

بسیار احساس خوشبختی می‌کردم که در میان متخصصین بزرگ جهان بودم. در پایان هفته، متخصصین موافقت کردند که اساساً اصلاح روش GYP برای به‌دست آوردن شکاف‌های اعداد اول کراندار امکان ندارد. خوشبختانه بیتانگ ژانگ^۸ در این جلسه حضور نداشت. تقریباً بعد از ده سال کار در تنهایی نسبی، او راه عبوری یافت و ثابت کرد که متخصصین در اشتباه بودند. حدس می‌زنم نتیجه اخلاقی این داستان این است که در همایشی که در مورد چگونگی حل نکردن فرضیه ریمان تشکیل می‌شود، شرکت نکنید.

*Alex Kontorovich, How I learned to love and fear the Riemann hypothesis, *Quanta Magazine*, January 4, 2021, available at <https://www.quantamagazine.org/how-i-learned-to-love-and-fear-the-riemann-hypothesis-20210104/>.

تجربیات تحقیرآمیز زیادی دارند.» با این حال، ایده‌های آن‌ها بخش مهمی از قضیه گرین-تائو^۶ را تشکیل داد، که نشان می‌دهد مجموعه اعداد اول شامل تصاعدهای حسابی با هر طول مفروض‌اند. سپس گلدستون و یلدریم با همکاری یانوش پینتز^۷ بیشتر بخش‌های روش اثبات خود را در اثبات قضیه بنیادی GPY، مبنی بر اینکه اعداد اول بی‌نهایت شکاف دارند که به‌دلخواه در مقایسه با میانگین شکاف‌ها کوچک است، در سال ۲۰۰۵ بازنویسی کردند. به‌علاوه اگر بتوانید قضیه آن‌ها را به هر اندازه بهبود بخشید، ثابت خواهید کرد که اعداد اول بی‌نهایت‌بار، با عدد ثابت مثبتی متفاوت‌اند. و این جهش عظیمی به‌سوی حل حدس بسیار مشکل اعداد اول دوقلو خواهد بود که بیان می‌کند که بی‌نهایت جفت عدد اول وجود دارد که اختلاف بین اعضای هر جفت ۲ است.

بلافاصله همایشی در مورد چگونگی توسعه روش GYP در سن‌خوزه کالیفرنیا برگزار شد. من که دانشجویی علاقه‌مند و شاد بودم

**دانشگاه علامه طباطبائی

علوم ریاضی و رایانه در سال ۲۰۲۰ *

بیل اندروز

مترجم: محمد جلوداری ممقانی **

در بخشی از کار خود مسائلی دیرپا در فیزیک و ریاضی را نیز حل کردند که تعجب پژوهشگرانی را برانگیخت که در این حوزه‌ها تحقیق می‌کنند. مجموعه دیگری از همکاری‌ها، ارتباطات گسترده‌ای که با نام تناظر لنگلندز^۱ شناخته می‌شود، بین حیطه‌های دور از هم ریاضی ایجاد و ما را به درک عمیق‌تری از بسیاری از شاخه‌های ریاضی امیدوار کرده است.

امسال، همچنین آشنایی فزاینده برخی ریاضی‌دانان با ترسیم‌های هندسی را بررسی کردیم، دیدیم که چگونه رایانه‌ها به ریاضی‌دانان در ارائه اثبات‌هایشان کمک می‌کند و در نهایت وضعیت فعلی ریاضیات و مشکلات آن مورد واکاوی قرار گرفت. اما همه خبرها خبر خوش نبود: شیوع ویروس کرونا تحقیقات ریاضی‌دانان را، که روند به ثمر رسیدن‌شان، وابستگی زیادی به همکاری و ارتباط با دیگران دارد، دچار مشکل کرد. همچنین این همه‌گیری موجب مرگ جان کانوی^۲، ریاضی‌دان بزرگ شد. این اتفاق درست یک ماه قبل از حل مسئله معروف او به‌دست یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی رخ داد. این مسئله، یکی از مسئله‌های مهم و حل‌نشده نظریه گره‌ها بود که با نام

چکیده:

اینکه امسال ریاضی‌دانان و دانشمندان علوم رایانه، قضیه‌های بزرگی در پیچیدگی محاسباتی، نظریه اعداد و هندسه ثابت کردند، مشخص شد که در ریاضیات از رایانه گریزی نیست.

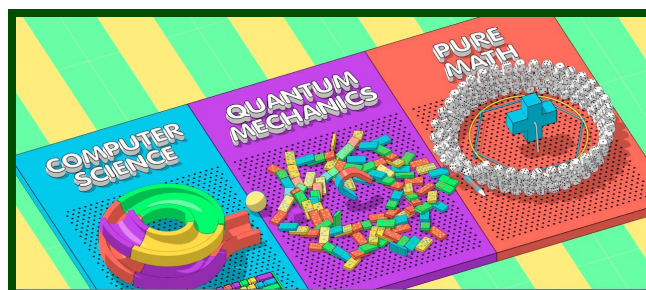
برای ریاضی‌دانان و دانشمندان علوم رایانه، سال ۲۰۲۰ مملو از اکتشافات وسیع و تجلیل از خلاقیت‌های راهگشا بود. چندین مسئله دیرپا و قدیمی، منجر به همکاری پایداری در زمینه‌های مختلف شد که در این میان، جواب برخی سؤالات مهم دیگر، به‌عنوان نتایج فرعی مسرت‌بخش به دست آمد.

در حالی که برخی از این نتایج، بی‌درنگ به کار آمدند و باعث پیشرفت تحقیقات و ادغام شاخه‌های مختلف شدند، برخی دیگر برای مسائل حل‌نشده، الهام‌بخش‌اند و نشان می‌دهند که پیشروی در چنین مسائلی امکان‌پذیر است. در اوایل سال، مجله کوانتا محدودیت‌هایی را که پنج دانشمند علوم رایانه در توانایی بررسی مسئله‌ها، برای رایانه‌های کوانتمی ترکیبی، تعیین کرده بودند نشان داد. این گروه

⁶Green-Tao ⁷János Pintz ⁸Yitang Zhang ¹Langlands correspondence ²John Conway

«مسئله گره اثر کانوی» شناخته می‌شد.^۲

است، امکان پیشرفت واقعاً وجود دارد.



گسترش علوم رایانه

بهره‌برداری از ارتباط‌های بین شاخه‌های ریاضی

سه دهه قبل، اثبات آخرین قضیه فرما تحسین مجلات و روزنامه‌های ریاضی را در سراسر گیتی برانگیخت. با این حال این اثبات آغاز تلاشی وسیع‌تر بود. این قضیه یک پل بین شاخه‌های جدا از هم ریاضی؛ معادلات جبری خاص در یک سو و نوعی ساختارهای متقارن کاشی‌کاری‌های هندسی در سوی دیگر، برقرار کرد. این ارتباط بین شاخه‌ای، که به تناظر لنگلندز معروف است، زمانی نمایان‌تر و استوارتر شد که دو مقاله، نوع معادله‌ها و کاشی‌کاری‌ها را، که در حال حاضر با هم عجین شده‌اند، به‌طور چشمگیری گسترش داد. نتیجه این شد که موانع قدیمی که بر سر راه پیشروی در ریاضیات وجود داشت، از بین رفت. متیو امرتون^۹ از دانشگاه شیکاگو می‌گوید: «پدیده‌های بنیادینی در نظریه اعداد وجود دارند که تازه در حال آشکار شدن هستند و ما تازه شروع به درک این پدیده‌ها کرده‌ایم».

در خبر دیگری از نظریه اعداد، وسلین دیمیتروف^{۱۰} از ارتباط بین چندجمله‌ای‌ها و سری‌های توانی استفاده کرد تا به‌صورت دقیق، چگونگی عملکرد راه‌حل‌های عددی معین چندجمله‌ای‌ها را برای دفع هندسی همدیگر، اندازه بگیرد. مجله کوانتا نیز در مقاله‌ای با عنوان «نظریه به درد نخوری که ریاضیات را دگرگون کرد»^{۱۱} توانایی نظریه نمایش را به نمایش گذاشت، که اشیای بسیار پیچیده‌ای موسوم به گروه‌ها را با مفهوم ساده‌تر ماتریس ارتباط می‌دهد. تمام این نتایج، حاکی از اهمیت بررسی ایده‌های ریاضی قدیمی موجود در زمینه‌های جدید است تا معلوم شود آیا هنوز مسئله‌ای قابل حل هست یا خیر. با این حال، جیمز مینرد^{۱۲} ریاضی‌دانی از آکسفورد به‌طور منظم وقت خود را صرف حمله به مسئله‌های مشکل‌شهر می‌کند و مصرانه به‌جای قبول شکست از پذیرش دیدگاه‌های جدید در مورد شکاف‌های اعداد اول سر باز می‌زند.

گاهی یک دستاورد علمی چنان مهم است که چندین شاخه علمی دیگر را تحت تاثیر قرار می‌دهد. یکی از این دستاوردها اثبات بزرگی بود که در ماه ژانویه توسط پنج نفر از دانشمندان رایانه ارائه شد و بلافاصله عنوان $MIP^* = RE$ به خود گرفت. در مقاله ارائه شده ثابت شده است که رایانه‌های کوانتومی که محاسبات خود را با کیوبیت‌های پیچیده^۴ انجام می‌دهند به لحاظ نظری می‌توانند درستی جواب‌های مجموعه بزرگی از مسائل را تأیید کنند. در مسیر این اثبات، این محققین به سؤالاتی در دو شاخه دیگر از علم پاسخ دادند: «مسئله تسیرلسون»^۵ در فیزیک که درباره مدل‌های درهم‌تنیدگی ذرات است و مسئله‌ای در ریاضیات محض موسوم به «حدس نشاندن گن»^۶ حاکی از اینکه ماتریس‌های بی‌نهایت‌بعدی را همواره می‌توان با ماتریس‌های دارای بُعد متناهی تقریب زد. البته برای محققینی که برای حل این حدس تحقیق می‌کردند، شنیدن خبر نادرستی آن در مقاله‌ای خارج از ریاضیات، تکان‌دهنده بود. اکنون ریاضی‌دانان در حالی که باید سایر فرضیات مرتبط با این ماتریس‌ها را بازنگری کنند، باید برای درک محتوای مقاله مذکور، خیلی سریع به اندازه کافی با علوم رایانه آشنا شوند.

همچنین در این سال دانشمندان علوم رایانه درخصوص مسئله معروف «فروشنده دوره‌گرد»^۷ که چگونگی پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بسته بین دسته‌ای از شهرها را بررسی می‌کند، پیشرفت شایان توجهی به‌دست آوردند. سه نفر از این دانشمندان علوم رایانه، با استفاده از شاخه «هندسه چندجمله‌ای‌ها» در ریاضی، الگوریتمی جدید معرفی کردند که حداقل بی‌نهایت کارآمدتر از روش دیرپای قدیمی مربوط به این مسئله است. شاید مقدار اختلاف حداقل «۲/۵ میلیارد از یک تریلیون یک تریلیون یک درصد»^۸ چیز مهمی به نظر نیاید، ولی ثابت شد که در حل مسئله‌ای که دهه‌ها حل نشده باقی مانده

^۲مقاله «حل مسئله قدیمی گره کانوی به دست یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی» در همین شماره را نگاه کنید.

^۴entangled qubits ^۵Tsirelson's problem ^۶Connes embedding problem ^۷traveling salesperson problem ^۸0.2 billionth of a trillionth of a trillionth of a percent ^۹Matthew Emerton ^{۱۰}Vesselin Dimitrov ^{۱۱}The useless perspective that transformed mathematics ^{۱۲}James Maynard



تهاجم رایانه‌ها به ریاضیات

ریاضی‌دانان برای دهه‌ها برنامه‌های رایانه‌ای موسوم به «دستیار اثبات^{۱۳}» را برای یاری در نوشتن اثبات‌ها به کار گرفته‌اند، اما فقط آن‌ها بودند که فرایند را هدایت و رویکرد کلی اثبات را انتخاب می‌کردند. ممکن است این شیوه به‌زودی تغییر کند. بسیاری از ریاضی‌دانان در مورد نرم‌افزاری موسوم به لین^{۱۴} که دستیار اثباتی کارآمد و اعتیادآور است و روزی شاید یاریگر حل مسائل بزرگ باشد، هیجان زده شده‌اند. از این‌رو، نخست ریاضی‌دانان باید هزاران سال دانش ریاضی را که بیشتر آن نانوشته است به‌صورت دیجیتال درآورند تا برای لین قابل شناسایی و خواندن باشد. پژوهشگران قبل از این، برخی از پیچیده‌ترین ایده‌های ریاضی را رمزگذاری کرده‌اند و به‌طور نظری ثابت کرده‌اند که این نرم‌افزار می‌تواند مسائل سخت را بررسی کند. حالا، بحث فقط انجام بقیه کار است. یک آزمون اساسی برای نرم‌افزار می‌تواند سال آینده، یعنی سال ۲۰۲۱، شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضیات (IMO) باشد. دانیل سلسام^{۱۵} از بخش تحقیقات مایکروسافت، المپیاد جهانی ریاضیات را چالشی بزرگ می‌داند، و امیدوار است با استفاده از لین، یک هوش مصنوعی تولید کند که در آن، مدال طلا جایزه بگیرد. البته، هنوز راه درازی برای اینکه رایانه‌ها جایگزین انسان شوند، در پیش است و بسیاری از ریاضی‌دانان هنوز به‌طور کامل این برنامه‌ها را قبول ندارند. اما، اکنون رایانه‌ها جریان اصلی در تحقیقات ریاضی‌اند. قدرت محاسباتی بی‌بدیل آن‌ها برای پاسخ به انواع خاصی از سؤالات بزرگ ضروری است، مانند اتفاقی که در حل حدس کِلِر^{۱۶} افتاد.

بازگشت به مبانی

اگر به ریاضیات علاقه‌مندید ولی نمی‌توانید از خمینه کلبی - یائو روی میدان متناهی سر در بیاورید، «نقشه ریاضیات^{۱۷}» می‌تواند یاریگر شما باشد. این نقشه که حول سه محور اعداد، اشکال و تغییر طراحی شده است، درسی فشرده در مورد وضعیت ریاضیات است؛ آن‌گونه که ریاضی‌دانان می‌فهمند و عمل می‌کنند. هرچند روشن است که

شکل اشیا

بسیاری از مسایل ریاضی نتیجه عملی در زندگی واقعی ندارند، اما در ماه مارس مجله کوانتا در مقاله‌ای به چیزی کمتر از هندسه خود گیتی بسنده نکرد. پژوهش‌های ما از دورنمای وهم‌انگیز زندگی در هندسه‌های مسطح، کروی و هذلولوی محتمل‌ترین گزینه‌هایی که با توجه به داده‌های جاری وجود دارند، وجود تالاری از آینه‌ها را نشان داد که در آن بی‌نهایت نسخه از چهره خود را می‌بینید، یا جهانی را به تصویر کشید که در آن زمانی که کسی از شما دور می‌شود، اندازه‌اش بزرگ‌تر می‌شود! هرچند برخی شواهد و نشانه‌های خاص جهان ما را مسطح نشان می‌دهند، اما شاید تنها به نظر می‌آید که این‌گونه است، اما در حقیقت این‌گونه نیست، همان‌طور که زمین وقتی بر آن ایستاده‌اید، به‌وضوح مسطح به نظر می‌رسد، اما در واقع کروی شکل است.

در سطحی پایین‌تر از کهکشان، سرانجام دو ریاضی‌دان در ماه می، این مسئله قدیمی را که چه نوع مستطیل‌هایی را می‌توان با اتصال نقاط روی یک حلقه بسته صاف و پیوسته پیدا کرد حل کردند. این دو ریاضی‌دان با بازنگری دوباره مستطیل‌های ممکن، به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط در یک نسخه ویژه از فضای چهار بعدی، دریافتند که همه این حلقه‌ها شامل مجموعه‌هایی از نقاطاند که مستطیل‌هایی با هر نسبت دلخواه تعریف می‌کنند. همچنین در ماه می، سه نفر از ریاضی‌دانان مسئله‌ای مهم در مورد دوازده وجهی منتظم را حل کردند. آن‌ها ثابت کردند که می‌توان یک مسیر بسته روی رویه این شکل ترتیب داد که از یک رأس شروع شود و از هیچ رأس دیگری نگذرد، دراصل آن‌ها ثابت کردند بی‌نهایت مسیر با این ویژگی وجود دارد.

¹³proof assistants ¹⁴Lean ¹⁵Daniel Selsam ¹⁶Keller's conjecture ¹⁷Map of Mathematics

جدید را شناسایی و رویکردهای جدید به مسائل قدیم را پیدا کنند. مجله آنالز آو ممتیکس در ماه فوریه اثباتی از لیزا پیکریلو^{۱۸}، در حالی که هنوز دانشجوی تحصیلات تکمیلی بود، منتشر کرد، که در آن وی ابزاری ریاضی با سابقه‌ای طولانی و کمتر شناخته‌شده را به کار گرفته بود تا مسئله‌ای با سابقه چندده ساله درباره گره‌ها را حل کند. گرهی خاص به نام جان کانوی، ریاضی‌دان برجسته، که به رده‌بندی ریاضیاتی برحسب یک ویژگی بعد بالا موسوم به «قابلیت برش بودن» تن نمی‌داد. پیکریلو با توسعه نسخه‌ای از این گره، آن را به صورت کلاسیک تحلیل کرد و نشان داد که گره کانوی «برش» نیست. کانوی خود در ماه آوریل بر اثر ابتلاء به بیماری کرونا درگذشت و آن‌طور که همسرش در بخش یادداشت‌های مجله آورده است از قضیه پیکریلو خبر نداشت. سهم کانوی بسیار فراتر از نظریه گره‌ها بود، وی نظریه گره، نظریه اعداد، آنالیز و دیگر شاخه‌های ریاضی را غنی‌تر کرد، در حالی که همواره از بازی‌ها و معماها لذت می‌برد. مجله کوانتا در شماره اکتبر در قسمت «معمای دانشی»^{۱۹} خود، در مقاله‌ای با پرداختن به یک معمای عددی و بازی‌هایی که از مطالعات کانوی الهام گرفته، از او تجلیل کرد.

*Bill Andrews, The year in math and computer science, *Quanta Magazine*, December 23, 2020, available at <https://www.quantamagazine.org/quantas-year-in-math-and-computer-science-2020-20201223/>

** دانشگاه علامه طباطبائی

این نقشه‌نگاهی جامع به موضوع ندارد، بزرگ‌ترین هدف آن نه تنها تشریح مفاهیم ریاضی که تبیین روابط آن‌ها با یکدیگر نیز هست. روش‌های مفید و پرمایه دیگری در داخل موضوعات بنیادین ریاضی وجود دارند، مانند توصیفی از قضیه‌های ناتمامیت گودل که ثابت کرد در تمام دستگاه‌های ریاضی ادعاهایی غیرقابل اثبات وجود دارد. موضوع دیگر بحثی درباره عملکرد دستگاه اعداد معروفی مانند دستگاه اعداد p ای است، که قابلیت جایگزینی و استفاده دارد، و اینکه چرا این دستگاه برای درک اعداد گویا بسیار مهم است.



میراث «جان کانوی»

معمولاً ریاضی‌دانان موفق افرادی خلاق‌اند که می‌توانند ارتباط‌های

طرح روی جلد: «گره‌های اصلی با حداکثر هفت خودقطعی که با نماد الکساندر - بریگز (Alexander-Briggs)

علامت‌گذاری شده‌اند.»