲) با جوابهای سیستم (۴) وجود دارد.
با نگاهی دقیق تر به ماتریس M در می یابیم که این ماتریس کج — متقارن و دترمینان آن صفر می باشد.همچنین دستگاه (۵—۱) در شرایط IPC صدق می کند.در حقیقت e جوابی از دستگاه است که : $s(e) = e > \circ$
لم: اگر $\mu > \circ$ آنگاه حداقل یک بردار نامنفی z وجود دارد که:

$$zs(z) = \mu e, z \ge \circ, s(z) \ge \circ \qquad (۶)$$

اثبات.[۱] □

تذکر: در لم قبل ، منظور از ضرب z در $s(z)$ ، ضرب مولفه‌ای یا ضرب شور(هادامارد) می باشد.

تعریف: فرض کنید $\mu > 0$ ، آنگاه جواب صادق در رابطه (۵) را با $z(\mu)$ نمایش داده و آنرا یک μ−مرکز برای فضای جواب (۴) می نامیم. واضح است μ−مرکز ممکن است یکتا نباشد. □

لم :اگر یکی از جوابهای (۴) در شرط $zs(z) = 0$ صدق کند، آنگاه $y/\kappa, x/\kappa$ جوابهای بهینه مسائل اولیه و دوگان خواهند بود.
اثبات.[۱] □

۲ معرفی الگوریتم نقطه درونی نیوتن

فرض کنید z یک جواب شدنی دستگاه (۴) باشد که $s(z)$ مثبت باشد.می خواهیم Δz را به گونه ای بیابیم که $z^+ := z + \Delta z$ یک μ−مرکز باشد:

$$\Delta s = s^+ - s = M\Delta z, s^+ := s(z^+) = s + M\Delta z$$

Δz و Δs متعامدند. چون $(\Delta z)^T\Delta s = (\Delta z)^T M\Delta z = 0$: برای اینکه z^+ بخواهد یک μ−مرکز باشد،باید داشته باشیم $\mu e = (z + \Delta z)(s + \Delta s) =: zs + z\Delta s + s\Delta z + \Delta z\Delta s$ این معادله بدلیل وجود جمله$\Delta z\Delta s$ غیر خطی است. بنابراین با کمک روش نیوتن می توان این جمله را حذف کرد. لذا برای بدست آوردن Δsو Δz به سیستم زیر می رسیم:

$$\begin{cases} M\Delta z - \Delta s = 0 \\ s\Delta z + z\Delta s = \mu e - zs \end{cases}$$

می توان ماتریس ضرایب این دستگاه را به صورت زیر نوشت:

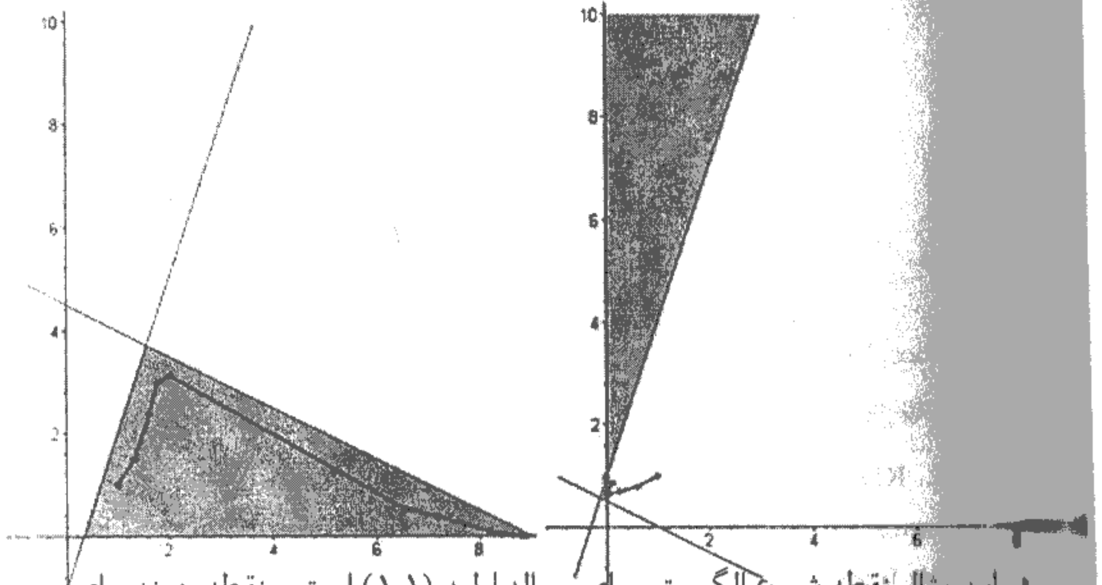
$$\begin{bmatrix} M & -I \\ S & Z \end{bmatrix}$$

که در آن $S = diag(s)$ و $Z = diag(z)$ می باشد.چون M کج − متقارن و $z > 0$ است ، پس سیستم فوق دارای جواب یکتاست.با جایگذاری Δs از معادله اول در معادله دوم ، خواهیم داشت:$(S + ZM)\Delta z = \mu e - zs$. می توان ثابت کرد $S + ZM$ نامنفرد است. بنابراین $\Delta z = (S + ZM)^{-1}(\mu e - zs)$. در این مساله بطور همزمان مسائل اولیه و دوگان به جواب می رسند. چون تصور حرکت این روند کمی مشکل است،در قسمت بعد روند حرکت باارائه شکل برای دو مثال به کمک یک برنامه به زبان *maple* آورده شده است.

۳ مثالهایی از روند حرکت نیوتن

مثال−۱:

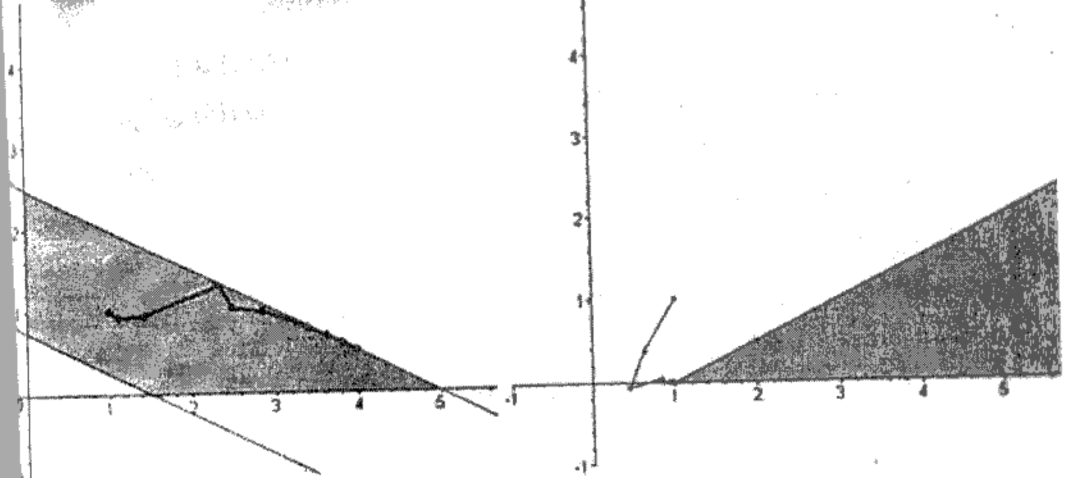
$$\max \quad x_1 + x_2 \quad s.t.\ 3x_1 - x_2 \ge 1,\ \ x_1 + x_2 \le 9,\ \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



در این مثال نقطه شروع الگوریتم برای مساله اولیه (۱,۱) است و نقطه بهینه برای مساله اولیه (۹,۰) می باشد که همگرایی روند کاملاً مشخص است .برای دوگان نیز شروع روند از (۱,۱) بوده و به سمت (۰,۱) همگرا شده است.

مثال −۲:

$$\max \quad x_1 + 2x_2 \quad s.t. x_1 + 2x_2 \ge 3, x_1 + 2x_2 \le 5, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



در این مثال مساله دارای جوابهای بهینه دگرین است . نقطه شروع الگوریتم برای مساله اولیه باز همان نقطه (۱,۱) است و نقطه بهینه برای این مساله کلیه نقاط روی خط $x_۱ + ۲x_۲ = ۵$ می باشد.همانطور که از شکل نیز مشخص است نتایج الگوریتم از این خط فاصله نمی گیرد .برای دوگان نیز شروع روند از (۱,۱) بوده و الگوریتم به سمت (۱,۰) همگرا شده است.

مراجع

[1] C.Roos,T.Terlaky,J.Ph. Vial" *Interior Point Methods for Linear Optimization*", combinatorica, 4:373-395, 2005.

[2] L.G. Khachiyan, " *A Polynomial Algorithm for Linear Programmnig. Soviet Math*", Dokl., 20:191-194, 1979. Babes-Bolyai, Series Informatica, 47(1):15-26, 2002.

[3] M.S. Bazara, J.J. Jarvis and H. Sherali, ", *Linear Programming and Network Flows*", 2nd ed., John willey and sons, New York, 1990.9.

[4] N.K. Karmarkarit ," *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming*", combinatorica, 4:373-395, 1984.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) – رفسنجان

مجموعه های فرکتالی ورابطه آنها با مجموعه های موجکی

محمد جواد خیرده
دانشگاه ولی عصر(عج) – رفسنجان $E-mail$ *kheirdeh@yahoo.com*
عطا الله عسکری همت
دانشگاه ولی عصر(عج) – رفسنجان $E-mail$ *asta_h@yahoo.com*

چکیده

در این مقاله ابتدا به معرفی مجموعه های موجکی می‌پردازیم، سپس نشان می دهیم که در حالت دو بعدی تحت چه شرایطی حاصلضرب دو مجموعه، مجموعه ای موجکی می شود و چند مثال می آوریم که بعضی از آنها کاملا جدیداند. بعد از آن به مجموعه های فرکتالی پرداخته و نشان می دهیم که چگونه از بعضی از مجموعه های موجکی، مجموعه های فرکتالی به دست می آید.

واژه های کلیدی: مجموعه موجکی، مجموعه فرکتالی .

۱ فصل

در این مقاله تبدیل فوریه تابع $f \in L^۲(R)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\zeta t}\, dt.$$

در [۱] و [۲] ثابت شده است که اگر ψ طوری باشد که $\hat{\psi}$ تابع مشخصهٔ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر $W \subset R^n$ باشد، آنگاه تابع ψ یک موجک می باشد اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $\{W + 2k\pi : k \in Z^n\}$ ت.ه یک افراز برای R^n باشد.

(۲) $\{B^j W : j \in Z\}$ ت.ه یک افراز برای R^n باشد.

که $A^T = B$ یک ماتریس توسیعی است یعنی؛ ماتریسی با درایه های صحیح که مقادیر ویژه‌های آن دارای قدر مطلق بزرگتر از یک اند. همچنین $|W| = (2\pi)^2$ و از آنجا که اندازه محمل کمینه $\hat{\psi}$ در این حالت اتفاق می افتد به این موجکها، موجکهای با محمل کمینه در فرکانس [1] یا MSF گویند.

۱.۱ تعریف: زیر مجموعه W از R^n که دارای اندازه متناهی است، یک مجموعه موجکی [2] نامیده می شود اگر تابع ψ که با ضابطه $\hat{\psi} = |W|^{\frac{1}{2}} \chi_W$ تعریف می شود یک موجک باشد. □

برای حالت $n = 1$ مجموعه W که در شرط (۲) صدق کند، یعنی؛ $A = a \in R$، را مجموعهٔ a- اتساع می نامیم.

۲.۱ قضیه: اگر W یک مجموعه موجکی a- اتساع ($a \geq 2$) و $0 \in Q$ یک مجموعه با اندازه 2π باشد به طوری که $\bigcup_{k \in Z} (Q + 2k\pi) = R$ و $W \bigcap Q = 0$ باشد، آنگاه $W \times Q$ یک مجموعه موجکی A- اتساع است که $A^T = B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

۳.۱ مثال : در [۳] ثابت شده است که وقتی $c \in (0, 1)$، مجموعه $W = [4\pi(c-1), 2\pi(c-1)] \bigcup [2\pi c, 4\pi c]$ یک مجموعه موجکی با اتساع دو است. حال با قرار دادن $Q = (2\pi(c-1), 2\pi c)$، شرایط قضیه ۲.۱ برقرار است . پس مجموعه $W \times Q$ یک مجموعه موجکی A- اتساع می باشد که $A^T = B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ است. به ازای $c = \frac{1}{2}$ مجموعه W همان مجموعه موجکی شانون [3] است و مجموعه $W \times Q$ مجموعه موجکی (مثال ۹.۴ در[۴]) است. و به ازای $c = \frac{1}{5}$ مجموعه موجکی کاملاً جدیدی به دست می آید که در شکل های (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب نمودار انتقال ها و A-اتساع ها و تابع موجک متناظر با مجموعه موجکی $W \times Q$ رسم شده است.□

مجموعه $K = \left\{ x \in R^n : x = \sum_{j=1}^{\infty} B^{-j} d_j, d_j \in D \right\}$ یک مجموعه خود متشابه

---

[1] Minimally Supported Ferquency

[2] Wavelet set

[3] SHannon

[4] و D مجموعه کامل ارقام [5] متناظر با ماتریس B است که تعداد اعضای D برابر است با $q = |detB|$ ([۵] قضیه ۵.۵ را ببینید) . در[۴] نشان داده شده که اگر مجموعه Kی بالا متناظر با ماتریس $B = A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و مجموعه کامل ارقام $D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ باشد، آنگاه مجموعه $W = K + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ یک مجموعه موجکی است که در شکل های (٦) و (٧) به ترتیب انتقال ها و اتساع های آن رسم شده است . مرز W یک مجموعهٔ فرکتال [6] است . حال به توصیف مجموعهٔ فرکتال می پردازیم .

۴.۱ تعریف: نگاشت $\varphi : R^n \longrightarrow R^n$ را انقباض گویند، اگر یک عدد مثبت $c < 1$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in R^n$، داشته باشیم $||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq c||x - y||$، همچنین φ را یک تشابه با نسبت $c < 1$ گویند، اگر برای هر $x, y \in R^n$، $||\varphi(x) - \varphi(y)|| = c||x - y||$.□

اگر $\{U_i\}_{i \in N}$ یک δ-پوشش $F \subset R^n$ باشد، آنگاه برای عدد نامنفی s و هر $\delta > 0$ قرار می دهیم:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = inf \ \{ \sum_{i=1}^{\infty} (diam(U_i))^s : \ \text{باشد } F \subset R^n \text{ پوشش } -\delta \text{ یک } \{U_i\}_{i \in N} \ \}$$

که $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ نسبت به δ صعودی و نسبت به s نزولی است . و وقتی $\delta \longrightarrow 0$ اندازه خوش تعریف $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$ به دست می آید که مقادیری در $[0, \infty]$ اختیار می کند و به آن s- بعد هاسدرف [7] F گویند. و

$$\dim_H(F) = inf \{s : \ \mathcal{H}^s(F) = 0\} = sup \{s : \ \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

را بُعد هاسدرف مجموعه F گویند که اگر این بُعد صحیح نباشد به مجموعه F فرکتال گفته می شود. در [٦] نشان داده شده که اگر $t > s$ و $\{U_i\}_{i \in N}$ یک δ-پوشش F باشد ، آنگاه $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. بنابراین

(الف): اگر $\mathcal{H}^s(F) < \infty$، آنگاه برای هر $t > s$، $\mathcal{H}^t(F) = 0$.

(ب): اگر $\mathcal{H}^t(F) > 0$، آنگاه برای هر $t > s$، $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.

در واقع یعنی ؛ برای مجموعه F داده شده یک $s_0 \in [0, \infty]$ منحصربفرد وجود دارد که برای هر $s < s_0$، $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ و برای هر $s > s_0$، $\mathcal{H}^s(F) = 0$، که این s_0 بعد هاسدرف مجموعه F است .

۵.۱ قضیه [٦]: اگر نگاشت های انقباض φ_i با نسبت $c_i < 1$ وقتی $i = 1, ..., m$ در شرط مجموعه های باز صدق کنند، آنگاه یک مجموعه منحصربفرد، فشرده و ناتهی

---

[4] Self-Similar

[5] Complete set of digits

[6] Fractal Set

[7] Dimensional Hausdorff

مانند F وجود دارد که $F = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i(F)$ و بُعد هاسدرف مجموعه F که برابر با s است از رابطه $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$ به دست می آید.□

۶.۱ مثال : مجموعه کانتور [8]، C با نگاشت های انقباض $f_1(x) = \frac{x}{3}$ و $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$ که نسبت آنها $\frac{1}{3}$ است ، یک فرکتال با بُعد $\frac{log 2}{log 3}$ می باشد.□

با توجه به روابط فوق به ارتباط یکی دیگر از مجموعه های موجکی و مجموعه های فرکتالی می پردازیم. فرض کنید $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ و T یک نگاشت از Q به $\overline{2Q \setminus Q}$ با ضابطه $T(x) = x + m_x$ باشد که در آن $m_x \in \Lambda \equiv \{-1, 0, 1\}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$.

اگر تابع $\mathcal{T}$ که مجموعه $E \subset Q$ را به اجتماع

$$\mathcal{T}(E) \equiv \bigcup\{T(E) | T : Q \longrightarrow 2Q \setminus Q \text{ ، یک نگاشت } Z^n \text{ -انتقال ، اندازه پذیر و یک به یک باشد } T \}$$

می نگارد، در نظر بگیریم و تعریف کنیم : $\mathcal{S}(E) \equiv \mathcal{T}(\frac{1}{2}E)$ و $\mathcal{M} \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}^k(Q)$ و قرار دهیم

$$\mathcal{T}(E) = \Big\{(x - \varepsilon_1 sgn(x), y - \varepsilon_2 sgn(y)) : (x, y) \in E, (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}\Big\}$$

در[7] نشان داده شده است که با استفاده از بعضی از این نگاشت ها می توان مجموعه موجکی ساخت، به عنوان مثال با نگاشت $T(x, y) = (x - sgn(x), y - sgn(y))$ یک مجموعه موجکی به دست می آید که در شکل (۸) نمودار آن رسم شده است. حال اگر برای هر نگاشت T قرار دهیم $M = M_T \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{S^k(Q)} \subseteq \overline{2Q \setminus Q}$ که $S(x) = T(\frac{1}{2}x)$، آنگاه برای هر مجموعه $E \subset Q$، شمول های $T(E) \subseteq \mathcal{T}(E)$ و $M_T \subset \mathcal{M}$ برقرار اند و در شکل (۹) یک تقریبی از $\mathcal{M}$ نشان داده شده است . خطوط سفید دندانه دندانه ای $\mathcal{B} \equiv \overline{2Q \setminus Q} \setminus \mathcal{M}$ واقع در شکل (۹) به صورت دوازده مجموعهٔ خود متشابه با بُعد برابر است که برای نمونه با قرار دادن $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \bigcap [\frac{1}{2}, 1]^2 - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - x\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - x\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + x\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

به راحتی می توان نشان داد که φ_1 ، φ_2 و φ_3 نگاشت های انقباض با نسبت $\frac{1}{2}$ اند و بُعد هاسدرف $\mathcal{B}'$ برابر است با $\frac{log 3}{log 2}$. و چون $\mathcal{B}$ به صورت اجتماع دوازده انعکاس $\mathcal{B} \bigcap [\frac{1}{2}, 1]^2$ است ، پس $\dim_H \mathcal{B} = \frac{log 3}{log 2}$ و $\mathcal{B}$ یک فرکتال می باشد.

[8] Contor Set

با کنار هم قرار دادن تعداد متناهی نماد ۰ و ۱ ، یک رشته [9] ساخته می شود. مثلاً $\alpha = 00101$ یک رشته با طول ۵ $= |\alpha|$ است و به رشته ای که طول آن صفر است رشته تهی گفته و با Λ نمایش داده می شود. مجموعه رشته های نامتناهی که با نمادهای $E = \{0, 1\}$ ساخته می شوند را با $E^{(w)}$ نشان داده و مجموعهٔ همه رشته های نامتناهی که با α شروع می شوند را به صورت $[\alpha] = \{\sigma \in E^{(w)} : \alpha \leq \sigma\}$ می نویسیم و به وضوح :

$$[\alpha 0] \cap [\alpha 1] = \phi \ , \ [\alpha] = [\alpha 0] \cup [\alpha 1].$$

اگر برای $0 < r < 1$ و $\sigma, \tau \in E^{(w)}$ وقتی $\sigma = \tau$ قرار دهیم $\rho_r = (\sigma, \tau) = r^k$ که k طول رشته α می باشد که $\sigma = \alpha\sigma'$ و $\tau = \alpha\tau'$ و اولین نماد σ' با اولین نماد τ' مخالف است . در این صورت ρ_r یک متر و مجموعه $E^{(w)}$ تحت متر ρ_r یک فضای متریک کامل می باشد. حال اگر E شامل n نماد باشد و نسبت های متناظر با دستگاه توابع $\{\varphi_e\}_{e \in E}$ را به صورت $\{c_e\}_{e \in E}$ بنویسیم ، که $\varphi : E^{(w)} \longrightarrow E^{(w)}$ و $\varphi_e(\alpha) = (e\alpha)$ آنگاه با توجه به این توابع و متر ρ_r می توان مجموعه های فرکتال به دست آورد.

از آنجا که مسیر های یک گراف مانند یک رشته عمل می کنند، اگر گراف جهت داری با گره های V و لبهٔ های E و توابع $i = E \longrightarrow V$ و $t = E \longrightarrow V$ که برای هر لبه e ، به $i(e)$ گره خروجی و به $t(e)$ گره ورودی e گفته می شود را در نظر بگیریم آنگاه مجموعه همهٔ لبه هایی مانند e که $i(e) = u$ و $t(e) = v$ را با نماد E_{uv} نشان می دهیم . و مجموعهٔ مسیر های متناهی که از گره u شروع و به گره v ختم می شوند را با $E_{uv}^{(*)}$ نمایش داده و $E_u^{(w)}$ را به عنوان همه مسیر های نامتناهی که از گره u شروع می شوند معرفی می کنیم . همچنین S_u را فضای متریک متناظر با $E_u^{(w)}$ همراه با متر مشابه قبل در نظر می گیریم . حال انقباض ها را روی گراف مالدین – ویلیامز [10] یعنی؛ گراف جهت دار (V, E, i, t) با تابع $r : E \longrightarrow (0, \infty)$ که به هر یال یک عدد حقیقي مثبت متناظر می کند ، را به صورت $\varphi_e : S_v \longrightarrow S_u$ با نسبت $r(e)$ که $e \in E_{uv}$ نشان می دهیم . برای یک چنین گرافی و برای یک عدد حقیقي مثبت مانند s اعداد پرون [11] مربوط به هر $v \in V$ را به این شکل تعریف می کنیم که اعدادی مثبت مانند q_v اند که برای هر $u \in V$ داریم؛

$$q_u^s = \sum_{\substack{v \in V \\ e \in E_{uv}}} r(e)^s q_v^s$$

که به s بُعد گراف مالدین – ویلیامز گفته می شود و یک و فقط یک چنین s ی وجود دارد. در[6] ثابت می شود که s گراف مجموعه ای مانند F برابر با بُعد هاسدرف آن است .

[9] String
[10] Mauldin-Williams
[11] Perron numbers

۷.۱ قضیه [۶]: اگر (V,E,i,t,r) یک گراف مالدین − ویلیامز و $\{\varphi_e\}_{e\in V}$ یک دستگاه از توابع انقباض و $\{K_v\}_{v\in V}$ یک لیست از مجموعه های فشرده و ناتهی از R^n باشد و برای $s > 0$ اعداد پرون وجود داشته باشند، آنگاه برای هر $v \in V$، $diam K_v \le s$ و علاوه براین اگر دستگاه توابع $\{\varphi_e\}_{e\in V}$ در شرط مجموعه های باز نیز صدق کند، آنگاه $diam K_v = s$.□

حال با توجه به قضیه فوق و شکل های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) گراف مالدین − ویلیامز برای مرز مجموعه قبل از تعریف ۴.۱ با $V = \{A,B\}$ و $E = \{a,b,c,d\}$ به صورت شکل (۱۳) خواهد بود و ثابت می شود $s \simeq ۱/۵۲$ و اعداد پرون مقادیر $q_A = x^{\frac{1}{s}} = ۱/۷۵$ و $q_B = ۱$ را اختیار می کنند. بنابراین بُعد هاسدرف مجموعه مورد نظر برابر است با $s \simeq ۱/۵۲$ پس یک فرکتال است.

مراجع

[1] E.Hernandez and G.Weiss, A First Course on Wavelets, CRC Press, Boca Raton, FL 1996

[2] X. Dai, D.R.Larson, and D.M.Speegle, Wavelet sets in R^n, J.Fourier Analysis and Application 3 (1997),451-456.

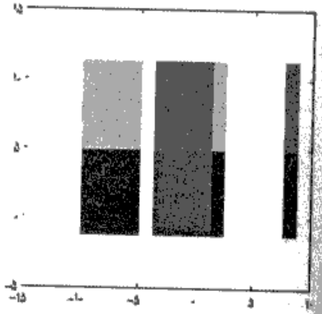
[3] J.Dobrosotskay, About Minimally Supported Frequency Wavelets and Conditions of Existence of Scaling Function. June 2003

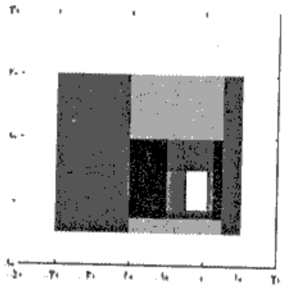
[4] J.P.Gabardo and X.Yu, Construction of Wavelet sets With Cretain Self-Similarity Properties.

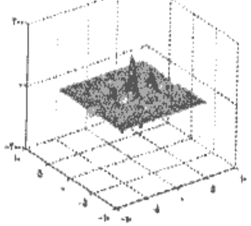
[5] P.Wojtaszczyk. A Mathematical Introduction to Wavelets. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

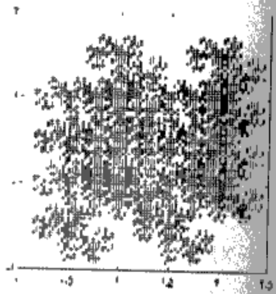
[6] G.A.Edgar. Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer-Verlag, 1990

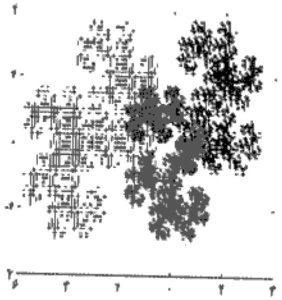
[7] J.J.Benedetto and M.Leon, The Construction of single Wavelets in D-dimensions, J.Geometric Analysis.

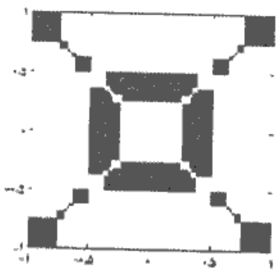

شکل (۳)

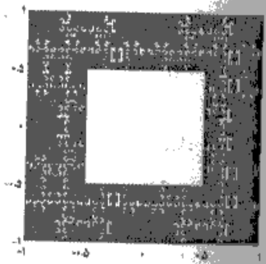

شکل (۴)

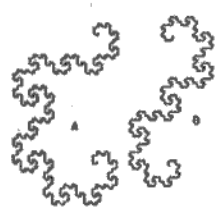

شکل (۵)

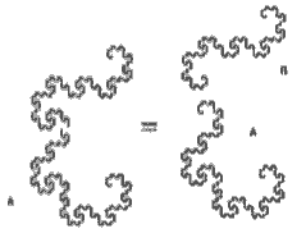

شکل (۶)

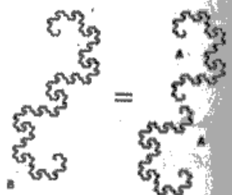

شکل (۷)

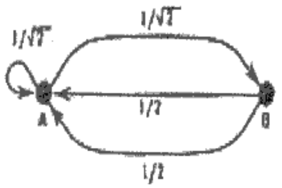

شکل (۸)


شکل (۹)


شکل (۱۰)


شکل (۱۱)


شکل (۱۲)



شکل (۱۳)

۲ دوگان‌های یک قاب

قاب $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ که در شرط۱.۳ صدق می‌کند قاب دوگان $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود. در عین حال ممکن است $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ در شرط۱.۳ صدق کند ولی خود یک قاب نباشد.[۲]

۱.۲ قضیه: فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ قاب‌هایی برای فضای $\mathcal{H}$ باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i.$$

در این صورت برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle g_i.$$

قضیه فوق نشان می‌دهد که اگر $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ قاب دوگان $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد، آنگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ قاب دوگان $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ است.

با توجه به قضیه ۱.۱، $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ قاب دوگان برای $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌باشد و داریم

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle S^{-1}f_i.$$

$\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را قاب دوگان متعارف $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

در قضیه‌های زیر که اثبات آن در [۳] آمده است، تمامی دوگان‌های یک قاب توصیف شده‌اند.

۲.۲ قضیه: فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه متعارف برای $l^2(N)$ باشد. در این‌صورت $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب دوگان برای $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ است اگر و فقط اگر $g_k = U\delta_k$ برای $k=1,2,\dots$ که $U : l^2(N) \to \mathcal{H}$ یک عملگر کراندار و معکوس چپ T^* است.

۳.۲ قضیه: فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب دوگان برای $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ است اگر و فقط اگر دنباله بسل $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$g_i = S^{-1}f_i + h_i - \sum_{j=1}^{\infty}\langle S^{-1}f_i, f_j\rangle h_j.$$

تعریف ۱.۲: یک پایه ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ عبارت است از دنباله $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ که $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ بوده و $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک عملگر کران‌دار، یک‌به‌یک و پوشا باشد.

۴.۲ قضیه: اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه یک و فقط یک پایه ریس $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ برای $\mathcal{H}$ وجود دارد که برای هر $f \in \mathcal{H}$، $f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,g_i\rangle f_i$ و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دومتعامد می‌باشند.

۵.۲ قضیه: اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در فضای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ قابی برای $\mathcal{H}$ است که فقط یک قاب دوگان دارد.

۲) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ است.

برای تشابه بین قابها وپایه‌های ریس توجه به دو مطلب معادل برای آنها جالب است .

۶.۲ قضیه: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است اگر وتنها اگر U یک عملگر کراندار یک به یک و پوشا و پایه متعامد یکه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ برای $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که $Ue_k = f_k$ برای هر $k \in N$.

۷.۲ قضیه: دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است اگر و فقط اگر U یک عملگر کراندار و یک به یک و پایه متعامد یکه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ برای $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که $Ue_k = f_k$ برای هر $k \in N$.

۳ شبه قاب و شبه دوگان

تعریف ۱.۳: اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ تشکیل یک جفت شبه قاب برای $\mathcal{H}$ می‌دهند اگر برای هر f و g در $\mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\langle f,g\rangle = \sum_i \langle f,g_i\rangle\langle g,f_i\rangle. \qquad (۳)$$

به راحتی مشخص می‌شود که هر قاب یک شبه قاب است ولی عکس این برقرار نیست [۴].

تعریف ۲.۳: قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را دقیق نامیم اگر برای هر $j \in N$، دنباله $\{f_i\}_{i\neq j}$ تشکیل یک قاب برای $\mathcal{H}$ ندهد.

در [۲] نشان داده شده است که اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب غیر دقیق باشد آنگاه یک دنباله غیر بسلی $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد که در ۳ صدق می‌کند.

تعریف ۳.۳: اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ باشد آنگاه قاب $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ که در شرط ۳ صدق می‌کند را یک شبه دوگان برای $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب نیز باشد، چنانچه U عملگر تجزیه‌گر برای قاب $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ بوده و $V : D(V) \subseteq l^2 \to \mathcal{H}$ یک عملگر باشد به‌طوری‌که $V(\{c_i\}_{i=1}^{\infty}) = \sum_i c_i g_i$ که در آن دامنه V عبارت است از

$$D(V) = \{c = \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2(N) \ : \ \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i \text{ همگرا در } \mathcal{H} \text{ است}\}$$

قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای مشخص کردن شبه دوگان‌های یک قاب را می‌دهد.

۱.۳ قضیه: اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد و U و V عملگرهای ذکر شده در بالا باشند، آنگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ تشکیل یک شبه قاب می‌دهند اگر $VU = I$. برعکس، اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ قاب‌هایی در $\mathcal{H}$ باشند و $R(U) \subset D(V)$ باشد، آنگاه $VU = I$.

۴ دوگانهاو دوگانهای هم قاب

تعریف ۱.۴ :فرض کنید $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ دوپایه‌متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد بطوریکه $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 \leq \infty$. برای هر $j \in N$ برقرار باشد آنگاه‌دنباله $w_j(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_i, h_j\rangle e_i$ را یک $R-$ دوگان برای $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ نسبیت به $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ نامیده می شود.
چنانچه $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ دو قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آنگاه $\{w_j(f)\}_{j=1}^{\infty}$ را یک دوگان هم قاب برای $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ نسبت به $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ می نامیم .

۱.۴ قضیه: اگر $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ بترتیب یک پایه‌متعامد یکه،یک قاب و یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد بطوریکه برای هر $j \in N$ $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 \leq \infty.$ باشد آنگاه برای هر $i \in N$ $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle w_j(f), h_i\rangle|^2 \leq \infty.$ بوده و $\{S_e f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دوگان هم قاب برای دنباله $\{w_j(f)\}_{j=1}^{\infty}$ نسبت به $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ می باشد.
تعریف ۲.۴ :فرض کنید شرایط تعریف ۱.۴ برقرار باشد و دنباله $\{v_j(f)\}_{j=1}^{\infty}$ را به شکل $v_i(f) = \sum_{j=1}^{\infty} (f_i, h_j) e_i$ معرفی کنیم.چنانچه $v_j(f) = w_j(f)$ برای هر $j \in N$ ، آنگاه دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ را $R-$ انعکاسی می نامیم .

مراجع

[1] Casazza,P.G,The art of frame theory.TaiwaneseJ.of math .4 no.2 (2000),129-201.

[2] Casazza,P.G.,Christensen,O.and Janssen, A.J.E.M.,Classifying Tight weyl-Heisenberg Frames,Contemorary Mathematics volume 247(1999).

[3] Christensen,O.,An Interoduction to Frames and Riesz Bases,(2003),Birkhauser,Boston.

[4] Shidong,L.and Hidemitsu,O.Pseudo-Duals of Frames with Applications, Applied and computational Harmonic Analysis 11,(2001),189-304.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های
آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) —
رفسنجان

روشی جدید برای تسریع الگوریتم $GMRES$ بمنظور حل دستگاههای معادلات خطی بزرگ تُنُک

پرویز سرگلزایی*
استادیار گروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان
Sargolzaei@hamoon.usb.ac.ir
مهدی حمیدی
گروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان
Hamidi@mail.usb.ac.ir

چکیده

در این مقاله برای روش تکراری $GMRES$ یک اجرای جدید ارایه می شود که در آن بجای تبدیلات گیونز از مشتق کمک می‌گیریم. در این اجرا هم تعداد محاسبات و هم مقدار حافظه مورد نیاز کاهش می‌یابد.

واژه های کلیدی: دستگاههای خطی، روش مانده مینیمال تعمیم یافته، مساله کمترین مربعات .

۱ مقدمه

روشهای گوناگونی از جمله روش $GMRES$[2] و روش گرادیان مزدوج [2,4] برای حل تکراری دستگاه معادلات خطی

---
[1] *speaker
[2] Generalized Minimum Residual Method

$$Ax = b, \qquad A \in C^{n\times n} \qquad (۱)$$

زمانی که A نامنفرد باشد استفاده می‌شود. نحوه اجرای روش $GMRES$ برای وقتی که مساله کمترین مربعات با استفاده از تبدیلات گیونز حل می شود مورد بررسی قرار گرفته است [5]. در این مقاله برای حل مساله کمترین مربعات تغییراتی در الگوریتم $GMRES$ ایجاد می‌کنیم.

۲ الگوریتم $GMRES$ بدون استفاده از تبدیلات گیونز

برای حل مساله کمترین مربعات در گام سوم الگوریتم زیر از مشتق استفاده می‌کنیم.

الگوریتم ۱.۲: روش $GMRES$

۱. با انتخاب x_0 مقادیر $r_0 = b - Ax_0$ و $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$ را محاسبه کنید.
۲. برای $j = 1, 2, ..., k$ پایه متعامد یکه v_{j+1} را از الگوریتم آرنولدی [1] بدست آورید.
۳. بدون استفاده از تبدیلات گیونز مساله کمترین مربعات را حل کنید. یعنی z را طوری بیابید که $z_k = min\|e_1 - \overline{H}_k z\|_2$ ($\overline{H}_k$ ماتریس هسنبرگ $(k+1)\times k$ با درایه های h_{ij} حاصل از الگوریتم آرنولدی می‌باشد.)
۴. جواب تقریبی x_k را با استفاده از رابطه $x_k = x_0 + V_k z_k$ (V_k ماتریس $n\times m$ با ستونهای $v_1, ..., v_m$ است) بدست آورید.

با توجه به ماتریس $\overline{H}_k = \begin{pmatrix} w \\ H_k \end{pmatrix}$ که $w = (h_{11}, h_{12}, ..., h_{1k})$ و بردار $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)^T$ داریم:

$$\|e_1 - \overline{H}_k z\|^2 = (e_1 - \overline{H}_k z)^*(e_1 - \overline{H}_k z) = \begin{pmatrix} 1 - wz \\ -H_k z \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 - w_z \\ -H_k z \end{pmatrix}$$
$$= (1 - wz)^*(1 - wz) + (H_k z)^*(H_k z) = 1 - z^*w^* - wz + z^*w^*wz + z^*H_k^*H_k z$$
$$= 1 - (w^*, z) - (z, w^*) + (w^*, z)(z, w^*) + (H_k z, H_k z)$$

۱.۲ قضیه. اگر $h_{k+1,k} \neq 0$ آنگاه $x_k = x_0 + V_k y^{(k)}$، که $y^{(k)} = H_k^{-1}(\beta u)$، $u = H_k^{*^{-1}} w^*$ و $\beta = \frac{\|r_0\|}{1+\|u\|^2}$ و نرم باقیمانده متناظر برابر با $\|r_k\| = \frac{\|r_0\|}{\sqrt{1+\|u\|^2}}$ است. اگر $h_{k+1,k} = 0$ آنگاه جواب دقیق (۱) برابر $x_k = x_0 + V_k y^k$ می‌باشد، که $y^{(k)} = H_k'^{-1}(\frac{\|r_0\|}{\bar{u}_k}e_k)$، $u = H_k'^{*^{-1}} w^*$، $H_k' = H_k + e_k e_k^T$ و $\|r_k\| = \|r_0\| h_{k+1,k}|t_k|$ که $t = H_k z$ است.

ابزار داده شده توسط قضیه ۱.۲ برای $GMRES$ دارای اشکالاتی می‌باشد [3]. برای رفع این عیوب قضیه زیر بیان می‌شود.

۲.۲ قضیه. جواب تقریبی (۱) بصورت $x_k = x_0 + v_k(\|r_0\|\alpha_{k-1}^2 z^{(k)})$ می‌باشد.

با
$$y = (\sin^2\theta_k u_1, ..., \sin^2\theta_k u_{k-1}, \gamma_k^2 u_k)^t, z^{(k)} = H_k^{-1} y$$

$u = H_k^{T^{-1}} w^T$، $w = (h_{11}, h_{12}, ..., h_{1k})$، $\alpha_k = \alpha_{k-1} \sin\theta_k$، $\sin\theta_k = h_{k+1,k}\gamma_k$ و $\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{h_{k+1,k}^2 + (|u_k|\alpha_{k-1})^2}}$ می باشد. همچنین نرم باقیمانده برابر با $\|r_k\| = \|r_0\|\alpha_k$ است $(\alpha_0 = 1)$.

قضیه زیر به مشخصه ایستایی روش $GMRES$ با اجرای جدید می‌پردازد.

۳.۲ قضیه. روش $GMRES$ در تکرار k ام متوقف می شود اگر و فقط اگر مولفه kام u_k از بردار $u = H_k^{*^{-1}} w^*$ برابر صفر باشد.

برای مقایسه اجراها(تبدیلات گیونز و بدون استفاده از این تبدیلات) تعداد اعمال محاسباتی و مقدار حافظه مورد نیاز درگام سوم که حل مساله کمترین مربعات با اندازه k است در نظر گرفته می‌شود. آزمایشهای عددی نشان می‌دهند که مجموع حافظه اشغال شده در حل مساله کمترین مربعات با استفاده از تبدیلات گیونز برابر با $3k + \frac{k(k+1)}{2}$ و مجموع حافظه اشغال شده در روش جدید برابر با $k + \frac{k(k+1)}{2}$ می‌باشد. بنابراین روش جدید برحسب حافظه استفاده شده کارآیی بیشتری دارد. علاوه بر این در اجرای جدید به محاسبات کمتری نیاز است.

مراجع

[1] W. E. Arnoldi, " *The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem* ", Quart. Appl. Math, **9** (1996) 17-29.

[2] O. Axelsson, " *Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations* ", Linear Algebra Appl. **29** (1980) 1-16.

[3] E. H. Ayachour, " *A fast implementation for GMRES method* ", Jornal of computational and App. Math. (2003) 269-283 .

[4] E. H. Ayachour, " *Expanded systems and the ILU preconditioner for solving non-Hermitian linear systems* ", Linear Algebra Appl, **293** (1999) 243-256.

[5] Y. Saad, " *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* ", PWS, Boston, MA, (1996).

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) — رفسنجان

حل سیستم های معادلات خطی با استفاده از روش $D.D.M$ *

پرویز سرگلزایی
دانشگاه سیستان و بلوچستان ، گروه ریاضی ، sargolzaei@ math.usb.ac.ir
جان محمد رستمی قربانی
دانشگاه سیستان و بلوچستان ، دانشکده علوم، j_m_rostami۶۲۶@yahoo.com

چکیده

در این مقاله یک روش جدید برای حل سیستم های معادلات خطی ارائه می کنیم . مرتبه یک سیستم از معادلات خطی را می توان آزادانه با استفاده از تغییرات خطی کاهش داد . نتایج این روش کاملاً دقیق است.این روش به خصوص برای معادلاتی که ماتریس ضرایب آنها یک ماتریس نواری، تنک یا سه قطری باشد بسیار مؤثر است.این روش هم در محاسبات کامپیوتری و هم در محاسبات دستی قابل استفاده می باشد . در پایان این روش را با روش حذفی گوس [1] مقایسه می کنیم.

واژه های کلیدی: سیستم های معادلات خطی، روش کاهش مرتبه.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 17A99.

۱ مقدمه

در مباحث بسیاری از علوم و مهندسی با مسئله زیادی برخورد می کنیم که باید یک سیستم از معادلات جبر خطی را حل کنیم . تعدادی از این سیستم ها ویژه هستند مانند معادلات با

---
* decreasing dimension method
[1] Gaussian elimination

ماتریس های سه قطری ، معادلات با ماتریس های نواری و معادلات باماتریس های تنک.

دو قضیه اساسی :

قضیه(I): ماتریس A، $n \times n$ غیر منفرد است اگر و تنها اگر دارای رتبه n باشد.

قضیه (II): یک سیستم با ماتریس A ، $n \times n$ دارای جواب یکتاست اگر و تنها اگر $det A \neq 0$

صورت کلی یک سیستم خطی n معادله و n مجهول به شکل زیر می‌باشد.

$$A \times X = B \qquad (۱)$$

حال ماتریس A را به قسمت های کوچک افراز می کنیم. سمت راست نیز باید مشابه ماتریس A قسمت بندی شود.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

از سیستم فوق داریم:

$$[A_{11} \quad A_{12}][X] = [B_1] \qquad (۳)$$

و

$$[A_{21} \quad A_{22}][X] = [B_2] \qquad (۴)$$

سیستم همگن متناظر با سیستم (۳) بصورت زیر می باشد.

$$[A_{11} \quad A_{12}][X] = 0 \qquad (۵)$$

این سیستم را می توان با استفاده اعمال سطری، مقدماتی بصورت زیر تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_k + r_{1,k+1}x_{k+1} + r_{1,k+2}x_{k+2} + \ldots + r_{1n}x_n &= 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + \ldots + 0x_k + r_{2,k+1}x_{k+1} + r_{2,k+2}x_{k+2} + \ldots + r_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 1x_k + r_{k,k+1}x_{k+1} + r_{k,k+2}x_{k+2} + \ldots + r_{kn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (۶)$$

که در آن x_1 و x_2 و ... و x_k متغیر های اصلی هستند و می توان آنها را بصورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} x_1 &= -r_{1,k+1}x_{k+1} - r_{1,k+2}x_{k+2} - \ldots - r_{1n}x_n \\ x_2 &= -r_{2,k+1}x_{k+1} - r_{2,k+1}x_{k+2} - \ldots - r_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ x_k &= -r_{k,k+1}x_{k+1} - r_{k,k+2}x_{k+2} - \ldots - r_{k,n}x_n \end{aligned} \qquad (۷)$$

بردارهای $[R_1]$ و $[R_2]$ و...و$[R_{n-k}]$ رابصورت زیر در نظر می گیریم:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} -r_{1,k+1} \\ -r_{2,k+2} \\ \vdots \\ -r_{k,k+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [R_2] = \begin{bmatrix} -r_{1,k+2} \\ -r_{2,k+2} \\ \vdots \\ -r_{k,k+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, [R_{n-k}] = \begin{bmatrix} -r_{1n} \\ -r_{2n} \\ \vdots \\ -r_{kn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

سپس آنها به فرم یک ماتریس به صورت زیر می نو یسیم.

$$[R] = [\ R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_n\ ] \qquad (۸)$$

بردار های فوق تشکیل یک پایه برای پاسخ های سیستم (۵) می دهند . پس همه پاسخ های این سیستم را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$[x'] = \alpha_1[R_1] + \alpha_2[R_2] + \ldots + \alpha_{n-k}[R_{n-k}] = [R][\alpha] \qquad (۹)$$

اگر $[R_0]$ یک پاسخ ویژه از سیستم (۵) باشد، آنگاه همه پاسخ های این سیستم بصورت زیرخواهد بود .

$$[X] = [R_0] + [R][\alpha] \qquad (۱۰)$$

معادله(۱۰) را در سیستم (۴) جایگذاری می کنیم که داریم :

$$[A_{21} \quad A_{22}]([R_0] + [R][\alpha]) = [B_2] \qquad (۱۱)$$

در نتیجه داریم:

$$[A_{21} \quad A_{22}][R][\alpha] = [B_2] - [A_{21} \quad A_{22}][R_0] \qquad (۱۲)$$

حال قرار می دهیم:

$$[A^*]_{n-k,n-k} = [A_{21} \quad A_{22}][R] \qquad (۱۳)$$

و

$$[B^*]_{n-k,1} = [B_2] - [A_{21} \quad A_{22}][R_0] \qquad (۱۴)$$

از روابط (۱۲) و (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$[A^*][\alpha] = [B^*] \qquad (۱۵)$$

حال اگر $[B^*] = 0$، سیستم (۱۶) یک جواب ویژه دارد. آنگاه بردار $[R_\circ]$ یک جواب یکتا برای سیستم (۱) خواهد بود. اما معمولا فرض می کنیم که $[B^*] \neq 0$ بنابراین سیستم (۱۶) یک جواب غیر صفر دارد. بعد از حل سیستم (۱۶) ما $[\alpha]$ را بدست می آوریم. آنگاه جواب منحصر بفرد سیستم (۱) بصورت زیر خواهد بود:

$$[X] = [R_\circ] + [R][\alpha] \qquad (16)$$

اگر یک سیستم معمولی از مرتبه n را از روش حذفی گوس و از روش $D.D.M$ حل کنیم تعداد اعمال محاسباتی در دو روش تقریباً یکسان خواهد بود.
جدول (۱) را ببینید.

جمع و ضرب	ضرب و تقسیم	روش
$\frac{n}{48}(16n^2 + 24n - 40)$	$\frac{n}{48}(16n^2 + 48n - 17)$	حذفی گوس
$\frac{n}{48}(16n^2 + 19n - 18)$	$\frac{n}{48}(16n^2 + 78n + 44)$	$D.D.M$

اما اگر سیستم مورد نظر یک سیستم ویژه(سه قطری، نواری، تنک) باشد تعداد اعمال محاسباتی در روش $D.D.M$ بسیار کمتر خواهد بود.

مراجع

[1] "آنالیز عددی (۲) دکتر علی اصغر کرایه چیان "

[2] A. Mary tropper, *"Linear Algebra"*

[3] Hailong Wang *,Jianjing Jian , *"Solution of the system of linear algebraic equations by decreasing dimension"*, Tsinghum Univ.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های
آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) —
رفسنجان

تکنیکهای جبرخطی در تحلیل همگرایی فرمهای مرحله زمانی

پرویز سرگلزایی — علیرضا سهیلی
طاهره جباری
دانشگاه سیستان و بلوچستان
tahereh_jabbari@yahoo.com

۲۵ آذر ۸۵

چکیده

سیستم های معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) که از گسسته سازی مکانی یک معادله دیفرانسیل جزیی (PDE) وابسته به زمان حاصل می شوند، ممکن است بی نهایت بزرگ باشند. به همین دلیل برای حل این معادلات استفاده از روشهای خاصی که از ساختار ناشی از گسسته سازی مکانی بهره می برند، اهمیت پیدا می کند. در این مقاله روشی معرفی می شود که از ترکیب اصل چند شبکه با تکنیک مرحله زمانی حاصل شده و برای دستیابی به منظور فوق بسیار مؤثر است. سپس تحلیلی تئوریک مبتنی بر تکنیکهای جبر خطی برای همگرایی روش معرفی شده ارائه می دهیم. عملکرد روش با استفاده از آزمایشات عددی نیز ارزیابی خواهد شد.

واژه های کلیدی: روشهای چند شبکه ، مرحله زمانی ، شعاع طیفی.
رده بندی موضوعی 65L06, 65M55.

۱ مقدمه

فرمهای گسسته سازی زمانی نظیر رانگ – کوتای ضمنی و روشهای مقدار مرزی برای ODE های سخت خواص جالبی دارند. اما سیستم های حاصل از این معادلات ممکن است خیلی بزرگ و برای حل پرهزینه باشند. در ODE های معمولی، تکنیکهای جبرخطی زیادی پایه ریزی شده که از ساختار ناشی از اعمال فرمول گسسته سازی بر معادله بهره می برند مانند روشهای رانگ – کوتای تکی و قطری. اما برای ODE هایی که از گسسته سازی مکانی یک PDE وابسته به زمان حاصل شده اند، این تکنیکها خیلی مؤثر نیستند و لازم است از روشهایی استفاده شود که همزمان از ساختار ناشی از گسسته سازی مکانی نیز بهره ببرند. ما در اینجا به بررسی و رفع این مشکل می پردازیم.
در بخش اول چند نمونه از فرمهای گسسته سازی مرتبه بالا را شرح می دهیم و در بخش بعد روشهای چند شبکه را معرفی کرده و توضیح می دهیم که چطور این روشها می توانند برای سیستمهای حاصل از فرمهای مرحله زمانی به کار روند. نتایج تئوری اصلی در بخش سوم ارائه می شود که همگرایی روش معرفی شده با استفاده از تکنیکهای جبرخطی تحلیل می شود و در بخش آخر نتایج عددی را مشاهده خواهید کرد.

۲ روشهای مقدار مرزی

یک روش مقدار مرزی (BVM) k – گامی برای هر $i = k_1, ..., n - K_2$ یک معادله به فرم زیر دارد :

$$\sum_{j=-k_1}^{k_2} \alpha_{k_1+j} y_{i+j} = \Delta t \sum_{j=-k_1}^{k_2} \beta_{k_1+j} f(t_{i+j}, y_{i+j})$$

با $k_1 - 1$ شرط اولیه و k_2 شرط نهایی[1] . این n معادله را همراه با هم می توان به صورت زیر نوشت:

$$Ay = \Delta t B f(t,y) + g_0$$

که g_0 شرایط اولیه را در بر می گیرد.

۳ روشهای تکراری برای فرمهای مرحله زمانی

معادله مورد بحث در این مقاله PDE سهموی زیر است :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pounds u + f \qquad (1)$$

که $\pounds$ یک عملگر بیضوی است. استفاده از گسسته سازی زمانی BVM در PDE فوق یک روش مرحله زمانی را نتیجه می دهد. معادله حاصل با استفاده از تفاضلات متناهی در بعد مکان گسسته می شود. حال عملگر بیضوی گسسته شده را با استفاده از $L = L^+ + L^-$ تفکیک می کنیم، ماتریس L^+ به گونه ای انتخاب می شود که این سیستم به آسانی حل شود (روش ژاکوبی یا گوس – سایدل). روش تکراری حاصل می تواند به عنوان هموارکننده در یک روش چند شبکه استفاده شود.
با استفاده از گسسته سازی زمانی BVM و مفهوم ضرب کرونیکر ماتریسی "$\otimes$"، روش تکراری حاصل به شکل زیر است :

$$(A \otimes I_m)u^{(\nu)} + (a_0 \otimes I_m)u_0^{(\nu)} =$$
$$\Delta t(B \otimes L^+)u^{(\nu)} + \Delta t(B \otimes L^-)u^{(\nu-1)} + \Delta t(B \otimes I_m)f +$$
$$\Delta t(b_0 \otimes (L^+ u_0^{(\nu)})) + \Delta t(b_0 \otimes (L^- u_0^{(\nu-1)})) + \Delta t(b_0 \otimes f_0)$$

۴ تحلیل همگرایی

۱.۴ روشهای تک شبکه

در فرمهای مرحله زمانی ما از فاکتور همگرایی مجانبی که همان شعاع طیفی عملگر تکرار است به عنوان مقیاسی برای همگرایی استفاده می کنیم. از آنجا که در این روش تکرار ها بردار هستند و عملگر تکرار ماتریس است، فاکتور همگرایی را می توان تنها با استفاده از شگردهای جبرخطی محاسبه نمود.

۱.۴ تعریف. مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A را طیف A نامیده و با $\sigma(A)$ نشان می دهیم.
برای روشی که در بخش قبل به دست آوردیم، خطا را از رابطه $e_i^{(\nu)} = u_i^{(\nu)} - u_i$ محاسبه می کنیم:

$$(A \otimes I_m)e_i^{(\nu)} = \Delta t(B \otimes L^+)e_i^{\nu} + \Delta t(B \otimes L^-)e_i^{\nu-1}$$

اگر عملگر تکرار متناظر را $\kappa_{\Delta t}$ بنامیم و فرض کنیم B^{-1} موجود است و $\frac{1}{\Delta t}\sigma(B^{-1}A) \cap \sigma(L^+) = \emptyset$، شعاع طیفی عملگر تکرار به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho(\kappa_{\Delta t}) = \rho((\tfrac{1}{\Delta t}B^{-1}A \otimes I_m - I_s \otimes L^+)^{-1}(I_s \otimes L^-))$$

با معرفی $K(z) = (zI_m - L^+)^{-1}L^-$ داریم:

$$\rho(\kappa_\Delta t) = \rho(K(\frac{1}{\Delta t}B^{-1}A)) \qquad (2)$$

که این قضیه زیر را نتیجه می دهد:

۲.۴ قضیه. فرض کنید $\kappa_{\Delta t}$ عملگر تکرار روش تکراری باشد که با استفاده از گسسته سازی زمانی BVM ساختیم و همچنین فرض کنید $\sum = \sigma(B^{-1}A)$. اگر $\sigma(L^{+}) \cap \frac{1}{\Delta t}\sum$، آنگاه

$$\rho(\kappa_{\Delta} t) = \max_{z \in \frac{1}{\Delta t}\sum} \rho(K(z)) \tag{۳}$$

۲.۴ روشهای چند شبکه

معادله

$$zu = Lu + f$$

تبدیل لاپلاس سیستم ODE های حاصل از گسسته سازی PDE (۱) است. ابتدا معادل عملگر $K(z)$ را با بردن معادلهٔ فوق در چارچوب روشهای چندشبکه به دست آورده و $N(z)$ می نامیم. اکنون با استفاده از روش تکراری ساخته شده به عنوان هموارکننده در روش چندشبکه، عملگر تکرار به صورت زیر خواهد بود:

$$M_{\Delta t} = N(\frac{1}{\Delta t} B^{-1} A) \tag{۴}$$

با شرط $\emptyset = [(\sigma(L^{+})) \cup \sigma(L^{-})] \cap \frac{1}{\Delta t}\sum$.
درانتها به کمک نرم او ارفطلب نشان می دهیم که نتایجی که به طور جداگانه از تحلیل تئوری و آزمایشات عددی به دست می آوریم بسیار مشابه و نزدیک به هم است.

مراجع

[1] L. Brugnano AND D.Trigiant, *"solving differential problems by multistep initial and boundary value methods "*, Gordon and Breach Science Publishers, 1998.

[2] D. Womble, *"A time stepping algoritm for parallel computers"*, SIAM J. sci. stat. **11**, (1990) pp.824-837 .

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) — رفسنجان

مقادیر ویژه ماتریسهای سه قطری خاص

مجید عرفانیان
m_erfaniyan@yahoo.com
علی معدن‌کن
amadankan@mail.usb.ac.ir
دانشگاه زابل—دانشکده علوم پایه—گروه ریاضی

چکیده

دربسیاری از مدل سازیهای ریاضی برای حل مسائل، مساله به حل یک دستگاه تبدیل می‌شود که ماتریس سه قطری می‌باشد. در این مقاله ما سعی بر آن داریم تا به بررسی مقادیر ویژه و متناظر با آن بردارهای ویژه ماتریسهای سه قطری به خصوص در فضای مختلط بپردازیم.

واژه های کلیدی: ماتریس‌های سه قطری، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.

۱ مقدمه

مدلهای ریاضی بسیاری وجود دارند که شامل ماتریسهای سه قطری زیر می‌باشند.

$$A_n = \begin{bmatrix} -\alpha+b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -\beta+b \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{۱}$$

که در حالت خاص، اگر $a = c = ۱$ و $b = -۲$ و $\alpha = \beta = ۰$ باشند مقادیر ویژه ماتریس A [با توجه به ۲و۳] به صورت زیسر بدست می آید

$$\lambda_k(A_n) = -۲ + ۲\cos\frac{k\pi}{n+۱} \qquad k = ۱, ۲, ..., n \tag{۲}$$

۲ مساله مقدار ویژه

مساله مقدار ویژه $A_n u = \lambda u$ را که a و b و c و α و β اعدادی در فضای مختلط C باشند، را در نظر می گیریم.

فرض کنید λ مقادیر ویژه (که ممکن است مختلط هم باشد) و $(u_۱, u_۲, ..., u_n)^T$ بردار ویژه متناظر آن باشد که ممکن است اعداد $u_۱, u_۲, ..., u_n$ را به ترتیب اولین، دومین، ... و nامین جمله از دنباله مختلط $u = \{u_i\}_{i=۰}^{\infty}$ بدست می آوریم.

۱.۲ لم. $z = x + iy$ که $z \in \mathbf{C}$ و $x, y \in R$ را در نظر بگیرید. آنگاه
۱) $\sin z = ۰$ اگر و فقط اگر $\forall k \in Z : z = x = k\pi$.
۲) $\cos z = \pm ۱$ اگر و فقط اگر $\forall j \in Z : z = x = j\pi$.

۳ ماتریسهای سه قطری خاص

حال می‌توانیم که نتایج بدست آمده در بخش قبل را برای پیدا کردن مقادیر ویژهٔ ماتریسهای سه قطری مختلف از فرم ۱ بدست آوریم. حال فرض کنیم $ac \neq ۰$ و $\rho = \sqrt{\frac{a}{c}}$ قرار می‌دهیم.

۱.۳ لم. ماتریس

$$B_n = \begin{bmatrix} -\beta + b & c & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ \\ a & b & c & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & b & c & \cdots & ۰ & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a & -\alpha + b \end{bmatrix}_{n \times n} \tag{۳}$$

که به وسیله جا به جا کردن اعداد α و β از ماتریس A_n بدست آمده باشد را در نظر بگیرید. آنگاه مقادیر ویژه B_n همان مقادیر ویژه A_n و مطابق با آن بردارهای ویژه

$v^{(k)} = \left(v_۱^{(k)}, v_۲^{(k)}, ..., v_n^{(k)}\right)$، $k = ۱, ۲, ..., n$ به صورت زیر داده شده‌اند.

$$v_j^{(k)} = \rho^{۲j} u_{n-j+۱} \qquad k = ۱, ۲, ..., n \tag{۴}$$

که $u^{(k)} = \left(u_۱^{(k)}, u_۲^{(k)}, ..., u_n^{(k)}\right)$، $k = ۱, ۲, ..., n$ بردارهای ویژه A_n هستند.

۲.۳ قضیه. اگر داشته باشیم $\alpha = ۰$ و $\beta = \sqrt{ac}$ آنگاه مقادیر ویژه $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_n$ ماتریس A_n به طریق زیر بدست می آید.

$$\lambda_k = b + ۲\sqrt{ac}\cos\frac{۲k\pi}{۲n+۱} \qquad k = ۱, ۲, ..., n \tag{۵}$$

مراجع

[1] S. S. Cheng, *"Partial Difference Equations"*, Taylor and Francis, London and New York, 2003.

[2] S. S. Cheng, M.Gil' and C. J. Tian *"Synchronization in a discrete circular network"*, Proceedings of the 6-th International Conference on Difference Equations, in press.

[3] R. T. Grogory and D. Karney, *A collection of matrices for testing computational algorithm*, Wiley-Interscience, 1969.

[4] J. F. Elliot, *The characteristic roots of certian real symmetric matrices,* Mater thesis, univ. of Tennessee, 1953.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربردهای
آن و کارگاه موجک‌ها
۱۶ تا ۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) —
رفسنجان.

برخی خواص توابع ماتریسی تعمیم‌یافته

نصرت‌اللّه شجره‌پورصلواتی
بخش ریاضی، دانشکده ریاضیات و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران، ۷۶۱۶۹—۱۴۱۱۱.
e-mail: salavati@mail.uk.ac.ir

چکیده

فرض کنید G، گروه جایگشتی روی n حرف و F، میدانی دلخواه باشد. هرگاه $c : G \longrightarrow F$ یک تابع باشد، تابع ماتریسی تعمیم‌یافته تأمین شده توسط G و c با نماد d_c^G معرفی می‌شود. در حالت خاص d_c^G، تابع دترمینان معمولی روی ماتریسهای n در n می‌باشد. در این مقاله با ارائه چند مثال، نشان خواهیم داد که این توابع، خواص مشابه دترمینان را دارا نیستند و خواصی را برای توابع ماتریسی وابسته به حاصلضرب مستقیم گروه‌ها و خارج‌قسمت آن‌ها می‌یابیم.

واژه های کلیدی: تابع ماتریسی تعمیم‌یافته.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 15A69.

۱ مقدمه

برای عدد صحیح و مثبت n، فرض کنید G زیرگروهی از گروه متقارن روی n حرف یعنی S_n باشد. برای میدان دلخواه F و ماتریس‌های $X = (x_{ij})_{n\times n}$ روی میدان F یعنی $M_n(F)$ و تابع $c : G \longrightarrow F$، تابع ماتریسی تعمیم‌یافته تأمین شده توسط G و c بر طبق

مرجع [?] به‌صورت $d_c^G : M_n(F) \longrightarrow F$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$d_c^G(X) = \sum_{\sigma\in G} c(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}.$$

در حالات خاص، اگر $F = \mathcal{C}$ میدان اعداد مختلط، $G = S_n$ و $c = \epsilon$ سرشت متناوب روی S_n، یعنی برای جایگشت‌های زوج مقدار ۱ و برای جایگشت‌های فرد مقدار ۱ − باشد، آن‌گاه $d_\epsilon^{S_n} = \det$. اگر $c = 1_{S_n}$ سرشت اصلی روی S_n، یعنی برای تمام جایگشت‌های مقدار ۱ باشد، آن‌گاه $d_{1_{S_n}}^{S_n} = \mathrm{per}$.

۱.۱ تعریف. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $X = (x_{ij})_{n\times n}$، تأمین شده توسط d_c^G را چندجمله‌ای $d_c^G(X - \lambda I)$ تعریف می‌شود. □

خواص زیادی برای det برقرارند که برای d_c^G برقرار نیست.

۲.۱ مثال. اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ و ماتریس B معکوس‌پذیر باشد. آن‌گاه ضرورتاً تساوی $d_c^G(A) = d_c^G(BAB^{-1})$ برقرار نیست. مرجع [?] را ملاحظه کنید.

۳.۱ مثال. فرض کنید $G = \{(1), (1\ 2)\}$ زیرگروه دو عضوی از S_3 و $c = \epsilon$ سرشت متناوب روی G باشد. اگر $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ آن‌گاه $d_c^G(X - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$. امّا به راحتی می‌توان محاسبه کرد که: $-X^3 + 2X^2 - X \neq 0$ یعنی ماتریس X درچندجمله‌ای مشخصه تأمین شده توسط d_c^G صدق نمی‌کند.

۴.۱ مثال. در بین خانواده‌ی تمام توابع ماتریسی تعمیم‌یافته، فقط برای تابع دترمینان قضیه کیلی—همیلتن برقرار است. مرجع [?] را ملاحظه کنید.

۲ قضایای اصلی

فرض کنید $n_0 = 0$ و برای عدد صحیح و مثبت k، اعداد صحیح و مثبت $n_1, n_2, \ldots, n_k$ طوری باشند که $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. اکنون برای $i = 1, 2, \ldots, k$، فرض کنید G_i گروه جایگشتی روی مجموعه‌ی $\{n_0 + n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_0 + n_1 + \cdots + n_i\}$ باشند. فرض کنید $c_i : G_i \longrightarrow F$ توابعی روی G_i باشند. تابع $c : G_1 \times \cdots \times G_k \longrightarrow F$ با ضابطه $c(g_1, \ldots, g_k) = c_1(g_1) \cdots c_k(g_k)$ را روی حاصلضرب مستقیم $G_1 \times \cdots \times G_k$ تعریف می‌کنیم. برای ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n\times n}$ و $l = 1, 2, \ldots, k$ زیرماتریس‌های مربعی $A_l = (a_{l_i l_j})_{n_l\times n_l}$ که $n_0 + n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \le l_i,\ l_j \le n_0 + n_1 + \cdots + n_i$.

۱.۲ قضیه. تحت شرایط بالا

$$d^G_c(A) = d^{G_1}_{c_1}(A_1)d^{G_2}_{c_2}(A_2)\cdots d^{G_k}_{c_k}(A_k)$$

اثبات. $\square$

۲.۲ نتیجه. تحت شرایط بالا، اگر برای $i = 1,2,\ldots,k$، $c_i = \chi_i$ سرشت گروه G_i باشند. آن‌گاه

$$d^{G_1\times G_2\times\cdots\times G_k}_{\chi_1\chi_2\cdots\chi_k}(A) = d^{G_1}_{\chi_1}(A_1)d^{G_2}_{\chi_2}(A_2)\cdots d^{G_k}_{\chi_k}(A_k)$$

اثبات. $\square$

۳.۲ نتیجه. تحت شرایط بالا، اگر برای $i = 1,2,\ldots,k$، $c_i = \epsilon_i$ سرشت متناوب گروه $G_i = S_{n_i}$ باشند. آن‌گاه

$$d^{S_{n_1}\times S_{n_2}\times\cdots\times S_{n_k}}_{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_k}(A) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_k)$$

اثبات. $\square$

۴.۲ قضیه. فرض کنید $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ماتریس مربعی روی اعداد مختلط C و $n_0 = 0$ و برای $l = 1,2,\ldots,k$، n_l اعداد صحیح و مثبت و زیرماتریس‌های مربعی $A_l = (a_{l_il_j})_{n_l\times n_l}$ که $n_0+n_1+\cdots+n_{i-1}+1 \le l_i,\ l_j \le n_0+n_1+\cdots+n_i$ باشند. اگر $\hat{\chi}$ سرشت تحویل‌ناپذیر $\hat{G}_i$ و $\hat{A}_i$ ماتریس قطری

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & 0 \\ & A_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & A_{i-1} & & & & \\ & & & & A_{i+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & A_{k-1} & \\ 0 & & & & & & & A_k \end{pmatrix}_{(n-n_i)\times(n-n_i)}$$

آن‌گاه $d^G_\chi(A) = d^{\hat{G}_i}_{\hat{\chi}_i}(\hat{A}_i)\cdot d^{G_i}_{1_{G_i}}(A_i)$.

اثبات. $\square$

مراجع

[1] MR. Darafsheh, K. Mallahi, MR. Pournaki, *"A Note on Cayley-Hamilton Theorem for Generalized Matrix Function"*, Pure Math. Appl. **11** (2000) 553-557.

[2] R. Merris, *"Multilinear Algebra"*, Gordon and Breach Science Publisher, 1997.

[3] J. Turner, *"Generalized Matrix Functions and the Graph Isomorphism Problem"*, SIAM J. Appl. Math. **16** (1968) 520-526.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱٦ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) — رفسنجان

حل دستگاهای خطی اسپارس با استفاده از تجزیه lu با تظریف تکراری

علیرضاسهیلی
دانشگاه سیستان وبلوچستان —گروه ریاضی — *soheili@math.usb.ac.ir*
مهدیه قربانی‌هرمزد آبادی
دانشگاه آزاداسلامی واحدزاهدان—گروه ریاضی
رضافروتن
دانشگاه آزاداسلامی واحدزاهدان—گروه ریاضی— *forutanre@yahoo.com*

چکیده

برای حل $AX = b$ باماتریس ضرایب اسپارس بزرگ، تجزیه LU تظریف تکراری باتجزیه LU روش مستقیم مقایسه می شود. روش $LUIR$ درکاهش زمان وحافظه موردنیازموثراست.توانهایی ازماتریس بولی ارائه می شود درتلاش برای دستیابی چنین کاهشی وکوشش دراسپارس کردن ماتریس A نتیجه‌می‌گیریم که $LUIR$ برای تأثیرگذاری بهتراستفاده شود.

واژه های کلیدی: دستگاه معادلات خطی اسپارس، تجزیه LU باتظریف تکراری توانهای ماتریس بولی.

رده بندی موضوعی: MSC : ٦٥F١٠;٦٥F٥٠

۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی زیر رادرنظربگیرید:

$$AX = b \qquad (۱)$$

که A ماتریسی نامنفرد، بزرگ ، اسپارس ونامتقارن ازمرتبه $n \times n$ وb برداری ستونی معلوم ازمرتبه n می‌باشد.ماتریس اسپارس ماتریسی مربعی است که دارای مؤلفه های صفرزیادی می باشد.حل دستگاه خطی (۱)می تواند ازطریق‌الگوریتم های متفاوتی صورت گیرد.یکی ازروشهایافتن معکوس A وضرب آن درطرفین است‌که ازنظرمحاسباتی مقرون به صرفه‌نیست.روش دیگرحدس جواب وتصحیح آن بطورتکراری است. تااینکه خطابه اندازه‌کافی کوچک شود. روش موردنظرما یک تظریف تکراری براساس تجزیه LU است.
دوروش تجزیه LU باتظریف تکراری ($LUIR$) وتجزیه LU باجواب مستقیم ($LUDS$) که بدون تظریف تکراری است، مقایسه می شوند.بااستفاده ازنتایج عددی تحقیق می کنیم که استفاده ازتکنیکهای ماتریس اسپارس با$LUIR$ می تواندباعث کاهش زمان محاسباتی وحافظه کامپیوتری موردنیازشود.

۲ تجزیه LU باتظریف تکراری

اگرروش تجزیه LU اسپارس برای حل دستگاه (۱)بکاررود، درپایان تجزیه LU معمولاًیک تجزیه LU تقریبی ازماتریس A بدست می آیدتااینکه ماتریس پایین مثلثی L وماتریس بالامثلثی U رابیابیم.
فرض کنید:

$$A = \tilde{L}\tilde{U} + E \qquad (۲)$$

که بااستفاده ازاستراتژی‌توانهای ماتریس بولی(PBS) ،تعیین می گردد. ماتریس E دررابطه (۲)ماتریس خطاست.جواب تقریبی دستگاه توسطرابطه زیرمحاسبه می‌گردد:

$$\tilde{L}\tilde{U}x^{(0)} = b \qquad (۳)$$

ازرابطه (۲)برای تجزیه واز(۳)برای یافتن جواب استفاده می‌کنیم. $x^{(0)}$ تقریب اولیه‌جواب است.مرحله تجزیه (۲)، بااستفاده ازتجزیه LU، تاسطح m هنگامیکه $B^{(2^m)} = B^{(2^{m+1})}$ انجام می شود. واضح است که مرحله تجزیه نسبت به مرحله جواب بسیارپرهزینه است. (Bماتریس بولی است.)بنابراین استفاده ازمقادیر کوچک mبرای کنترل اسپارس بودن می‌تواند مفید باشدباانجام این کارمعمولاًزمان محاسبه موردنیازبرای تعیین $x^{(0)}$ وحافظه

کامپیوتری لازم برای ذخیره مؤلفه های ناصفر L و U کاهش می یابد. هرچند، تقریب $x^{(0)}$ باروش ذکرشده ممکن است ازدقت پایینی برخوردارشود.سعی می کنیم بااستفاده از تظریف تکراری دقت مطلوب رابیابیم.این بدین معنی است که محاسبات بایستی بعدازمرحله جواب (۳)توسط روابطزیر ادامه یابد:

$$for \;\; i = 0, 1, 2, \dots$$

$$r^{(i)} = b - Ax^{(i)} \tag{۴}$$

$$\tilde{L}\tilde{U}d^{(i)} = r^{(i)} \tag{۵}$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + d^{(i)} \tag{۶}$$

(۷)

هرگاه دقت مطلوب حاصل نشودیافرآیندهمگرانباشد، معیارهای متفاوتی برای توقف فرآیندتکراری (۴)–(۶)بکارمی روند. اگر $x^{(i)}$ به عنوان جواب دستگاه (۱)موردقبول باشدگفته می شودکه دستگاهبطورمستقیم‌حل شده‌است.به عبارتی $x^{(i)}$ جواب مستقیم تجزیه LU است.جوابی که بااستفاده از(۴)–(۶) بدست می آیدجواب تظریف تکراری تجزیه $LU(LUIR)$ نامیده می شود.

اگرتجزیه معادله (۲)بااستفاده ازPBS باm انجام شودمعمولاًدقت کمی دارداماًاسپارس بودن A راحفظ می کند. هرگاه فرآیندتکراری (۴)–(۶)اجراشودآنگاه یکی ازحالتهای زیرمی‌تواندبرقرارباشد:

۱)تجزیه LU توسط(۲)ماننـدجواب $x^{(0)}$ که ازمعادله (۳)بدست می آیدچندان دقیق نیست.

۲)گاهی اوقات حافظه کامپیوتری موردنیاززیاداست ، زیرایک کپی ازدرایه های ناصفرماتریس A که در(۴)بکارمی رود درمقام مقایسه باتمام حافظه اضافی وقتی که A چگال باشدنیاز می باشد.

۳)اغلب کاهش زمان تجزیه چنان زیاد است که‌زمان محاسبه کلی ممکن است بطورقابل توجهی کاهش یابد.

۴)هزینه محاسباتی تکرار،درمقایسه باهزینه محاسباتی تجزیه کم است ولذاکاهش زمان محاسباتی کلی حاصل می شود حتی اگرسرعت همگرایی کندباشد.این وضعیت وقتی ماتریس A بدحالت باشداتفاق می افتد.

بطورخلاصه بایستی گفت هدف اصلی روش $LUIR$ اولاًکاهش حافظه کامپیوتری موردنیازبرای ذخیره فاکتورهای L وU باتعیین انباشتگی تاسطح $l < m$ وثانیاًافزایش دقت بردارجواب دستگاه معادلات خطی (۱)می باشد.

مراجع

[1] F. g. Gustavson, *"Some basic techniques for solving spars systems of linear equations"*,in: D. J. Rose, R. A. Willoughby(Eds)sparse matrix and their applications, plenum press, New York, 1972,pp. 41-52

[2] N. J. Higham, *"Iterative refinement for linear systems "* ,and LA-PACK,IMAj. Numer. Anal.**17**(1997)495-509

[3] Z. Zlatev,*" Use of iterative refinement in the solution of sparse linear systems"* SIAMJ. Numer. Anal.**19**(1982)381-399

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های
آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا ۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) —
رفسنجان

مقایسه الگوریتم‌های $GMRES$ و EN برای حل دستگاههای معادلات خطی بسیار بزرگ تُنُک

مرتضی سنجرانی پور*
استادیار گروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان
مهدی حمیدی، احسان کرابی
گروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان
mehdihamidi84@gmail.com

چکیده

در این مقاله به مقایسه روش‌های تکراری $GMRES$ و EN برای حل دستگاههای معادلات خطی بزرگ تُنُک پرداخته و نشان می‌دهیم روش EN برحسب تعداد محاسبات و مقدار حافظه مورد نیاز کارآبی بیشتری نسبت به روش $GMRES$ دارد.

واژه های کلیدی: روش های حل تکراری، زیرفضای کریلوف .

۱ مقدمه

روش مانده مینیمال تعمیم یافته $(GMRES)$[2] و EN[3] بطور وسیع برای حل تکراری دستگاه معادلات خطی نامتقارن بزرگ $Ax = b$ که A یک ماتریس $n \times n$ ناویژه است و از

*speaker[1]
Generalized Minimum Residual Method[2]
Eirola Nevanlinna Method[3]

گسسته سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی حاصل شده استفاده می‌شوند. نحوه اجرای این روشها در [1,3] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله به مقایسه روشهای ذکر شده می‌پردازیم.

۲ مقایسه روشهای $GMRES$ و EN

در ابتدا برای مقایسه روشهای $GMRES$ و EN الگوریتم های مربوطه را ذکر می‌کنیم.

الگوریتم ۱.۲: روش $GMRES$

۱. با انتخاب x_0 مقادیر $r_0 = b - Ax_0$ و $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$ را محاسبه کنید.
۲. برای $j = 1, 2, ..., k$، پایه متعامد یکه v_{j+1} را از الگوریتم آرنولدی [3] بدست آورید.
۳. مساله کمترین مربعات را حل کنید. یعنی z را طوری بیابید که $z_k = min\|e_1 - \overline{H}_k z\|_2$ ($\overline{H}_k$ ماتریس هسنبرگ $(k+1) \times k$ با درایه های h_{ij} حاصل از الگوریتم آرنولدی) باشد.
۴. جواب تقریبی x_k را با استفاده از رابطه $x_k = x_0 + V_k z_k$ (V_k ماتریس $n \times m$ با ستونهای $v_1, ..., v_m$ است که یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای کریلوف $\kappa_k(A, b) = span\{b, Ab, ..., A^{k-1}b\}$ تشکیل می‌دهند [2]) بدست آورید.

در الگوریتم $GMRES$ با افزایش m مقدار حافظه جهت ذخیره داده‌ها خصوصاً برای مسایل با ماتریس های با ابعاد بزرگ افزایش می‌یابد. برای رفع این مشکل روش $GMRES$ را با شروع مجدد مورد استفاده قرار می‌دهیم.

۱.۲ قضیه. بردارمانده در mامین تکرار روش $GMRES$ بصورت زیر است:

$$r_m^G = r_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^i r_0$$

حال روش شتاب دهنده EN که در [1] مورد بررسی قرار گرفته است را در نظر می‌گیریم. از رابطه تکراری $x_{k+1} = H(b - Ax_k)$ برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ استفاده می کنیم. در اینجا H تقریب A^{-1} است و در طول تکرار، H را بهبود می‌بخشیم. این بهنگام کردن، مقادیر ویژه $E_m = I - AH_m$ را کاهش می دهد و سرعت همگرایی را بالا می‌برد. الگوریتم حداکثر در m مرحله پایان می یابد و اگر تمام m مرحله تکرار انجام شود آنگاه A^{-1} نیز محاسبه می شود. دلیل پایداری روش EN مبتنی بر روش اصلاح شده گرام‌اشمیت [2] است.

الگوریتم ۲.۲ : روش EN

۱. $\xi^{(0)} = (I - AH_0) r_m$
۲. $\eta^{(0)} = H_0 r_m$
۳. $i = 0$
۴. $\alpha_i = c_i^T \xi^{(i)}$

۵. $\xi^{i+1} = \xi^i - \alpha_i c_i$

۶. $\eta^{(i+1)} = \eta^{(i)} + \alpha_i u_i$

۷. اگر $i < m$ آنگاه $i = i + 1$ و به گام ۴ برگرد.

۸. $c_m^{(0)} = AH_0\xi^{(m)}$

۹. $x_m^{(0)} = H_0\xi^{(m)}$

۱۰. $i = 0$

۱۱. $\beta_i = -c_i^T c_m^{(i)}$

۱۲. $c_m^{(i+1)} = c_m^{(i)} + \beta_i c_i$

۱۳. $x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} + \beta_i x_i$

۱۴. اگر $i < m$ آنگاه $i = i + 1$ و به گام ۱۱ برگرد.

۱۵. $c_m = \frac{c_m^{(m)}}{\|c_m^{(m)}\|_2}$

۱۶. $x_m = \frac{x_m^{(m)}}{\|c_m^{(m)}\|_2}$

۱۷. $x_{m+1} = x_m + \eta^{(m)} + x_m c_m^T \xi^{(m)}$

۱۸. $r_{m+1} = (1 - c_m c_m^T)\xi^{(m)}$

حال خواص روش EN را برای تمام انتخابهای H_0 و x_0 که H_0 ناویژه بماند بصورت قطیه‌های زیر بیان می‌کنیم.

۲.۲ قضیه. فرض کنید H_m برای هر $m \leq m_0$ ناویژه و $E_m r_m \neq 0$ در اینصورت:

الف: $E_{m+1} = (I - \rho_m)E_0$ که $P_m = \sum_{i=1}^{m} c_i c_i^T$ تصویر متعامد بر فضای تولید شده توسط $\{Ax_0, ..., Ax_m\}$ است ($c_m = \frac{Ax_m}{|Ax_m|}$).

ب: نرم فروبنیوس E_m نمی تواند کاهش یابد.

ج: مقادیر منفرد E_m نمی تواند افزایش یابد.

د: این روش جواب را حداکثر در n مرحله بدست می دهد.

ه: $r_{m+1} = E_{m+1}E_m r_m$

۳.۲ قضیه. اگر $AH_0 + (AH_0)^T$ معین مثبت باشد آنگاه H_m ناویژه است. اگر فرض قضیه ۳ برآورده نشود با یک بررسی ساده بصورت قضیه ۴.۲ می‌توان تشخیص داد H_k ویژه هست یا نه.

۴.۲ قضیه. اگر H_m ناویژه باشد آنگاه H_{m+1} ویژه است اگر و تنها اگر $< c_m, E_0 r_m > = 0$

۵.۲ قضیه. الگوریتم EN تحت تبدیل یکانی مختصات، پایا می باشد.

برای مقایسه EN و $GMRES$ نشان می‌دهیم بردارهای c_k تولید شده در EN عناصر یک زیرفضای کریلوف هستند.

۶.۲ قضیه. اگر H_m ناویژه باشد و $E_m r_m \neq 0$ آنگاه بردار مانده روش EN بصورت زیر است:

$$r_m^{EN} = r_0 + \sum_{i=1}^{2m} \alpha_{mi}(AH_0)^i r_0$$

همچنین

$$span\{c_0, ..., c_m\} \subset span\{(AH_0)r_0, ..., (AH_0)^{2m+2}r_0\}$$

می‌باشد.

بررسی های انجام شده مشخص می‌نماید که $\|r_{2m}^G\| \geq \|r_m^{EN}\|$ می‌باشد ($r_m^G = r_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^i r_0$ بردار مانده روش $GMRES$ است). برای مقایسه کارآیی و سودمندی روش های مذکور برآوردی از مقدار کار و حافظه مورد نیاز در هر دو روش انجام داده ایم. آزمایشهای عددی نشان دادند که روش EN برحسب تعداد محاسبات و حافظه مورد نیاز کارآیی بیشتری نسبت به روش $GMRES$ دارد.

مراجع

[1] T. Erola, O. Nevanlinna, " *Accelerating with rank-one updates*", Linear Algebra Appl, **2** (1989) 511-520.

[2] Y. Saad, "*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*", PWS, Boston, MA, (1996).

[3] Y. Saad, M. H. zchultz,"*GMRES: a generelized residual method for solving nonsymmetric linear systems*", SIAM J. sci. stat. comput, **7** (1986) 856-869.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا ۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) – رفسنجان

اندیسهایی از حاصلضرب هادامارد بوسیله ماتریسهای مثبت

رحمت ا... لشکری پور
دانشگاه سیستان و بلوچستان lashkari@hamoon.usb.ac.ir
زینب دهد ست
دانشگاه سیستان و بلوچستان Z_dehdast@yahoo.com

چکیده

برای $A, B \in M_n(C)$، ماتریسهای مثبت، بوسیله ضرب هادامارد[1] دو نماد از اندیسها رابصورت زیرمعرفی می کنیم:

$$I_A = max\{\lambda \geq 0 : ||AoB|| \geq \lambda ||B||, 0 \leq B \in M_n\},$$
$$II_A = max\{\lambda \geq 0 : AoB \geq \lambda B, 0 \leq B \in M_n\}.$$

همچنین فرمولهایی برای محاسبه این اندیسها ارائه وبرای هر ماتریس نیمه معین مثبت$n \times n$، A، اندیس می نی مال[2] را بصورت زیر تعریف می کنیم:[1]

$$I(A) = \max\{\lambda \geq 0, AoB \geq \lambda B \quad \forall B \geq 0\}.$$

و برای هر نرم N، N اندیس را نیز بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$I_N(A) = min\{N(AoB), B \geq 0 \ , N(B) = 1\},$$

که$AoB = [a_{ij}b_{ij}]$، ضرب هادامارد$A = [a_{ij}]$و$B = [b_{ij}]$می باشد.[5]

۱ Hadamard multiplication
۲ Minimal index

واژه های کلیدی: حاصل ضرب هادامارد، ماتریسهای نیمه معین مثبت.

۱ مقدمه

$M_n = M_n(C)$ یک C^* جبراز ماتریسهای$n \times n$ روی C و $M_n = \{A \in M_n \ , \ A \geq 0\}$ را مجموعه ای از ماتریسهای مثبت یا غیرمنفی می نامیم. یک ماتریس غیر منفی است، هرگاه همه مقادیر آن بزرگتر یا مساوی صفرباشند،[5] یعنی Xیک ماتریس غیر منفی است، هرگاه:

$$X \geq 0 \Leftrightarrow \forall i, j \geq 0 \qquad x_{ij} \geq 0.$$

یک ماتریس مثبت نیز بطور مشابه تعریف می شود. همچنین مجموعه ماتریسهای مثبت، زیر مجموعه‌ای از ماتریسهای غیر منفی است.[2]
یک ماتریس نیمه معین مثبت، ماتریس هرمیتی است هرگاه همه مقادیر ویژه آن غیر منفی باشند.[5]
در این مقاله $A \geq 0$ به‌این معنی است، که A ماتریس نیمه معین مثبت است.
برای هر $A \in M_n$، نگاشت خطی $\phi : M_n \longrightarrow M_n$ را برای هر$B \in M_n$ بصورت $\phi_A(B) = AoB$ تعریف می کنیم.[4]
تعریف: یک امید شرطی رویC^*–جبرA، نرم یک تصویر$\varepsilon : A \longrightarrow A$ است بطوریکه$\varepsilon(A)$،C^*–جبری از A است، به عبارت دیگر امید شرطی تصویرهایی از نرم یک C^*–جبر به توی یک C^*–زیر جبر است.[2]
تعریف ۱.۱: برای $A \in P_n$ دو نماد از اندیسهای هادامارد برای A را به نامهایI_A و II_A تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} I_A &= \max\{\lambda \geq 0 : ||AoB|| \geq \lambda ||B||, \forall B \in P(n)\} \\ &= \min\{||AoB|| : B \in P(n), ||B|| = 1\} \\ &= \min\{||B||^{-1} : 0 \neq B \in P(n), ||AoB|| \leq 1\}, \\ II_A &= \max\{\lambda \geq 0 : AoB \geq \lambda B, \forall B \in P(n)\} \\ &= \max\{\lambda \geq 0 : \phi_A - \lambda Id \geq 0 \quad on \quad P(n)\} \\ &= \max\{\lambda \geq 0 : A - \lambda P \geq 0\}. \end{aligned}$$

$P \in P(n)$ ماتریسی است که همه درایه های آن برابر یک است.

۲ ویژگیهایی اساسی I_A و II_A

برای هر $A \in P(n)$ اگر $A \le B$، آنگاه $I_A \le I_B$ و $II_A \le II_B$.

لم۱.۲: فرض کنید $A \in P_n$. لذا $x \in C^n$، با $\|x\| = 1$، وجود دارد بطوریکه $I_A = \|AoP_x\|$.

برهان : فرض کنید $B \ge 0$ و $\|B\| = 1$ بطوریکه $I_A = \|AoB\|$ وفرض کنید $x \in C^n$ با $\|x\| = 1$، بطوریکه $Bx = x$. پس $B = P_x + C$، که $C \ge 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} AoB &= AoP_x + AoC \ge AoP_x \\ &\Rightarrow \|AoB\| \ge \|AoP_x\| \\ &\Rightarrow I_A \ge \|AoP_x\|. \end{aligned}$$

از طرفی داریم $I_A \ge \|AoP_x\|$. لذا از مقایسه دو رابطه نتیجه می گیریم: $I_A = \|AoP_x\|$.

بعضی فرمولها برای I_A

لم۱.۳: فرض کنید $A \in P(n)$. لذا

$$I_A = \inf\{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-1} : x_i > 0, 1 \le i \le n, \|AoP_{(x_1...x_n)}\| \le 1\}.$$

گزاره ۲.۳: فرض کنید $A \in P(n)$. برای $d = (d_1...d_n) \in (R^+)^n$ ماتریس قطری $D_d \in M_n$ با قطر d را در نظر می گیریم. لذا

$$I_A = \inf\{(\sum_{i=1}^n d_i^{-1})^{-1} : d \in (R^+)^n, \begin{pmatrix} D_d & A \\ A & D_d \end{pmatrix} \ge 0\}.$$

نتیجه فرعی ۴.۳: $I_A = 0 \Leftrightarrow A_{ii} = 0$ برای هر $1 \le i \le n$.

نتیجه فرعی ۵.۳: اگر $A \in P(n)$ قطری باشد، آنگاه $I_A = (\sum_{i=1}^n A_{ii}^{-1})^{-1}$.

نتیجه فرعی ۶.۳: اگر $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \in P(n)$، آنگاه $I_A = (I_{A_1}^{-1} + I_{A_2}^{-1})^{-1}$.
بوضوح $I_A = 0$، اگر $I_{A_1} = 0$ یا $I_{A_2} = 0$.

تعریف ۸.۳: فرض کنید $B \in M_n$ با سطرهای $B_1, ..., B_n$. نگاشت خطی
$T_B : (C^n, \|\cdot\|_2) \to (M_n, \|\cdot\|)$

را با ضابطه $T_B(x) = T_B(x_1, ..., x_n) = D_x B = \begin{pmatrix} x_1 B_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n B_n \end{pmatrix}$ تعریف می کنیم،
که برای هر $x \in C^n$: $\gamma(B) = \min\{\|T_B(x)\| : \|x\|_2 = 1\} = \min_{x \neq 0} \frac{\|T_B(x)\|}{\|x\|_2}$.

گزاره۹.۳: فرض کنید $A \in P(n)$. برای هر $B \in P(n)$، که $A = BB^*$ داریم $I_A = \gamma(B)^2$.

گزاره۱۱.۳: فرض کنید $A \in P(n)$. عبارات زیر هم ارزند:

۱) $I_A < 1$.

۲) ماتریس قطری و معکوس پذیر $D \in P(n)$ وجود دارد، بطوریکه: $tr(D^{-1}) = \sum_{i=1}^n D_{ii}^{-1} > 1$. و $\begin{pmatrix} D & A \\ A & D \end{pmatrix} \ge 0$

۳) ماتریس $B \in P(n)$ وجود دارد، به طوریکه $A = BB^*$ و $\gamma(B) = 1$. به عبارت دیگر $I_A = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $1 \le i \le n$، $A_{ii} = 0$.

محاسبه II_A :

یادآوری می کنیم ماتریس P با درایه های یک می باشد. لذا

$$II_A = \max\{\lambda \ge 0 \quad ; \quad A - \lambda P \ge 0\}.$$

قضیه ۱.۴: فرض کنید $A \in P(n)$. اگر A معکوس پذیر باشد، آنگاه $\det(A + P) > \det(A)$ و

$$II_A = \frac{\det(A)}{\det(A + P) - \det(A)}.$$

به علاوه $II_A = 0$ برای هر $A \in P(n)$، که $\det(A) = 0$ و $det(A + P) > 0$.

نتیجه فرعی ۲.۴: فرض کنید $A \in P(n)$. لذا

$$II_A = \inf_{n \in N} II_{A + \frac{1}{n} I},$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\det(A + \frac{1}{n} I)}{\det(A + P + \frac{1}{n} I) - \det(A + \frac{1}{n} I)}.$$

گزاره ۴.۴: فرض کنید $A \in P(n)$. اگر A معکوس پذیر باشد، آنگاه برای هر $B \in M_n$، که $A = BB^*$ داریم

$$II_A = r(PA^{-1})^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|B^{-1}P(B^*)^{-1}\|^{-1}\\
&= n\|B^{-1}P\|^{-2}\\
&= \|B^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\|^{-2}\\
&= (\sum_{i,j=1}^{n}(A^{-1})_{i,j})^{-1}.
\end{aligned}
$$

نتیجه فرعی ۵.۴ : فرض کنید $D = D_d \in P(n)$ ماتریس قطری داده شده توسط بردار $d = (d_1, ..., d_n) \in (R^+)^n$ باشد. لذا $II_D = I_D = (\sum_{i=1}^{n} d_i^{-1})^{-1}$

همچنین اگر

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in P(n)$$

معکوس پذیر باشد، آنگاه همانند نتیجه فرعی ۶.۳، $II_A = (II_{A_1}^{-1} + II_{A_2}^{-1})^{-1}$.

حالت ۲ × ۲ :

گزاره ۱.۵: فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in P(2)$. لذا

i) اگر $\det(A) > 0$، آنگاه $II_A = \frac{ac-|b|^2}{a+c-2Re(b)}$.

ii) اگر $\det(A) = 0$، آنگاه

$$II_A = \begin{cases} |x_1|^2 & if \;\; A = P(x_1, x_2) \;\; , \;\; x_1, x_2 \in C \\ 0 & if \;\; A = P(x_1, x_2) \;\; , \;\; x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

گزاره ۲.۵: فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in P(2)$.

i) اگر $|b| < \min\{a, c\}$، آنگاه $I_A = \frac{ac-|b|^2}{a+c-2|b|}$.

ii) اگر $|b| \geq \min\{a, c\}$، آنگاه $I_A = \min\{a, c\}$.

تبصره ۳.۵: بنابه گزاره های ۱.۵ و ۲.۵، برای $A \in P(2)$، داریم:

$$I_A = II_A \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leq b \leq \min\{a, c\}, & \det(A) > 0 \\ A = P_{(x,0)}, P_{(0,x)} \text{ یا } P_{(x,x)}, x \in C, & \det(A) = 0. \end{cases}$$

با یک محاسبه ساده نشان داده می شود، اگر $\det(A) > 0$ و $I_A = II_A$، آنگاه

$$b = \min\{b, c\} \quad \text{یا} \quad |b| < \min\{a, c\}.$$

در این حالت بنابه گزاره ۱.۵ و ۲.۵ فقط ممکن است $b = |b|$ ولذا $b \in [0, \min\{a, c\}]$.

REFRENCES

[1] T. Ando, Majorizations and inequalities in matrix theory, linear Alg. Appl. 199(1994) 17-67.

[2] L. Mirsky, An introduction to Linear Algebra, Oxford University Press, London, 1955.

[3] V.I. Paulsen, S.C. Power, R.R. Smith, Schur products and matrix Completions, J. Functional Anal. 85(1989) 151-178.

[4] I.Schur, Bemerkungen zur theorie de beschrankten bilineareformen mit unendlich vielen veranderlichen, J. Reine Angew. Math. 140(1911) 1-28.

[5] R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Combridge, 1991.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های
آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) —
رفسنجان

نامساویهایی از عملگرهای هرمیتی و توابع محدب

رحمت الله لشکری پور
دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی، lashkari@hamoon.usb.ac.ir
موسی شاه‌محمدی
دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی، m_sh۶۴۸@yahoo.com

چکیده

در این مقاله نتایج بسیاری در خصوص ماتریس های هرمیتی و توابع محدب و همچنین نامساویهایی را در این مورد اثبات می کنیم. هدف اصلی ارائه یک نمایش ماتریسی از نامساوی اسکالری

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}$$

برای توابع محدب f روی خط حقیقی می باشد.
یک نمایش کلاسیک از این نامساوی، نامساوی اثر فون نیومن[۱]: برای ماتریسهای هرمیتی A و B

$$Trf(\frac{A+B}{۲}) \leq Tr\frac{f(A)+f(B)}{۲}$$

است.
در حقیقت اگر A و B ماتریسهای هرمیتی و f تابعی محدب باشد. اگر Xو Y به ترتیب به صورت $f(\frac{\{A+B\}}{۲})$ و $\frac{\{f(A)+f(B)\}}{۲}$ بیان شده باشند،آنگاه یکانی‌هایی مانند V و U وحود دارد بطوریکه

$$X \leq \frac{UYU^* + VYV^*}{۲}$$

در نتیجه، $\lambda_{۲j-۱}(X) \leq \lambda_j(Y)$ که در آن $\lambda_j(.)$ مقادیر ویژه هستند که به طور صعودی مرتب شده‌اند.

[۱] von Neuman 's inequality

واژه های کلیدی: عملگرهای یکانی و هرمیتی، ماتریس های هرمیتی، مقادیر ویژه، نامساویهای عملگر، نامساوی جن سن[۲].
رده بندی موضوعی (MSC2000): 17A99.

۱ مقدمه

هدف اصلی از این مقاله ارائه یک نمایش ماتریسی از نامساوی اسکالری

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲} \qquad (۱.۱)$$

برای توابع محدب f روی خط حقیقی می باشد.
حروف A، B، ...، Z ماتریسهای مختلط $n \times n$ یاعملگرهای روی فضای هیلبرت با بعد متناهی H هستند و عملگر همانی بصورت I بیان شده است. زمانی که A نیمه معین مثبت و معین مثبت است بترتیب بصورت $A \geq ۰$ و $A > ۰$ می نویسیم. یک نمایش ماتریسی کلاسیک از (۱.۱) نامساوی اثر فون نیومن: برای ماتریسهای هرمیتی A و B

$$Trf(\frac{A+B}{۲}) \leq Tr\frac{f(A)+f(B)}{۲}. \qquad (۱.۲)$$

هنگامی که f یکنوا و محدب است، در [۲] نشان دادیم که (۱.۲) را می توانیم به یک نامساوی عملگری توسیع دهیم: یکانی U وجود دارد بطوریکه

$$f(\frac{A+B}{۲}) \leq U\frac{f(A)+f(B)}{۲}U^*. \qquad (۱.۳)$$

همچنین نامساویهای مشابه شامل ترکیبات محدب کلی تری را نیز بیان کرده‌ایم. این نامساویها با یک نامساوی از متراکم سازی هم ارز هستند. به خاطر آورید که با در نظر گرفتن عملگر Z و زیرفضای ϵ و تصویر متعامد E متناظر با آنها، تحدید Z بر روی ϵ که با Z_ϵ نشان داده می شود، در واقع تحدیدی از EZ به ϵ است. نامساوی (۱.۳) می تواند بدین صورت نتیجه شود که: برای هر عملگر هرمیتی A، زیر فضای ϵ و تابع محدب یکنوای f، عملگر یکانی U روی ϵ وجود دارد بطوریکه

$$f(A_\epsilon) \leq Uf(A)_\epsilon U^*. \qquad (۱.۴)$$

نامساویهای (۱.۳) و (۱.۴) با نامساویهایی از مقادیر ویژه هم‌ارز هستند. به عنوان مثال (۱.۴) را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\lambda_j(f(A_\epsilon)) \leq \lambda_j(f(A)_\epsilon) \qquad j = ۱, ۲, \ldots$$

[۲] Jensen

که در آن λ_j، $j = 1,2,\ldots$، مقادیر ویژه است و به صورت صعودی مرتب و با درجه تکرار به حساب آورده شده‌اند. با اثبات نامساوی مانند (۱.۳) برای توابع محدب، پیدا کردن معادلهایی برای توابع محدب باقی میماند. از نامساوی (۱.۳) نتیجهٔ زیر برای هر تابع محدب حاصل می شود: در ازای ماتریسهای هرمیتی مفروض A و B یکانیهای U و V وجود دارند، بطوریکه

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \frac{Uf(A)U^* + Vf(B)V^*}{2}. \qquad (1.5)$$

این نامساوی در واقع تعمیم نامساوی مشهور زیر برای قدرمطلق است:

$$|A+B| \le U|A|U^* + V|B|V^*.$$

نمی دانیم که چگونه (۱.۵) برای تمامی توابع محدب درست می باشد. در بخش ۲ معادلی از (۱.۴) برای توابع محدب بیان می کنیم. این مطلب ما را قادر می سازد که در بخش ۳ یک معادل کاملا طبیعی از(۱.۳) برای توابع محدب بیان کنیم. هر چند که (۱.۳) بااستفاده از (۱.۴) قابل اثبات است(و به همین ترتیب برای معادلهای هر یک) در حالت کلی احساس می کنیم در مورد توابع محدب، روش اثبات از طریق متراکم سازی [۳] مناسبتر خواهد بود.

۲ متراکم سازی

جایگزین ما برای (۱.۴) برای توابع محدب عمومی(روی خط حقیقی)عبارت است:

قضیه ۱.۲: ماتریس هرمیتی A را در نظر بگیرید و فرض کنید ϵ یک زیرفضا و f یک تابع محدب باشد. در اینصورت یکانیهای U و V روی ϵ وجود دارند بطوریکه

$$f(A_\epsilon) \le \frac{Uf(A)_\epsilon U^* + Vf(A)_\epsilon V^*}{2}.$$

در نتیجه برای $j = 1,2,\ldots$

$$\lambda_{2j-1}(f(A_\epsilon)) \le \lambda_j(f(A)_\epsilon).$$

برهان: می توانیم زیرفضاهای طیفی ϵ' و $\bar{\epsilon}$ برای A_ϵ و عدد حقیقی r را بیابیم بطوریکه

(i) $\epsilon = \epsilon' \oplus \bar{\epsilon}$.

(ii) طیف $A_{\epsilon'}$ روی $(-\infty, r]$ و طیف $A_{\bar{\epsilon}}$ روی $[r, \infty)$ قرار می گیرد.

[۳] compressions

(iii) f هم روی $(-\infty, r]$ و هم روی $[r, \infty)$ یکنواست.

فرض کنید k عدد صحیحی باشد که $1 \le k \le dim\epsilon'$. زیر فضای طیفی F که $F \subset \epsilon'$ (و در نتیجه برای $f(A_{\epsilon'})$)، $dimF = k$ وجود دارد بطوریکه

$$\begin{aligned}
\lambda_k[f(A_{\epsilon'})] &= \min_{h\in F;||h||=1} \langle h, f(A_F)h\rangle \\
&= \min\{f(\lambda_1(A_F)); f(\lambda_k(A_F))\} \\
&= \min_{h\in F;||h||=1} f(\langle h, A_F h\rangle) \\
&= \min_{h\in F;||h||=1} f(\langle h, Ah\rangle),
\end{aligned}$$

که در آن‌دومین و سومین گام از یکنوایی f روی $(-\infty, r]$ واین واقعیت که طیف A_F روی $(-\infty, r]$ قرار دارد نتیجه شده است. تحدب f ایجاب می کند که برای هر بردار نرمال شده h

$$f(\langle h, Ah\rangle) \le \langle h, f(A)h\rangle$$

بنابراین با توجه به اصل مینیماکس [۴] داریم:

$$\begin{aligned}
\lambda_k[f(A_{\epsilon'})] &\le \min_{h\in F;||h||=1} \langle h, f(A)h\rangle \\
&\le \lambda_k[f(A)_{\epsilon'}].
\end{aligned}$$

این حکم معادل وجود عملگر یکانی U_0 روی ϵ' است که

$$f(A_{\epsilon'}) \le U_0 f(A)_{\epsilon'} U_0^*.$$

بطور مشابه یکانی V_0 روی $\bar{\epsilon}$ وجود دارد که

$$f(A_{\bar{\epsilon}}) \le V_0 f(A)_{\bar{\epsilon}} V_0^*.$$

بنابراین

$$f(A_\epsilon) \le \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(A)_{\epsilon'} & 0 \\ 0 & f(A)_{\bar{\epsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^* & 0 \\ 0 & V_0^* \end{bmatrix}.$$

همچنین توجه داریم که بر اساس تجزیه $\epsilon = \epsilon' \oplus \bar{\epsilon}$

$$\begin{bmatrix} f(A)_{\epsilon'} & 0 \\ 0 & f(A)_{\bar{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} f(A)_\epsilon \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} f(A)_\epsilon \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

[۴] Min-max

همچنین با فرض

$$U = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix} \quad و \quad V = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & -V_0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$f(A_\epsilon) \leq \frac{Uf(A)_\epsilon U^* + Vf(A)_\epsilon V^*}{2}. \qquad (2.1)$$

بررسی این که (۲.۱) نامساوی زیر را ایجاب می کند، باقی می ماند:

$$\lambda_{2j-1}(f(A_\epsilon)) \leq \lambda_j(f(A)_\epsilon)$$

که این نیز از یک مشاهده مقدماتی نتیجه می شود.

حکم۲.۲: فرض کنید X و Y ماتریس های هرمیتی باشند، بطوریکه

$$X \leq \frac{UYU^* + VYV^*}{2}. \qquad (2.2)$$

که U و V یکانی هستند.آنگاه برای $j = 1, 2, \ldots$

$$\lambda_{2j-1}(X) \leq \lambda_j(Y).$$

مراجع

[1] R. BHATIA, *"Matrix Analysis"*, Springer, Germany, 1996.

[2] J. C. BOURIN, *"Convexity or concavity inequalities for Hermitiyan operators,"*,Math. Ineq. Appl.,7(4) **35** (2004), 607-620.

[3] J. C. BOURIN, *"Compressions, dilations and Matrix Inequalities"*,RGMIYA monograf, victoria university, Melbourne 2004.

[4] L. G. BROWN AND H. KOSAKI, *"Jensen s inequality in semi-finite von Neuman algebras,J.Operator Theory"*, 23 (1990), 3-19.

[5] F. HANSEN AND G.K PEDERSEN, *"Jensen s operator inequality ", Bull.London Math. Soc.,35(2003),553-564*

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) –
رفسنجان

نامساوی انتگرال هاردی — هیلبرت

رحمت الله لشکری پور
دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی، lashkari@hamoon.usb.ac.ir
پروین نکوفرد
دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی، parvin_nekoofard@yahoo.com

چکیده

در این مقاله، با معرفی چند پارامتر ، فرمهای جدیدی برای نامساویهای هاردی – هیلبرت ارائه نمودهایم. یکی از کاربردهای این نامساویها در محاسبه نرم یکی از عملگرهای انتگرال مانند $a(x,y) = \frac{1}{x+y}$ ، عملگر هیلبرت ، می باشد.

واژه های کلیدی: نامساوی انتگرال هاردی — هیلبرت

رده بندی موضوعی (MSC2000): 17A99.

۱ مقدمه

اگر $p > 1$ ، $1/p + 1/q = 1$ ، $g(t), f(t) \geq 0$ ، $0 < \int_0^\infty f^p(t)dt < \infty$ و $0 < \int_0^\infty g^q(t)dt < \infty$ ،آنگاه نامساوی انتگرال هاردی – هیلبرت به صورت زیر می باشد:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leq \frac{\pi}{\sin\pi/p}\left(\int_0^\infty f^p(t)dt\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(t)dt\right)^{1/q}, \qquad (1-1)$$

که ثابت $\frac{\pi}{\sin\pi/p}$ بهترین مقدار ممکن است.

یانگ در[۲] و [۳] تعمیمی از(۱–۱) به صورت زیر بدست آورده است:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y-2\alpha)^\lambda}dxdy \le K_\lambda^{1/p}(p)K_\lambda^{1/q}(q)\left(\int_0^\infty (t-\alpha)^{1-\lambda}f^p(t)dt\right)^{1/p} \times\left(\int_0^\infty (t-\alpha)^{1-\lambda}g^q(t)dt\right)^{1/q} \quad (1-2)$$
و

$K_\lambda(r)=\int_0^\infty \frac{u^{(1/r-1)}}{(1+u)^\lambda}du=\beta(1/r,\lambda-1/r)$ و $0<\lambda\le 1$ و $\lambda>1/r>0$.
β تابع بتا است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad ,p,q>0.$$

و برای $0<T<\infty$,

$$\int_0^T\int_0^T \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}dxdy \le \beta(\lambda/2,\lambda/2)\left(\int_\alpha^T[1-\tfrac{1}{4}(t/T)^{\lambda/2}]t^{1-\lambda}f^2(t)dt\right)^{1/2} \times\left(\int_\alpha^T[1-\tfrac{1}{4}(t/T)^{\lambda/2}]t^{1-\lambda}g^2(t)dt\right)^{1/2} \quad (1-3)$$

در این مقاله با معرفی چند پارامتر، فرمهای جدید نامساویهای هاردی − هیلبرت ارائه شده است.

۲ نتایج جدید

گزاره‌های مورد نظر در زیر بیان شده‌اند:

۱.۲ لم. فرض کنید $0<\lambda$ ، $p,q,r>1$ ، $1/p+1/q+1/r=1$ ، $f(t),g(t),h(t)\ge 0$ ، $\lambda_i\ge 0$ ، $i=p,q,r$ و فرض کنید:

$0<\int_a^b \lambda_p^p(t)f^p(t)dt<\infty$,

$0<\int_a^b \lambda_q^q(t)g^q(t)dt<\infty$,

$0<\int_a^b \lambda_r^r(t)h^r(t)dt<\infty. \le \beta(\lambda/2,\lambda/2)(\int_\alpha^T[1-\frac{1}{4}(t/T)^{\lambda/2}]t^{1-\lambda}f^2(t)dt)^{1/2}$

آنگاه نامساویهای زیر هم ارزند:

۲.۲ لم:(آ)فرض کنید $0\le y\le 1$ ، $\alpha>0$ ، $f\ge 0$. اگر تابع g را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$g(y)=y^{-\alpha}\int_0^y f(x)dx,$$

آنگاه $g(y)\ge g(1)$.

(ب)فرض کنید $y\ge 1$ ، $\alpha>0$ ، $f\ge 0$. با تعریف تابع زیر

$$h(y)=y^{-\alpha}\int_0^y f(x)dx,$$

داریم: $h(y)\ge h(1)$.

۳.۲ قضیه ۲−۳.فرض کنید $f(t),g(t),h(t)\ge 0$ ، $p,q,r>1$ ، $1/p+1/q+1/r=1$ ، $2<\lambda<3$

و $\gamma>\mu max\{p,q,r\}$

$max\{-1/p,-1/q,-1/r\}<\mu<min\{\frac{\lambda-1}{p},\frac{\lambda-1}{q},\frac{\lambda-1}{r}\}$.

$0<\int_\alpha^T(t-\alpha)^{2-\lambda}f^pdt<\infty,$

$0<\int_\alpha^T(t-\alpha)^{2-\lambda}g^qdt<\infty,$

$0<\int_\alpha^T(t-\alpha)^{2-\lambda}h^rdt<\infty.$

و

آنگاه

$$\int_\alpha^T\int_\alpha^T\int_\alpha^T \frac{f(x)g(y)h(z)}{x+y+z^\lambda}dxdydz \le \left(\int_\alpha^T \phi(t,\mu,\lambda,p)(t-\alpha)^{2-\lambda}f^p(t)dt\right)^{1/p} \times\left(\int_\alpha^T \phi(t,\mu,\lambda,q)(t-\alpha)^{2-\lambda}g^q(t)dt\right)^{1/q}\int_\alpha^T\left(\phi(t,\mu,\lambda,r)(t-\alpha)^{2-\lambda}h^r(t)dt\right)^{1/r} \quad (2-3)$$

که

$$\phi(t,\mu,\lambda,j)=B(\lambda-\mu j-1,\mu j+1)\{B(\lambda-2,1-\mu j)-(\tfrac{t-\alpha}{T-\alpha})^\gamma\int_0^1\frac{u^{\lambda-3}}{(1+u)^{\lambda-\mu j-2}}du\}-(\tfrac{t-\alpha}{T-\alpha})^{2\gamma}\times\int_0^1\frac{u^{\lambda-\mu j-2}}{(1+u)^\lambda}du\int_0^1\frac{u^{\lambda-\mu j-2}}{(1+u)^{\lambda-\mu j-1}}dudu \quad , j=p,q,r.$$

۴.۲ نتیجه ۲−۴.فرض کنید $f(t),g(t),h(t)\ge 0$ ، $p,q,r>1$ ، $1/p+1/q+1/r=1$ ، $2<\lambda<3$ و

اگر $max\{-1/p,-1/q,-1/r\}<\mu<min\{\frac{\lambda-1}{p},\frac{\lambda-1}{q},\frac{\lambda-1}{r}\}$.

$0<\int_\alpha^\infty(t-\alpha)^{2-\lambda}f^pdt<\infty,$

$0<\int_\alpha^\infty(t-\alpha)^{2-\lambda}g^qdt<\infty,$

$0<\int_\alpha^\infty(t-\alpha)^{2-\lambda}h^rdt<\infty,$

آنگاه نامساوی زیر را داریم:

$$\int_\alpha^\infty\int_\alpha^\infty\int_\alpha^\infty \frac{f(x)g(y)h(z)}{x+y+z^\lambda}dxdydz \le K\left(\int_\alpha^\infty(t-\alpha)^{2-\lambda}f^p(t)dt\right)^{1/p} \times\left(\int_\alpha^\infty(t-\alpha)^{2-\lambda}g^q(t)dt\right)^{1/q}\int_\alpha^\infty\left((t-\alpha)^{2-\lambda}h^r(t)dt\right)^{1/r} \quad (2-4)$$

که

$$K=\prod_{j=p,q,r}B^{1/j}(\lambda-\mu j-1,\mu j+1)B^{1/j}(\lambda-2,1-\mu j).$$

و

$$\int_\alpha^\infty (x-\alpha)^{\frac{qr(\lambda-2)}{p(q+r)}} \left(\int_\alpha^\infty \int_\alpha^\infty \frac{g(y)h(z)}{(x+y+z)^\lambda} dxdydz\right)^{\frac{qr}{q+r}} dx$$
$$\leq K^{\frac{qr}{q+r}} \left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} g^q(t)dt\right)^{\frac{r}{q+r}} \left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} h^r(t)dt\right)^{\frac{q}{q+r}} \qquad (۲-۵)$$

دو نامساوی بالا معادلند.

۵.۲ نتیجه ۲−۵. فرض کنیم $f(t), g(t), h(t) \geq 0$ ، $2 < \lambda < 3$ ، $\gamma > 3\mu$ و $-1/3 < \mu < \frac{\lambda-1}{3}$.

اگر

$$0 < \int_\alpha^T (t-\alpha)^{2-\lambda} f^3(t)dt < \infty \ ,$$
$$0 < \int_\alpha^T (t-\alpha)^{2-\lambda} g^3(t)dt < \infty \ ,$$
$$0 < \int_\alpha^T (t-\alpha)^{2-\lambda} h^3(t)dt < \infty \ ,$$

آنگاه

$$\int_\alpha^T \int_\alpha^T \int_\alpha^T \frac{f(x)g(y)h(z)}{x+y+z^\lambda} dxdydz$$
$$\leq \left(\int_\alpha^T \phi(t,\mu,\lambda,p)(t-\alpha)^{2-\lambda} f^3(t)dt\right)^{1/3}$$
$$\times\left(\int_\alpha^T \phi(t,\mu,\lambda,q)(t-\alpha)^{2-\lambda} g^3(t)dt\right)^{1/3} \int_\alpha^T \left(\phi(t,\mu,\lambda,r)(t-\alpha)^{2-\lambda} h^3(t)dt\right)^{1/3} \qquad (۲-$$

و

$$\int_\alpha^T \phi^{-1/2}(t,\lambda,\mu,3)(t-\alpha)^{\lambda/2-1} \left(\int_\alpha^T \int_\alpha^T \frac{g(y)h(z)}{(x+y+z)^\lambda} dydz\right)^{1/2} dx$$
$$\leq \left(\int_\alpha^T \phi(t,\lambda,\mu,3)(t-\alpha)^{2-\lambda} g^3(t)dt\right)^{1/3} \left(\int_\alpha^T \phi(t,\lambda,\mu,3)(t-\alpha)^{2-\lambda} h^3(t)dt\right)^{1/3}. \qquad (۲-$$

دو نامساوی بالا معادلند.

توجه. درنتیجه ۲−۵، با قرار دادن $\mu = 1 - \lambda/3$، داریم:

$$\phi(t,\lambda,1-\lambda/3,3)$$
$$= B(2\lambda-4, 4-\lambda)B(\lambda-2,\lambda-2)\left\{1 - 1/2\left(\frac{t-\alpha}{T-\alpha}\right)^\gamma\right\}$$
$$-\left(\frac{t-\alpha}{T-\alpha}\right)^{2\gamma} \int_0^1 \frac{u^{2\lambda-5}}{(1+u)^\lambda} du \int_0^1 \frac{u^{\gamma+\lambda-3}}{(1+u)^{2\lambda-4}} du.$$

۶.۲ نتیجه ۲−۶. فرض کنید $f(t), g(t), h(t) \geq 0$ ، $2 < \lambda < 3$ و $-1/3 < \mu < \frac{\lambda-1}{3}$.

اگر

$$0 < \int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} f^3(t)dt < \infty \ ,$$
$$0 < \int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} g^3(t)dt < \infty \ ,$$
$$0 < \int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} h^3(t)dt < \infty \ ,$$

و

آنگاه

$$\int_\alpha^\infty \int_\alpha^\infty \int_\alpha^\infty \frac{f(x)g(y)h(z)}{x+y+z^\lambda} dxdydz$$
$$\leq K\left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} f^3(t)dt\right)^{1/3}$$
$$\times\left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} g^3(t)dt\right)^{1/3} \left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} h^3(t)dt\right)^{1/3} \qquad (۲-۸)$$

و

$$\int_\alpha^\infty (x-\alpha)^{-1/2} \left(\int_\alpha^\infty \int_\alpha^\infty \frac{g(y)h(z)}{(x+y+z)^\lambda} dydz\right)^{1/2} dx$$
$$\leq K^{3/2} \left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} g^3(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{2-\lambda} h^3(t)dt\right)^{1/2} \qquad (۲-۹)$$

دو نامساوی بالا معادلند.

مراجع

[1] G.H.HARDY, J.E.LITTEWOOD and

[2] [3] B.YANG,ON Hilbert,s integral inequality,J.Math.Anal.,220(2000),778-785.G.POLYA,Inequalities,Cambridge Univ.,Cambridge,UK,(2001)

[3] B.YANG,On generalization of Hardy-Hilbert,s integral inequality,Acta.Sinica,41(1998),839-844.

[4] B.YANG,ON Hilbert,s integral inequality,J.Math.Anal.,220(2000),778-785.

... روش تکراری سریع برای حل معادلات انتگرالی ولترا — فردهلم

دکتر فرید(محمد) مالک
Maalek@yazduni.ac.ir
سهیلا امین صدرآبادی
Soheila.amin@gmail.com

چکیده

برای حل دستگاه‌های معادلاتی که ناشی از گسسته سازی زمانی — مکانی ...معادلات انتگرالی ولترا — فردهلم می‌باشند، از روش نیوتن استفاده می‌کنیم. تعداد ...معادلات این دستگاه به تعداد گره‌های مکانی وابسته است. از طرفی بدست آوردن ...جواب این معادلات از این طریق می‌تواند بسیار پر هزینه باشد. تلاش ما کاهش دادن ...این هزینه‌ها با حل هر تکرار نیوتن با استفاده از یک فرآیند تکرار درونی پویا می‌باشد. ...قابل ذکر است که این فرآیند تکرار درونی پویا بر اساس مقادیر ویژه استوار است.

...ای کلیدی: معادلات انتگرالی ولترا — فردهلم، روش نیستروم، روش‌های تکراری، ...ای مستقیم مربع‌سازی، روش نیوتن، گام‌های زمانی .
...ی موضوعی 65R20;65F10;45G10.

۱ مقدمه

در این مقاله از روش‌های تکراری برای حل گسسته‌سازی شدهٔ انواع معادلات انتگرالی ولترا — فردهلم خطی و غیرخطی به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_\Omega G(t,s,x,\xi,u(s,\xi))d\xi ds \qquad (۱.۱.۱) \qquad (۱)$$

که در آن $t \in I = [0,T]$ و $x \in \Omega$ که Ω یک زیر مجموعهٔ بسته از R^d می‌باشد.($d = 1,2,3$) با فرض پیوسته بودن توابع حقیقی — مقدار f و G به ترتیب روی $D = [0,T] \times \Omega$ و $S \times R$ به قسمی که داشته باشیم، $S = \{(t,s,x,\xi) : 0 \le s \le t \le T, (x,\xi) \in \Omega \times \Omega\}$.
این نوع معادلات در نظریهٔ مسائل مقدار مرزی (مسائل فوریه) و مسائل متنوع فیزیکی، مکانیکی و زیستی ظاهر می‌شوند. عملاً روش‌های تقریبی کمی برای حل معادلات (۱) شناخته شده است. با استفاده از روش نیستروم و روش مربع‌سازی مستقیم معادله(۱) به معادله‌ای به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$U_h^n = f_h + h^d \tau \sum_{j=0}^{n} \omega_{nj} \Psi(t_n, t_j, U_h^j) \qquad (۲)$$

برای $n \ge k$ که در آن مولفهٔ mام U_h^n (U_{hm}^n) نمایشی برای تقریب جواب دقیق u از معادلهٔ (۱) در نقطهٔ (t_n, x_m) می‌باشد. که در آن

$$(\Psi(t,s,U_h(s)))_i = \sum_{k=0}^{M} w_k G(t,s,x_i,x_k,U_{hk}(s))$$

که ضرایب w_k برای آن بوسیلهٔ روش نیستروم تعریف می شوند. همچنین داریم:

$$U_h^{(0)} = f_h^{(0)}$$

و مقادیر $U_h^{(0)}$ و $U_h^{(1)}$ و ... و $U_h^{(k-1)}$ داده می‌شود. در این جا ω_{nj} برای مقادیر $n,j = 0,1,\dots,N$، وزن‌های داده شده به وسیله مربع‌سازی مستقیم می‌باشند.

۲ جواب دستگاه‌های جبری غیر خطی

در بخش قبل استفاده از گام‌های زمانی به یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی منجر شد. در آن دستگاه مجهولات $U_h^n = (U_{h0}^n(t), U_{h1}^n(t), \dots, U_{hM}^n(t))$ به صورت

$$U_h^n = h^d\tau\omega_{nn}\Psi(t_n,t_n,U_h^n)+\Phi_n \qquad (۳)$$

بودند، که در آن داریم:

$$\Phi_n = f_h(t_n) + h^d\tau\sum_{j=0}^{n-1}\omega_{nj}\Psi(t_n,t_j,U_h^j)$$

فرمول (۳) را به عنوان یک روش اصلاحگر در نظر می‌گیریم. یک راه مناسب برای حل این دستگاه غیر خطی استفاده از روش تکراری نیوتن بهبود یافته می باشد، که کاربرد آن برای دستگاه (۳) منجر می‌شود به:

$$(I - h^d\tau\omega_{nn}J_n)(U_h^{n(\sigma+1)} - U_h^{n(\sigma)}) = -R(U_h^{n(\sigma)}) \qquad \sigma = 0,1,2,\ldots \qquad (۴)$$

که برای هر $X\in R^{M+1}$ برقرار می‌باشد و J_n ژاکوبین تابع Ψ در نقطهٔ $(t_n,t_n,U_h^{n(\sigma)})$ است و داریم:

$$R(X) = X - h^d\tau\omega_{nn}\Psi(t_n,t_n,X) - \Phi_n$$

در این جا I یک ماتریس همانی از مرتبهٔ $(M+1)$ می‌باشد. مقدار اولیه $U_h^{n(0)}$ بوسیلهٔ یک فرمول پیشگو مناسب مانند برونیاب یا مقدار آخرین نقطه بدست می آید.

۳ یک روش تکراری موازی

هر تکرار نیوتن در (۴) برای تصحیح مقدار $U_h^{n(\sigma+1)} - U_h^{n(\sigma)}$، نیاز به جواب یک دستگاه خطی $(M+1)$-- بعدی دارد. برای این که محاسبات پیچیدهٔ فرآیند را کاهش دهیم یک روش تکراری برای حل دستگاه‌های خطی به صورت (۵) معرفی می‌کنیم. این فرآیند تکرار درونی نامیده می‌شود.

$$(I - h^d\tau\omega_{nn}\mu_\nu)(U^{(\nu+1)} - U^{(\nu)}) = -(I-h^d\tau\omega_{nn}J_n)U^{(\nu)} + c_n^{(\sigma)} \qquad (۵)$$

که در آن:

$$c_n^{(\sigma)} = (I-h^d\tau\omega_{nn}J_n)U_h^{n(\sigma)} - R(U_h^{n(\sigma)})$$

که U نماینده‌ای برای $U^{n(\sigma+1)}$ و μ_ν پارامتر شکافنده، برای هر ν، می‌باشد. تکرار (۴)و(۵) به عنوان فرآیند تکرار درونی -- بیرونی در نظر گرفته می‌شود، که تکرار نیوتن

تکرار بیرونی آن است.

۴ هسته‌های تبهگون

نقطهٔ شروع کار در مطالعهٔ معادلات ولترا -- فردهلم (۱) به قسمی است که G نسبت به متغیّرهای فضایی تبهگون می‌باشد. یعنی:

$$G(t,s,x,\xi,u) = \sum_{j=1}^{L} A_j(t,s,x)B_j(t,s,\xi,u) \qquad (٦)$$

با توجه به فرمول (٦) ژاکوبین J_n از Ψ در رابطهٔ (۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J_n = \sum_{j=1}^{L} A_j\partial B_j^T$$

که در آن :

$$A_j = [A_j(t,s,x_0),\ldots,A_j(t,s,x_M)]^T$$

و

$$\partial B_j = [w_0\frac{\partial B_j(t,s,x_0,U_{h0})}{\partial u},\ldots,w_M\frac{\partial B_j(t,s,x_M,U_{hM})}{\partial u}]^T$$

به طوری که J_n حداکثر L مقدار ویژهٔ غیر صفر دارد.
همگرایی فرآیند درونی (۵) با قضیهٔ زیر تضمین می‌شود:

۱.۴ قضیه. فرض کنید G به صورت (٦) و $\lambda_0,\ldots,\lambda_{L-1}$، L مقدار ویژهٔ J_n باشند. در این صورت فرآیند تکرار درونی (۵) با پارامترهای $\mu_0=\lambda_0,\mu_1=\lambda_1\ldots,\mu_{L-1}=\lambda_{L-1},\mu_L=0$ بعد از $L+1$ تکرار به جواب روش نیوتن همگراست.

اثبات. می‌دانیم مقادیر ویژهٔ یک ماتریس ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصهٔ آن می‌باشد. از طرفی بنابر قضیهٔ کیلی -- هامیلتون هر ماتریس در چند جمله‌ای مشخصه‌اش صدق می‌کند.

حال با توجه به مطالب بیان شده [۸] و رابطهٔ

$$U^{(L)} - U = \frac{\rho_{L-1}(J_n)}{\rho_{L-1}(\frac{1}{h^d\tau\omega_{nn}})}(U^{(0)}-U)$$

که همگرایی تکرار درونی را بعد از L تکرار نشان می‌دهد و در آن

$$\rho_{L-1}(z) = (z-\lambda_{L-1})(z-\lambda_{L-2})\ldots(z-\lambda_0)$$

همان چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس H می باشد، داریم $\rho(J_n) = 0$ و همچنین $U^{(L)}$ به U همگراست. لازم به یاد آوری است که U نمایشی برای $U_h^{n(\sigma+1)}$ است. پس اثبات کامل می‌شود.

۵ مثال‌ها و نتایج عددی

۱.۵ مثال. معادلهٔ انتگرالی ولترا— فردهلم غیرخطی:

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_0^1 \frac{x(1-\xi^2)}{(1+t)(1+s^2)}(1 - exp(-u(s,\xi)))\xi ds \qquad (7)$$

را که در آن $t \in [0,1]$، در نظر می‌گیریم.
با انتخاب $f(t,x)$ به قسمی که جواب دقیق معادلهٔ (۷)

$$u(t,x) = -ln(1 + \frac{xt}{1+t^2})$$

باشد. اولین هدف ما تجزیه و تحلیل رفتار همگرایی فرآیند تکراری وابسته به تعداد تکرارهای درونی v و بیرونی s می‌باشد. فرآیند تکراری (۴) و(۵) را روی مثال (۱) برای طول گام‌های مختلف پیاده کرده، دقت را با تعداد ارقام صحیح (cd) مربوط به نقطهٔ انتهایی نمایش می‌دهیم. در واقع قدر مطلق حداکثر خطای نقطهٔ انتهایی را به صورت 10^{-cd} در نظر می‌گیریم. در جدول ۱ برای مثال (۱) مقادیر cd را به صورت تابعی از v و برای طول گام‌های مختلف فهرست کرده‌ایم. در این جا روش نیوتن (تکرار بیرونی) تنها یکبار اجرا شده است. $(s = 1)$

جدول ۱

مقادیر cd برای مثال (۱) $(s = 1)$

$h = \tau$	$v = 1$	v
۰.۵	۱.۹۶	۱
۰.۲۵	۲.۵۳	۲
۰.۱۲۵	۳.۱۳	۳
۰.۰۶۲۵	۳.۷۳	۳
۰.۰۳۱۲۵	۴.۳۴	۴

اگر چه با استفاده از مطالب بیان شده نیاز به ۲ تکرار درونی داریم، اما در عمل یک تکرار درونی و یک تکرار بیرونی برای حل معادلهٔ اصلاحگر کفایت می‌کند.

۲.۵ مثال. معادله انتگرالی ولترا — فردهلم خطی :

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_0^2 (-cos(x-\xi))exp(-(t-s))u(s,\xi)d\xi ds \qquad (8)$$

را که در آن $t \in [0,2]$، در نظر می‌گیریم .
با انتخاب $f(t,x)$ به صورت

$$f(t,x) = exp(-t)[cos(x) + tcos(x) + \frac{1}{2}tcos(x-2)sin(2)]$$

جواب دقیق معادلهٔ (۸) $u(t,x) = cos(x)exp(-t)$ می‌باشد. دومین هدف بررسی تأثیر جایگزینی هسته‌ها در مثال (۲) به وسیلهٔ چند جمله‌ای‌های درونیاب می‌باشد. در مثال (۲) هسته تجزیه‌پذیر است، پس در واقع به هیچ تقریبی نیاز نداریم. جدول ۲ بر اساس یک تکرار بیرونی $(s = 1)$ و $L + 1$ تکرار درونی $(v = L + 1)$، که L درجهٔ چند جمله‌ای درونیاب است تنظیم شده‌اند.

جدول ۲

مقادیر cd برای مثال (۲) $(v = L + 1)$

$h = \tau$	L	cd
۰.۵	۳	۲.۲۷
۰.۲۵	۴	۲.۸۷
۰.۱۲۵	۴	۳.۴۷
۰.۰۶۲۵	۵	۴.۰۷
۰.۰۳۱۲۵	۵	۴.۶۸

بنابر مطالب گفته شده نتایج بدست آمده را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:
۱ — در عمل تعداد تکرارهای درونی که برای رسیدن به دقت مورد نظر لازم است، کمتر از آن چیزی است که به وسیلهٔ بحث‌های تئوری به دست می آید.
۲ — تقریب زدن هسته‌های غیرتبهگون با چندجمله‌ای‌های درونیاب با رتبهٔ L نه تنها روی دقت روش تأثیری نمی‌گذارد بلکه تعداد محاسبات و در نتیجه هزینه‌های محاسباتی را کم می‌کند .

مراجع

[۱] "جبر خطی "، ری کنزی و کنت هافمن ، نشر دانشگاهی ، تهران، ۱۳۶۲.

[2] Atkinson, K. E.,"*The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind* ", Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1997.

[3] Bownds, J. M., Wood B.,"*On numerically solving nonlinear Volterra integral equations with fewer computations*", SIAM J. Numer Anal., Vol. 13, pp. 705-719, 1976.

[4] Brunner, H.,"*On the numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations by collocation methods* ", SIAM J., Vol. 27, pp. 987-1000, 1990.

[5] Brunner, H., Van der Houwen P. J.,"*The numerical solution of Volterra equations*",CWI Monographs, Vol.3, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[6] Brunner, H., Messina, E.,"*Time-stepping methods for Volterra-Fredholm integral equations bycollocation methods*", Rend. Mat., Vol. 23(VII), pp. 329-342, 2003.

[7] Burden, R. L., Faires, J. D.,"*Numerical analysis*", Brooks/Cole publishing company, 6th Ed., 1997.

[8] Cardone, A., Messina, E., Russo, E.,"*A fast iterative method for discretized Volterra-Fredholm integral equations* ", J. Comput. Appl. Math., Vol. 189, pp. 568-579, 2006.

[9] Delves, L. M., Mohamed, J. L.,"*Computational methods for integral equations*", Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[10] Diekmann, O.,"*Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*", J. Math. Biol., Vol. 6, pp. 109-130, 1978.

خلاصه مبسوط چهارمین سمینار جبرخطی و کاربرد های آن و کارگاه موجک ها
۱۶ تا۱۸ اسفند ۱۳۸۵، دانشگاه ولی عصر(عج) – رفسنجان

یک روش کاهش مرتبه سریع ماتریسهای شبه‌جداپذیر به فرم هزنبرگی

علی معدن‌کن
amadankan@yahoo.com
دانشگاه زابل–دانشکده علوم پایه–گروه ریاضی

چکیده

ماتریسها و مقادیر ویژهٔ آنها یکی از اصلی‌ترین مباحث در جبرخطی می‌باشند که باتوجه به مسائل مقدار ویژه و بدست آوردن آنها و همچنین ماتریسهای شبه‌جداپذیر. در این مقاله پس از معرفی ماتریسهای شبه‌جداپذیر. یک روش سریع برای کاهش مرتبه یک ماتریس شبه‌جداپذیر به فرم هزنبرگ بالایی از طریق یک دنباله از ۲ − N تبدیل را ارئه می‌کنیم. این کاهش مرتبه جدید به ویژه وقتی مفید است که الگوریتم QR برای بدست آوردن یک مجموعه کامل از مقادیر ویژهٔ ماتریس اصلی پیروی کنیم. برای این منظور از روش تکراری QR که از ساختار هرمیتی استفاده می‌کند برای بدست آوردن مقدیر ویژه ماتریس شبه‌جداپذیر استفاده می‌کنیم.

واژه های کلیدی: ماتریسهای شبه‌جداپذیر، کاهش مرتبه و الگوریتم QR.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F15.

In what follows the following theorem is crucial.

Theorem 2.13. *Let $n \in \mathbb{N}$, F a field, $\mathcal{S}$ an irreducible semigroup in $M_n(F)$, and $\mathcal{J}$ a nonzero semigroup ideal of $\mathcal{S}$. Then either trace is identically zero on $\mathcal{S}$ or*

$$\{A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{S} \cup \{I\}) : \mathrm{tr}(A\mathcal{J}) = \{0\}\} = \{0\}.$$

We use $l(n)$ to denote the length of the algebra $M_n(F)$ (see [3] for the definition). Pappacena proved that $l(n) < n\sqrt{2n^2/(n-1)+1/4}+n/2-2$ (see [3, Corollary 3.2]). In the next two results, we give slight generalizations of triangularizability results due to Radjavi and Guralnick, respectively (see [5, Theorem 2.2.1] and [2]).

Corollary 2.14 (Radjavi's Trace Theorem). *(i) Let $n > 1$, F a field with $\mathrm{ch}(F) = 0$ or $> n/2$, $m \in \mathbb{N}$, and $\mathcal{F}$ a family of triangularizable matrices in $M_n(F)$. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable if and only if $\mathrm{tr}((AB-BA)S) = 0$ for all $A, B \in \mathcal{F}$ and all words S in $\mathcal{F}$ of length at least m.*

(ii) Let $n > 1$, F a field with $\mathrm{ch}(F) = 0$ or $> n/2$, and $\mathcal{F}$ a family of triangularizable matrices in $M_n(F)$. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable if and only if $\mathrm{tr}((AB-BA)S) = 0$ for all $A, B \in \mathcal{F}$ and all words S in $\mathcal{F}$ of length at most $l(n)$.

Corollary 2.15. *(i) Let F be a field, $n, m \in \mathbb{N}$, and $\mathcal{F}$ a family of triangularizable matrices in $M_n(F)$. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable if and only if $(AB-BA)S$ is nilpotent for all $A, B \in \mathcal{F}$ and all words S in $\mathcal{F}$ of length at least m.*

(ii) Let F be a field, $n \in \mathbb{N}$, and $\mathcal{F}$ a family of triangularizable matrices in $M_n(F)$. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable if and only if $(AB-BA)S$ is nilpotent for all $A, B \in \mathcal{F}$ and all words S in $\mathcal{F}$ of length at most $l(n)$.

References

[1] B. Bollobás, *Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] R.M. Guralnick, Triangularization of sets of matrices, Linear and Multilinear Algebra **9** (1980), 133-140.

[3] C.J. Pappacena, An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra, J. Algebra **197** (1997), no. 2, 535-545.

[4] M. Radjabalipour and H. Radjavi, A finiteness lemma, Brauer's Theorem and other irreducibility results, Comm. Algebra **27 (1)** (1999), 301-319.

[5] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer Verlag, New York, 2000.

[6] M. Radjabalipour and B.R. Yahaghi, On one-sided ideals of rings of linear transformations or continuous linear operators, Submitted.

[7] J.H.M. Wedderburn, Notes on algebras, Ann. of Math, **38** (1937), 854-856.

[8] B.R. Yahaghi, On irreducible semigroups of operators with traces in a subfield, *Linear Algebra Appl.* **383** (2004), 17-28.

[9] B.R. Yahaghi, Near triangularizability implies triangularizability, *Canadian Mathematical Bulletin* **47** (2) (2004), 298-313.

[10] B.R. Yahaghi, *Reducibility Results on Operator Semigroups*, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, Halifax, Canada, 2002.

[11] B.R. Yahaghi, On F-algebras of algebraic matrices over a subfield of the center of a division ring, *Linear Algebra Appl.* **418** (2006), 599-613.

۱ مقدمه

دراین مقاله یک الگوریتم سریع برای تبدیل یک ماتریس شبه‌جداپذیر به فرم ماتریسهای هزنبرگی را ارائه می‌دهیم که ممکن است در کاهش مرتبه، مساله پیدا کردن یک مجموعه کامل از مقادیر ویژه یک ماتریس شبه‌جداپذیر به مساله‌ای برای یک ماتریس که به فرم بالا هزنبرگی می‌باشد، مورد استفاده قرار گیرد.

۱.۱ تعریف. ماتریس A را شبه‌جداپذیر از مرتبه یک گوییم اگر تمام زیر ماتریسها که قسمتهای پایین مثلثی و بالا مثلثی از ماتریس A گرفته می‌شود دارای رتبه کوچکتر و مساوی یک باشد. □

۲ تبدیل به فرم هزنبرگی

در این بخش یک الگوریتم بازگشتی سریع برای کاهش ماتریسهای شبه‌جداپذیر $A \in C^{N\times N}$ از مرتبه (n, n') به فرم بالا هزنبرگی B بوسیله تبدیلات مشابه متعامد، که $B = uAu^*$ با ماتریس u متعامد شرح می‌دهیم.

۳ الگوریتم QR

فرض کنید $R = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ یک ماتریس با درایه‌های مختلط با مولدهای داده شده است، باشد. در این قسمت یک الگوریتمی برای ندست آوردن مولدها و درایه‌های قطری ماتریس واحد Q و ماتریسهای بالا مثلثی S به طوری که $R = QS$ را معرفی می‌کنیم.

مراجع

[1] Y. Eidelman, I. Gohberg, L. Gemignani, "*On the fast reduction of a quasiseparable matrix to Hessenberg and tridiagonal forms*", Linear Algebra and its Applications 420 (2007) 86-101.

Remark. In [6], it is shown that a one-sided ideal of the ring of linear transformations (resp. continuous linear operators) on a left or right vector space over a division ring D (resp. on a real or complex locally convex space) is triangularizable if and only if the one-sided ideal is generated by a rank-one idempotent if and only if $\operatorname{rank}(AB - BA) \leq 1$ for all A, B in the one-sided ideal.

The following result gives a criterion for triangularizability of F-algebras of matrices with inner eigenvalues in the subfield F provided that F is not 2-closed.

Theorem 2.4. *Let D be a division ring, F a subfield of its center that is not 2-closed, and $\mathcal{A}$ an F-algebra of matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F. Then $\mathcal{A}$ is triangularizable if and only if every $A \in \mathcal{A}$ is triangularizable. Conversely, let a subfield F of the center of D be given. If every F-algebra $\mathcal{A}$ of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F is triangularizable, then F is not 2-closed.*

Using the preceding theorem, we present a new proof of Kaplanski's Theorem.

Corollary 2.5 (Kaplanski's Theorem). *Let $n \in \mathbb{N}$, F a field with $\operatorname{ch}(F) > n$ or $= 0$, and $\mathcal{S}$ a semigroup of matrices in $M_n(F)$ on which trace is constant. Then the semigroup $\mathcal{S}$ is triangularizable. In particular, if trace is zero on a semigroup $\mathcal{S}$ in $M_n(F)$, then the algebra generated by $\mathcal{S}$ is a nilpotent algebra of matrices.*

Corollary 2.6 (The Block Triangularization Theorem). *Let D be a division ring, F a subfield of its center, and $\mathcal{A}$ an F-algebra of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F. Then, after a similarity, $\mathcal{A}$ is in bolck upper triangular form such that the zero diagonal blocks of $\mathcal{A}$, if there is any, are all one-dimensional and the nonzero diagonal blocks of $\mathcal{A}$ occur in either linked or independent pairs. That is, after a similarity, $\mathcal{A}$ is in block triangular form with diagonal blocks of sizes $n_i \times n_i$, $1 \leq i \leq t$, $n_1 + \cdots + n_t = n$ so that for each pair (i,j), $1 \leq i,j \leq t$, either $n_i = n_j = 1$ and $i\text{-dg}(A) = j\text{-dg}(A) = 0$ as A ranges over $\mathcal{A}$, or $n_i = n_j \geq 1$ and $\{i\text{-dg}(A) = j\text{-dg}(A) : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(F)$, or $\{(i\text{-dg}(A), j\text{-dg}(A)) : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(F) \times M_{n_j}(F)$.*

Remark. A consequence of the preceding corollary is the following: *Let $\mathcal{A}$ be as in the corollary. If the F-algebra $\mathcal{A}$ is semi-simple, then it contains the identity matrix if and only if $\ker(\mathcal{A}) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \ker(A) = \{0\}$.*

Let D and F be as in the preceding corollary. The following result, up to a similarity, characterizes all simple F-algebras of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F containing the identity matrix.

Corollary 2.7. *Let $n \in \mathbb{N}$, D a division ring, F a subfield of its center, and $\mathcal{A}$ a simple F-algebra of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F containing the identity matrix. Let $r, m \in \mathbb{N}$ be the minimal nonzero rank in $\mathcal{A}$ and the dimension of a minimal nonzero invariant subspace of $\mathcal{A}$, respectively. Then,*

(i) the integer m divides n, $r = n/m$, and after a similarity $\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A})$ where $\mathcal{A} \in M_m(F)$. Furthermore, the minimal nonzero rank in $\mathcal{A}$, i.e., r, divides $\operatorname{rank}(A)$ for all $A \in \mathcal{A}$.

(ii) after a similarity, $\mathcal{A} = M_n(F)$ if and only if $r = 1$.

Let F be a field, and $\mathcal{C}$ a collection of matrices in $M_n(F)$. A polynomial P in m noncommutative variables with coefficients from F is called a *trace identity* of $\mathcal{C}$ if $\operatorname{tr}(P(C_1, \ldots, C_m)) = 0$ for all $C_i \in \mathcal{C}$ $(1 \leq i \leq m)$. The polynomial P is called

an *n-trivial trace identity*, or simply *n-trivial*, if it is a trace identity of $M_n(F)$. It is obvious that $f = x_1x_2 - x_2x_1$ is an n-trivial trace identity for all $n \in \mathbb{N}$. It is not difficult to see that $(x_1x_2 - x_2x_1)^2x_3x_4 - (x_1x_2 - x_2x_1)^2x_4x_3$ is a 2-trivial trace identity but not a 3-trivial trace identity. Motivated by the proof of Radjavi's Trace Theorem ([5, Theorem 2.2.1]) we state the following result.

Theorem 2.8. *Let $n \in \mathbb{N}$, K a field with $\operatorname{ch}(K) > n/2$ or $= 0$, and F a subfield of K. Let $\mathcal{A}$ be an F-algebra of triangularizable matrices in $M_n(K)$ with spectra in F, and f a polynomial in m noncommutative variables with coefficients from F that is not a 2-trivial trace identity. Then the F-algebra $\mathcal{A}$ is triangularizable if and only if f is a trace identity of $\mathcal{A}$.*

The following is a generalization of Kolchin's Theorem.

Theorem 2.9. *Let $n \in \mathbb{N}$, F a field with $\operatorname{ch}(F) > n/2$ or $= 0$, and $\mathcal{F}$ a family of triangularizable matrices in $M_n(F)$ with trace zero. Then, every semigroup of triangularizable matrices of the form $I + A$ with $A \in \mathcal{F}$ is triangularizable.*

The following question was asked in [4]. As pointed out there, an affirmative answer to the following question would be a sweeping generalization of a celebrated theorem of Brauer.

Question. *Letting $\mathcal{S}$ be any irreducible semigroup of triangularizable matrices in $M_n(K)$ with spectra in a subfield F of K, must $\mathcal{S}$ be defined on F? In other words, does there exist an invertible matrix $T \in M_n(K)$ such that $T^{-1}\mathcal{S}T \subseteq M_n(F)$?*

We now give an affirmative answer to the Brauer type question above under the weaker hypothesis that the semigroup in the question has traces in the subfield F provided the subfield F is k-closed for each k dividing n with $k > 1$, or it is finite.

Theorem 2.10. *(i) Let $n > 1$, K a field, F a subfield of K that is k-closed for each k dividing n with $k > 1$, and $\mathcal{S}$ an irreducible semigroup in $M_n(K)$ such that $\{0\} \neq \operatorname{tr}(\mathcal{S}) \subseteq F$. Then, after a similarity, $\operatorname{Alg}_F(\mathcal{S}) = M_n(F)$, and hence $\mathcal{S}$ is defined over F. In particular, if F is algebraically closed, then, after a similarity, $\operatorname{Alg}_F(\mathcal{S}) = M_n(F)$ and so $\mathcal{S}$ is defined over F.*

(ii) Let $n > 1$, K a field, F a finite subfield of K, and $\mathcal{S}$ an irreducible semigroup in $M_n(K)$ such that $\{0\} \neq \operatorname{tr}(\mathcal{S}) \subseteq F$. Then $\mathcal{S}$ is finite and is defined over F.

Here is a characterization of all fields F for which Burnside's Theorem holds in $M_n(F)$.

Theorem 2.11. *Let F be a field and $n > 1$. The following are equivalent.*

(i) The only irreducible algebra in $M_n(F)$ is $M_n(F)$.

(ii) Every irreducible family of matrices in $M_n(F)$ is absolutely irreducible.

(iii) The commutant of every irreducible family of of matrices in $M_n(F)$ consists of scalars.

(iv) Every non-scalar matrix in $M_n(F)$ has a nontrivial hyperinvariant subspace.

(v) The field F is k-closed for all k dividing n with $k > 1$.

Using Burnside's Theorem and the notion of simultaneous triangularization, one can present a simple proof of the following theorem of Wedderburn (see [7] and [10, Theorem 2.2.13]).

Theorem 2.12 (Wedderburn). *Let F be a field and $\mathcal{A}$ a finite-dimensional algebra over the field F. If the algebra $\mathcal{A}$ is spanned by nilpotents as a vector space over F, then $\mathcal{A}$ is nilpotent as an algebra.*

For each finite subfamily $\{A_1, ..., A_m\}$ of $\mathcal{F}$ and for every $\epsilon > 0$ there exist a reducible family $\{T_1, ..., T_m\}$ satisfying

$$\|A_j - T_j\| < \epsilon,$$

for every $1 \leq j \leq m$. Then $\mathcal{F}$ is reducible.

Let R be a subring of a field F. By an *R-algebra $\mathcal{A}$* in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ (resp. $M_n(D)$), we mean a subring of $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ (resp. $M_n(D)$) that is closed under scalar multiplication by the elements of the subring R. For a collection $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ (resp. $M_n(D)$), we use $\mathrm{Alg}_R(\mathcal{C})$ to denote the R-algebra generated by $\mathcal{C}$. By $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ we simply mean $\mathrm{Alg}_Z(\mathcal{C})$, where Z denotes the center of D. For $A \in M_n(D)$, we say that $\lambda \in D$ is an *inner eigenvalue of A relative to a member $\mathcal{M}$ of a triangularizing chain $\mathcal{C}$* for A if there exists a column vector $x \in \mathcal{M}$ such that $Ax - x\lambda \in \mathcal{M}_-$, where $\mathcal{M}_-$ is the predecessor of $\mathcal{M}$ in $\mathcal{C}$ (note that $\dim \mathcal{M}/\mathcal{M}_- = 1$). If $D = K$, then the inner eigenvalues of $A \in M_n(K)$ relative to the members of a triangularizing chain $\mathcal{C}$ for A are the eigenvalues of A. If $A \in M_n(D)$ has inner eigenvalues in F relative to the members of a triangularizing chain for A, then it is easy to verify that the inner eigenvalues of A relative to the members of any other triangularizing chain for A are in F. For a given field F and $k \in \mathbb{N}$ with $k > 1$, we say that F is *k-closed* if every polynomial of degree k over F is reducible over F. It is plain that a field F is algebraically closed iff F is k-closed for all $k \in \mathbb{N}$ with $k > 1$. It can be shown that finite fields are not k-closed for all $k \in \mathbb{N}$ with $k > 1$. For a collection $\mathcal{F}$ of matrices in $M_n(D)$, we say that $\mathcal{F}$ is defined over a subfield F of the center of D if there exists $S \in \mathrm{GL}_n(D)$ such that $S^{-1}\mathcal{F}S \subseteq M_n(F)$.

Here is a useful lemma.

Lemma 1.5. *Let $\mathcal{V}$ be a right (resp. left) vector space over a division ring D, $\mathcal{S}$ a semigroup in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$, and T a nonzero right (resp. left) linear transformation in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. If $\mathcal{S}$ is irreducible, then so is $T\mathcal{S}|_{\mathcal{R}}$, where $\mathcal{R} = T\mathcal{V}$ is the range of T.*

We now use the preceding lemma to give a simple proof of Levitzki's Theorem on division rings.

Theorem 1.6 (Levitzki's Theorem). *Let D be a division ring and $n \in \mathbb{N}$. Then every semigroup $\mathcal{S}$ of nilpotent matrices in $M_n(D)$ is triangularizable.*

Levitzki's Theorem implies the following result which shows that the triangularizability of a collection of triangularizable matrices with inner eigenvalues in the center of a division ring D does not depend on the ground division ring D.

Corollary 1.7. *Let $D \subset D'$ be two division rings, F a subfield of $Z(D) \cap Z(D')$, $n \in \mathbb{N}$, and $\mathcal{F}$ a family of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable over D if and only if it is triangularizable over D'. In particular, a collection of nilpotent matrices in $M_n(D)$ is triangularizable if and only if it is triangularizable over any division ring D' that includes D.*

The following is also a consequence of Levitzki's Theorem.

Theorem 1.8. *Let D be a division ring, F its center, $\mathcal{V}$ a finite-dimensional vector space with dimension greater than one over D, and $\mathcal{F}$ a triangularizable family of linear transformations in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ such that the F-algebra generated by $\mathcal{F}$ contains a nonzero nilpotent transformation. Then $\mathcal{F}$ has a nontrivial hyperinvariant subspace.*

We conclude this section with the following result of Radjavi which extends a well-known result of Engel about triangularization of Lie algebras of nilpotent transformations ([5, Corollary 1.7.6]) as well as Jacobson's Theorem ([5, Corollary 1.7.4])

to finite-dimensional vector spaces over division rings. Also note that this result
be considered as a generalization of Levitzki's Theorem. It is also worth noting t
the proof of the theorem below is identical to that of Theorem 1.7.3 of [5].

Theorem 1.9 (Radjavi). *Let $\mathcal{V}$ be a left or right finite-dimensional vector space
a division ring D. A set $\mathcal{N}$ of nilpotent transformations in $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ is triangulariz
if it has the property that whenever A and B are in $\mathcal{N}$, there is a noncommuta
polynomial p such that $AB + p(A, B)A$ is in $\mathcal{N}$.*

2. Main results

The following is a Wedderburn-Artin type theorem for irreducible F-algebras o
algebraic matrices in $M_n(D)$. Note that no finite-dimensionality assumption is
on the F-algebra nor on the ground division ring. We do not even assume that
ground division ring is algebraic over the subfield F nor over its center.

Theorem 2.1. *Let D be a division ring, F a subfield of its center, and $\mathcal{A}$ a
reducible F-algebra of F-algebraic matrices in $M_n(D)$. Let $r \in \mathbb{N}$ be the sma
nonzero rank present in $\mathcal{A}$. Then, the integer r divides n and after a simil
$\mathcal{A} = M_{n/r}(\mathcal{D}_r)$, where $\mathcal{D}_r$ is an irreducible division F-algebra of F-algebraic mat
in $M_r(D)$. Moreover, the integer r divides $\mathrm{rank}(A)$ for all $A \in \mathcal{A}$. In particular,
a similarity, $\mathcal{A} = M_n(\mathcal{D}_1)$, where $\mathcal{D}_1$ is an F-algebraic subdivision ring of D
only if $r = 1$.*

Remark. *Every irreducible F-algebra of F-algebraic matrices in $M_n(D)$ include
identity matrix and is simple artinian, both as a ring and as an algebra.*

The following result can be thought of as a generalization of Burnside's Theore
irreducible F-algebras of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenv
in the subfield F.

Theorem 2.2. *Let D be a division ring, F a subfield of its center, and $\mathcal{A}$ an
ducible F-algebra of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues
Then, after a similarity, $\mathcal{A} = M_n(F)$. Therefore, $\mathcal{A}$ is defined over F, $\mathcal{A}$ is abso
irreducible, and the subfield F is k-closed for each $k = 2, \dots, n$.*

Let F be a field, and $\mathcal{C}$ a collection of matrices in $M_n(F)$. A polynomial
m noncommutative variables with coefficients from F is called a *nilidentity* o
$P(A_1, \dots, A_m)$ is nilpotent for all $A_i \in \mathcal{C}$ $(1 \leq i \leq n)$. The polynomial P is call
n-trivial nilidentity, or simply *n-trivial*, if it is a nilidentity of $M_n(F)$. The third
of the following corollary extends a special case of a result of Guralnick to di
rings (see [2]). Part (iv) extends Lemma 1.3.7 of [5].

Theorem 2.3. *Let D be a division ring and F a subfield of its center. Let $\mathcal{A}$
F-algebra of triangularizable matrices in $M_n(D)$ with inner eigenvalues in F.*

(i) The F-algebra $\mathcal{A}$ is triangularizable iff $\mathcal{A}$ has a nil-identity that is not 2-t

*(ii) The F-algebra $\mathcal{A}$ is triangularizable if $\mathrm{rank}(P(A_1, \dots, A_m)) \leq 1$ for all A_i
$\mathcal{A}$, where P is a polynomial in m noncommutative variables over F for which
exists $B_i \in M_2(F)$ $(1 \leq i \leq m)$ such that $\mathrm{rank}(P(B_1, \dots, B_m)) > 1$.*

(iii) The F-algebra $\mathcal{A}$ is triangularizable iff $AB - BA$ is nilpotent for each A, B

*(iv) If $\mathrm{rank}(AB - BA) \leq 1$ for each $A, B \in \mathcal{A}$, then the F-algebra $\mathcal{A}$ is trian
izable.*

to a subfamily of all upper triangular matrices, namely the class of triangularizable matrices. Perhaps one of main goals of simultaneous triangularization is to provide necessary and/or sufficient conditions for certain collections of matrices, e.g., semigroups of matrices, to be triangularizable. Having said that, I suppose, it is safe to say that triangularization theory over general unital rings does not exist yet! Even over general division rings, the theory is still in its infancy. For instance, we do not know yet whether a commuting pair of triangularizable matrices over a general division ring is triangularizable. However, the notion of simultaneous triangularization in both finite and infinite dimensions, over general fields and arbitrary Banach and Hilbert spaces, has been extensively studied in the literature (see [5] for a nice exposition of the subject, and the references therein).

To set the stage, let us begin by establishing some definitions and standard notation. Throughout this talk, unless otherwise stated, D and K denote a division ring and a field, respectively; and F always stands for a subfield of the center of D or a subfield of K. As is usual, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$ denotes the division ring of quaternions. We view the members of $M_n(D)$ as linear transformations acting on the left of D^n, where D^n is the right vector space of all $n \times 1$ column vectors with entries in D. We use $\mathcal{V}$ to denote a right or a left vector space over a division ring D. We use $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ to denote the set (in fact the ring) of right (resp. left) linear transformations on $\mathcal{V}$. If $\mathcal{V}$ is any n-dimensional right (resp. left) vector space over a division ring D, then, by fixing a basis for $\mathcal{V}$, we see that the correspondence of a linear transformation to its matrix representation with respect to the fixed basis defines a ring isomorphism from $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ onto $M_n(D)$ (resp. $M_n(D^{op})$). For a collection $\mathcal{F}$ of linear transformations, we use $\mathcal{F}'$ to denote the commutant of $\mathcal{F}$; more precisely, $\mathcal{F}' := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) : ST = TS$ for all $S \in \mathcal{F}\}$. A subspace $\mathcal{M}$ is *invariant* for a collection $\mathcal{F}$ of linear transformations if $T\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ for all $T \in \mathcal{F}$; $\mathcal{M}$ is *hyperinvariant* for a collection $\mathcal{F}$ of linear transformations if $T\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ for all $T \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$. A collection $\mathcal{F}$ of linear transformations is called *reducible* if $\mathcal{F} = \{0\}$ or it has a nontrivial invariant subspace. This definition is slightly unconventional, but it simplifies some of the statements in what follows. A collection $\mathcal{F}$ of linear transformations is called *simultaneously triangularizable* or simply *triangularizable* if there exists a maximal chain of subspaces of $\mathcal{V}$ each of which is invariant for $\mathcal{F}$. In case the underlying space is finite-dimensional, it is easily seen that triangularizability of a family of linear transformation is equivalent to the existence of a basis for the vector space such that all transformations in the family have upper triangular matrix representation with respect to that basis. The notion of reducibility and triangularizability for collections of linear transformations can be expressed in terms of idempotents as follows. Recall that a *projection* or an *idempotent* is a linear transformation $P \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ satisfying $P^2 = P$. If P is an idempotent,

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{V} : Px = x\} = P\mathcal{V}, \ \mathcal{N} := \{x \in \mathcal{V} : Px = 0\} = \ker P,$$

then P is said to be *the projection on* $\mathcal{M}$ *along* $\mathcal{N}$, and $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ are *complementary* subspaces of $\mathcal{V}$, i.e., $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{V}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Let P and Q be two idempotents. By definition $P \leq Q$ if $PQ = P = QP$; equivalently $P\mathcal{V} \subset Q\mathcal{V}$, or $\ker P \supset \ker Q$ (see [5, Lemma 7.5.2]). By the proof of [5, Theorem 6.4.5(i)], a subspace $\mathcal{M}$ is invariant

(resp. **hyperinvariant**) for a family $\mathcal{F}$ of transformations iff there exists a projection P on $\mathcal{M}$ such that $TP = PTP$ for all $T \in \mathcal{F}$ (resp. $TP = PTP$ for all $T \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$). Therefore, if $\dim \mathcal{V} < \infty$, then triangularizability of a family of linear transformation is equivalent to the existence of a finite chain of idempotents P_i ($i = 0, \dots, \dim \mathcal{V}$) such that

$$0 = P_0 < P_1 < \cdots < P_{\dim \mathcal{V}} = I,$$

and that $TP_i = P_iTP_i$ for all $T \in \mathcal{F}$ and $i = 1, \dots, \dim \mathcal{V}$. If the underlying space $\mathcal{X}$ happens to be a finite-dimensional real or complex Hilbert space (resp. Banach space), we may assume that $\|P_i\| = 1$ (resp. $\|P_i\| \leq \sqrt{\dim \mathcal{X}}$ in view of [1, Theorem 4.15]) for all $1 \leq i \leq \dim \mathcal{X}$, where $\|.\|$ denotes the operator norm induced by the norm of $\mathcal{X}$.

We start off with the following result whose proof makes use of the the above definition of the triangularizability.

Theorem 1.1 (Near Triangularizability Theorem). *Let $\mathcal{F}$ be a family of linear transformations on a finite-dimensional vector space $\mathcal{V}$ over $\mathbb{F}$ with the following property: For each finite subfamily $\{A_1, \dots, A_m\}$ of $\mathcal{F}$ and for every $\epsilon > 0$ there exist a triangularizable family $\{T_1, \dots, T_m\}$ satisfying*

$$\|A_j - T_j\| < \epsilon,$$

for every $1 \leq j \leq m$ where $\|.\|$ denotes any given norm on $\mathcal{B}(\mathcal{V})$. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable.

Remark. The counterparts of the above Near Triangularizability Theorem as well as the Near Reducibility Theorem below hold for collections of left or right linear transformations on a left or right finite-dimensional vector space over $\mathbb{H}$, the division ring of quaternions.

The following is a stronger version of the above Near Triangularizability Theorem whose counterpart holds for collections of $\mathcal{C}_p$ operators on real or complex Hilbert spaces (see [10, Theorem 3.3.3]).

Theorem 1.2. *Let $\mathcal{F}$ be a family of linear transformations on a finite-dimensional vector space $\mathcal{V}$ over $\mathbb{F}$ with the following property: For each finite subfamily $\{A_1, \dots, A_m\}$ of $\mathcal{F}$, there is a constant $K > 0$ such that for every $\epsilon > 0$ there exist a triangularizable family $\{T_1, \dots, T_m\}$, and an invertible transformation $S = S_\epsilon$ satisfying*

$$\|T_j\| \leq K, \ \|S^{-1}A_jS - T_j\| < \epsilon,$$

for every $1 \leq j \leq m$ where $\|.\|$ denotes any given norm on $\mathcal{B}(\mathcal{V})$. Then $\mathcal{F}$ is triangularizable.

Recall that given a transformation T, a collection $\mathcal{F}$ of linear transformations on a real or complex vector space $\mathcal{V}$, and a norm $\|.\|$ on $\mathcal{B}(\mathcal{V})$, by definition $\operatorname{dist}(\mathcal{F}, T) = \inf\{\|A - T\| : A \in \mathcal{F}\}$. The following result is a quick consequence of the Near Triangularizability Theorem.

Corollary 1.3. *Let $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}$ ($i \in \mathbb{N}$) be nonempty families of linear transformations on a finite-dimensional real or complex vector space $\mathcal{V}$. If each family $\mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) is triangularizable and $\lim_n \operatorname{dist}(\mathcal{F}_n, A) = 0$ for all $A \in \mathcal{F}$, then $\mathcal{F}$ is triangularizable.*

Theorem 1.4 (Near Reducibility Theorem). *Let $\mathcal{F}$ be a family of linear transformations on a finite-dimensional vector space $\mathcal{V}$ over $\mathbb{F}$ with the following property:*

Examples

1. Let $G = S_m$ and $\lambda = \epsilon$, the altenative character of S_m. Then $\bar{\Delta} = Q_{m,n}$, the set of strictly increasing sequences of integers of length m chosen from $1, 2, \ldots, n$. So

$$\beta = (1, 2, \cdots, m), \quad \gamma = (n - m + 1, \cdots, n - 1, n) \in \bar{\Delta}$$

and

$$r(\beta) = \frac{m(m+1)}{2} = \min\{r(\alpha) : \alpha \in \bar{\Delta}\},$$
$$r(\gamma) = nm - \frac{m(m-1)}{2} = \max\{r(\alpha) : \alpha \in \bar{\Delta}\}.$$

Hence

$$\min_{\alpha \in \bar{\Delta}} r(\alpha) + \max_{\alpha \in \bar{\Delta}} r(\alpha) = m(n+1)$$

2. Let $G = S_m$ and $\lambda = 1$, the principal character of G. Then $\bar{\Delta} = \Delta = G_{m,n}$, the totality of nondecreasing sequences of integers of length m chosen from $1, 2, \ldots, n$. Thus

$$\beta = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{m \text{ times}}), \quad \gamma = (\underbrace{n, n, \cdots, n}_{m \text{ times}}) \in \bar{\Delta}$$

and

$$r(\beta) = m = \min\{r(\alpha) : \alpha \in \bar{\Delta}\},$$
$$r(\gamma) = nm = \max\{r(\alpha) : \alpha \in \bar{\Delta}\}.$$

Hence

$$\min_{\alpha \in \bar{\Delta}} r(\alpha) + \max_{\alpha \in \bar{\Delta}} r(\alpha) = m(n+1).$$

In general, if $\bar{\Delta} = \Delta$, then the property (0.1) holds.

References

[1] M. Isaacs, Character theory of finite groups, Academic Press, 1976.

[2] M. Marcus, Finite dimensional multilinear algebra, Part I, Marcel Dekker, 1973.

[3] R. Merris, Multilinear algebra, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

A TASTE OF SIMULTANEOUS TRIANGULARIZATION IN FINITE DIMENSIONS

BAMDAD R. YAHAGHI

School of Mathematics
Institute for Studies in Theoretical Physics and Mathematics (IPM)
bamdad5@ipm.ir

Abstract. Let V be a finite-dimensional right (resp. left) vector space over a general division ring. A collection of right (resp. left) linear transformations on V is called simultaneously triangularizable or simply triangularizable if there exists a basis for V with respect to which all transformations in the collection have upper triangular matrix representation. In this talk, I will touch upon the notion of simultaneous triangularization in finite dimensions over both general fields and division rings hereby I will attempt to present a short survey of the subject.

[*Man muss immer generalisieren.* [One must always generalize.] -Carl Jacobi]

1. Introduction and preliminaries

Upper triangular matrices are a useful class of matrices to work with, even over general rings. Observe that

(i) An upper triangular matrix over a ring is nilpotent if and only if the entries on the main diagonal of the matrix are all nilpotent.

(ii) An upper triangular matrix over a unital ring is invertible if and only if the entries on the main diagonal of the matrix are all invertible.

(iii) Let R be a unital ring and $T \in M_n(R)$ an upper triangular matrix. Then, the equation $TX = Y$ has a unique solution for X for every $n \times 1$ (column) matrix Y if and only if the matrix T is invertible if and only if the entries on the main diagonal of the matrix T are all invertible.

For the above reasons, one might be interested in the family of all upper triangular matrices, and more generally in all families of matrices each of which is similar

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A30; Secondary 20M20 47A15.

Key words and phrases. Semigroup, F-algebra, Trace, Spectra, Inner eigenvalues Irreducibility, Triangularizability, F-algebraic.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

A NOTE ON SYMMETRY CLASSES OF TENSORS

Y. ZAMANI

Sahand University of Technology, Tabriz

ABSTRACT. In this paper, we present the property

$$\min_{\alpha\in\bar{\Delta}} r(\alpha)+\max_{\alpha\in\bar{\Delta}} r(\alpha)=m(n+1), \tag{0.1}$$

of $\bar{\Delta}$ for linear characters of G in a special case. Some examples are also given.

1. INTRODUCTION

Let V be an n-dimensional inner product space over $\mathbb{C}$ and let G be a subgroup of the full symmetric group S_m. The m-th tensor power of V is denoted by $V^{\otimes m}$ and for every $\sigma\in S_m$, $P(\sigma)$ denotes the linear operator of $V^{\otimes m}$ satisfying

$$P(\sigma)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)}.$$

Suppose λ is a complex irreducible character of G and define the symmetrizer associated with the *character* λ by

$$T(G,\ \lambda)=\frac{\lambda(id)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\lambda(\sigma)P(\sigma),$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20C30; Secondary 15A69.
Key words and phrases. Symmetry class of tensors.

($|G|$ denotes the order of G and id the identity of G). The range of $T(G,\ \lambda)$

$$V_\lambda(G)=T(G,\ \lambda)(V^{\otimes m})$$

is called the *symmetry class of tensors* associated with λ.
The elements of $V_\lambda(G)$ of the form $T(G,\ \lambda)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)$ are called *decomposable symmetrized tensors* and denoted by $v_1*\cdots*v_m$.
We denote by $\Gamma_{m,n}$ the set of the sequences $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, where $1\le\alpha_i\le n$. Then the group G acts on $\Gamma_{m,n}$ by $\sigma.\alpha=(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,\alpha_{\sigma^{-1}(m)})$, where $\sigma\in G$ and $\alpha\in\Gamma_{m,n}$. Let $o(\alpha)=\{\sigma.\ \alpha:\ \sigma\in G\}$ be the *orbit* of α, and G_α be the *stabilizer subgroup*, i.e., $G_\alpha=\{\sigma\in G:\ \sigma.\ \alpha=\alpha\}$, and consider a system Δ of distinct representatives of the orbits of $\Gamma_{m,n}$. Let $\{e_1,\ldots,e_n\}$ be a basis of V. The set

$$\{e^{\otimes}_\alpha=e_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes e_{\alpha_m}:\alpha\in\Gamma_{m,n}\},$$

is a basis of $V^{\otimes m}$. Therefore

$$\{e^{*}_\alpha=e_{\alpha_1}*\ldots*e_{\alpha_m}:\alpha\in\Gamma_{m,n}\},$$

spans the symmetry class of tensors $V_\lambda(G)$.
We use $\bar{\Delta}$ to denote the subset of Δ

$$\bar{\Delta}=\{\alpha\in\Delta:[\lambda,1_{G_\alpha}]\neq0\},$$

where $[\ ,\ ]$ denotes the inner product of characters. It is well known that

$$\bar{\Delta}=\{\alpha\in\Delta:e^*_\alpha\neq0\}.$$

For any $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\Gamma_{m,n}$, we define $r(\alpha)=\sum_{i=1}^n\alpha_i$. Clearly, the function $r:\Gamma_{m,n}\to N$ is constant on the orbit α. We obtain the following results.

2. RESULTS

Corollary 2.1. *Let λ be a linear character of G. Then we have*

$$\frac{1}{|\bar{\Delta}|}\sum_{\alpha\in\bar{\Delta}}r(\alpha)=\frac{m(n+1)}{2}$$

Corollary 2.2. *Let λ be a linear character of G and let $A=\{r(\alpha):\alpha\in\bar{\Delta}\}$. If the elements of A are consecutive, then*

$$\min_{\alpha\in\bar{\Delta}} r(\alpha)+\max_{\alpha\in\bar{\Delta}} r(\alpha)=m(n+1).$$

2. A more general case

In general case, $\frac{G}{H}$ is a measurable space with a strongly quasi-invariant measure μ induced from a rho-function ρ.In this section, we characterize those conditions on (G,H) under which G has a representation on $L^2(\frac{G}{H})$ which play the role of a quasi-regular representation.

Let H be a closed subgroup of G and suppose that for each $x \in G$ there is some $h(x) \in C$ such that $\pi(x) : L^2(\frac{G}{H}) \longrightarrow L^2(\frac{G}{H})$ defined by $(\pi(x)\varphi)(yH) = h(x)\varphi(x^{-1}yH)$ is unitary. Then $|h(x)|^2\rho(xy) = \rho(y)$ for each $y \in G$. In other words, we can define such a unitary if and only if $\frac{\rho(y)}{\rho(xy)}$ depends only on x. For example, if there is a rho-function ρ satisfies $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y), x, y \in G$, then $\frac{\rho(y)}{\rho(xy)} = \frac{1}{\rho(x)}$ just depends on x.

Thus we will achieve the following result:

Theorem 2.1. *The existence of a homomorphism rho-function on (G,H) is a necessary and sufficient condition to have a representation $\pi : G \longrightarrow U(L^2(\frac{G}{H}))$, where $\pi(x) : L^2(\frac{G}{H}) \longrightarrow L^2(\frac{G}{H})$ given by $(\pi(x)\varphi)(yH) = h(x)\varphi(x^{-1}yH)$, for some constant $h(x)$.*

Example 2.2. In a special case that G can be written as the semidirect product of two groups H and K, $G = H \times_\tau K$, then one can define ρ by $\rho(x) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$, where $x = kh \in G, h \in H, k \in K$.

References

[1] A.A. Arefijamal and R.A. Kamyabi-Gol, *A Characterization of Square Integrable Representations Associated with CWT*, submitted.

[2] J.P. Antoine, R. Murenzi, P. Vendergheynst, and S. Twareque Ali, *Two Dimensional Wavelets and Their Relatives*, Cambridge University Press, (2003).

[3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM Review, (1999).

[4] M. Duflo and C.C. Moor, *On the Regular Representations of Nonunimodullar Locally Compact Groups*, J. Func. Anal. 21(1976), 209-243.

[5] M. Fashandi, R.A. Kamyabi Gol, A. Niknam and M.A. Pourabdollah, *Continuous Wavelet Transform on a Special Homogeneous Space*, J. Math. Phys., vol.44, no.9 (2003), 4260-4266.

[6] J.M.G. Fell and R.S. Doran, *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups and Banach *-Algebraic Bundles*, Academic Press, Vol.1, (1988).

[7] G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC PRESS, (1995).

[8] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons Inc., 2nd ed., (1999).

[9] H. Fuhr, *Abstract Harmonic Analysis of continuous Wavelet Transforms*, Springer-Verlag, (2005).

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

WAVELETS AND HOMOGENEOUS SPACES

N. TAVALLAEI[1*] AND R.A. KAMYABI GOL[2]

[1]Ferdowsi University, Mashhad, Iran and [2] Ferdowsi University, Mashhad, Iran

ABSTRACT. Continuous wavelet transforms are obtained through the action of a group G via a unitary representation on $L^2(R)$. We consider a more general case $L^2(S)$, where S is a homogeneous space which may have or doesn't have a G-invariant Radon measure.

Let G be a locally compact topological group with left Haar measure dx and H be a closed subgroup of G. It has been shown in [7] that $C_c(\frac{G}{H})$ consists of all functions of the form Pf, where f is a continuous function on G with compact support and

$$Pf(xH) = \int_H f(x\xi)\, d\xi.$$

By using a rho-function ρ we can construct the Hilbert space $L^2(\frac{G}{H})$, when $\frac{G}{H}$ considered as a measurable space with the strongly quasi-invariant Radon measure μ induced from rho-function ρ. In this Hilbert space, for each $\varphi \in C_c(\frac{G}{H})$,

$$\| \varphi \|_{L^2(\frac{G}{H})} = \| f^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \|_{L^2(G)}$$

where $f \in C_c(G)$ is so that $|\varphi|^2 = Pf$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C40; Secondary 43A85.
Key words and phrases. Locally Compact Topological Group, Haar Measure, Homogeneous Space, Rho-Function, Invariant Measure, Strongly Quasi-Invariant Measure, Unitary Representation, Wavelet.

* Speaker.

1. On a special kind of homogeneous spaces

In this section, we assume that $\frac{G}{H}$ has a G-invariant Radon measure μ such that for every $f \in C_c(G)$,

$$\int_{\frac{G}{H}} Pf(xH)\, d\mu(xH) = \int_G f(x)\, d(x).$$

Via each $x \in G$, we can define an isometry $\pi(x)$ from $C_c(\frac{G}{H})$ onto $C_c(G)$ as follows

$$\pi(x)(Pf) = P(L_x f), \qquad f \in C_c(G)$$

Theorem 1.1. *There is a unique unitary extension* $\pi(x) : L^2(\frac{G}{H}) \longrightarrow L^2(\frac{G}{H})$. *Moreover* $\pi : G \longrightarrow U(L^2(\frac{G}{H}))$ *is a continuous unitary representation.*

From now on, let (π^M, M) be a square-integrable subrepresentation of $\pi : G \longrightarrow U(L^2(\frac{G}{H}))$, $(\pi(x)\varphi)(yH) = \varphi(x^{-1}yH)$. Fix an admissible vector $\psi \in M$ and define a bounded linear operator $T : M \longrightarrow L^2(G)$ by $T\varphi(x) = \langle \varphi, \pi(x)\psi \rangle$.

Theorem 1.2. *For every* $\varphi \in M$ *and every* $x \in G$, $T\pi(x)\varphi = L_x(T\varphi)$ *and* T *is a bounded linear operator.*

One can show that T^*T is a bounded linear operator commutes with $\pi^M(x)$. So T is a scalar multiple of an isometry U, where $U = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} T$, and

$$\forall \varphi \in M; \qquad \| T\varphi \|_2 = \sqrt{C_\psi}\, \| \varphi \|_2.$$

Define an isometry $W_\psi : M \leq L^2(\frac{G}{H}) \longrightarrow L^2(G)$, by $W_\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} T(\varphi)$. Also $C_\psi = \frac{1}{\|\psi\|_2^2} \int_G |\langle \psi, \pi(x)\psi \rangle|^2\, dx$.

Theorem 1.3 (Inversion Formula). *For each* $\varphi \in M$, *the following equality (weak-sense) satisfies*

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_G (W_\psi \varphi)(x)\pi(x)\psi\, dx.$$

In other words, $I_M = \frac{1}{C_\psi} \int_G \langle \cdot, \pi(x)\psi \rangle\, \pi(x)\psi\, dx$.

Henceforth, $I_M = \frac{1}{C_\psi} \int_G \langle \cdot, \pi(x)\psi \rangle\, \pi(x)\psi\, dx$ and if $W_\psi(\varphi)$ is given, we can construct $\varphi \in M$ as follows

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_G (W_\psi \varphi)(x)\pi(x)\psi\, dx.$$

3. The expression of the solution of Problem 2

When the solution S_E of Problem 1 is nonempty , it is easy to verify that S_E is a closed convex set,therefore we have the following results.

Theorem 3.1. *Given $\tilde{A} \in R^{n\times n}$.Under the hypothesis of Theorem 1, if Problem 1 is solvable,then Problem 2 has unique solution A^*,which can be expressed as*

$$A^* = A_0 + U \begin{pmatrix} \tilde{A_{11}} W_2 W_2^T & 0 \\ 0 & \tilde{A_{22}} Q_2 q_2^T \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

Where A_0, U are the same as in (2.9) and (2.3),respectively

$$\tilde{A_{11}} = U_1^T(\tilde{A}_1 - A_0)U_1 \ , \ \tilde{A_{22}} = U_2^T(\tilde{A}_1 - A_0)U_2 \ , \ \tilde{A}_1 = \frac{\tilde{A} + P\tilde{A}P}{2}. \tag{3.2}$$

Now we give the procedure to compute the optimal approximate solution A^* of the Problem 2.

Algorithm

(1) Input A, X, P
(2) Calculate P_1, P_2, U_1, U_2, U according to (2.1) and (2.2)
(3) Compute X_1, X_2 according to (2.5)
(4) Find the SVDs of X_1, X_2 according to (2.4) and (2.6)
(5) If (2.7) holds, then continue; otherwise, go to 1
(6) Compute A_0 according to (2.9)
(7) calculate A^*,According to (3.1)

References

[1] H.C. Chen,The SAS domain decomposition method for structural analysis,ph.D.Thesis,Department of computer science,University of Illinois at Urbana-Champaign,IL,1988

[2] D.Boley, G.H Gloub,A survey of matrix inverse eigenvalue problems,Inverse Problem 3 (1987)595-622(printed in the UK)

Definition 1.2. Let $P \in R^{n\times n}$ be a given generalized reflection matrix. A matrix $A \in R^{n\times n}$ is said to be an $n \times n$ reflexive matrix with respect to P if A satisfies A=PAP;we denote the set of all $n \times n$ reflexive matrices by $R_r^{n\times n}(P)$ and $A \in R^{n\times n}$ is said to be an $n\times n$ anti-reflexive matrices with respect to P if A satisfies A=-PAP,the set of all $n \times n$ anti-reflexive matrices be denoted by $R_a^{n\times n}(P)$.

The following Problems are studied.

Problem 1. Given X=$(x_1, x_2, ..., x_m) \in R^{n\times m}$, S $\subseteq R^{n\times n}$, Λ= diag$(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m) \in R^{m\times m}$, Find A$\in$ S such that AX=ΛX, where $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m$ are the eigenvalues of matrix A, x_i is a eigenvector of matrix A associated with $\lambda_i (i = 1, 2, ...m)$.

Problem 2. Given $\tilde{A} \in R^{n\times n}$, find $A^* \in S_E$ such that $\|\tilde{A} - A^*\| = \inf_{A\in S_E} \|\tilde{A} - A\|$ where S_E is the solution set of Problem 1.

These problems initially arise in the design and modification of mass-spring systems and dynamic structures have been applied in various areas.Many important results have been achieved on the discussions of the above problems associated with many kinds of matrix set S, such as Jacobi matrices, symmetric(nonnegative definite)matrices and so on.

2. Solvability conditions of Problem 1

Let P$\in R^{n\times n}$ be a given generalized reflection matrix.We have the following lemmas:

Lemma 2.1. *(i) A$\in R_r^{n\times n}(P)$ iff PA=AP,*
(ii) A$\in R_a^{n\times n}(P)$ iff PA=-AP.

Lemma 2.2. $R^{n\times n} = R_r^{n\times n}(P) \dot{+} R_a^{n\times n}(P)$

Lemma 2.3. *Given $\tilde{A} \in R^{n\times n}$,then there exist unique $\tilde{A}_1 \in R_r^{n\times n}$ and $\tilde{A}_2 \in R_a^{n\times n}(p)$ such that $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ and $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$=0 where,*

$$\tilde{A}_1 = \tfrac{\tilde{A}+P\tilde{A}P}{2},\ \tilde{A}_2 = \tfrac{\tilde{A}-P\tilde{A}P}{2}.$$

A$\in R^{n\times n}(p)$ if and only if that there exist M$\in R^{r\times r}$, H$\in R^{(n-r)\times(n-r)}$ such that

$$A=U\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}U^T.$$

Set

$$(2.1)\qquad P_1 = \frac{1}{2}(P + I) \qquad \text{and} \qquad P_2 = \frac{1}{2}(I - P),$$

it is easy to prove that P_1 and P_2 are orthogonal projection matrices,that is,

$$P_1^T = P_1^2 = P_1, \qquad P_1P_2 = 0, \qquad P_1 + P_2 = I.$$

Let rank(P_1)=r then rank(P_2)=$n - r$, and

$$(2.2)\qquad P_1 = U_1U_1^T,\ \ P_2 = U_2U_2^T,\ \ U_1 \in R^{n\times r},\ \ U_2 \in R^{n\times(n-r)}.$$

Assume $U = (U_1, U_2)$ then

$$(2.3)\qquad U \in OR^{n\times n}, \qquad P = P_1 - P_2 = U_1U_1^T - U_2U_2^T.$$

Lemma 2.4. *Let $X_1 \in R^{r\times m}$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m) \in R^{m\times m}$ are given, and the SVD of X_1 is*

$$(2.4)\qquad X_1 = W\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T = W_1 \sum_1 V_1^T.$$

where W=$(W_1, W_2)\in OR^{r\times r}$,V=$(V_1, V_2)\in OR^{m\times m}$, $W_1 \in R^{r\times r_1}$, $V_1 \in R^{m\times r_1}$, $r_1 =$ $rank(X_1)$, $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{r_1}), \sigma_i > 0, 1 \le i \le r_1$, then AX_1=$X_1\Lambda$ is solvable in $R^{r\times r}$ if and only if

$$X_1\Lambda X_1^+ = X_1\Lambda.$$

Theorem 2.5. *Given $X \in R^{n\times m}$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m) \in R^{m\times m}$.Let*

$$(2.5)\qquad U^TX = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, X_1 = U_1^TX \in R^{r\times m}, X_2 = U_2^TX \in R^{(n-r)\times m},$$

and the SVD of X_1 is the same as (2.3) and the SVD of X_2 is

$$(2.6)\qquad X_2 = Q\begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Z^T = Q_1\Sigma_2Z_1^T,$$

Where Q=$(Q_1, Q_2)\in OR^{(n-r)\times(n-r)}$, Z=$(Z_1, Z_2)\in OR^{m\times m}$,$Q_1 \in R^{(n-r)\times r_2}$, $Z_1 \in$ $R^{m\times r_2}$, $r_2 = rank(X_2)$,$\Sigma_2 = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{r_2})$,$\sigma_i > 0, i = 1, ..., r_2$, then $A\Lambda$=$X\Lambda$ is solvable in $R_r^{n\times n}(P)$if and only if

$$(2.7)\qquad X_1\Lambda X_1^+X_1 = X_1\Lambda, \qquad X_2\Lambda X_2^+X_2 = X_2\Lambda$$

and its general solution can be expressed as

$$(2.8)\ \ A = A_0 + U\begin{pmatrix} G_1W_2^T & 0 \\ 0 & G_2Q_2^T \end{pmatrix}U^T,\ \ \forall G_1 \in R^{r\times(r-r_1)}\text{and}G_2 \in R^{(n-r)\times(n-r-r_2)},$$

Where

$$(2.9)\qquad A_0 = U\begin{pmatrix} X_1\Lambda X_1^+ & 0 \\ 0 & X_2\Lambda X_2^+ \end{pmatrix}U^T, \quad \text{U is defined in (2.3).}$$

CLOSED FORM MATRIX FOR FOUR NODE QUADRILATERAL FINITE ELEMENT

MD.SHAFIQUL ISLAM

Department of Mathematics, University of Dhaka-1000,Bangladesh.
Email:mdshafiqul@yahoo.com

ABSTRACT. We investigate how the element matrix of a general quadrilateral element can be expressed in closed form by expanding and simplifying the four terms in the numerical integration summation and Gaussion quadrature rule. We develope a program, solved by Mathematica, to obtain the output of the desired matrix given the input only four vertices of quadrilateral. In this regard we enumerate three types of coordinate transformation. The performance is depicted by numerical example.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

OPTIMAL APPROXIMATION PROBLEM

A.R. SOHEILI , M. MAHDAVEI *, S. SALAHSHOUR

Department of Mathematics
University of Sistan & Baluchestan,
Zahedan, Iran

ABSTRACT. In this paper which involve relativity between Inverse eigenvalue problem for Reflexive matrix and Optimal Approximation, we get the sufficient and necessary condition for solving such problem.Furthermore,the algorithm to compute the optimal approximate solution.

1. INTRODUCTION

First we introduce some symbols and notations:$OR^{n\times n}$ denote the set of all $n \times n$ orthogonal matrices.A^+ be the Moore-Penrose generalized inverse of matrix A, $||.||$ be the Frobenius norm of a matrix and for A, B$\in$ $R^{n\times n}$, $(A, B) = tr(B^T A)$ denote the inner product of matrices A and B.

Definition 1.1. A matrix P is said to be generalized reflection matrix if P satisfies $P^T = P$ and $P^2 = I$(see[1,2]).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A57; Secondary 15A18.
Key words and phrases. Reflexive Matrix,Inverse eigenvalue problem,Optimal Approximation,Moore-Penrose generalized inverse of A.

Theorem 1.4. *Let $A^{(k)}$ be a symmetric positive definition matrix partitioned in a (2×2) block form, let $S^{(k)}$ be the corresponding Schur complement, and let $D^{(k)} = diag(A^{(k)}), D_1^{(k)} = diag(A_{11}^{(k)}), D_2^{(k)} = diag(A_{22}^{(k)})$. Let $B_{(2)}^{(k)}$ be defined by (1.7), where $A^{(k-1)}$ is symmetric positive definite. if;*

$$v_2^t(S^{(k)^{-1}} - A^{(k-1)^{-1}})v_2 \leq \omega^{-1}\hat{C}_A v_2^t D_2^{(k)^{-1}} v_2 \forall v_2 \tag{1.11}$$

Then

$$v^t(A^{(k)^{-1}} - B_{(2)}^{(k)^{-1}})v \leq \omega^{-1} C_A v^t D^{(k)^{-1}} v \forall v \tag{1.12}$$

Where;

$$C_A \leq \hat{C}_A(1 + \lambda_{min}^{-1}(D_1^{(k)^{-1}} A_{11}^{(k)})\lambda_{min}^{-1}(D_2^{(k)^{-1}} A_{22}^{(k)})) \tag{1.13}$$

Note that if $A_{22}^{(k)}$ is diagonal, then $\lambda_{min}(D_2^{(k)^{-1}} A_{22}^{(k)}) = 1$. On the other hand, $A_{11}^{(k)}$ has condition number 1. In practice, $\lambda_{min}(D_1^{(k)^{-1}} A_{11}^{(k)}) = 1$ is unacceptably small when the problem is strongly anisotropic, but this shortcoming has to be related to the fact that damped Jacobian smoothing performs poorly anyway in such cases. Results show that a standard approximation of A_{11} have disastrous effects on the whole process while methods based onmeeting some row-sum criterion like the MILU factorization of A_{11} do stabilize the procedure [4]. This was viewed as a further generalization of the definition of sparse block MILU[3] factorizations. Numerical experiments made on both 2D and 3D problems showed that the condition number was close to that of the two-level method. Further more, the method appeared robust in the presence of discontinuity, even when the material interfaces were not aligned with the coarse grid.

References

[1] R.E. Bank, T.F. Dupont, H. Yserentant, *The hierarchical basis multigrid method*. Numer. Math., **52** (1988) 427-458.

[2] W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer, Berlin, (1980).

[3] Y. Notay, *Optimal order preconditioning of finite difference matrices*. SIAM J. Sci. Comput., **21** (2000) 1991-2007.

[4] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing, New York, (1996).

[3] modified incomplete LU factorization

these properties, one often transforms the linear system by a suitable linear transformation. This process is known as preconditioning. Recursive orderings are level of orderings obtained by recursive (2×2) partitionings. The use of recursive orderings was at the same time supported by the concurrent development of multigrid and hierarchical based finite element methods [1,2]. The effectiveness of the solution was further greatly enhanced by the introduction of additional polynomial preconditioning steps, using an algebraic generalization of the multigrid technique.

1.1. Multilevel orderings. Recursive multilevel orderings together with successive 2×2 block factorizations lead to a multilevel approximation of the original matrix similar to the multigrid approximations. The multigrid method and the action of the preconditioner was indeed decomposed at each level into a fine grid component and a coarse grid correction consisting of the successive application of a restriction operator, the coarse grid correction itself and a prolongation operator was adopted. This interpretation led to the suggestion of exchanging the technique of stabilization by polynomial preconditioning and the insertion of smoothing stages before the restriction step and after the prolongation step, these smoothing stages being obtained through low degree polynomial preconditioning with classical smoothers such as damped Jacobian or ILU[1] preconditioners [4]. Analyse was made by the combination of these techniques with a smoothing procedure, much the same as the one used in standard multigrid algorithms, except that smoothing, which was not required on the finest grid [3].

Lemma 1.1. *Let $M^{(k)}$ be defined by*

$$(I - M^{(k)}A^{(k)}) = (I - R^{(k)}A^{(k)})(I - B^{(k)^{-1}}A^{(k)})(I - R^{(k)}A^{(k)}) \tag{1.1}$$

For given symmetric positive matrices; $A^{(k)}$, $B^{(k)}$ and $R^{(k)}$ is a symmetric relaxation operator for $A^{(k)}$. If $\rho(I - R^{(k)}A^{(k)}) \leq 1$, then $M^{(k)}$ is a symmetric positive definite and satisfies

$$\lambda_{min}(M^{(k)}A^{(k)}) \geq min(1, \lambda_{min}B^{(k)^{-1}}A^{(k)}) \tag{1.2}$$

$$\lambda_{max}(M^{(k)}A^{(k)}) \leq max(1. \lambda_{max}(B^{(k)^{-1}}A^{(k)})) \tag{1.3}$$

By induction, the Lemma relationship (1.1), ensures the positive definiteness of $B^{(l)}$ if the splittings associated with $R^{(k)}$ are convergent for all k[2]. Further than that,

[1] incomplete LU factorization

[2] Throughout this paper, $\lambda_{max}C$ and $\lambda_{min}C$ denote, respectively, the largest and the smallest eigenvalue of C.

inequalities (1.2), (1.3) show that smoothing cannot have an adverse effect on the eigenvalue distribution.

Theorem 1.2. *Let $M^{(k)}$, $k = 1, ..., l-1$, and $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $R^{(k)}$ are symmetric positive definite matrices, and $B^{(k)}$, $k = 2, ..., l-1$ is defined by;*

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & \\ A_{21}^{(k)} & M^{(k-1)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} \\ & I \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

For some 2×2 partitioning of $A^{(k)}$. Assume that;

$$\lambda_{max}(R^{(k)}A^{(k)}) \leq 1 \;\; k = 2, ..., l-1 \tag{1.5}$$

If, for some positive constants c_A, C_A such that $c_A < 2$, one has, for $k = 2, ..., l-1$,

$$-c_A v^t R^{(k)} v \leq v^t(A^{(k)^{-1}} - B_{(2)}^{(k)^{(-1)}})v \leq C_A v^t R^{(k)} v \;\; \forall v \tag{1.6}$$

Where;

$$B_{(2)}^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & \\ A_{21}^{(k)} & A^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} \\ & I \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Then, for $k = 1, ..., l-1$,

$$\lambda_{min}(M^{(k)}A^{(k)}) \geq \frac{2}{2 + C_A} \lambda_{max}(M^{(k)}A^{(k)}) \leq \frac{2}{2 - c_A} \tag{1.8}$$

The Lemma 1.3 relation as follows, means that (1.10) may hold in cases for which (1.9) does not hold or holds only for a prolongation p^k that is not known a priori or impractical to use.

Lemma 1.3. *Let $A^{(k)}$ and $A(k-1)$ be symmetric positive definite matrices. Let $D^{(k)} = diag(A^{(k)})$ and $D_2^{(k)} = diag(A_{22}^{(k)})$. If, for some $p^{(k)}$ of the form $p = \begin{pmatrix} J_{12} \\ I \end{pmatrix}$ and $r = p^t$.*

$$v^t(A^{(k)^{-1}} - p^{(k)} A^{(k-1)^{-1}} r^{(k)})v \leq \bar{c}_A \omega^{-1} v^t D^{(k)^{-1}} v \;\; \forall v \tag{1.9}$$

Where; $r^{(k)} = p^{(k)^t}$, then

$$v_2^t(S^{(k)^{-1}} - A^{(k-1)^{-1}})v_2 \leq \overline{C}_A \omega^{-1} v_2^t D_2^{(k)^{-1}} v_2 \;\; \forall v_2 \tag{1.10}$$

Where; $S^{(k)}$ is the Schur complement of $A^{(k)}$ related to the partitioning induced by $p^{(k)}$.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

AN ITERATIVE SOLUTION FOR A LINEAR SYSTEM ARISING FROM DISCRETE APPROXIMATION TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

P. SARGOLZAEI * AND M. HAMIDI

Sistan and Baluchestan University, Zahedan
Sargolzaei@hamoon.usb.ac.ir
Hamidi@mail.usb.ac.ir

ABSTRACT. This paper has dealt with the iterative solution of a large sparse symmetric positive definite linear system; $Ax = b$, arising from the discretization of second order elliptic PDEs. It has shown that the development of an approximate factorization, leads to the study of so-called a modified method with attention to specific ordering of a multilevel type. Finally it has shown that how the successful development of a multigrid and hierarchical basis method prompted the introduction of equivalent algebraic technique.

1. Recursive orderings

In this study an approach for, the convergence of an iterative method was adopted based on spectral properties of the matrix of the linear system. In order to improve

Key words and phrases. iterative methods for linear systems, preconditioning.
* Speaker.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

METHODS OF CONSTRUCTING SPECIFIC STOCHASTIC MATRICES

H. SAEEDI[1*] AND N. MOLLAHASANI[2]

[1] Vali-Asr University of Rafsanjan and [2] Shahid Bahonar University of Kerman

ABSTRACT. The inverse eigenvalue problem for stochastic matrices (StIEP) is to determine the necessary and sufficient conditions on a list of complex numbers $\{1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ where $|\lambda_i| \leq 1$ such that $\{1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ is the spectrum of a stochastic matrix. Here the specific sufficient condition on a given list $\{1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ where $|\lambda_i| \leq 1$ for $i = 1, \ldots, n$ are obtained such that this list is the spectrum of a stochastic matrix. We apply the Braure's theorem to prove theorems. According to these proofs, which are constructive, some algorithms are obtained that we can produce stochastic matrices with prescribed spectrum by them.

REFERENCES

[1] M. T. Chu, G. H. Golub, Structure inverse eigenvalue problems, Acta Numerica 11(2002).
[2] R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge university press,(1955).

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65F18.
Key words and phrases. inverse eigenvalue problem, stochastic matrix, spectrum.
* Speaker.

[3] D. W. Lewis, Matrix Theory, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd,(1991).

Theorem 1.4. *Let P be a projection valued measure on a Borel space (S, B). Then there exists a finite measure ν and a measurable function $m : S \to \{0, 1, 2, ..., \infty\}$ such that*

(1) there exists a unitary operator $\mathcal{U}$ from $\mathcal{H}$ onto

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathrm{L}^2(E_j, \nu_j, \mathbb{C}^j) \bigoplus \mathrm{L}^2(E_j, \nu_j, \ell^2(\mathbb{Z}))$$

where $E_j = m^{-1}(j)$, and

(2) $\mathcal{U}$ intertwines P with the canonical projection valued measure.

Moreover, if $\nu\prime$ and $m\prime$ are another finite measure and function, respectively, satisfying properties (1) and (2) above, then $\nu \equiv \nu'$ and $m \equiv m'$ a.e. ν.

In this decomposition, we have two "parameters" that describe a representation up to unitary equivalence. Indeed, if π andπ' are two representations with associated probability measures ν, ν' and multiplicities m andm' respectively, then π is unitarily equivalent to π' if and only if$\nu$is equivalent to ν' and $m = m'$ almost everywhere. In the case of core representations, the multiplicity function alone completely describes the representation.

Weber proved that the multiplicity function introduced in is equal to the dimension function in the case of single wavelets on $\mathbb{R}$.

References

[1] L.W. Baggett, An abstract interpretation of the wavelet dimension function using group representations, J. Funct. Anal. 173 (2000) 120.

[2] L.W. Baggett, H.A. Medina, K.D. Merrill, Generalized multi-resolution analyses and a construction procedure for all wavelet sets in $\mathbb{R}^n$, J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999) 563573.

[3] M. Bownik, Z. Rzeszotnik, D. Speegle, A characterization of dimension functions of wavelets, Appl. Comput. Harmon. Anal. 10 (2001) 7192.

[4] P. Halmos, Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

[5] E.Weber, The action of translations on wavelet subspaces, PhD thesis, University of Colorado, 1999.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

WAVELET AND MULTIPLICITY FUNCTION

M. RASHIDI[1] AND A.A. JAFARI[2*]

[1]Tarbiat Modarres University and [2] Tarbiat Modarres University

ABSTRACT. Methods from abstract harmonic and functional analysis (specially multiplicity theory for projection valued measures and Stone's theorem on unitary representations of locally compact abelian groups) are used to derive multiplicity function of multi wavelets. There is a explicit description of the multiplicity function associated to a multi wavelet. It can be shown that the set of multi wavelets having a give multiplicity function is closed in the L^2-norm. We show that the wavelet dimension and multiplicity functions in $L^2(\mathbb{R}^n)$ are equal. This is a generalization of a classic result of Eric Weber in $\mathbb{R}$.

1. Introduction and preliminaries

First, let us review the necessary terminology. For this paper, a dilation matrix A will be an expansive matrix which preserves $\mathbb{Z}^n$, i.e., all eigenvalues λ of A satisfy $|\lambda| > 1$ and $A\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$. The transpose of A is denoted by $B = A^T$. A finite set $\Psi = \{\psi^1, ..., \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ is called an orthonormal multiwavelet if the system $\{\psi^l_{j,k} :$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C40.
Key words and phrases. wavelet, multiplicity function, dimension function.
This is part of M.Sc. thesis of the authors. We would like to thank our supervisor, Dr. Massoud Amini and Tarbiat Modarres University for partial financial support.

$j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, l = 1, ..., L\}$is an orthonormal basis for $L^2(\mathbb{R}^n)$, where for $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ we use the convention

$$\psi_{j,k} = |\det A|^{j/2}\psi(A^j x - k)$$

for all $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. If a multiwavelet ψ consists of a single element then we say that ψ is a wavelet.

Definition 1.1. Let A be an n n integer expansive dilation matrix .A *generalized multiresolution analysis* (*GMRA*) is a collection $\{V_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ of closed subspaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$ that satisfy:

(1) $V_j \subseteq V_{j+1}$ for all j.
(2) $D_A(V_j) = V_{j+1}$ for all j.
(3) $\bigcup Vj$ is dense in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and $\bigcap V_j = 0$.
(4) V_0 is invariant under the action of translation.

That dilation operator for every $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ define $D_A f(x) = |\det A|^{1/2} f(Ax)$.
A *GMRA* also determines a mutually orthogonal sequence of subspaces W_j, defined by $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$, whose closed linear span is $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Unlike the classical definition of a multiresolution analysis (*MRA*), a *GMRA* does not require the existence of a scaling vector ϕ whose translates form an orthonormal basis for V_0.

For a finite subset subset $F = \{f^1, ..., f^L\} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ and a dilation A, define the $\mathbb{Z}^n$-periodic function $\mathcal{D}_F$ by

$$\mathcal{D}_F = \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in Z^N} |\widehat{f^l}(B^j(\xi + k))|^2$$

where $B = A^T$ Function $\mathcal{D}_F$ is finite for a.e. $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.2. The *dimension function* of a multiwavelet $\Psi = \{\psi^i, ..., \psi^L\})$ associated with a dilation A is the function $\mathcal{D}_\psi$ given by

$$\mathcal{D}_\psi = \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in Z^N} |\widehat{\psi^l}(B^j(\xi + k))|^2$$

where $B = A^T$. A priori, it is not obvious from the definition that $\mathcal{D}_\psi$ has integer values. It is also not immediate why $\mathcal{D}_\psi$ is referred to as a dimension function.

Theorem 1.3. *Suppose $\Psi = \{\psi^i, ..., \psi^L\}$ is a multiwavelet. Then $\mathcal{D}_\psi(\psi)$ is a non-negative integer for a.e. $\psi \in \mathbb{R}^N$.*

ABSTRACT. Let $M_{nm}(:= M_{nm}(\mathbf{R}))$ be the real linear space of all $n \times m$ matrices for any integers $n, m \geq 1$. For $X, Y \in M_{nm}$, we say X is matrix majorized from the left by Y and write $X \prec_l Y$, if $X = \Lambda Y$ where $\Lambda_{ij} \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1 (i, j = 1, 2, ..., n)$. The matrix $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ is called a row stochastic matrix. Also we write $X \sim_l Y$ if $X \prec_l Y \prec_l X$. A mapping $T\colon M_{nm} \to M_{nm}$ is said to be a strong preserver of $\prec_l$, if $\{X \in M_{nm} : X \prec_l Y\} = \{X \in M_{nm} : TX \prec_l TY\}$ for all $Y \in M_{nm}$.

A.M. Hasani and M. Radjabalipour characterized the linear operators $T\colon M_{nm} \to M_{nm}$ which strongly preserve the matrix majorization $\prec_l$ and proved that T has the form $TX = QXL$ for some permutation matrix $X \in P(n)$ and an invertible matrix L in M_m. In the present paper we study the structure of (linear or nonlinear) strong preservers of matrix majorization $\prec_l$. For this purpose we define two strong preservers T and τ are equivalent if $TX \sim_l \tau X$ for all $X \in M_{nm}$. We will show that if $n \geq 2$ and if $T\colon M_{nm} \to M_{nm}$ is a surjective strong preserver of $\prec_l$, then $T - T0$ is equivalent to a linear strong preserver of $\prec_l$. In addition, if T is a linear preserver, then it is injective and, hence, bijective. Also if $T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is any function, then T is a strong preserver of $\prec_l$ on $M_1 = \mathbf{R}$ but is not equivalent to a linear one.

Throughout the paper the real vector space of all $1 \times m$ (row) vectors is denoted by $\mathbf{R}_m$. For every $X \in M_{nm}$, $R(X) \subset \mathbf{R}_m$ will denote the set of all distinct rows of X. For every $x \in \mathbf{R}_m$, we let $x^{(n)}$ denote the $n \times m$ matrix such that $R(x^{(n)}) = \{x\}$. We define $C(A) := \{X \in M_{nm} : X \prec_l A\}$ and $\Delta(A) := \{X \in M_{nm} : X \sim A\}$. There is a right-sided type of matrix majorization $\prec_r$ on M_{nm} defined by $X \prec_r Y$ whenever$X = \Lambda Y$ for some row stochastic matrix Λ depending on X and Y. In this paper we deal only with the left-sided one and, hence, we use the conventions $\prec$ and $\sim$ for $\prec_l$ and $\sim_l$, respectively. Also, observing that $T\colon M_{nm} \to M_{nm}$ is a surjective strong preserver of $\prec$ if and only if $T - T0$ is, we can assume without loss of generality that $T0 = 0$.

The proof of the main result is based on the following geometric facts.

(a) For every $A \in M_{nm}$, $C(A)$ is a convex subset of M_{nm}.

(b) ext $C(A) = (\text{ext co}R(A))^n$

For T as above, we will make use of an auxiliary mapping $S\colon \mathbf{R}_m \to \mathbf{R}_m$, called the border operator corresponding to T, defined by $Sx = y$, where $y^{(n)} = Tx^{(n)}$. We first show that S is injective and ext co$R(TA) = S(extcoR(A))$. We conclude from this that if x and y are distinct vectors in $\mathbf{R}_m$, then $S((1-t)x + ty) = (1 - f(t))Sx + f(t)Sy$, for some strictly increasing function f from $[0,1]$ onto $[0,1]$. By [4] it follows that there exist a linear operator $\Psi\colon \mathbf{R}_m \to \mathbf{R}_m$, a constant vector $a \in \mathbf{R}_m$, and a constant $b \in \mathbf{R}^+$ such that

$$S(x) = (1/b)(\Psi(x) + a)$$

for all $x \in \mathbf{R}_m$. It then follows that S is a bijective linear operator.

Now, let K be the matrix of S^{-1} with respect to the standard basis of $\mathbf{R}_m$. We will show that the operator $T_1\colon M_{nm} \to M_{nm}$ defined

REFERENCES

[1] T. Ando, Majorization and in equalities in matrix theory, Linear algebr Appl.199 (1978) 17-67.

[2] L.B.Beasley, S.-G.Lee, Y.-H. Lee, A characterization of strong preservers c matrix majorizationLinear algebra Appl. 367 (2003) 341-346.

[3] G. Dahl, Matrix majorization, Linear Algebra Appl.288 (1999) 53-73.

[4] A.M. Hasani and M. Radjabalipour, Linear preservers of matrix majorization International Journal of pour and Applied Mathematics (accepted).

5. Conclusion

In this research work we compute an operational matrix for left Riemann Liouville fractional derivative. This operational matrix develop the application of Legendre wavelets formalism to fractional calculus and fractional variational problems.

References

[1] F. Riewe, Nonconservative Lagragnian and Hamiltonian mechnics, Phys. Rev. E. 53(1996), 1890-1899.

[2] F. Riewe, Mechanics with fractional derivative, Phys, Rev. E 55(1997), 3582-3592.

[3] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional integrals and derivative Theory and applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, (1993).

[4] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New york, 1999

[5] P.L. Butzer, U. Westphal, An introduction to fractional calculus, in: R. Hilfer(Ed.), Applications in Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey, 2000, pp.1-85.

[6] F. Mainardi, Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in: A. Carpinteri, F. Mainardi(Eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1997 pp. 291-348

[7] R.L. Bagley, P.J. Torvik, On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, J. Rheology 30(1986)133-155.

[8] Arfken G., Mathematical methods for physicists, Academic press, Inc (1985).

[9] M. Razzaghi and S. Yousefi, Mathematics and Computer Simulation. 53 (2000) 185-192.

[10] M. Razzaghi, S. Yousefi, Int. J. Syst. Sci. 32 (2001), 495-502.

[11] M. Razzaghi, S. Yousefi, Mathematical and Computer modeling. 34(2001), 45-54.

[12] H. Parsian, Acta Mathematica Academiae Paedagogiace Nyregyhziensis. Vol 21, No 1, (2005).

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

ON THE STRUCTURE OF STRONG PRESERVERS OF MATRIX MAJORIZATION

M. RADJABALIPOUR[1]* AND P. TORABIAN[2]

[1]Kerman- University, Kerman and [2] Kerman-University, Kerman

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A04; Secondary 15A21, 15A30.

Key words and phrases. Row stochastic matrix, Matrix majorization, Linear preserver.

* Speaker.

text books [8]. Legendre wavelets is defined as below in [9]

$$\psi_{n,m}(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}2^{\frac{k}{2}}P_m(2^kx-(2n-1)), & \frac{2n-2}{2^k}\le x<\frac{2n}{2^k};\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{1.1}$$

In which $n=1,2,\cdots,2^{k-1}$, $m=0,1,\cdots,M-1$ and k is real positive number. The Lengendre wavelets are a complete orthonormal set over the interval $[0,1]$.

$$\int_0^1 \psi_{n,m}(x)\psi_{n',m'}(x)dx=\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} \tag{1.2}$$

2. Fractional Derivative

Several definitions for fractional derivative have been proposed. These definitions include Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Weyl-Marchaud, Caputo and Riesz fractional derivatives. These definitions is presented in [4, 5]. In this paper, We focus on Riemann-Liouville fractional derivative, which are defined as below in [4]

The left Riemann-Liouville fractional derivative

$${}_aD_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt \tag{2.1}$$

and

The right Riemann-Liouville fractional derivative

$${}_xD_b^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-\frac{d}{dx})^n\int_x^b\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt \tag{2.2}$$

Where α is the order of the derivative such that $n-1\le\alpha<n$. If α is an integer, these definitions are reduce in to usual derivatives.

3. Operational matrix of fractional derivative

The function $f(x)$ in $L^2(R)$ over the $[0,1]$ can be expanded in term of Legendre wavelets

$$f(x)\cong\sum_{n'=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{n',m}\psi_{n',m}(x) \tag{3.1}$$

We represent (3.1) in the matrix form $f(x)=C^T\Psi(x)$. In which C and $\Psi(x)$ are column matrices and ^{T} indicate the transpose of matrix.

$$C^T=[c_{1,0},c_{1,1},...,c_{1,M-1},c_{2,0},...,c_{2,M-1},...,c_{2^{k-1},M-1}]$$

and

$$\Psi(x)=[\psi_{1,0}(x),\psi_{1,1}(x),...,\psi_{1,M-1}(x),\psi_{2,0}(x),...,\psi_{2,M-1}(x),...,\psi_{2^{k-1},M-1}(x)]^T$$

For computation of fractional derivative $f(x)$, we compute the fractional derivative of Legendre wavelets.

$${}_0D_x^{\alpha}f(x)=C^T\frac{1}{(-\beta)!}(\frac{d}{dx})^n\int_0^x\frac{\Psi(t)}{(x-t)^{\beta}}dt \tag{3.2}$$

If we represent eq. (3.2) in the matrix form

$${}_0D_x^{\alpha}f(x)=C^T{}_0D_x^{\alpha}\Psi(t) \tag{3.3}$$

In which ${}_0D_x^{\alpha}$ is a $M\times M$ matrix. We computed the elements of this operational matrix for k=1 as below

$${}_0D_x^{\alpha}= F(M,r,s)\begin{pmatrix}\frac{1}{(2-n-\beta)!} & \cdots & \frac{(-1)^{M'}\sqrt{2M'-1}(-2+2r+s+\beta+n-M')!}{(2-2r-s-n-\beta-M')!(-2+2r+s+\beta+n)!}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{(M-2r-s+1-n-\beta)!} & \cdots & \frac{(-1)^{M'}\sqrt{2M'-1}(-M+2r+s+\beta+n-1-M')!}{(M-2r-s+1-n-\beta-M')!(-M+2r+s+\beta+n-1)!}\end{pmatrix}$$

In which $F(M,r,s)=\sum_{r=0}^{\frac{M-1}{2}}\sum_{s=0}^{M-2r-1}\frac{(-1)^{r+s}(2M-2r-2)!\sqrt{2M-1}}{r!(M-r-1)!s!2^{2r+s}}$.

4. Example

4.1. Example 1. Consider the fractional differential equation below under the boundary values $f(0)=0$ and $f(1)=1$.

$${}_0D_x^{0.5}({}_0D_x^{0.5}f(x))=1 \tag{4.1}$$

If we choose $M=5$ and from solving the eq. (4.1), we obtain $f(x)=0.500059\psi_{1,0}(x)+0.288798\psi_{1,1}(x)+0.000251\psi_{1,2}(x)-0.001075\psi_{1,3}(x)$. The exact solution of 4.1 is $f(x)=x$.

4.2. Example 2. Consider the fractional differential equation below under the boundary values $f(0)=0$ and $f(1)=0.169688$.

$${}_0D_x^{1.5}({}_0D_x^{2.5}f(x))+{}_0D_x^{1.2}f(x)=x^{0.9} \tag{4.2}$$

We can easily find the matrix of x^{β} for $k=1$

$$x^{\beta}=[\frac{1}{1+\beta},\frac{\sqrt{3}\beta}{(1+\beta)(2+\beta)},\frac{\sqrt{5}\beta(\beta-1)}{(1+\beta)(2+\beta)(3+\beta)},...,-\frac{\sqrt{2M-1}(M-2-\beta)!(-M-1-\beta)!}{[(-\beta-1)!]^2}]$$

By choosing $M=6$ and convert eq. (4.2) to a set of algebraic equations we obtain

$$f(x)=10^{-6}(44276\psi_{1,0}(x)+44965\psi_{1,1}(x)+18145\psi_{1,2}(x)+2450\psi_{1,3}(x)-158\psi_{1,4}(x)-3\psi_{1,5}(x))$$

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

FUZZY BOUNDED LINEAR OPERATORS

A. NAZARI[1] AND .SINAEE[2]

[1]Shahid Bahonar University, Kerman and [2] Shahid Bahonar, Kerman

ABSTRACT. In this paper, a notion of boundedness of a linear operator from a fuzzy normed linear space to another fuzzy normed space is introduced and the boundednessof such an operator is described. Furthermore. the space of all bonded linear operators endowd with this fuzzy norm is studied and two types of fuzzy bounded linear operators are defined.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46S40; Secondary 47S40.
Key words and phrases. Fuzzy norm,Fuzzy continuous mapping,Fuzzy bounded linear operator.

* A.Nazari.

mail: nazari@mail.uk.ac.ir

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

OPERATIONAL MATRIX OF RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

H. PARSIAN*

Department of Physics, Bu-Ali University, Hamadan

ABSTRACT. In this paper, we present an operational matrix for fractional derivative of order $\alpha(n-1<\alpha<n$ and $n \in N)$. This operational matrix is based on expansion on Legendre wavelets. Legendre wavelets to be defined over the interval $[0,1]$. This operational matrix develop the Legendre wavelets formalism to fractional calculus. We formulate the problem in terms of left Riemann-Liouville fractional derivative. Several examples demonstrate the validity of this operational matrix.

1. LEGENDRE WAVELETS

Wavelets constitute a family of functions that constructed from dilation and translation of a single function. Legendre wavelets is proposed by Razzaghi and Yousefi for solving variational problems [9],[10] and [11]. The mother function of Legendre wavelets is Legendre functions. Legendre functions is covered in many mathematical

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C40; 65R10, 26A33.
Key words and phrases. Wavelet, Numerical method, Fractional derivative.

* Speaker.

2. Lower bound for $\rho_2(A, \mathbf{H})$

In this section we find Lower bound for $\rho_2(A, \mathbf{H})$.

Theorem 2.1. *Let A is $n \times n-$ complex matrix and $\mathbf{H}$ will be the set of matrices with eigenvalues $\lambda_0 \pm i\mu_0$. Then for finding spectral distance between A and $\mathbf{H}$ we have problem (I) or problem (II).*

proof If λ_0 and μ_0 equal zero, then it is obvious that our problem will be spectral distance between A and set of matrices with multiple eigenvalues zero and this is problem(I). If $\lambda_0 \neq 0$ and $\mu_0 = 0$, then our problem will be finding spectral distance between A and set of matrices with multiple eigenvalues λ_0, and this is too problem (I). If $\lambda_0 = 0$ and $\mu_0 \neq 0$, then our problem is finding spectral distance between A and the set of matrices that has eigenvalues $i\mu_0$ and $-i\mu_0$, and this problem (II). Now assume that both of λ_0 and μ_0 nonzero numbers, then we have

$$\sigma_{2n-1}(R_{\lambda_0 \pm i\mu_0}(\gamma)) = \sigma_{2n-1}\begin{pmatrix} D_1 & \gamma I_n \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} =$$

$$\sigma_{2n-1}\begin{pmatrix} A - (\lambda_0 - i\mu_0)I_n & \gamma I_n \\ 0 & A - (\lambda_0 + i\mu_0)I_n \end{pmatrix} =$$

$$\sigma_{2n-1}\begin{pmatrix} B - i\mu_1 I_n & \gamma I_n \\ 0 & B - i\mu_2 I_n \end{pmatrix} = \sigma_{2n-1}(Q_{i\mu_0}(\gamma))$$

where $B = A - \lambda_0 I_n$. Then we can say that spectral distance between A and the set of $\mathbf{H}$ equal the spectral distance between B and $\mathbf{N}$, therefore our problem in this case will be kind of problem II.

3. STUDY OF THE FUNCTION $f(\gamma)$

When $\lambda_0 = 0$, we obtain Malyshev's function

$$f_0(\gamma) = \sigma_{2n-1}(P_0(\gamma)),$$

which was extensively studied in [1, Section 3]. It turns out that $f(\gamma)$ has the same properties for an arbitrary $\lambda_0 \neq 0$, and from the properties of singular numbers and the definition of $R_{\lambda_0}(\gamma)$ that $f(\gamma)$ is a continuous function of γ and

$$f(-\gamma) = f(\gamma).$$

Lemma 3.1. *$f(\gamma) \to 0$ as $|\gamma| \to \infty$.*

The proof is the same as the proof of Lemma 2 in [1].

Lemma 3.2. *$f(\gamma) \neq 0$ for all γ or $f(\gamma) \equiv 0$.*

The proof is the same as the proof of Lemma 3 in [2].

The main results of this section are Theorems 1 and 2. The first theorem corresponds to Lemma 6 in [1].

Theorem 3.3. . *Let $\gamma > 0$ be a local optimizer of the function $f(\gamma)$, with$f(\gamma^*) = \sigma^* > 0$. Then, there exist $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ the right and the left singular vectors of $\sigma_{2n-1}(R_{\lambda_0 \pm \mu_0}(\gamma^*))$ corresponding to the singular value σ^* such that*

$$v_1^* u_2 = 0.$$

Moreover, the matrices $U = [u_1\ u_2]$ and $V = [v_1\ v_2]$ satisfy the relation

$$U^* U = V^* V.$$

Proof. Proof of this theorem very similar to theorem 1 of [2].

Theorem 3.4. . *Let $\gamma^* > 0$ be a local optimizer of the function $f(\gamma)$, with $f(\gamma^*) = \sigma^* > 0$. Then,*

$$f(\gamma^*) = \rho_2(A, \mathbf{H}).$$

and if assume $\Delta = -\sigma^* V U^+$ then $A + \Delta$ has two conjugate eigenvalue $\lambda_0 \pm \mu_0$.

Example 3.5. If we use software of MATLAB and let $a = (a_{ij})_{4\times 4}$ by selecting random this matrix we have

$$A = \begin{pmatrix} 0.4387 + 0.1338i & 0.3200 + 0.3705i & 0.7446 + 0.0272i & 0.6833 + 0.6831i \\ 0.4983 + 0.2071i & 0.9601 + 0.5751i & 0.2679 + 0.3127i & 0.2126 + 0.0928i \\ 0.2140 + 0.6072i & 0.7266 + 0.4514i & 0.4399 + 0.0129i & 0.8392 + 0.0353i \\ 0.6435 + 0.6299i & 0.4120 + 0.0439i & 0.9334 + 0.3840i & 0.6288 + 0.6124i \end{pmatrix}.$$

Let $\lambda_0 \pm \mu_0 = 1 \pm 2i$, then by applying $\Delta = -\sigma^* V U^+$ we have. $eig(A + \Delta) = \begin{pmatrix} 1.0000 - 2.0000i & 1.0000 + 2.0000i & 1.7271 + 0.7959i & 0.8316 - 0.2627i \end{pmatrix}$,

[1] 1. Malyshev A.N. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues // Numer.Math. 1999. V. 83. P. 443–454.

[2] 2. Ikramov, Kh. D.; Nazari, A. M. On a metric problem for matrices. (Russian) Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 43 (2003), no. 1, 3–11; translation in Comput. Math. Math. Phys. 43 (2003), no. 1, 1-9

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

SPECTRAL CONJUGATE DISTANCE AND PROPERTIES OF FUNCTION DISTANCE

A. M. NAZARI[1*] M. PARCHEHTALAB,[2] AND D. ALIMOHAMMADI[3]

[1]Arak University, Arak and [2,3] Arak University, Arak

ABSTRACT. An exact formula for the spectral distance between an $n\times n-$ matrix A and the set of matrices with multiple zero eigenvalue was recently found by A.N. Malyshev. It is discussed to what extent the reasoning leading to this formula can be extended to the problem of evaluating the distance between A and the set of matrices having a pair of conjugate eigenvalues $\lambda_0 \pm i\mu_0$. And we verify properties distance function and find similar properties between this function and Malyshev's function.

1. INTRODUCTION

In the recent paper [1] of Malyshev, the following formula for the spectral distance between a complex $n \times n-$ matrix A and the nearest matrix having a multiple eigenvalue zero was proved:

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 39B82; Secondary 44B20, 46C05.
Key words and phrases. Linear Algebra, Spectral distance , Singular value, .
* Speaker.

$$\rho_2(A,\mathbf{L}) = \min_{L\in\mathbf{L}} \|A-L\|_2 = \max_{\gamma\geq 0} \sigma_{2n-1}(P_0(\gamma)). \tag{1}$$

The symbol $\sigma_{2n-1}(\cdot)$ is the one but last singular value of the matrix $P_0(\gamma)$, where

$$P_0(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

We denote problem Malyshev (formula (1)) by problem (I).

Ikramov and Nazari in 2003 found the following formula for spectral distance between A and the set of matrices having a pair of eigenvalues $\lambda_0, -\lambda_0$.

$$\rho_2(A,\mathbf{K}) \geq \max_{\gamma\geq 0} \sigma_{2n-1}(Q_{\lambda_0}(\gamma)). \tag{2}$$

where, if we define $B_1 = A - \lambda_0 I_n$, $B_2 = A + \lambda_0 I_n$, then

$$Q_{\lambda_0}(\gamma) = \begin{pmatrix} B_1 & \gamma I_n \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

We denote problem Ikramov and Nazari (formula (2)) by problem (II).

The purpose of this paper is to show for all of λ_0 and μ_0 spectral distance between A and set of matrices that having a pair of conjugate eigenvalues $\lambda_0 \pm i\mu_0$ will stay in problem (I) or problem (II). The properties of the function

$$f(\gamma) = \sigma_{2n-1}(R_{\lambda_0\pm i\mu_0}(\gamma)) \tag{3}$$

where

$$R_{\lambda_0\pm i\mu_0}(\gamma) = \begin{pmatrix} D_1 & \gamma I_n \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

if we define $D_1 = A-(\lambda_0+i\mu_0)I_n$, $D_2 = A-(\lambda_0-i\mu_0)I_n$ are studied in Section 3. The basic result of this study is as follows: if$f(\gamma) \neq 0$,, then, for each local optimizer $\gamma^* > 0$, we have

$$f(\gamma^*) = \rho_2(A,\mathbf{H}), \tag{4}$$

if we denote set of matrices with eigenvalues $\lambda_0 \pm i\mu_0$ by $\mathbf{H}$.

Thus,bound that we find will be similar bound (2) and this bound becomes an exact equality if the maximum on its right-hand side is attained at a positive γ. Note that the proof of (5) is based on the properties of the singular vectors of the matrix $R_{\lambda_0\pm\mu_0}(\gamma^*)$, that are also studied in [2].

Relation (5) implies that $f(\gamma)$ is a unimodal function on the positive half-axis. In final we illustrate example for our problem and Malyshev,s problem.

transmitted signals in T time slots can be described as a $T \times N$ complex matrix which is called a codeword. Since the transmitted signals are chosen from a finite subset of complex numbers the number of codewords are also finite. The set of codewords is called a *spaces-time block code* or an STBC. We require STBCs satisfying certain conditions depending on our system but there are some general criteria called *the design criteria* which are crucial in designing STBCs. Therefor, we look for sets of matrices, usually represented as a matrix with variable entries(a code), which achieve the design criteria as much as possible when variables take values in a large subset of complex numbers. Hence, the signal set can be chosen from larger subsets of complex numbers and we have more options to design STBCs for a fixed system. Some design criteria for an STBC $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_l\}$ are as follows:

Rank criterion : The error matrix $D(C_i, C_j) = C_j - C_i$ has to be full rank for all $i \neq j$ in order to obtain full diversity.
Determinant criterion : The minimum determinant of

$$A(C_i, C_j) = D(C_i, C_j)^* D(C_i, C_j)$$

, among all $i \neq j$, has to be large to obtain high coding gains.
Trace criterion : The minimum trace of $A(C_i, C_j) = D(C_i, C_j)^* D(C_i, C_j)$ among all $i \neq j$ has to be large to obtain high coding gains.

For instance if $N = 2$, $M = 1$ and $T = 2$ The Alamouti's code is defined as

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -\overline{s_2} & \overline{s_1} \end{bmatrix}$$

where s_1 and s_2 are arbitrary complex numbers. This code satisfies the first criterion and is easily decodable.

In this talk we first introduce the basic theory of space-time coding [1] and then we present applications of field extensions and division algebras in finding full-rank spacetime block codes over a variety of signal sets for arbitrary number of transmit antennas as presented in [2], [3] and [4] . Using transcendental field extensions, we construct arbitrary rate codes that are full-rank for arbitrary number of antennas. In the later half of the talk, we discuss two ways of embedding noncommutative division algebras into matrices: left regular representation, and representation over maximal cyclic subfields. The 4×4 real orthogonal design is obtained by the left regular representation of quaternions. Alamoutis code is just a special case of the construction using representation over maximal cyclic subfields and we observe certain algebraic

uniqueness characteristics of it. Also, we discuss a general principle for constructing cyclic division algebras using the nth root of a transcendental element. Another family of cyclic division algebras discovered by Brauer is also discussed.

References

[1] H. Jafarkhani, *Space-time coding* Cambridge University Press, 2005.
[2] B. A. Sethuraman, B. Sundar Rajan and V. Shashidhar, *Full-Diversity, High-Rate SpaceTime Block Codes From Division Algebras.* IEEE Transactions on Information Theory, vol. 49, no. 10, October 2003
[3] J. Hiltunen, C. Hollant and J. Lahtonen, *Four Antenna Space-Time Lattice Constellations from Division Algebras*, ISIT 2004, Chicago, USA, June 27 July 2, 2004
[4] Frdrique Oggier, Ghaya Rekaya, Jean-Claude Belfiore and Emanuele Viterbo, *Perfect SpaceTime Block Codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 52, no. 9, September 2006

(a) *If $\xi f(\xi)$ satisfies "Daubechies' criterion" then for sufficiently small $b > 0$, the admissible function $Lf(L)\delta$ generates a wavelet frame for the lattice $b\Gamma$.*

(b) *As $a \to 1$, the ratio of the optimal frame bounds in (a) is*

$$1 + O\left(|a-1|^2 \log|a-1|\right),$$

for sufficiently small $b > 0$. (Here a is again the dilation parameter.)

In particular, we shall show that, if one uses the dilation parameter $a = 2^{\frac{1}{3}}$, then for all sufficiently small $b > 0$, the admissible function $Le^{-\frac{L}{2}}\delta$ generates a wavelet frame for $b\Gamma$ which is "nearly tight".

To clarify our terminology in Theorem 2.3:

- $b\Gamma = \{b\gamma : \gamma \in \Gamma\}$; here $b\gamma$, a dilate of γ.
- For a fixed dilation parameter $a > 0$, if ϕ is a function on G, $j \in \mathbb{Z}$ and $\gamma \in \Gamma$, we set $\phi_{j,b\gamma}(x) = a^{-\frac{jQ}{2}}\phi\left([b\gamma]^{-1}[a^{-j}x]\right)$.
- To say that an L^2 function ψ generates a wavelet frame for the lattice $b\Gamma$ is to say that $\{\phi_{j,b\gamma}(x) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma\}$ is a frame.
- To say that a function $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ satisfies Daubechies' criterion is to say that

(2.1)
$$A = \inf_{\lambda > 0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |g(a^{2j}\lambda)|^2 > 0.$$

In [1], page 68, Daubechies observes that if $G = \mathbb{R}$ and $\Gamma = \mathbb{Z}$, then this is a necessary condtion in Theorem 2.3 (a). Here we have put $g(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Then it is easily seen that the series in (2.1) converges uniformly on compact subsets of $(0, \infty)$.

References

[1] I.Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

[2] G.B.Folland, E.M.Stein, *Hardy spaces on Homogeneous groups*, Mathematical Notes 28, Princeton University Press, 1982.

[3] A.Mayeli, *Discrete and continuous wavelet transformation on the Heisenberg group*, Ph.D thesis, Technische Universität München, 2005.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

APPLICATIONS OF DIVISION ALGEBRAS IN SPACE-TIME CODING

H. MOMENAEE KERMANI

Shahid Bahonar University of Kerman

Abstract. The use of multiple antennas in most future wireless communication systems seems to be inevitable. In order to increase the rate of transmission, decrease the error probability and also achieve a high diversity, the use of multiple antennas in both the transmitter and the receiver has shown to be very practical. Application of multiple antennas resulted in a new theory of coding called *space-time coding* which has been an interesting area of research for both engineers and mathematicians since 1998.

1. Introduction

We start with a wireless communication system having N antennas at the transmitter and M antennas at the receiver. At each time slot, N signals(complex numbers) are transmitted simultaneously by the antennas in the transmitter. Therefore the

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 16K20 ; Secondary 94A29.
Key words and phrases. Division algebra , Wireless communication, Space-time coding, Maximal subfield.

If G is stratified, its Lie algebra admits a canonical family of dilations, namely

$$\delta_r(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = rX_1 + r^2X_2 + \cdots + r^mX_m \quad (X_j \in V_j).$$

We identify G with $\mathfrak{g}$ through the exponential map. G is a Lie group with underlying manifold $\mathbb{R}^n$, for some n. G inherits dilations from g: if $x \in G$ and $r > 0$ we write

$$rx = (r^{d_1}x_1, \cdots, r^{d_n}x_n). \tag{1.1}$$

(Here $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ are those numbers for with $1 \leq k \leq m$ for which $V_k \neq 0$). The map $x \to rx$ is an automorphism of G.

The left Haar measure on G is simply $dx_1 \ldots dx_n$. The inverse of any $x \in G$ is simply $-x$. The group law must have the form

$$xy = (p_1(x,y), \ldots, p_n(x,y)) \tag{1.2}$$

for certain polynomials $p_1, \ldots, p_n$ in $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

We let $\mathcal{S}(G)$ denote the space of Schwartz functions on G. By definition $\mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

The number $Q = \sum_1^m j(dimV_j)$ will be called the *homogeneous dimension* of G. If ϕ is a function on G and $r > 0$, we define ϕ_r by

$$\phi_r(x) = r^{-Q}\phi(r^{-1}x).$$

We fix a homogeneous norm function $|\ |$ on G which is smooth away from 0. Thus ([2]) $|rx| = r|x|$ for all $x \in G$, $r \geq 0$, $|x^{-1}| = |x|$ for all $x \in G$, and $|x| > 0$ if $x \neq 0$.

Let $X_1, \cdots, X_k$ be a basis for V_1 (viewed as left-invariant vector fields on G), let $L = -\sum_1^k X_i^2$ be the sub-Laplacian. This operator is well known to play on G much the same fundamental role on G as (minus) the ordinary Laplacian $\sum_1^N (\partial_{X_j})^2$ does on $\mathbb{R}^N$.

L is self-adjoint operator and has spectral resolution

$$L = \int_0^\infty \lambda dP_\lambda$$

As usual, if f is a bounded Borel function on $[0, \infty)$, we define the operator $f(L)$ by

$$f(L) = \int_0^\infty f(\lambda)dP_\lambda;$$

this is well defined and bounded on $L^2(G)$ by the spectral theorem. We denote by $f(L)\delta$ the corresponding distribution kernel of the bounded operator $f(L)$. Thus

$$f(L)\eta = \eta * f(L)\delta \quad \forall\, \eta \in \mathcal{S}(G).$$

Let $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ and set

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \ : \forall l, f^{(l)} \text{ decays rapidly at infinity and } \lim_{\lambda \to 0^+} f^{(l)}(\lambda) \text{ exists} \right\}.$$

Then by Borel's theorem on the existence of smooth functions with arbitrary Maclaurin series we have $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+) = \mathcal{S}(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+}$.

2. Main Results

Let L denote the sub-Laplacian on a stratified group G [2] (for instance, the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$). If $\phi \in \mathcal{S}(G)$ and $\int \phi = 0$, we say ϕ is *admissible* if for some $c \neq 0$, Calderón's reproducing formula:

$$\int_0^\infty \tilde{\phi}_a * \phi_a \, a^{-1}da = c\delta.$$

holds in the sense of tempered distributions, where $\phi_a(x) = a^{-Q}\phi(a^{-1}x)$, Q is the homogeneous dimension of G, $\tilde{\phi}(x) = \overline{\phi}(x^{-1})$ and δ denotes the point mass at $0 \in G$. (We shall show that this definition of "admissible" is equivalent to the one generally used in wavelet theory.) We show:

Theorem 2.1. *Let f be a nonzero element of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Then $Lf(L)\delta \in \mathcal{S}(G)$ is admissible.*

For example, $Le^{-\frac{L}{2}}\delta$ is admissible. (Here $f(L)\delta$ is the distribution kernel of $f(L)$.) Up to a constant, $Le^{-\frac{L}{2}}\delta$ is a very natural generalization of the Mexican Hat Wavelet to G. In case $G = \mathbb{H}^n$, Theorem 2.1 was shown for this function in Mayeli [3].

As a corollary of Theorem 2.1, we show:

Corollary 2.2.

(a) *There exist admissible $\phi \in \mathcal{S}(G)$ with all moments vanishing.*
(b) *There exist admissible $\phi \in C_c^\infty(G)$ with arbitrarily many moments vanishing.*

In Corollary 2.2 (a) and (b), we will in fact show that ϕ can be chosen to have the form $\phi = Lf(L)\delta$ for some $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Corollary 2.2 improves on Lemmas 1.61 and 1.62 of Folland-Stein [2] for stratified groups.

Moreover, we show:

Theorem 2.3. *Let Γ be a lattice subgroup of G, and let f again be a nonzero element of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Then,*

REFERENCES

[1] G. H. BRADLEY, *Algorithms for Hermite and Smith normal matrices and linear Diophantine equations*, Math. Comp. 25(1971) 897-907.

[2] T. J. CHOU AND E. E. COLLINS, *Algorithms for the solutions of systems of linear Diophantine equations*, SIAM J. Comput. 11(1982) 686-708.

[3] J.B. ROSSER, *A note on the linear Diophantine equation*, Amer. Math. Monthly 48(1941) 662-666.

[4] E. CONTEJEAN AND H. DEVIE, *An efficient algorithm for solving systems of Diophantine equations*, Information and Computation 1(1994) 143-172.

[5] H. ESMAEILI , N. MAHDAVI-AMIRI AND E. SPEDICATO, *A class of ABS Algorithms for Diophantine linear systems*, Numerische Mathematik 90(2001) 101-115.

[6] J. ABAFFY, C.G. BROYDEN AND E. SPEDICATO, *A class of direct methods for linear equations*, Numerische Mathematik 45(1984) 361-376.

[7] H. ESMAEILI , N. MAHDAVI-AMIRI AND E. SPEDICATO, *A class of ABS Algorithms for Diophantine linear systems*, Numerische Mathematik 90(2001) 101-115.

[8] H. ESMAEILI , N. MAHDAVI-AMIRI AND E. SPEDICATO, *Generating the integer null space and conditions for determination of an integer basis using the ABS algorithms*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 27(2001) 1-18.

[9] E. EGERVARY, *On rank-diminishing operations and their application to the solution of linear equations*, ZAMP 9(1960) 376-386.

[10] Z. CHEN, N. Y. DENG AND Y. XUE, *A general algorithm for underdetermined linear systems*, The Procedings of the first International Conference on *ABS* Algorithms, (1992), 1-13.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

APPLYING SPECTRAL RESOLUTION OF SUB-LAPLACIAN OPERATOR TO CONSTRUCT CONTINUOUS AND DISCRETE SCHWARTZ WAVELETS ON STRATIFIED LIE GROUPS

[1]A. MAYELI * AND [2]D. GELLER

[1]Technology University of Munich, Germany, and
[2] University of Stony Brook, New York, USA

ABSTRACT. Applying the spectral resolution of sub-Laplacian operator L on any stratified Lie group G, we construct compactly supported smooth continuous wavelets, with arbitrarily many vanishing moments on G. We also show that if the wavelets satisfies a generalization of Daubechies' criteria, then they generate a wavelet frame for any sufficiently fine lattice of G.

1. Notations

Following [2], we call a Lie group G stratified if it is nilpotent, connected and simply connected, and its Lie algebra $\mathfrak{g}$ admits a vector space decomposition $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ such that $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ for $1 \leq k < m$ and $[V_1, V_m] = \{0\}$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C40, 42B20, 22E25.
Key words and phrases. Wavelets, Frames, Spectral Theory, Sub-Laplacian Operator, Schwartz Functions, Stratified Groups.

* Speaker.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

SOLVING LINEAR DIOPHANTINE SYSTEMS USING EXTENDED *ABS* ALGORITHMS

N. MAHDAVI-AMIRI[1] AND M. KHORRAMIZADEH[1*]

[1]Sharif University of Technology, Tehran.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 65F30,; Secondary 11J20, 11D04.

Key words and phrases. Rosser's algorithm; Linear Diophantine systems; *ABS* algorithms; *EMAS* algorithms; Extended *ABS* algorithms.

* Speaker.

ABSTRACT. Linear Diophantine systems have many applications in various areas of mathematics and engineering such as integer programming, graph theory, design of integrated circuits for radio processing, market split problem, etc. There are several classes of algorithms for solving these systems such as algorithms based on techniques for triangularization of the coefficient matrix [1], and the *LDDSBR* of Chou and Collins [2] based on Rosser's idea [3], algorithms based on triangularization of the first principle minor of the coefficient matrix [2], and algorithms which can be considered as the generalization of incremental algorithm for solving a single linear Diophantine equation [4]. Recently a class of methods has been proposed by Esmaeili, Mahdavi-Amiri and Spedicato [7] for solving systems of linear Diophantine equations, the so called *EMAS* algorithms, which is a specialization of *ABS* methods of Abaffy, Broyden and Spedicato [6]. The main difficulty in solving systems of linear Diophantine equations is the rapid growth of intermediate results called intermediate expression swell. One effective algorithm to control this growth is the *LDDSBR* of Chou and Collins. Here, we first describe a generalization of Rosser's algorithm for a single linear Diophantine equation to an algorithm for solving systems of linear Diophantine equations. Next we show that the generalized Rosser's algorithm (*GRA*) presents a new formulation of the *LDSSBR* of Chou and Collins. Then we consider the integer *ABS* algorithms given by Esmaeili, Mahdavi-Amiri and Spedicato, and show how to modify the *EMAS* algorithms so that the parameters of the new algorithms can be chosen to generate the same solution iterates as the *GRA*, while having different null space generators. In the i-th iteration of an *EMAS* algorithm, a matrix $H_{i+1} \in Z^{n\times n}$, the Abaffian matrix, is generated the rows of which span the integer null space of the first i rows of the coefficient matrix. Esmaeili, Mahdavi-Amiri and Spedicato [7, 8], refuting a statement made by Egervary [9], showed that every complete linearly independent rows of the matrix H_{i+1} do not necessarily form a basis for the integer null space of the first i rows and thus the Abaffian may not produce an integer basis. Here, we present a new class of integer algorithms, based on extended *ABS* algorithms [10] (*EABS*) for the real case, for solving systems of linear Diophantine equations, improving both upon the efficiency of the *EMAS* algorithms by generating Abaffians with independent rows and controlling the growth of intermediate results by generating solution iterates with small numbers of digits. Finally, we show that the *EMAS* algorithms and the *GRA* (and hence the *LDSSBR*) belong to the class of integer *EABS* algorithms (*IEABS*), introduced here, by specifying the parameters of the *IEABS* algorithms so that both

which has led to the study of scale-space analysis defined by the scale-space operator

$$\begin{aligned} M_t f(x,y) &:= G_t * f(x,y) \\ &= \frac{1}{t^2}\int G\left(\frac{y-v}{t}\right)dv \int G\left(\frac{x-u}{t}\right) f(u,v)du, \end{aligned}$$

commonly known as *Gaussian scale-space.* It is also well-known that the binomial coefficients (binomial distributions), $\{\frac{1}{2^n}\binom{n}{j} : j = 0,\ldots,n\}$, and the uniform B-splines, B_n, of order n, when suitably normalized, approximate the Gaussian function for large n, a process known as *normal approximation.* The binomial coefficients and the B-splines are related by the scaling equation

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{j} B_n(2x-j), \quad x \in \mathbb{R},$$

in which B_n is called a *scaling function* and $\{\frac{1}{2^n}\binom{n}{j} : j = 0,\ldots,n\}$ is called its *mask.*

The talks deal with the simultaneous approximation of the Gaussian function by a family of sequences $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ of scaling functions and their masks of the form

$$\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_n(j)\phi_n(2x-j), \quad x \in \mathbb{R},$$

which include the B-splines and binomial coefficients. We show that ϕ_n converge to G if and only if their masks $\{a_n(j) : j = 0,\ldots,n\}$ converge to G. Very general conditions on the locations of the roots of the polynomials $A_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_n(j)z^j$ are also found for various forms of convergence. Conditions are given for different orders of convergence and we identify a family of sequences of scaling functions that converge to the Gaussian faster than the B-splines.

We shall also give peoperties that the approximating scaling functions ϕ_n inherit from the Gaussian function. In particular we shall consider the following:

1. The Gaussian function is optimal in time-frequency localization. More precisely it is the unique function, up to dilation and shift, that attains the bound of the Heissenberg uncertainty product. We shall show that the approximating scaling functions are asymptotically optimal in time-frequency locallization.
2. Differentiating the Gaussian function gives the Hermite polynomials:

$$(-1)^m G^{(m)}(x) = H_m(x)G(x),$$

where $H_m(x)$ are Hermite polynomials of degree m, and

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)G(x)dx = m!\sqrt{2\pi}\delta_{mn},$$

i.e., the sequences $\{(-1)^m G^{(m)} : m = 0,1,\ldots\}$ and $\{H_m : m = 0,1,\ldots\}$ are biorthogonal. We shall define sequences of polynomials, P_m^n, associated with the approximating scaling functions , ϕ_n, for each arbitrary fixed n, in the same way as the Hermite polynomials H_m are associated with the Gaussian, and show that the sequences $\{P_m^n : n = 0,1,\ldots\}$ and $\{(-1)^m\phi^{(m)} : m = 0,1,\ldots\}$ are biorthogonal and that $P_m^n(x) \to H_m(x)$, $x \in \mathbb{R}$, as $n \to \infty$.
3. The Gaussian scale-space operator,

$$T_\tau f(x) = \tau^{-1}\int G\left(\frac{x-u}{\tau}\right) f(u)du,$$

which represents the function f at scale τ, enjoys the causality property, i.e. no new features are introduced as τ increases. The Gaussian function $G(x) = e^{-x^2/2}$ is the unique linear space-scale kernel that has the causality property. We study the approximation of the Gaussian scale-space operator by scale-space operators where G is substituted by its approximating scaling functions. Causality of the scale-space is a scientific and engineering concept, which, as far as we know, has no rigorous mathematical definition. We shall give a mathematical definition of causality using the concept of variation diminishing, extend the definition, and show that the scale-space operators defined by the approximate scaling functions, in particular the B-splines, also enjoy the causality property in the extended sense.

Theorem 3.2. *There exists a basis for the null space of the matrix* $M(t\text{-}(v,t+1))$ *consisting only of* t-$(v,t+1)$ *intercalates.*

ACKNOWLEDGEMENT

The speaker would like to thank the Department of Mathematics at the Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS) in Zanjan, for their warm and generous hospitality and support in his sabbatical leave, when he was working on the final stages of this talk.

REFERENCES

[1] Elizabeth J. Billington. The intersection problem for combinatorial designs. *Congr. Numer.*, 92:33–54, 1993. Twenty-second Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, MB, 1992).

[2] Elizabeth J. Billington and D. G. Hoffman. Trades and graphs. *Graphs Combin.*, 17(1):39–54, 2001.

[3] Diane Donovan and E. S. Mahmoodian. An algorithm for writing any Latin interchange as a sum of intercalates. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 34:90–98, 2002. Corrigendum: *Bull. Inst. Combin. Appl.* 37:44, 2003.

[4] Diane Donovan, E. S. Mahmoodian, Colin Ramsay, and Anne Penfold Street. Defining sets in combinatorics: a survey. *Surveys in combinatorics, 2003 (Bangor)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 307:115–174, 2003.

[5] H-L. Fu. *On the construction of certain type of latin squares with prescribed intersections.* PhD thesis, Auburn University, 1980.

[6] A. S. Hedayat. The theory of trade-off for t-designs. In *Coding theory and design theory, Part II*, volume 21 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 101–126. Springer, New York, 1990.

[7] A. D. Keedwell. Critical sets in latin squares and related matters: an update. *Util. Math.*, 65:97–131, 2004.

[8] C. Radhakrishna Rao. Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. *Suppl. J. Roy. Statist. Soc.*, 9:128–139, 1947.

[9] D. K. Ray-Chaudhuri and N. M. Singhi. On existence and number of orthogonal arrays. *J. Combin. Theory Ser. A*, 47(1):28–36, 1988. Corrigendum: *J. Combin. Theory Ser. A*, 66(2):327–328, 1994.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

APPROXIMATION OF GAUSSIAN AND ITS PROPERTIES

S. L. LEE

Department of Mathematics
National University of Singapore
2 Science Drive 2, Singapore 117543

Abstract

The Gaussian function $G(x) = e^{-x^2/2}$ has many interesting properties and is fundamental to many branches of mathematics, statistics, physics and engineering. It is well-known that the scaled Gaussian

$$G_t(x,y) := \frac{1}{t2\pi} G(x/\sqrt{2t})G(y\sqrt{2t}) = \frac{1}{t2\pi} e^{-(x^2+y^2)/4t}$$

is the convolution kernel for the solution of the heat equation, i.e. $u(x,y,t) := G_t * f(x,y)$ is the solution of

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x,y,0) = f(x,y),$$

Key words and phrases. Gaussian function, Hermite polynomials, Scale-space, Normal approximation, B-splines, Scaling functions, Variation diminishing, Causality.

1. Introduction and preliminaries

We follow the notations of [9] as much as possible. Let $V := \{0, 1, \ldots, v-1\}$ and V^k be the set of all ordered k-tuples of the elements of V, i.e. $V^k := \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in V, i = 1, \ldots, k\}$. Also, let $V_I^t := \{(u_1, \ldots, u_t)_I \mid u_i \in V, i = 1, \ldots, t\}$, where I is a subset of size t of the set $\{1, \ldots, k\}$. For a pair of elements of V^k and V_I^t, where $I = \{i_1, \ldots, i_t\}$ and $i_1 < \cdots < i_t$, we define

$$(u_1, \ldots, u_t)_I \in (x_1, \ldots, x_k) \iff u_j = x_{i_j}, \qquad j = 1, \ldots, t.$$

An orthogonal array $\mathrm{OA}_t(v, k, \lambda)$ on a set V is a collection of k-tuples of elements of V such that for each $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, $|I| = t$, every element of V_I^t belongs to exactly λ elements of the collection. Orthogonal arrays were first defined by Rao [8] and have been used in studying designs and codes.

Next we define the t-inclusion matrix $\mathrm{M}(t\text{-}(v,k))$. The columns of this matrix correspond to the elements of V^k (in lexicographic order) and its rows correspond to the elements of $\cup_I V_I^t$, where the union is over all t-subsets of $\{1, \ldots, k\}$. The entries of the matrix are 0 or 1, and are defined as follows.

$$M_{(u_1,\ldots,u_t)_I,(x_1,\ldots,x_k)} = 1 \iff (u_1, \ldots, u_t)_I \in (x_1, \ldots, x_k).$$

It is folkloric that any latin square of order n is equivalent to an $\mathrm{OA}_2(n, 3, 1)$. And it is easy to see that any $\mathrm{OA}_t(v, k, \lambda)$ can be thought of a solution to the equation

$$\mathbf{MF} = \lambda \bar{\mathbf{1}}, \tag{1.1}$$

where $\mathrm{M} = \mathrm{M}(t\text{-}(v,k))$, $\bar{\mathbf{1}}$ is a vector of appropriate size with all components equal to 1, and $\mathbf{F}$ is a non-negative integer valued frequency vector meaning that $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ is the number of times that OA contains the ordered k-tuple $\mathbf{x}$.

2. Orthogonal arrays

We prove the following theorem, from the following lemmas.

Theorem 2.1. *The rank of the matrix* $\mathrm{M}(t\text{-}(v,k))$ *is equal to*

$$\mathrm{rank}(M) = \sum_{i=0}^{t} \binom{k}{i} (v-1)^i.$$

We need the following notations. For every ordered k-tuple $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, the set $F_{\mathbf{x}}$ is defined as

$$F_{\mathbf{x}} = \{(y_1, \ldots, y_k) \mid y_i \in \{0, x_i\}, i = 1, \ldots, k\}.$$

Also, we define $A_{\mathbf{x}} = \{i \mid x_i \neq 0\}$ and $L_{\mathbf{x}} = |A_{\mathbf{x}}|$, and let $C_{\mathbf{x}}$ denote the column of the matrix M corresponding to the k-tuple $\mathbf{x}$.

Lemma 2.2. *For every* $\mathbf{y} \in F_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, *we have* $L_{\mathbf{y}} < L_{\mathbf{x}}$ *and* $y \prec x$, *where* $\prec$ *denotes the lexicographic order.*

Lemma 2.3. *The number of linearly independent rows of* $\mathrm{M}(t\text{-}(v,k))$ *is at least the number of columns* $C_{\mathbf{x}}$ *with* $L_{\mathbf{x}} \leq t$.

Lemma 2.4. $\mathrm{rank}(\mathrm{M}(t\text{-}(v,k))) \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{k}{i} (v-1)^i$.

Lemma 2.5. *For every vector* $\mathbf{x} \in V_k$ *with* $L_{\mathbf{x}} > t$, *we have*

$$\sum_{\mathbf{y} \in F_{\mathbf{x}}} (-1)^{L_{\mathbf{y}}} C_{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{0}}. \tag{2.1}$$

Where $\bar{\mathbf{0}}$ *is a vector of appropriate size with all components equal to* 0.

Lemma 2.6. $\mathrm{rank}(\mathrm{M}(t\text{-}(v,k))) \leq \sum_{i=0}^{t} \binom{k}{i} (v-1)^i$.

Theorem 2.1 follows from Lemma 2.6 and Lemma 2.4.

3. Latin squares and latin trades

A latin trade is a pair of disjoint partial latin squares of the same shape and order, which are row-wise and column-wise mutually balanced. The concept of a latin trade in a latin square is similar to the concept of a mutually balanced set or a trade in a block design, see [6]. Latin trades have been studied by many authors. The same as trades in design theory, the discussion of latin trades is related to intersection problems. For example see [5] and [1]. Also latin trades arise naturally in the discussion of critical sets in latin squares (see for example [7] and [4]). See [2] for further use of trades. A latin trade of volume 4 which is unique (up to isomorphism), is said to be an intercalate.

Since a latin square of order n may be viewed as an $\mathrm{OA}_2(n, 3, 1)$, the matrix $\mathrm{M}(2\text{-}(n,3))$ is of special interest. Latin trades are in the null space of $\mathrm{M}(2\text{-}(n,3))$.

Theorem 3.1. *There exists a basis for the null space of* $\mathrm{M}(2\text{-}(n,3))$ *consisting only of intercalates.*

In [3], Donovan and Mahmoodian have introduced a simple combinatorial algorithm which enables one to write a latin trade as the sum of intercalates.

We generalize the concept of intercalates to t-$(v, t+1)$ *intercalates* and show the following.

Theorem 2.1 The only linear uninorms are $T, S:[0,1]^2 \to [0,1]$, given by $T(x,y) = xy$ and $S(x,y) = x + y - xy$, called the Product t-norm and the Probabilistic Sum t-conorm; respectively.

Definition 2.5 Let $\mathcal{R}$ be a uninorm on L^*. $\mathcal{R}$ is said to be linear with respect to first argument if for all $X,Y,Z \in L^*$ and $\alpha, \beta \in [0,1]$ with $\alpha + \beta \le 1$,

$$\mathcal{R}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \mathcal{R}(X,Z) + \beta \mathcal{R}(Y,Z).$$

Theorem 2.2 The only linear uninorms on L^* are $\mathcal{T}, \mathcal{S}:(L^*)^2 \to L^*$, given by $\mathcal{T}(X,Y) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2)$ and $\mathcal{S}(X,Y) = (x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1, x_2y_2)$; called the Product t-norm and the Probabilistic Sum t-conorm on L^*; respectively.

References

[1] B. De Baets, Idempotent uninorms, European Journal of Operational Research 118 (1999) 631-642.
[2] B. De Baets, J. Fodor, Residual operators of uninorms, Soft Computing 3 (1999) 89-100.
[3] G. Deschrijver and E. E. Kerre, Uninorms in L*-fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems (148) (2) (2004) 243-262.
[4] G. Deschrijver and E. E. Kerre, On the relationship between some extensions of fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems 133 (2) (200 3) 227-235.
[5] J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov, Structure of uninorms, Internat J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 5 (1997) 411-427.
[6] J. Goguen, L-fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications 18 (1967) 145-174.
[7] J. Golan, The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 54, Longman Scientific and Technical, 1992.
[8] Gh. Khaledi, M. Mashinchi, S. A. Ziaie, The Monoid Structure of e-implications and pseudo e-implications, accepted for publication in Inform. Sci.
[9] Yong-Ming Li, Zhong-Ke Shi, Weak uninorm aggregation operators, Information Sciences 124 (2000) 317-323.
[10] M. Mas, G. Mayor J. Torrens, The modularity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems 126 (2002) 207-218.
[11] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems 128 (2002) 209-225.
[12] Hung T. Nguyen, Elbert A. Walker, A first course in fuzzy logic, Chapman & Hall, 2nd Edition, London, 2000.
[13] R.R. Yager, A. Rybalov, Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 80 (1996) 111-120.
[14] R.R. Yager, On some classes of implication operators and their role in approximate reasoning, Information Sciences 167 (2004) 193-216.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

A LINEAR ALGEBRAIC APPROACH TO ORTHOGONAL ARRAYS AND LATIN SQUARES

A. A. KHANBAN[1], M. MAHDIAN[2], AND E. S. MAHMOODIAN[3]*

[1]Department of Computing, Imperial College London, SW7 2BZ, UK.
[2]Yahoo! Research, Santa Clara, CA, USA.
[3]Department of Mathematics, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT. To show the existence of signed orthogonal arrays, Ray-Chaudhuri and Singhi considered a space of linear forms in variables and calculated its rank, see [9]. Later they pointed out a mistake in their calculation and gave a correct answer. Here we define an inclusion matrix corresponding to orthogonal arrays and signed orthogonal arrays. We find its rank and also a basis for its null space. This makes it easier to study this subject. In special case of latin squares it turns out to have a straight forward algorithm for writing a basis in term of s called intercalates.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 39B82; Secondary 44B20, 46C05.
Key words and phrases. Orthogonal arrays, latin squares, basis for inclusion matrix, latin trades.

* Speaker.

Gh. Khaledi, M. Mashinchi *, S.A. Ziaie

Faculty of Mathematics and Computer Sciences,
Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

email: mashinchi@mail.uk.ac.ir

bstract

The concept of uninorm on [0,1] is an important topic of recent research in the theory f fuzzy set theory as a generalization of a triangular norm (t-norm) and a triangular onorm (t-conorm) . In this paper we introduce the concept of linear uninorm in a natural anner. We prove that the linear uninorm with a predefined neutral element $e \in [0,1]$ is nique. Then we show that there is no linear uninorm with neutral element $e \in (0,1)$. hence we find the only two linear uninorms on [0,1] which are in the forms of a t-norm d a t-conorm. We prove that the same result is true for linear uninorms on the lattice . This lattice is reach enough as the underlying structure of both interval-valued fuzzy ts and intuitionistic fuzzy sets studied by by Deschrijver and Kerre (2004).

ywords: Uninorm; Linear uninorm; Uninorm on L^*.
IS Classification:Primary 39B82; Secondary 44B20.

Introduction

he concept of t-norm and t-conorm play an important role in generalizing AND and OR aggregation operator [12]. Uninorm is an important eralization of triangular norm (t-norm) and triangular conorm (t-conorm). y uninorm allows for a neutral element lying anywhere in the unit interval 1] rather than at one or zero as is the case for a t-norm or t-conorm. The cept of uninorm studied by Yager and Rybalove [13], among otheres. ny other researchers developed this notion [1, 2, 4, 8, 9, 10]. The cture of the uninorm U with neutral element $e \in [0,1]$ on the squares $[0,e]^2$ $[e,1]^2$ is closely related to t-norms and t-conorms which is studied by or et al. [5] . They investigated the existence of representable uninorms. representation is in terms of a single variable function. In fact, this is lar to representation of continuous Archimedean t-norm and t-conorm .

om a theoretical point of view [2], it is interesting to notice that orms U with a neutral element e in (0,1) are just those binary operators ing the structures $([0,1], \sup, U)$ and $([0,1], \inf, U)$ distributive semirings in the sense of Golan [7].

A uninorm U play an important role in constructing e-implications, pseudo e-implications and introducing special classes of e-implications, where e is the neutral element of U [8].

Recently uninorms on the lattice L^* studied by G. Deschrijver and Kerre [3 They discussed that the underlying structure of both interval-valued fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets are L^*-fuzzy sets in the sense of Goguen [12]. Moreover uninorms play an important role on construction of multi-valued implication within the fuzzy logic based theory, and hence in approximate reasoning which is very important topic in information processing [14]. This fact reveal the significance of any mathematical study of uninorms. In this paper we introduce the notion of a linear uninorm o [0,1] in a natural manner. We show that a linear uninorm with neutral element $e \in [0,1]$ is unique meanwhile there is no linear uninorm with neutr element $e \in (0,1)$. This leads to find that the only two linear uninorms on [0,1], which are in the forms of a t-norm and a t-conorm. We obtain the same results for linear uninorms on the lattice L^*.

2. Preliminaries and Results

Definition 2.1 [5] A mapping $U:[0,1]^2 \to [0,1]$ is called uninorm if it is commutative, non-decreasing, associative and there exists $e \in [0,1]$ (called a neutral element) such that $U(e,x) = x$ for all $x \in [0,1]$.

Definition 2.2 [3] Set

$$L^* = \{(x_1,x_2) | (x_1,x_2) \in [0,1]^2 \text{ and } x_1 + x_2 \le 1\}$$
$$0_{L^*} = (0,1) \text{ and } 1_{L^*} = (1,0).$$

Define

$$(x_1,x_2) \le_{L^*} (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le y_1 \text{ and } x_2 \ge y_2, \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in L^*.$$

It is shown that $(L^*, \le_{L^*})$ is a complete lattice [4].

Definition 2.3 [3] A uninorm $\mathcal{U}$ on L^* is an increasing, associative and commutative mapping $\mathcal{U}: (L^*)^2 \to L^*$ that satisfies

$$(\exists e \in L^*)(\forall X \in L^*)(\mathcal{U}(e,X) = X).$$

Definition 2.4 Let R be a uninorm on [0,1]. R is said to be a linear uninorn with respect to first argument if for all $\alpha, \beta, x, y, z \in [0,1]$ with $\alpha + \beta \le 1$:

$$R(\alpha x + \beta y, z) = \alpha R(x,z) + \beta R(y,z).$$

onding author. Tel.: +98 341 322 1079: fax: +98 341 322 1080
address: mashinchi@mail.uk.ac.ir (M. Mashinchi)

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

FROM FOURIER ANALYSIS TO WAVELET ANALYSIS

R.A. KAMYABI GOL

Department of Mathematics, Ferdowsi University, Mashhad, Iran.
Email:kamyabi@ferdowsi.um.ac.ir

Fourier analysis is an established subject in the core of pure and applied mathematical analysis. Not only are the techniques in this subject of fundamental importance in all areas of science and technology, but both the integral Fourier transform and the Fourier series also have significant physical interpretations. In addition, the computational aspects of the Fourier series are especially attractive, mainly because of its simple expression in term of only tow functions: $sin(x)$ and $cos(x)$.

Recently, the subject "wavelet analysis" has drawn much attention from both mathematicians and engineers alike. Analogous to Fourier analysis, there are also two important mathematical entities in wavelet analysis : the "integral wavelet transform" and the " wavelet series". The integral wavelet transform is defined to be the convolution with respect to the dilation of the reflection of some function ψ, called a "basic wavelet", while the wavelet series is expressed in terms of two very simple operations: binary dilations and integral translations. However, unlike Fourier analysis, the integral wavelet transform with a basic wavelet ψ and the wavelet series in term of a wavelet ψ are intimately related. In fact, if ψ is chosen to be the "dual" of ψ, then the coefficients of the wavelet series of any square-integrable function f are precisely the values of the integral wavelet transform, evaluated at the dyadic position in the corresponding binary dilated scale levels. Since the integral wavelet transform of f simultaneously localizes f and its Fourier transform $\hat{f}$ with the zoom-in and zoom-out capability, and since there are real- time algorithms for these sequences, the list of applications of wavelet analysis seems to be endless. On the other hand, polynomial spline functions are among the simplest functions for both computational and implementational purposes. Hence, they are most attractive for analyzing and

In this talk we will give an overview of Fourier transform analysis. The Fourier transform theory has been very useful for analyzing harmonic signals or signals for which there is no need for local information. The Fourier transform $X(f)$ and $x(t)$ is defined in the space and wavenumber domain, where t represents the space of variable and f the wavenumber(frequency). Although $X(f)$ does not lose any information of the signal $x(t)$, it spreads out in the frequency domain. If there are computational or observational errors involved in the signal $x(t)$, it is almost impossible to study its properties from those of $X(f)$. In spite of some remarkable successes, Fourier transform analysis seems to be inadequate for at least tow reasons. First, the Fourier transform of a signal does not contain any local information in the sense that it does not reflect the change of frequency with time. Second, the fourier transform method enables us to investigate problems either in time(space) domain or in the frequency(wavenumber) domain, but not simultaneously in both domains.

In order to incorporate both time and frequency localization properties in one single transform function, Gabor first introduced the Windowed Fourier transform or Short Time Fourier transform. His major idea was to use a time-localization window function $W_a(t-b)$ for extracting local information from the Fourier transform of a signal, where the parameter a measures the width of window and parameter b is used to translate the window in order to cover the whole time domain. However, Malvar(1990) recognized some series algorithmic difficulties in the short time Fourier transform. He resolved these difficulties by introducing new wavelets.

Wavelets are the results of truly interdisciplinary research, originating in the early eighties, and involving mathematicians (approximation theories, harmonic and functional analysis), mathematical physicists as well as researchers from signal and image processing. Wavelet theory incorporated influences from all these areas of research and nowadays wavelets can be encountered as a well-established tool in many applied fields.In this talk we aim to discuss the following questions:

1) What are wavelets?

2) How are wavelets constructed?

3) What are the properties of wavelets? Which additional properties are desiral

REFERENCES

[1] J.P.Antoine, R.Murenzi, P. Vadergheynst and S.T.Ali, *Two Dimenti Wavelets and Their Relatives*, Cambridge University Press, (2003)

[2] C.S.Burrus, R.A.Gophinath and H.Guo, *Introduction to Wavlets and Wa transform*, Prentice-Hall, Inc. (1998)

where $P' \in Syl_p(G_{n-1})$. Since $|P| = p^{n(n-1)k}$, we have $P \in Syl_p(G_n)$. Suppose that $g \in N_{G_n}(P)$. If $v_1.g = v = \sum_{i=1}^{2n} a_i v_i$, then $P \leq (G_n)_v$. We can see $v = a_1 v_1$, where $a_1 \in GF^*(q)$. Hence $g \in (G_n)_{[v_1]}$. If

$$h = \begin{bmatrix} a & -av^t J_{n-1} E & -av^t J_{n-1} v/2 \\ O & E & v \\ 0 & O & a^{-1} \end{bmatrix} \in N_{G_n}(P),$$

then we have $E \in N_{G_{n-1}}(P')$. Thus

$$N_{G_n}(P) = \{ \begin{bmatrix} a & -av^t J_{n-1} E & -av^t J_{n-1} v/2 \\ O & E & v \\ 0 & O & a^{-1} \end{bmatrix} | a \in GF^*(q), v \in V_{2(n-1)}(q)\},$$

where $E \in N_{G_{n-1}}(P')$. So $|N_{G_n}(P)| = p^{2(n-1)k}(p^k-1)|N_{G_{n-1}}(P')| = p^{n(n-1)k}(p^k - 1)^{(n-1)}(p^k+1)$.

$\square$

Lemma 2.4. . *Let $G_n = SO_{2n}^-(q)$ and $v \in V_{2n}^\sharp(q)$:*

i. if $f(v,v) = 0$, then $|(G_n)_v| = p^{n(n-1)k}(p^{(n-1)k}+1)(p^{2(n-2)k}-1)...(p^{2k}-1)$.

ii. if $f(v,v) = a \neq 0$, then $(G_n)_v \cong SO_{2n-1}(p^k)$.

Corollary 2.5. . *If $exp_r(p) = 2nk$, then $det(A-I) \neq 0$, for every $r-$element A of $SO_{2n}^-(p^k)$.*

Lemma 2.6. . *If $exp_{r_1}(p) = 2(n-1)k$, then*

$$|N_{^2D_n(q)}(\bar{R_1})| = 2(p^k-1)|N_{^2D_{n-1}(q)}(\bar{R_1'})|/(4, p^{nk}+1),$$

where $\bar{R_1} \in Syl_{r_1}(^2D_n(q))$ and $\bar{R_1'} \in Syl_{r_1}(^2D_{n-1}(q))$.

Lemma 2.7. . *If $exp_{r_2}(p) = 2(n-2)k$, where $n \geq 4$ and $\bar{R_2} \in Syl_{r_2}(^2D_n(q))$, then*

$$|N_{^2D_n(q)}(\bar{R_2})| = 2p^{2k}(p^{2k}-1)^2|N_{^2D_{n-2}(q)}(\bar{R_2'})|/(4, p^{nk}+1),$$

where $\bar{R_2'} \in Syl_{r_2}(^2D_{n-2}(q))$.

Lemma 2.8. . *Let G be a simple group of Lie type in characteristic p and $n \geq 2$. If $|G|_p = p^{n(n-1)k}$, $Max\{exp_r(p) | \ r \in \pi(G)\} = 2nk$, $Max\{exp_r(p) | \ r \in \pi_{2nk}(G)\} = 2(n-1)k$ and $|G| \mid |^2D_n(q)|$, then $G \cong {}^2D_n(q)$.*

3. Proof of the Main Theorem

In what follows, we assume that $|N_G(S)| = |N_{^2D_n(q)}(\bar{S})|$, for every prime s, where $S \in Syl_s(G)$, $\bar{S} \in Syl_s(^2D_n(q))$ and $exp_{r_i}(p) = 2(n-i)k$. Moreover, we suppose that $r := r_0$, $p \neq 2$ and $n \geq 2$.

Proof of the Main Theorem . Let $1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_f = G$ be a chief series of G and $j_0 = Max\{1 \leq i \leq f | \ p \in \pi(G_i/G_{i-1})\}$. Assume that $H := G_{j_0-1}$ and $K := G_{j_0}$. So $p \notin \pi(G/K)$ and $p \in \pi(K/H)$. We know that $^2D_2(q) \cong L_2(q^2)$ and $^2D_3(q) \cong U_4(q)$. Moreover $L_2(q)$ and $U_4(q)$ are characterized in [1] and [5], respectively. Thus we assume that $n \geq 4$. At the first, by Frattini argument and the above lemma, we can show that $r_i \in \pi(K/H)$ $(i \in \{0,1,2\})$. By usining it, we can bring $|K/H|_p = p^{n(n-1)k}$ and K/H is simple group of Lie type in characteristic p. Therefore, by Lemma 2.8, we have $K/H \cong {}^2D_n(q)$. So $G \cong {}^2D_n(q)$. $\square$

References

[1] J. Bi, A characterization of $L_2(q)$, (Chinese) , *J. Liaoning Univ (Natural Sciences Edition.)*, **19 (2)** (1992), 1-4.

[2] J. Bi, A characterization of $L_n(q)$ by the normalizers' orders of their Sylow subgroups, *Acta Math. Sinica (New Ser.)*, **11 (3)** (1995), 300-306.

[3] J. Bi, On the group with the same orders of Sylow normalizers as the finite simple group $S_4(q)$, *Algebras, Groups and Geom.*, **18 (3)** (2001), 349-355.

[4] J. Bi, Characterization of alternating groups by orders of normalizers of Sylow subgroups, *Algebra Colloq.*, **8 (3)** (2001), 249-256.

[5] J. Bi, On the group with the same orders of Sylow normalizers as the finite projective special unitary group, *Sci. China Ser. A.*, **47 (6)** (2004), 801-811.

[6] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971.

[7] B. Huppert, *Lineare auflsbare Gruppen*, (German) Math. Z. 67, 1957.

xtended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl.
nd The Wavelets Workshop
9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

A CHARACTERIZATON OF ${}^2D_n(q)$ BY ORDER OF NORMALIZER OF SYLOW SUBGROUPS

A. IRANMANESH[1] AND N. AHANJIDEH[2*]

Department of Mathematics, Tarbiat Modarres University and [2] Department of Mathematics, Tarbiat Modarres University

ABSTRACT. Let G be a finite group. If $|N_G(R)| = |N_{{}^2D_n(q)}(\bar{R})|$ for every prime r, where $R \in Syl_r(G)$, $\bar{R} \in Syl_r({}^2D_n(q))$ and $p \neq 2$, $n \geq 2$, then $G \cong {}^2D_n(q)$.

1. INTRODUCTION

In 1992, *Bi* [1] showed that *projective special linear group* $L_2(q)$ can be characterd only by the order of normalizer of its Sylow subgroups. This type of characteriation is done for the following groups:
rojective special linear group $L_n(q)$ such that $n \geq 3$ [2], *projective symplectic group* (q) [3], *alternating groups* [4], $U_n(q)$ [5]. Let (V, f) be a orthogonal space, where $= V_{2n}(q)$, f is a nondegenerate orthogonal form and there are maximum $(n-1)$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 39B82; Secondary 44B20, C05.
Key words and phrases. Linear Algebra, Sylow subgroup, projective special linear oup, finite projective special orthogonal group, simple group of Lie type, characteration.

* Speaker.

distinct hyperplanes in V. Define $SO^-_{2n}(q) = \{A \in SL_{2n}(q) | f(Av, Aw) = f(v, w)$ for all $v, w \in V\}$ and ${}^2D_n(q) = \Omega^-_{2n}(q)/Z$, where $\Omega^-_{2n}(q) = (SO^-_{2n}(q))'$ and Z is the center of $\Omega^-_{2n}(q)$. In this paper, we have proved the following theorem:

Main Theorem . Let G be a finite group. If $|N_G(R)| = |N_{{}^2D_n(q)}(\bar{R})|$ for every prime r, with $p \neq 2$ and $n \geq 2$, then $G \cong {}^2D_n(q)$, where $R \in Syl_r(G)$ and $R \in Syl_r({}^2D_n(q))$. All further unexplained notations are standard and could be found in [6] and [7].

2. ON THE ORDER OF NORMALIZER OF SYLOW SUBGROUPS

In this section, we assume that $p \neq 2$ and $n \geq 2$.

Lemma 2.1. [2]. *Let r and s be prime numbers ($r \neq s$) and $exp_r(p) = mk$ ($n/2 < m \leq n$). If $x, y \in L_n(p^k)$ with $|x| = r$, $|y| = s^t$ and if in addition $s \nmid p^{km} - 1$ and $xy = yx$, then $s^t \mid |L_{n-m}(p^k)|$ and $m \leq n-2$.*

Lemma 2.2. [2]. *Let r and s be prime numbers ($r \neq s$), $exp_r(p) = mk$ ($n/2 < m \leq n$) and $K \leq L_n(q)$. If $exp_r(p) = mk$ and $R \in Syl_r(K)$, and if in addition, there is no element of order rs in K and $s^t \mid |N_K(R)|$, then $s^t | m$.*

Lemma 2.3. . *If $\bar{P} \in Syl_p({}^2D_n(q))$ and $n \geq 2$, then $|N_{{}^2D_n(q)}(\bar{P})| = p^{n(n-1)k}(p^k + 1)(p^k - 1)^{(n-1)}/(4, p^{nk}+1)$.*

Proof. By Frattini Argument, we have $|N_{{}^2D_n(q)}(P)| = |N_{SO^-_{2n}(q)}(P)|/(4, p^{nk}+1)$, where $P \in Syl_p(SO^-_{2n}(q))$. Let $G_n = SO^-_{2n}(q)$ and $\beta = \{v_1, ..., v_{2n}\}$ be an orthogonal basis of $V_{2n}(q)$ such that

$$J_n = [f]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & O & 1 \\ O & J_{n-1} & O \\ 1 & O & 0 \end{bmatrix},$$

where f is an orthogonal form over $V_{2n}(q)$. We can see

$$(G_n)_{[v_1]} = \{ \begin{bmatrix} a & -av^tJ_{n-1}B & -av^tJ_{n-1}v/2 \\ O & B & v \\ 0 & O & a^{-1} \end{bmatrix} | a \in GF^*(q), v \in V_{2(n-1)}(q)\},$$

where $B \in G_{n-1}$. Thus $|(G_n)_{[v_1]}| = p^{n(n-1)k}(p^{nk} - p^{(n-1)k} + p^k - 1)(p^{2(n-2)k} - 1)...(p^{2k} - 1)$. Let

$$P = \{ \begin{bmatrix} 1 & -v^tJ_{n-1}B & -v^tJ_{n-1}v/2 \\ O & B & v \\ 0 & O & 1 \end{bmatrix} | v \in V_{2(n-1)}(p^k), B \in P'\} \leq (G_n)_{v_1},$$

x divides y. Clearly $(L, \vee, \leq)$

semimodule over $(L, \vee, \wedge)$ with zero 1. Since $2 \wedge 3 = 1$, the set $\{3\}$ is not linearly
pendent.

nark 2.12. By the previous example, it is not true that if $x \neq 0$ then $\{x\}$ is linearly
pendent. But if L is a chain, then for every non-zero element x, the set $\{x\}$ is linearly
pendent.

inition 2.13. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over $(R, \oplus, \otimes)$. A linearly independent
et B of H is called a basis for H over R, if $< B >= H$.

mple 2.14. Let L be as in Example 2.5. we have the following diagram:

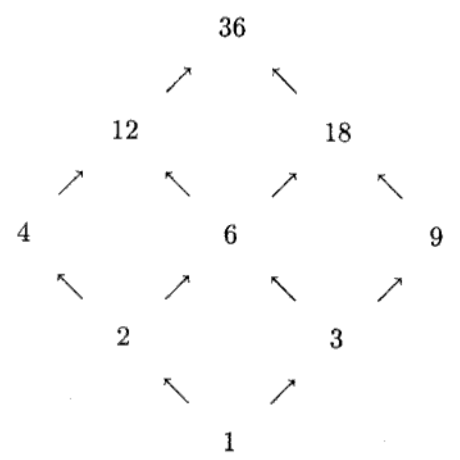


Figure 2

is lattice the following subsets of L are linearly independent:

$\{6\}$

$\{6, 12\}$

$\{12, 18\}$

$\{6, 12, 36\}$

$\{6, 12, 18, 36\}$

he following subsets are linearly dependent:

$\{9\}$

$\{2, 3\}$

$\{4, 9\}$

$\{6, 9\}$

$< K_3 >=< K_4 >=< K_5 >=< K_8 >= L$

$< K_6 >= \{1, 3, 9\}$

Clearly K_3, K_4, K_5 are bases of L.

Remark 2.15. (i) Note that although $< K_8 >= L$, but K_8 contains no linearly inc
pendent subset.

(ii) For the basis K_3 we have $6 = (6 \wedge 12) \vee (6 \wedge 18) = (2 \wedge 12) \vee (3 \wedge 18) = (3 \wedge 12) \vee (2 \wedge 1$
Hence representation of any elements of L in terms of a linear combination of elements
a basis is not unique.

Example 2.16. Suppose $(L, \leq)$ be a bounded distributive lattice. Clearly $\{1\}$ is a ba
for $(L, \wedge, \leq)$ over $(L, \wedge, \vee)$. Note that in semimodule $(L^2, \wedge, \leq)$, the set $\{(1, 1)^T\}$ is linea
independent but $< \{(1, 1)^T\} >\neq L^2$.

References

[1] G. Gratzer, *General lattice theory* , Academic Press, New York San Francisco, 1

[2] M. Hosseinyazdi, *The optimization problem over a distributive lattice*, submittec

[3] M. Hosseinyazdi, A. Hassankhani, M. Mashinchi, *Linear systems and optimiza over lattices*, Intrnational review of fuzzy mathematics , To appear.

[4] K. Peeva, *Fuzzy linear systems* , Fuzzy Set and Systems 49 (1992) 339-355, No Holland.

[5] K. Peeva, Y. Kyosev, *Fuzzy Relational Calcules* , Advances in Fuzzy syst Aplications and Theory-Vol.22, World scientific Publishing Co.Pte.Ltd, Singap

[6] U. Zimmermann, *Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic s tures* , North-Holland Publishing Company, Amesterdam, 1981.

bounded distributive lattice if L is so. For every bounded distributive lattice L, $(L, \vee, \wedge)$ is a semiring, by Example 1.5 and hence $(L^n, \wedge, \leq)$ is a lattice-ordered commutative monoid, by Example 1.2 which its identity element is a column matrix such that all of its entry are equal to 0. So we can easily construct a semimodule as follows:

Theorem 2.1. Let L be a bounded distributive lattice. Then $(L^n, \vee, \leq)$ is a semimodule over $(L, \vee, \wedge)$ with scalar multiplication $\bar{\wedge}$ defined by $\bar{\wedge} : L \times L^n \longrightarrow L^n$ such that

$$\alpha \bar{\wedge} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \wedge a_1 \\ \alpha \wedge a_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha \wedge a_n \end{pmatrix},$$

that for simplifies we write it as $\wedge$.

Definition 2.2. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over semiring $(R, \oplus, \otimes)$ and K be a non-empty subset of H such that $(K, *, \leq)$ be a monoid. Then $(K, *, \leq)$ is called a subsemimodule of $(H, *, \leq)$ if it is a semimodule over $(R, \oplus, \otimes)$ and it is denoted by $K \leq_m H$.

The following theorem can be proved easily.

Theorem 2.3. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over semiring $(R, \oplus, \otimes)$ and K be a non-empty subset of H. Then $K \leq_m H$ if and only if
(i) $x * y \in K \quad \forall x, y \in K$,
(ii) $a.x \in K \quad \forall a \in R, \forall x \in K$.

Corollary 2.4. Let L be a bounded distributive lattice and K be a sublattice of L which contains 0. Then $(K^n, \vee, \leq)$ is a semimodule over $(L, \vee, \wedge)$ if and only if for every elements $x \in L$ and $y \in K$, we have $x \wedge y \in K$.

Example 2.5. Let $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ and $x \leq y$ if x divides y. Consider the sublattice $K = \{1, 2, 3, 6\}$. Then L and K satisfy on Corollary 2.4. So $(K^n, \vee, \leq)$ is a semimodule over $(L, \vee, \wedge)$.

Definition 2.6. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over $(R, \oplus, \otimes)$ and X be a subset of

$$< X >= \bigcap_{X \subseteq K \leq H} K.$$

In the other words, $< X >$ is the smallest subsemimodule of H which contains X.

Definition 2.7. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over semiring $(R, \oplus, \otimes)$ with s multiplication "." and X be a subset of H. By a linear combination of elements $x_1, ..., x$ X, we mean $(a_1.x_1) * ... * (a_m.x_m)$ where $a_1, ..., a_m \in R$ and m is a positive integer.

Theorem 2.8. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over $(R, \oplus, \otimes)$ and X be a subset Consider $M = \{(a_1.x_1) * ... * (a_m.x_m) | x_1, ..., x_m \in X, a_1, ..., a_m \in R$ and m is a po integer $\}$; as the set of all finite linear combinations of elements of X. Then $< X >$

Proof: Follows from Definition 2.7. □

Example 2.9. Let $L = [0, 10]$; the bounded chain of real numbers between 0 a Consider semimodule $(L^2, \vee, \wedge)$ over $(L, \vee, \wedge)$, where $\leq$ is usual partial order on $X_1 = \{(3,1)^T, (5,2)^T, (2,4)^T\}$ the subsemimodule hull of X_1 is shown in Figure 1, "T" is the transpose operation.

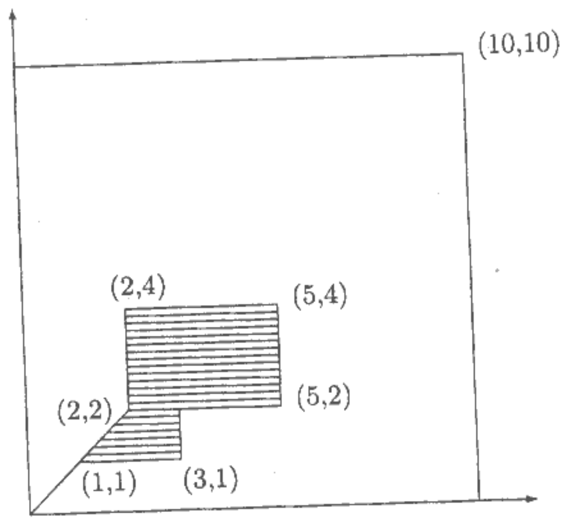


Figure 1: Subsemimodule hull of X_1

Definition 2.10. Let $(H, *, \leq)$ be a semimodule over $(R, \oplus, \otimes)$ with zero 0. X of H is called linearly independent if for all finite subset $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq X$, th elements $a_1, ..., a_m \in R$ such that, $(a_1.x_1) * ... * (a_m.x_m) = e$ implies $a_1 = ... = a$ If the subset X is not linearly independent, it is called linearly dependent.

Semimodules over Lattices

M. Hosseinyazdi,
Shiraz Payam-e-Noor university, Shiraz, Iran
e-mail: myazdi@spnu.ac.ir
A. Hassankhani and M. Mashinchi
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
Kerman University, Kerman, Iran
e-mails: (abhasan, mashinchi)@mail.uk.ac.ir

Abstract

In this paper, first we consider L^n as a semimodule over the bounded distributive lattice L. Then we define the basic concepts of module theory for L^n. After that, we proved many similar theorems in linear algebra for the space L^n.

Introduction and preliminaries

zy linear systems of equations and inequalities over a bounded chain have been studied nany authors [4]. To extend this concept to L-fuzzy linear systems over a bounded ributive lattice L, we need some basic definitions of linear algebra over lattices such inearly independent subset, a subsemimodule generated by a set and so on. For more ils see [2] and [3].

finition 1.1. Let $(H,*,\leq)$ be an ordered commutative semigroup(monoid). If the er $\leq$ on H is a partial order then $(H,*,\leq)$ is called a lattice-ordered commutative igroup(monoid).

ample 1.2. Every lattice $(L,\leq)$ is a lattice-ordered commutative semigroup, by letting $\wedge$ or $* = \vee$. Clearly a bounded lattice is a lattice-ordered commutative monoid in way.

finition 1.3. Let $Mat_{n\times m}(L)$ be the set of all $n\times m$ matrices over the lattice $(L,\leq)$.

$$X \leq Y \Leftrightarrow x_{ij} \leq y_{ij} \quad \forall i = 1,2,...,n, \forall j = 1,2,...,m,$$

where $X,Y \in Mat_{n\times m}(L)$. One can see that $(Mat_{n\times m}(L),\leq)$ is a lattice where its supre mum and infimum are defined componentwise on $Mat_{n\times m}(L)$ induced by the supremu and infimum of lattice L; respectively.

Definition 1.4. Let $(R,\oplus)$ be a commutative monoid with neutral element 0 and $(R,\otimes$ be a monoid with neutral element 1 where $0\neq 1$. Moreover $(R,\oplus,\otimes)$ is called a semiri with unity 1 and zero 0, if for all $a,b,c\in R$, the following conditions hold:

$a\otimes(b\oplus c) = (a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$,

$(b\oplus c)\otimes a = (b\otimes a)\oplus(c\otimes a)$,

$0 = a\otimes 0 = 0\otimes a$.

Example 1.5. Let L be a bounded distributive lattice. Then $(L,\vee,\wedge)$ and $(L,\wedge,\vee)$ semirings.

Definition 1.6. Let $(H,*,\leq)$ be a commutative ordered monoid with neutral elemen and let $(R,\oplus,\otimes)$ be a semiring with unity 1 and zero 0. Moreover suppose that $.: R\times H \longrightarrow H$ is a scalar multiplication such that for all $\alpha,\beta\in R$ and for all $a,b\in$

(i) $(\alpha\otimes\beta).a = \alpha.(\beta.a)$

(ii) $(\alpha\oplus\beta).a = (\alpha.a)\oplus(\beta.a)$

(iii) $\alpha.(a*b) = (\alpha.a)*(\alpha.b)$

(iv) $0.a = e$

(v) $1.a = a$

Then $(H,*,\leq)$ is called an ordered semimodule over $(R,\oplus,\otimes)$ with scalar multi tion"."

Remark 1.7. Let $(L,\leq)$ be a bounded distributive lattice. Then $(L,\vee,\leq)$ and $(L,$ are semimodules over $(L,\vee,\wedge)$ and $(L,\wedge,\vee)$, with scalar multiplications "$\wedge$" and respectively.

2 Basis for semimodule

In this section we need to extend some basic definition of linear algebra to conc where:

$$\begin{aligned} U &= U_1U_2\cdots U_n \\ X &= X_1X_2\cdots X_n \\ \hat{U} = X+U &= \hat{U}_1\hat{U}_2\cdots\hat{U}_n \end{aligned}$$

Let $1 \leq t \leq k \leq n$ be integer numbers. The system is called an (n,k,t)-additive channel, if the error vector $X = X_1X_2\cdots X_n$ satisfies the system of inequalities:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq t \\ X_2 + X_3 + \ldots + X_{k+1} \leq t \\ \ldots \\ X_{n-k+1} + X_{n-k+2} + \ldots + X_n \leq t \end{cases} \qquad (*)$$

Let $A_t(n,k)$ denote the set of all solutions of the system of inequalities (*) over $\mathbf{Z}_2$ and $\phi_t(n,k) = \mid A_t(n,k) \mid$.
Then it can be proved that the sequence of numbers $\phi_1(n,k)$ satisfies the recurrence relation[1][3]:

$$\phi_1(n,k) = \phi_1(n-1,k) + \phi_1(n-k,k)$$

Theorem 0.1. [1] *For every n and k we have*

$$\phi_1(n,k) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n-(k-1)(m-1)}{m}$$

Let $A, B \subseteq \mathbf{Z}_2^n$ then $A \oplus_2 B$ is defined by the form:

$$A \oplus_2 B = \{x +_2 y | x \in A, y \in B\}.$$

Theorem 0.2. *The set of all solutions of the system inequalities (*) is equal to $A_t(n,k) = A_{t-1}(n,k) \oplus_2 A_1(n,k)$.*

Suppose $a_{n,k} = \phi_2(n,k) = |A_t(n,k)|$, so it can be written by the recurrence relation:

Theorem 0.3. *Let $n \geq k$ then:*

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-k+2,k} + \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{k}]+1} (-1)^j \binom{k-1}{j+1} a_{n-(j+1)k,k}$$

Problem 0.4. *Find the maximal subset of $\mathbf{Z}_2^n$ like C such that for every distinct elements X and Y in C , $X +_2 Y \notin A_2(n,k)$.*

Suppose $C_t(n,k)$ be the maximal subset of $\mathbf{Z}_2^n$ satisfy in the condition problem[04] and $m_t(n,k) = |C_t(n,k)|$, then:

Lemma 0.5. *For $n \geq 3$, $m_2(n,3) = 2^{[\frac{n}{3}]}$.*

The values $m_2(n,k) = 2^s$ for $2 \leq k \leq n \leq 16$ is calculated in the [2].The following theorem results for the all value of n.

Theorem 0.6. *For every $2 \leq k \leq n$, $m_2(n,k) = 2^s$ where $s = [\log_2[\frac{2^n}{\phi_1(n,k)}]]$.*

References

[1] V.K.Leont'ev, G.L.Movsissian,On additive channel, Fourth Conference on Computer Science and Information Technologies 22-26 September, 2003,Yerevan,Armenia.

[2] V.K. Leont'ev, M. R. Hooshmandasl,Channel with separation mistake, Eighth International Conference on Discrete Mathematics and its applications 2-6 February, 2004,Moscow,Russian.

[3] V.K. Leont'ev, G.L. Movsisyan, Zh.G. Margaryan,Perfect codes in additive channels,Doklady Akademii Nauk, 2006, Vol. 411, No. 3, pp. 306–308.

References

1. J.W. Demmel, *Applied numerical linear algebra,* SIAM, Philadelphia, 1997.
2. M. Dana, A.G. Zykov, Kh.D. Ikramov, "A minimal residual method for a special class of linear systems with normal coefficients matrices," *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* bf 45, no. 11, pp. 1854–1863, 2005.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

MAXIMALLY DECODED CODES IN ADDITIVE CHANNELS

M. R. HOOSHMANDASL

Yazd University, Yazd, Iran
hooshmandasl@yazduni.ac.ir

Abstract. A communication system is called an additive channel, if the error vector X satisfies the system $AX \leq B$. The aim of this work is finding the maximal subset of $\mathbb{Z}_2^n$ that can be separated by the channel.

The following figure shows a communication system for transmitting information from a source to a destination through a channel:

$$\begin{tikzcd} \textit{Source} \arrow[r, "U"] & \textit{Channel} \arrow[r, "\hat{U}"] & \textit{Destination} \\ & \textit{Error vector} \arrow[u, "X"] & \end{tikzcd}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 94A05; Secondary 94B05, 94A40.

Key words and phrases. Code, Decode, Additive channel.

it is known that the Gaussian generates a frame whenever $ab < 1$. The fact that one can construct Gabor frames that are well localized in both time and frequency is just one motivation for the study of those frames.

Except the constructions given already in [4], only few Gabor frames are known for which the generator as well as a dual are known explicitly, e.g., as finite linear combinations of elementary functions. A recent construction appears in [2]:

Theorem 1. Let $N \in \mathbb{N}$. Let $g \in L^2(\mathbb{R})$ be a real-valued bounded function with *supp* $g \subseteq [0, N]$, for which

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n) = 1. \tag{0.9}$$

Let $b \in]0, \frac{1}{2N-1}]$. Then the function g and the function h defined by

$$h(x) = bg(x) + 2b\sum_{n=1}^{N-1} g(x+n) \tag{0.10}$$

generate dual frames $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ and $\{E_{mb}T_n h\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ for $L^2(\mathbb{R})$.

Interesting special cases are obtained by letting the generator g be a B-spline: in that case as well the generat as the dual generator are given explicitly, and by considering B-splines of sufficiently high order, very good decay properties in time and frequency can be obtained.

Theorem 1 has a counterpart in $L^2(\mathbb{R}^d)$, see [3] for details.

References

[1] Christensen, O.: *An introduction to frames and Riesz bases.* Birkhäuser Boston 2003.

[2] Christensen, O.: Pairs of dual Gabor frames with compact support and desired frequency localization. Appl. Comp. Harm. Anal. **20** (2006), 403–410.

[3] Christensen, O., Kim, R.Y.: Pairs of explicitly given dual Gabor frames in $L^2(R^d)$. J. Fourier Anal. Appl. **12** vol. 3 (2006), 243–255.

[4] Daubechies, I., Grossmann, A. and Meyer, Y.: Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.* **27** (1986), 1271-1283.

[5] Feichtinger, H. G. and Strohmer, T. (eds.): *Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications.* Birkhäuser, Boston, 1998.

[6] Feichtinger, H. G. and Strohmer, T. (eds.): *Advances in Gabor Analysis.* Birkhäuser, Boston, 2002.

[7] Gröchenig, K. H.: *Foundations of Gabor analysis.* Birkhäuser, 2000.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WHOSE COEFFICIENT MATRICES ARE LOW RANK PERTURBATIONS OF HERMITIAN MATRICES

M. DANA

Kurdistan University, Sanandaj

Abstract. MINRES-N is an iterative method for solving systems of linear equations with normal coefficient matrices whose spectra are located on algebraic curves of a low degree. This method was proposed in a previous publication of these authors. In this paper, the range of applicability of MINRES-N is extended in two directions. These are, first, rank-one perturbations of the normal matrices described above (where the perturbed matrices need not be normal) and, second, normal matrices that are low rank perturbations of Hermitian matrices. Examples are given that demonstrate a higher efficiency of MINRES-N for these classes of systems compared to the well-known algorithm GMRES.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 39B82; Secondary 44B20, 46C05.

Key words and phrases. minimal residual method, system of linear algebraic equations, GMRES and MINRES methods.

* Speaker.

General frame theory

Let $\mathbf{H}$ be a separable Hilbert space with the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in the first entry. A countable family of elements $\{f_k\}_{k\in I}$ in $\mathbf{H}$ is a *frame* for $\mathbf{H}$ if there exist constants $A, B > 0$ such that

$$A||f||^2 \leq \sum_{k\in I} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B||f||^2, \ \forall f \in \mathbf{H}; \tag{0.1}$$

The numbers A, B in (0.1) are called *frame bounds*.

The sequence $\{f_k\}_{k\in I}$ is a *Riesz basis* for $\mathbf{H}$ if $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k\in I} = \mathbf{H}$ and there exist constants $A, B > 0$ such that

$$A \sum |c_k|^2 \leq \left|\left|\sum c_k f_k\right|\right|^2 \leq B \sum |c_k|^2. \tag{0.2}$$

for all finite sequences $\{c_k\}$.

If at least the upper frame condition is satisfied, $\{f_k\}_{k\in I}$ is called a Bessel sequence. Every orthonormal basis is a Riesz basis, and every Riesz basis is a frame (the bounds A, B in (0.2) are frame bounds). That is, Riesz bases and frames are natural tools to gain more flexibility than possible with an orthonormal basis. For an overview of the general theory for frames and Riesz bases we refer to the book [1]. The difference between a Riesz basis and a frame is that the elements in a frame might be dependent: a frame $\{f_k\}_{k\in I}$ is a Riesz basis if and only if

$$\sum_{k\in I} c_k f_k = 0, \ \{c_k\} \in \ell^2(I) \Rightarrow c_k = 0, \ \forall k \in I. \tag{0.3}$$

Given a frame $\{f_k\}_{k\in I}$, the associated *frame operator* is a bounded invertible operator on $\mathbf{H}$, defined by

$$Sf = \sum_{k\in I} \langle f, f_k \rangle f_k. \tag{0.4}$$

The series defining the frame operator converges unconditionally for all $f \in \mathbf{H}$. Via the frame operator we obtain the *frame decomposition*, representing each $f \in \mathbf{H}$ as an infinite linear combination of the frame elements:

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k\in I} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k. \tag{0.5}$$

The family $\{S^{-1}f_k\}_{k\in I}$ is itself a frame, called the *canonical dual frame*. In case $\{f_k\}_{k\in I}$ is a frame but not a Riesz basis, there exist other frames $\{g_k\}_{k\in I}$ which satisfy that

$$f = \sum_{k\in I} \langle f, g_k \rangle f_k, \ \forall f \in \mathbf{H}; \tag{0.6}$$

each family $\{g_k\}_{k\in I}$ with this property is called a *dual frame*.

While it can be very difficult to find the canonical dual frame, our purpose in the next section is to show that sometimes other dual frames can be found easily. We will discuss concrete frames in $L^2(\mathbb{R})$, based on two operators on $L^2(\mathbb{R})$, namely, translation and modulation. These operators are defined as follows:

$$(T_a f)(x) = f(x-a), \ a > 0, \quad (E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x), \ b > 0.$$

Gabor frames

One can prove that the set of functions

$$\{e^{i2\pi m(x-n)}\chi_{]0,1[}(x-n)\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{e^{i2\pi mx}\chi_{]0,1[}(x-n)\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \tag{0.7}$$

is an orthonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$. More generally, given parameters $a, b \in \mathbb{R}$ and a function $g \in L^2(\mathbb{R})$, a frame for $L^2(\mathbb{R})$ of the form

$$\{e^{i2\pi mbx} g(x-na)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

is called a *Gabor frames*. The word "Weyl-Heisenberg frame" is also used. Using the operators translation and modulation operators, a Gabor frame can be written

$$\{e^{i2\pi mbx} g(x-na)\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

The books [5],[6] contain several articles related to different aspects (theory and applications) of Gabor theory. Another important source of information is the book [7] by Gröchenig, where Gabor frames are used in the context of time-frequency analysis. Most of the frame results can also be found in [1].

We will need the Fourier transform, for $f \in L^1(\mathbb{R})$ defined by

$$\mathbf{F}f(\gamma) = \hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\gamma} dx, \tag{0.8}$$

with the usual extension to $f \in L^2(\mathbb{R})$.

A famous result about Gabor frames states that $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ can only be a frame for $L^2(\mathbb{R})$ if $ab \leq 1$; and *if* $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a frame, it is a Riesz basis if and only if $ab = 1$. The *Balian-Low Theorem* restricts the class of functions g for which $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ can be a Riesz basis: it says that if $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz basis, then

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\gamma \hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma\right) = \infty.$$

In words, the Balian-Low Theorem means that a function g generating a Gabor Riesz basis can not be well localized in both time and frequency. In particular, the Gaussian $g(x) = e^{-x^2}$ does not generate a Gabor Riesz basis for $ab = 1$. On the other hand,

ing and simplifying ideas of Mathematics. It is well known th
group concept first appeared in connection with permutatio
is also generally acknowledged that the abstract group concep
appeared in a paper by A. Cayley. In a recent publication in
ematics Magazine (USA) we have throughly analyzed this, an
subsequent papers by Cayley bearing the general title "The The
Groups as Depending on the Symbolic Equation $\theta_n = 1$" (185
and shown that Cayley was not only in full and conscious poss
of the abstract group concept, but also had developed abstract
theory to a considerable extent. Already in that paper we pu
ward the view that Cayley's encounter with a non-abelian gr
order six in connection with a problem in geometrical optics h
him to generalise the group concept and this led him to the ab
group concept. In this talk, we elaborate on this claim.

On November 2, 1853, Cayley sent off two papers for publi
in the Philosophical Magazine. One of these papers bore th
"On a property of the caustic by reflection at a circle." A cau
a curve that is always tangent that proceed from a point to
flected or refracted at a given surface; thus the caustic is the en
of the reflected or refracted rays. One way to compute a caust
to use the secondary caustic, which consists of the reflections
refractions of the source point across all lines tangent to the
tive or the refractive surface. The (primary) caustic is the evol
the secondary caustic. In the cited paper Cayley proposes to d
strate the theorem, that the same caustic by refraction of a
may be considered as arising from six different systems of a ra
point, circle, and index of refraction. The demonstration is ob
by means of the secondary caustic, which is an oval of the Desc
Such an oval has three foci, any one of which may be taken f
radiant point; whichever be selected, there can always be four
corresponding circles and indices of refraction. Cayley noted th
equation of the secondary caustic, which contains three paran
ξ (the abscissa of the radiant point), c (the radius of the re
ing circle), and μ (the index of refraction), can be put into s
equivalent forms. By examining these equations of the seco
caustic for symmetry, Cayley discovered six sets of transform
of the parameters ξ, c, μ (including the identity transforma
each of which transforms an equation of the secondary causti
an equivalent form of the equation; and we have therefore iden
the same caustic. Denoting these transformations by 1, α, β
Cayley discovered that the relations connecting these symbols a
same as the relations connecting the six permutations of three l
(with appropriate assignation). This discovery prompted Cay
generalise the group concept at an abstract level.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

GABOR FRAMES AND THEIR DUAL FRAMES

OLE CHRISTENSEN

Department of Mathematics, Building 303, Technical University of Denmark, 2800 Lyngby, Denmark

INTRODUCTION

An orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$ is a useful tool in order to obtain expansions of functions in $L^2(\mathbb{R})$. However, the conditions to an orthonormal basis are very restrictive, so often it is impossible to construct an orthonormal basis having extra prescribed properties. Some of the limitations can be removed by considering frames rather than orthonormal bases. We give the formal definition in the next section. For now, we just mention that a frame is some kind of overcomplete basis: via a frame for $L^2(\mathbb{R})$, one can express each function $f \in L^2(\mathbb{R})$ as an unconditionally convergent infinite linear combination of the frame elements, exactly as we are used to for bases. However, the coefficients in the expansion are not necessarily unique; this opens for the opportunity to *choose* the most convenient coefficients.

The overcompleteness of frames has already proved useful in several areas of signal processing. In this paper we concentrate on the mathematical properties. We first present the general theory for frames in Hilbert spaces. After that, we discuss Gabor frames and present new results.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C15; Secondary 42C40.
Key words and phrases. Frames, dual frames.

* Speaker.

fact that eigenvectors of a square matrix corresponding
eigenvalues are linearly independent. But in order to find
to the question "what is the maximum number of linearl
dent eigenvectors of a matrix?" we need the following the
few books on Linear Algebra care to mention at all.

Theorem 0.1. *Suppose A has k distinct eigenvalues λ λ_k; suppose S_i is a linearly independent set of eigenve corresponding to eigenvalue λ_i , $i = 1, 2, \ldots, k$. Then vectors $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ is linearly independent.*

Taking for each S_i a basis of the eigenspace of λ_i , $i =$ (that is, the solution space of the system of homogeneou $(A - \lambda_i I)x = 0)$, we get a set of $m = \sum_{i=1}^{k} g_i$ linearly i eigenvectors of A. Here g_i denotes the dimension of the sol of the system of homogeneous equations $(A - \lambda_i I)x =$ called the geometric multiplicity of the eigenvalue λ_i , $i =$ We claim that this m is the maximum number of linearly i eigenvectors of the matrix A.

Intimately connected with the study of eigenvalues an tors is the question of diagonalizablity of a square matr diagonalizable if and only if K^n has a basis consisting of e of A. Since any basis of K^n consists of a set of n linearl dent vectors, it follows that A is diagonalizable if and on n linearly independent eigenvectors.

Theorem 0.2. *A is diagonalizable if and only if the geo tiplicity of every eigenvalue of A is equal to its algebraic r*

Recall that the algebraic multiplicity of an eigenval highest power of $(t - \lambda)$ dividing the characteristic polynon $tI)$.

To accomplish this, we need the well known fact that th multiplicity of an eigenvalue cannot exceed its algebraic n

The geometric multiplicity of an eigenvalue λ is equal where ρ is the rank of the matrix $A - \lambda I$. Therefore we formula $m = nk - \sum_{i=1}^{k} \rho_i$, where n is the order of A an rank of the matrix $A - \lambda_i I$.

Corollary 0.3. *A is diagonalizable if and only if $\sum_{i=1}^{k} \rho_i$ =*

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

THE ORIGIN OF THE ABSTRACT GROUP CONCEPT

MUNIBUR RAHMAN CHOWDHURY

University of Dhaka, Bangladesh

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 01A55; Secondary 20A99.
Key words and phrases. Group, Caustic, Transformation.

ABSTRACT. If two matrices A and B are close to each other, then how close their eigenvalues must be? This question has obvious mathematical interest, and is of fundamental importance in physics, numerical analysis and engineering. The matrix B is thought of as a perturbation of A, or an approximation to A in different contexts.

A prototypical result due to H. Weyl (1912) says that if A and B are $n \times n$ Hermitian matrices with eigenvalues $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$ and $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$, respectively, then

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j - \beta_j| \leq \|A - B\|.$$

Here $\|T\|$ denotes the norm of T as an operator on the n-dimensional Hilbert space $\mathbb{C}^n$.

This inequality can be generalised in different directions. We can seek versions for other special classes of matrices, and for all matrices; we can use different measures of distance; and we can ask for analogues in infinite dimensions.

In three talks we will survey the prominent results that are known, and look at some techniques and proofs.

REFERENCES

[1] R. Bhatia, *Perturbation Bounds for Matrix Eigenvalues*, Pitman Research Notes in Mathematics 162, Longman, 1987.
(This book has been out of print. It will soon reappear in the series SIAM Classics in Applied Mathematics. An appendix giving results proved after 1987 will be included in the new edition.)

[2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 169, Springer, 1997.
(Low-priced special editions for India and the mid east have been published by Springer, India.)

[3] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 1983.
(This book is now in its third edition. A low-priced Indian edition is appearing in TRIM series, Hindustan Book Agency, 2007.)

[4] G. W. Stewart and J.-G. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, in the series Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, 1990.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

THE MAXIMUM NUMBER OF LINEARLY INDEPENDENT EIGENVECTORS OF A MATRIX

MUNIBUR RAHMAN CHOWDHURY

University of Dhaka, Bangladesh

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A18; Secondary 97A99.
Key words and phrases. Eigenvector, Linear Independence, Diagnolisation.

REFERENCES

[1] L.B.Beasley, S.-G. Lee, Y.H Lee, A characterization of strong preservers of matrix majorization, Linear Algebra and Its Applications, 367 (2003) 341-346.
[2] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York, 1997.
[3] J.V. Bondar, Comments and complements to: inequalities: theory of majorization and its appl. by Albert W. Marshall and Ingram Olkin, Linear Algebra Appl. 199 (1994) 115-130.
[4] H. Chiang and C.K. Li, Generalized Doubly Stochastic Matrices and Linear Preservers, Linear and Multilinear Algebra 53(2005), 1-11.
[5] G. Dahl, Matrix majorization, Linear Algebra Appl. 288 (1999) 53-73.
[6] M.Marcus and R. Purves, linear transformations on algebra of matricesII: The invariance of the elementary symmetric functions, Canad. J. Math. 11 (1959), 383-396
[7] A.W. Marshall, I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorization and its Applications, Academic, New York, 1972.
[8] F. Martnez Pera , P. Massey, L. Silvestre,Weak matrix majorization, Linear Algebra Appl 403 (2005), 343-368.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

A SURVEY OF EIGENVALUE PERTURBATION BOUNDS

RAJENDRA BHATIA

Stat. Math. Unit
Indian Statistical Institute
7, S. J. S. Sansanwal Marg
New Delhi - 110 016
Email : rbh@isid.ac.in

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 39B82; Secondary 44B20, 46C05.
Key words and phrases. Linear Algebra, Operator Theory, Numerical range, Determinant.

to be matrix majorized by A if there exists an n×n row stochastic matrix R such that B=RA , and denoted by A ≻B, see [8]. Also, several characterizations of matrix majorization was given in [5].

In [1], Beasley, S.-G. Lee and Y.H Lee proved that, if a linear operator T:$\mathbf{M}_n \to \mathbf{M}_n$ strongly preserves matrix majorization then, there exist a permutation P and an invertible matrix $M \in \mathbf{M}_n$ such that $T(X) = PXM$, $\forall\ X \in\ span\{\mathbf{R}_n\}$, where $\mathbf{R}_n$ is the set of all $n \times n$ row stochastic matrices. For more information about majorization see [2] , [3] and [7].

Now, we introduce gw-majorization on $\mathbf{M}_{n\times m}$ as follows:

A matrix $R \in \mathbf{M}_n$ which all it's row sums are equal one is said to be g-row stochastic matrix. For more details see [4].

Definition 1.1. Let $A, B \in \mathbf{M}_{n\times m}$. The matrix B is said to be gw-majorized by A if there exists an n×n g-row stochastic matrix R such that B=RA and denoted by A$\succ_{gw}$B .

In this paper, we will show that the strong linear preservers of gw-majorization on $\mathbf{M}_n$ are in the following form :

$$T(X) = RXM,$$

where R and M are invertible and $R \in \mathbf{GR}_n$.

Throughout this paper, $\mathbf{GR}_n$ is the set of g-row stochastic matrices. Also J is the $n \times n$ matrix that all entries are equal one.

2. GW-MAJORIZATION ON $\mathbf{M}_{n\times m}$

In this section we state some properties of gw-majorization on $\mathbf{M}_{n\times m}$.

Let $\sim$ be a relation on $\mathbf{M}_{n\times m}$. A linear operator T:$\mathbf{M}_{n\times m} \longrightarrow \mathbf{M}_{n\times m}$ is said to be a linear strong preserver of $\sim$ whenever:

$$x \sim y \iff T(x) \sim T(y).$$

Proposition 2.1. *Let T :$M_{n\times m} \to M_{n\times m}$ be a linear operator that strongly preserves gw-majorization . Then T is invertible.*

The following proposition states some elementary properties of gw-majorization on $\mathbf{M}_{n\times m}$.

Proposition 2.2. *Let $X, Y \in \mathbf{M}_{n\times m}$, $A, B \in \mathbf{GR}_n$, $C \in \mathbf{M}_m$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ such that A,B and C are invertible and $\alpha \neq 0$. Then the following conditions are equivalent:*

1. $X \succ_{gw} Y$
2. $AX \succ_{gw} BY$
3. $\alpha X + \beta J_{n,m} \succ_{gw} \alpha Y + \beta J_{n,m}$
4. $XC \succ_{gw} YC$.
Where $J_{n,m}$ is the $n \times m$ matrix whose all entries are equal one.

Remark 2.3. Let A,B be two g-row stochastic matrices then, AB and A^{-1} (If A is invertible) are g-row stochastic matrices.

3. STRONG LINEAR PRESERVERS OF GW-MAJORIZATION

In this section, we will investigate linear operators on $\mathbf{M}_n$ that strongly preserves gw-majorization.

For $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq m$, E_{ij} is the $n\times m$ matrix whose all entries are equal zero except the $(i,j)^{th}$ entry which is equal one.

Lemma 3.1. *Let A be an invertible matrix. Then, $A^{-1}RA \in \mathbf{GR}_n$ for every $R \in \mathbf{GR}_n$ if and only if there exists a non zero scalar α, such that $\alpha A \in \mathbf{GR}_n$.*

Lemma 3.2. *Let A and B be two invertible matrices. Then the linear operator T :$M_n \to M_n$, where $T(X) = AX^tB$, for all $X \in M_n$, is not strong preserver of gw-majorization.*

Theorem 3.3. *Let T :$M_n \to M_n$ be a linear operator that strongly preserves gw-majorization. Then T strongly preserves the set of singular matrices.*

In [6] Marcus and Purves proved the following Theorem.

Theorem 3.4. *Let T :$M_n \to M_n$ be a linear operator. Then, T strongly preserves the set of singular matrices, if and only there exist invertible matrices A and B such that, T(X)=AXB, $\forall\ X \in M_n$ or T(X)=AX^tB, $\forall\ X \in M_n$.*

Now, we characterize linear operators on $\mathbf{M}_n$ that strongly preserves gw-majorization.

Theorem 3.5. *Let T :$M_n \to M_n$ be a linear operator. Then T is strong preserver of gw-majorization if and only if there exist g-row stochastic invertible matrix A and invertible matrix B such that, T(X)=AXB for all X in M_n .*

Acknowledgement. This research was supported by the Mahani mathematical research center.

Let $\mathcal{F}$ be a family of subsets of some n-element set, and let $L \subseteq \{0, 1, \ldots\}$ be a finite set of integers. We say that $\mathcal{F}$ is L-intersecting if $|A \bigcap B| \in L$ for every pair A, B of distinct members of $\mathcal{F}$.

We prove the following result.

Theorem 1.6. (Frankl-Wilson 1981) *If $\mathcal{F}$ is an L-intersecting family of subsets of a set of n elements, then* $|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{|L|} \binom{n}{i}$.

[1] 1. Akbari S.; Alipour A. Combinatorial results using inner product, Submmited.
[2] 2. Jukna S. "Extremal Combinatorics with Applications in Computer Science," Second Edition, Springer(2001).
[3] 3. Wilson R. M. Some applications of polynomials in combinatorics, Lecture Notes Caltech (2006)

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

STRONG LINEAR PERSEVERES OF GW-MAJORIZATION

A. ARMANDNEJAD[1]* AND A. SALEMI[2]

[1]Vali-Asr University of Rafsanjan and [2] Shahid Bahonar University of Kerman

ABSTRACT. Let $\mathbf{M}_n$ be the set of all $n \times n$ matrices with entries in $\mathbb{F}$, where $\mathbb{F}$ is the field of real or complex numbers. A matrix $R \in \mathbf{M}_n$ with the property $Re = e$ is said to be a g-row stochastic matrix, where $e = (1, ..., 1)^t \in \mathbb{F}^n$. Let A,B $\in \mathbf{M}_n$. The matrix B is said to be gw-majorized by A if there exists an n×n g-row stochastic matrix R such that B=RA, and denoted by $A \succ_{gw} B$. In this paper we will characterize all linear operators that strongly preserve gw-majorization on $\mathbf{M}_n$.

1. INTRODUCTION

A nonnegative matrix $R \in M_n$ which all it's row sums are equal one is said to be row stochastic matrix.

The definition of matrix majorization was introduced by Dahl in [5], and this notion generalized the definition of multivariate majorization. The matrix B is said

2000 *Mathematics Subject Classification.* 15A03.
Key words and phrases. Strong persevere, g-doubly stochastic matrices, gw-majorization.

* Speaker.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

APPLICATIONS OF LINEAR ALGEBRA IN COMBINATORICS

S. AKBARI

Sharif University of Technology

ABSTRACT. We present a selection of applications of linear algebra in graph theory and combinatorics. The general frame for the linear algebra method in combinatorics is the following: if we want to come up with an upper bound on the size of a set of objects, associate them with elements in a vector space V of relatively low dimension, and show that these elements are linearly independent, hence, we cannot have more objects in our set than the dimension of V. One common method of proving an inequality is to exhibit a set of m polynomials that can be shown to be linearly independent, but which belong to the span of n simple polynomials, in this way, we have proved $m \leq n$.

1. INTRODUCTION

A subset $S \subset \mathbb{R}^n$ is a *two-distance set* when there are numbers α and β so that $|a-b| \in \{\alpha, \beta\}$ for all distinct $a, b \in S$. First we prove the following theorem.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C15; Secondary 05C38.
Key words and phrases. Linear Algebra, balanced set , two-distance set .

Theorem 1.1. *Let S be a two-distance set in $\mathbb{R}^n$. Then $|S| \leq (n+1)(n+4)/2$.*

Theorem 1.2. *(Chevalley-Warning) Let p be a prime. For $j = 1, \dots, n$ let $f_j(x_1, \dots, x_m)$ be a polynomial of degree d_j over $\mathbb{Z}_p$, where p is a prime. If $d_1 + \dots + d_n \leq m-1$, then the number N of common zeros of $f_1, \dots, f_n$ is divisible by p. In particular, if there is one common zero, then there is another one.*

proof By Fermat's little theorem $a^{p-1} \equiv 1$ (mode p) for all $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$. Hence (in $\mathbb{Z}_p$),

$$N = \sum_{x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Z}_p} \prod_{j=1}^{n} (1 - f_j(x_1, \dots, x_m)^{p-1}). \qquad (1)$$

By expanding the right-hand side we get a linear combination of monomials of the form $\prod_{i=1}^{m} {x_i}^{t_i}$ with $\sum_{i=1}^{m} t_i \leq (p-1)\sum_{j=1}^{n} d_j < (p-1)m$. Hence, in each such monomial there is an i with $t_i < p-1$. But then $\sum_{x_i \in \mathbb{Z}_p} x_i^{t_i} = 0$ (in $\mathbb{Z}_p$), implying that the contribution of each monomial to the sum (1) is 0 modulo p, completing the proof of theorem.

As an application of Chevalley-Warning Theorem we have the following result.

Theorem 1.3. *Every 4-regular graph plus one edge has a 3-regular induced subgraph.*

Using the inequality $rank(AB) \leq min(rank(A), rank(B))$, we prove the next theorem.

Theorem 1.4. *Suppose that $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ and $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ are two families of subsets of an n-element set and p is a prime number such that for any $i, 1 \leq i \leq m$, $|A_i \cap B_i| \equiv a \,(\text{mod}\, p)$, and for any $i \neq j$, $|A_i \cap B_j| \equiv b \,(\text{mod}\, p)$, where a and b are two fixed integers which are not congruent modulo p. Then $m < p\lceil \frac{n+1}{p} \rceil$.*

A family $A_1, \dots, A_m$ of distinct sets is *balanced* if there exist two disjoint and non-empty subsets of indices I and J such that

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j, \text{ and}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} A_j.$$

We show that

Theorem 1.5. (Lindstorm 1993) *Every family of $m \geq n+2$ distinct subsets of an n-element set is balanced.*

For any fixed $\mu \in \mathbf{C}$, let m_μ be the degree of the minimal polynomial of the matrix $Q(\mu)$. The *minimal degree* of $Q(\lambda)$, as a matrix polynomial, is denoted by $d := \max_{\mu \in \mathbf{C}} m_\mu$. Also, the *numerical order* of $Q(\lambda)$ is defined as the smallest positive integer k such that $V^k[Q(\lambda)] = \sigma[Q(\lambda)]$, denoted by $num[Q(\lambda)] = k$. In view of Proposition 2.1(iv), we have $k \le d$.

It is clear that $V^k[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbf{C} : \ 0 \in V^k(Q(\mu))\}$ for all $k \in \mathbb{N}$. (3.1)
So, for the special case $Q(\lambda) = \lambda I - A$, we have $V^k[Q(\lambda)] = V^k(A)$. In this sense, the polynomial numerical hulls of a matrix polynomial are generalizations of the classical polynomial numerical hulls. Here, we list some simple properties of $V^k[Q(\lambda)]$.

Theorem 3.2. *(general properties) Let $Q(\lambda)$ be a matrix polynomial as in (1.1). Then the following assertions are true.*
(i) $V^k[Q(\lambda)]$ is closed.
(ii) $\sigma[Q(\lambda)] = V[Q(\lambda)] \subseteq V^{k+1}[Q(\lambda)] \subseteq V^k[Q(\lambda)] \subseteq V^1[Q(\lambda)] = W[Q(\lambda)]$.
(iii) $V^k[Q(\lambda + \alpha)] = V^k[Q(\lambda)] - \alpha$ for all $\alpha \in \mathbf{C}$.
(iv) $V^k[\alpha Q(\lambda)] = V^k[Q(\lambda)]$ for all nonzero $\alpha \in \mathbf{C}$.
(v) $V^k[U^*Q(\lambda)U] = V^k[Q(\lambda)]$ for any unitary matrix $U \in M_n$.
(vi) If $R(\lambda) := A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m$, then $V^k[R(\lambda)]\backslash\{0\} = \{\mu^{-1} : \mu \in V^k[Q(\lambda)]$ and $\mu \neq 0\}$.

By Proposition 2.1(ii), the polynomial numerical hulls of matrices are compact sets in $\mathbf{C}$. But $V^k[Q(\lambda)]$ need not be bounded, as shown in the following example.

Example 3.3. Let $Q(\lambda) = \lambda A - I$, where $A = diag(\alpha, -\beta, i\gamma, 0)$ such that α, β and γ are positive real numbers. Then by Theorem 3.2(vi), $V^2[Q(\lambda)] = \{\mu^{-1} : \mu \in V^2(A)$ *and* $\mu \neq 0\}$. We know, by Example 2.5(ii), that $V^2(A) = \sigma(A) \cup \{it : 0 \le t \le \hat{\gamma}\}$, where $\hat{\gamma} = \min\{\frac{\alpha\beta}{\gamma}, \gamma\}$, and hence $V^2[Q(\lambda)]$ is not bounded.

Theorem 3.4. *Let $Q(\lambda)$ be a matrix polynomial as in (1.1), and let $\mu \in \mathbf{C}$ be a boundary point of $V^k[Q(\lambda)]$. Then 0 is a boundary point of $V^k(Q(\mu))$.*

The converse of the above Theorem is not true. See the following example.

Example 3.5. Let $Q(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda D_5 = \lambda(\lambda I - D_5)$, where $D_5 = diag(1, \omega_5, \omega_5^2, \omega_5^3, \omega_5^4)$, and ω_5 is a primitive 5^{th} root of unity (i.e., $\omega_5^5 = 1$ and $\omega_5^i \neq 1$ for $i = 1, 2, 3, 4$). By relation (3.1), $V^2[Q(\lambda)] = V^2(D_5)$. Since $Q(0) = 0$, we have 0 is a boundary point of $V^2(Q(0))$. By [2], $0 \in Int(V^2(D_5)) = Int(V^2[Q(\lambda)])$, and hence $0 \notin \partial V^2[Q(\lambda)]$.

Theorem 3.6. *Let $Q(\lambda)$ be a matrix polynomial as in (1.1). Suppose all the coefficients A_i of $Q(\lambda)$ are real matrices. Then $V^k[Q(\lambda)]$ is symmetric with respect to the real axis in the complex plane.*

Proof. Let $p(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$ be an arbitrary scalar polynomial in $\mathbb{P}_k$. Define $\overline{p}(z) := \overline{a}_k z^k + \cdots + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0$, which is again a scalar polynomial in $\mathbb{P}_k$. Let $\mu \in V^k[Q(\lambda)]$ be given. So, $|p(0)| = |\overline{p}(0)| \le \|\overline{p}(Q(\mu))\| = \|\overline{\overline{p}(Q(\mu))}\| = \|p(\overline{Q(\mu)})\| = \|p(Q(\overline{\mu}))\|$. Thus, $\overline{\mu} \in V^k[Q(\lambda)]$. □

For normal matrix polynomials, we have the following theorem.

Theorem 3.7. *Let $Q(\lambda)$, as in (1.1), be a normal matrix polynomial. If $0 \notin V^k(A_m)$, then $V^k[Q(\lambda)]$ is bounded.*

$V^2[Q(\lambda)]$ may or may not be bounded when $0 \in V^2(A_m)$, see the following example.

Example 3.8. (i) Let α, β, and γ be three nonzero complex numbers such that the origin is the orthocenter of the triangle generated by $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Let $Q(\lambda) = \lambda A - I$, where $A = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Then by Example 2.5(i), $0 \in V^2(A)$. By Theorem 3.2(vi), we know that $V^2[Q(\lambda)] = \{\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}\}$. Hence $V^2[Q(\lambda)]$ is bounded. (ii) Let $Q(\lambda) = \lambda A - I$, where $A = \text{diag}(1, -1, 0, i)$. Then by Example 2.5(ii), $0 \in V^2(A) = \{1, -1\} \cup \{it : 0 \le t \le 1\}$, and hence by Theorem 3.2(vi), $V^2[Q(\lambda)] = \{1, -1\} \cup \{it : t \le -1\}$. Therefore, $V^2[Q(\lambda)]$ is unbounded.

References

[1] Ch. Davis, C. K. Li and A. Salemi, Polynomial Numerical Hulls of Matrices, Submitted to Linear Algebra and Its Applications.

[2] Ch. Davis and A. Salemi, On polynomial numerical hulls of normal matrices, Linear Algebra and Its Applications, 383 (2004), 151-161.

[3] A. Greenbaum, Generalizations of the field of values useful in the study of polynomial functions of a matrix, Linear Algebra and Its Applications, 347 (2002), 233-249.

[4] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, Matrix polynomials, Academic press, New York, 1982.

[5] R. Horn and C. Johnson, Topics in matrix analysis, Cambridg University Press, New York, 1991.

[6] O. Nevanlinna, Convergence of iterations for linear equations, Birkhäuser, Basel, 1993.

[7] A. Salemi and Gh. R. Aghamollaei, Polynomial Numerical Hulls of Matrix Polynomials, Linear And Multilinear Algebra, to appear.

compact convex set in $\mathbf{C}$ [5]. Let

$$Q(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0 \tag{1.1}$$

be a matrix polynomial, where $A_i \in M_n$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ and λ is a complex variable. If the matrix $Q(\mu)$ is normal for any fixed $\mu \in \mathbf{C}$, then $Q(\lambda)$ is said to be a normal matrix polynomial. The spectrum of $Q(\lambda)$ is denoted by $\sigma[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbf{C} : \det Q(\mu) = 0\} = \{\mu \in \mathbf{C} :\ 0 \in \sigma(Q(\mu))\}$. Also, the numerical range of $Q(\lambda)$ is defined as $W[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbf{C} : x^*Q(\mu)x = 0 \ ,\ \text{for some nonzero } x \in \mathbf{C}^n\} = \{\mu \in \mathbf{C} :\ 0 \in W(Q(\mu))\}$. It is known that $W[Q(\lambda)]$ is always closed but not necessarily compact connected set in $\mathbf{C}$, and $\sigma[Q(\lambda)] \subseteq W[Q(\lambda)]$. For the special case $Q(\lambda) = \lambda I - A$, where $A \in M_n$, we have $W[Q(\lambda)] = W(A)$ and $\sigma[Q(\lambda)] = \sigma(A) =$ the set of all eigenvalues (i.e. the spectrum) of the matrix A [4]. In section 2, the polynomial numerical hulls of matrices and some of their important properties are studied. In section 3, we introduce and study the polynomial numerical hulls of matrix polynomials. Throughout this paper, for a given positive integer k, $\mathbb{P}_k$ denotes the set of all scalar polynomials of degree k or less, and $\mathbb{P} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_k$ is the set of all scalar polynomials.

2. Polynomial numerical hulls of a matrix

Let $A \in M_n$. The notion of the (classical) polynomial numerical hull of A of order k was first introduced by O. Nevanlinna in 1993 as $V^k(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} :\ |p(\lambda)| \le \|p(A)\|\ \text{ for all } p \in \mathbb{P}_k\}$, and the polynomial numerical hull of A is defined as $V(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} :\ |p(\lambda)| \le \|p(A)\|\ \text{ for all } p \in \mathbb{P}\}$, where $\|\cdot\|$ is the spectral matrix norm [6]. The following important properties of $V^k(A)$ can be found in [2] and [3].

Proposition 2.1. *(general properties) Let $A \in M_n$. Then the following assertions are true.* *(i)* $\sigma(A) = V(A) \subseteq V^{k+1}(A) \subseteq V^k(A) \subseteq V^1(A) = W(A)$.
(ii) $V^k(A)$ *is a compact subset of* $\mathbf{C}$.
(iii) $V^k(\alpha A + \beta I) = \alpha V^k(A) + \beta$ *for all* $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.
(iv) Let r be the degree of the minimal polynomial of A. Then $V^k(A) = \sigma(A)$ for all $k \ge r$.
(v) $V^k(U^*AU) = V^k(A)$ *for any unitary matrix* $U \in M_n$.
(vi) Let $A \in M_n$ and $\alpha \in V^k(A)$. Then $V^k(A \ominus [\alpha]) = V^k(A)$.
(vii) Let $A \in M_n$ be an Hermitian matrix. Then $V^k(A) = \sigma(A)$ for all $k \ge 2$.

In view of the above Proposition (iv), there is a positive integer r such that $V^r(A) = \sigma(A)$. The smallest positive integer m such that $V^m(A) = \sigma(A)$ is called

the numerical order of A, denoted by $num(A) = m$. In this sense we state the following conjecture.

Conjecture 2.2. *Let $A \in M_n$. If there is a positive integer k such that $V^k(A) = V^{k+1}(A)$, then $V^k(A) = V^{k+1}(A) = \cdots = \sigma(A)$.*

For normal matrices, we have the following important properties.

Proposition 2.3. *Let A be a normal matrix. Then the following assertions are true.*
(i) $V^k(A) = \{x^*Ax :\ x \in \mathbf{C}^n, x^*x = 1, (x^*Ax)^i = x^*A^ix, i = 1, 2, \dots, k\}$.
(ii) $\partial(W(A)) \cap V^k(A) \subseteq \sigma(A)$ *for all* $k \ge 2$, *where* $\partial(.)$ *denotes the boundary.*
(iii) If $\gamma \in \mathbf{C}$ is a conical point of $V^k(A)$, then $\gamma \in \sigma(A)$.

Proof. The proofs of parts (i) and (ii) can be found in [2] and [3], respectively. For (iii) [7], in view of Proposition 2.1(v), assume without loss of generality that A is a diagonal matrix. Since γ is a conical point of $V^k(A)$, there exists a closed convex cone $F \subseteq \mathbf{C}$ such that $V^k(A) \subseteq \gamma + F$. Thus by Proposition 2.1(i), $\sigma(A) \subseteq \gamma + F$, and hence, $W(A) \subseteq \gamma + F$. Therefore γ is a conical point of $W(A)$, and hence $\gamma \in \sigma(A)$. □

Theorem 2.4. [1] ; *Let $A \in M_n$ be a normal matrix with $n \ge 3$. Then $V^{n-1}(A)$ has at most $n + 1$ points.*

Now, we state an applied example.

Example 2.5. [2] ; (i) Let $A \in M_n$ be a normal matrix whose spectrum consists of three non-colinear points. Then $V^2(A) = \sigma(A) \cup (\{\lambda_0\} \cap W(A))$, where λ_0 is the orthocenter of the triangle generated by $\sigma(A)$.
(ii) Let $A = diag(\alpha, -\beta, i\gamma, 0)$, where α, β, and γ are positive real numbers, and let $\hat{\gamma} = \min\{\frac{\alpha\beta}{\gamma}, \gamma\}$. Then $V^2(A) = \sigma(A) \cup \{it : 0 \le t \le \hat{\gamma}\}$, and so $\mathrm{num}(A) \ge 3$.
(iii) Let $A = diag(\alpha, -\beta, i\gamma, -i\theta)$, where α, β, γ and θ are positive real numbers. Let $\hat{\alpha} := \min\{\frac{\gamma\theta}{\alpha}, \alpha\}, \hat{\beta} := \min\{\frac{\gamma\theta}{\beta}, \beta\}, \hat{\gamma} := \min\{\frac{\alpha\beta}{\gamma}, \gamma\}$, and $\hat{\theta} := \min\{\frac{\alpha\beta}{\theta}, \theta\}$. Then $V^2(A) = \sigma(A) \cup [-\hat{\beta}, \hat{\alpha}] \cup i[-\hat{\theta}, \hat{\gamma}]$ and so $\mathrm{num}(A) \ge 3$.

3. Polynomial numerical hulls of a matrix polynomial

All the results of this section can be found in [7].

Definition 3.1. Let $Q(\lambda)$ be a matrix polynomial as in (1.1). The polynomial numerical hull of order k of $Q(\lambda)$ is denoted by $V^k[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbf{C} :\ |p(0)| \le \|p(Q(\mu))\|\ \text{ for all } p \in \mathbb{P}_k\}$, and the polynomial numerical hull of $Q(\lambda)$ is defined as $V[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbf{C} :\ |p(0)| \le \|p(Q(\mu))\|\ \text{ for all } p \in \mathbb{P}\}$.

Extended Abstracts of 4-th Seminar on Linear Algebra. Appl. and The Wavelets Workshop
7-9 March 2007, Vali-Asr University, Rafsanjan, Iran.

ON POLYNOMIAL NUMERICAL HULLS OF MATRICES AND MATRIX POLYNOMIALS

GH. R. AGHAMOLLAEI[1*] AND A. SALEMI[2]

[1]Department of Mathematics, Islamic Azad University, Baft Branch, 78515/175 Baft, Kerman, Iran and [2] Department of Mathematics, Shahid Bahonar University of Kerman, 7619614111, Kerman, Iran

ABSTRACT. In this note, we study the polynomial numerical hulls of square complex matrices and we introduce the polynomial numerical hulls of matrix polynomials. The emphasis is on the analytic and the geometrical properties of these notions.

1. INTRODUCTION

Let M_n be the algebra of all $n\times n$ complex matrices and let $A \in M_n$. The numerical range of A is denoted by $W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbf{C}^n, x^*x = 1\}$. If $A \in M_2$, then $W(A)$ is a closed (possibly degenerate) ellipse whose foci are the eigenvalues of A. The center of the ellipse $W(A)$ is at the point $\frac{1}{2}tr(A)$ and the lengths of its axis are $\sqrt{tr(A_0^*A_0) \pm 2|det\ A_0|}$, where $A_0 = A - (\frac{1}{2}tr(A))I$. If $A \in M_n$, then $W(A)$ is a

2000 *Mathematics Subject Classification.* 15A60, 15A18.
Key words and phrases. Polynomial numerical hull, Numerical range, Matrix polynomial.

* Speaker.

Invited speakers are signed by *.

Contents

Executive committee

Mohammad Abdi Arabloo

Hamid Reza Afshin (Head of College of Science)

Masoud Ajami

Ali Armandnejad

Ataollah Askari Hemmat (Chair man)

Mohammad Ali Dehghan

Ali Reza Hooman

Ali Reza Hosseini Dehmiri

Morteza Jafarpour

Hassan Jamali

Mehdi Mesbah

Ali Mohammad Mohsen-al-hosseini

Sayed Shahin Mousavi Mirkalaei

Habibollah Saeedi

Ahmad Safapour

Hossein Salmehei

Mohammad Shafiei (Head of Math. Dept.)

Scientific Committee

Dr. H. R. Afshin

Dr. A. Armandnejad

Dr. A. Askari Hemmat

Dr. A. R. Bahrampour

Dr. M. A. Dehghan

Dr. A. Iranmanesh (representative of IMS)

Dr. H. Mohebi (Shahid Bahonar University of Kerman)

Dr. S. Mousavi Mirkalaei

Dr. A. Niknam (representative of IMS)

Dr. M. Radjabalipour (Shahid Bahonar University of Kerman)

Dr. A. Safapour

Dr. M. Shafiei

In The Name Of God

It is our pleasure to welcome you to the fourth seminar on liner algebra and its applications &wavelet workshop. We on behalf of organizing committee wish you all a very happy stay. It is an honor for Vali-E-Asr University to be active in organizing such seminars biyearly and act as a host for the third time. As before this seminar is held with cooperation of Shahid Bahonar University of Kerman and Iranian mathematical society.

We would like to take this opportunity to tank Dr. Mousavi vice chancellor of the University, Dr.Ahmad Amiri Khorasani chancellor of Shahid Bahonar university of kerman and Dr. Alireza Medghalchi President of the Iranian mathematical Society, for their unyielding enthusiasm, support and cooperation.

Linear algebra, as the main subject of this conference, is extremely versatile. It is not only a fundamental and lively subject in pure mathematics on its own, but also has broad applications in other areas of pure mathematics such as, numerical analysis, Lie algebras, differentiable manifolds, and other subjects like mathematical physics, statistics, civil engineering, economics, etc; in return, they have

been instrumental in further development of linear algebra as it is today.

We are deeply grateful to Prof. M. M. Zahedi, minister of science research and technology the board of vice-chancellery committee, Iranian mathematical society, eng. Karami shahrokhi; president of national company of copper industry of Iran and Dr.Garami, president of the centre of advanced technology and Environmental science for their spiritual and financial support. We are also thankful to our colleagues and administrative committee for their sincere effort that they have extended in this regard. In the end we once again wish you all a pleasant stay and success for the Seminar.

Dr.Mehdi Ebrahiminejad
Chancellor of Vali E Asr University

Dr.Attalah Askari Hemat
Executive Director to the seminar

Extended Abstracts
Of
Articles

4th Seminar on Linear Algebra and its Applications (LAS4)
And
Wavelet Workshop

7-9 March , 2007

Vali Asr University

Rafsanjan , Iran

Extended Abstracts

4th Seminar in Linear Algebra and its Applications & Wavelet Workshop

Vali-E-Asr University of Rafsanjan

March, 7-9, 2007

Rafsanjan - Iran