حل مسئله قدیمی گرهٔ کانوِی به دستِ یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی *

اریکا کلاریچ
مترجم: زهرا گویا **

چکیده:

برای لیزا پیکرِیلّو کمتر از یک هفته طول کشید تا بتواند به سؤالی دیرینه، درباره یک گرهٔ عجیب پاسخ دهد؛ سؤالی که جان کانوِی، ریاضی‌دان افسانه‌ای، بیش از نیم‌قرن پیش آن‌را مطرح کرده بود.

راه‌حل لیزا پیکرِیلّو برای مسئله گرهٔ کانوِی [1] به او کمک کرد تا با سِمتِ استادیار رسمی- آزمایشی در دانشگاه اِم‌آی‌تی استخدام شود. در تابستان سال ۲۰۱۸ در کنفرانسی مربوط به هندسه و توپولوژی ابعاد پائین، لیزا پیکرِیلّو چیزهایی دربارهٔ یک مسئله دلپذیر ریاضی شنید. به نظرش رسید که آن مسئله عرصهٔ مناسبی برای آزمایش بعضی از شیوه‌هایی است که خودش در دورهٔ تحصیلات تکمیلی در دانشگاه تگزاس در آستین، ابداع کرده بود. لیزا پیکرِیلّو گفت که «به خودم گفتم که نباید کل روز دربارهٔ آن مسئله فکر کنم، زیرا به نظر نمی‌آید که جزء ریاضیات واقعی باشد. برایم چیزی شبیه به یک تکلیف [2] بود.» سؤال در این مورد بود که آیا گرهٔ کانوِی، که بیش از نیم‌قرن پیش آن‌را جان هورتون کانوِی [3]، ریاضی‌دان افسانه‌ای، کشف کرده بود برشی از یک گره در ابعاد بالاتر است یا خیر؟ «ویژگی برش‌زدن [4]»، یکی از طبیعی‌ترین سؤال‌های نظریه‌پردازانِ گره‌ها است که درباره گره‌ها در فضاهای بالاتر مطرح شده بود و ریاضی‌دانان توانسته بودند به این سؤال، برای همهٔ گره‌هایی که تعداد تقاطع [5] آن‌ها ۱۲ یا کمتر است، پاسخ دهند به‌جز یک گره، که همان گرهٔ کانوِی بود. گرهٔ کانوِی که ۱۱ محل تقاطع دارد، برای دهه‌ها، ریاضی‌دانان را انگشت به دهان گذاشته بود. تا قبل از پایان هفته، پیکرِیلّو پاسخ این سؤال را یافت که گرهٔ کانوِی «برش» نیست. چند روز بعد، او با کامِرون گوردون [6]، استاد دانشگاه تگزاس در آستین، ملاقات کرد و ازقضا پاسخی که به این مسئله داده بود را با او درمیان گذاشت. گوردون تعریف می‌کند که به پیکرِیلّو گفتم «چی گفتی! این راه‌حل همین الان باید به آنالز فرستاده شود!» که منظورش آنالز آو متمتیکس [7]، یکی از مجلات سطح بالای ریاضی، بود. پیکرِیلّو که در آن موقع، دورهٔ پسادکترای خود را در دانشگاه براندایز [8] می‌گذراند، می‌گوید که گوردون به یک‌باره تکان خورد و هیجان‌زده گفت: «چرا آرام نشسته‌ای؟»گوردون می‌گوید: «فکر می‌کنم او تشخیص نداده بود که این مسئله، چه مسئلهٔ قدیمی و معروفی بوده است.» در ماه فوریه، اثبات پیکرِیلّو در آنالز منتشر شد. این مقاله، به همراه کار دیگری از او، عضویت او را به سمت هیئت علمیِ رسمی- آزمایشی دانشگاه اِم‌آی‌تی تضمین کرد و پیکرِیلّو از اول ژوئیه، تنها ۱۴ ماه بعد از آنکه دوره دکترای خودش را تمام کرد، در آنجا استخدام شد.

شهرت مسئله گره قابل برش کانوِی تنها به خاطر این نبود که مدت‌ها حل‌نشده باقی مانده بود، بلکه گره‌های برش به ریاضی‌دانان روشی برای کاوش در ماهیت عجیب فضای چهاربعدی می‌دهد که در آن گُره‌های دوبعدی می‌توانند گره‌دار [9] شوند و گاهی‌اوقات به‌گونه‌ای در هم پیچیده می‌شوند که دیگر قابل صاف‌شدن [10] نیستند. چارلز لیوینگستون [11] استاد بازنشسته دانشگاه ایندیانا می‌گوید: «هم‌اکنون، قابل برش بودن، به بعضی از عمیق‌ترین سؤال‌های توپولوژی در فضای چهاربعدی مرتبط است.» به گفته جاشوا گرین [12]، استاد کالج بوستون [13] که راهنمای پروژهٔ پیکرِیلّو در دوره کارشناسی بود، «این سؤال که آیا گره کانوِی برش است نوعی معیار برای بسیاری از توسعه‌های مدرن در حوزهٔ عمومی نظریه گره است.» به قول او، «واقعاً خوشحال‌کننده است که ببینی کسی را که مدت‌های طولانی است می‌شناسی، ناگهان شمشیر را از دل سنگ بیرون می‌کشد.» [14]

گُره‌های جادویی

در حالی که برای اکثر ما یک گره قطعه‌ای از یک ریسمان با دو انتهاست، برای ریاضی‌دانان این دو انتها به هم چسبیده‌اند و بنابراین گره نمی‌تواند باز شود. طی قرن گذشته [15]، این حلقه‌های گره‌دار به روشن‌شدن موضوع‌هایی از فیزیک کوانتم گرفته تا ساختار دی‌اِن‌اِی [16]، همچنین توپولوژی فضای سه‌بعدی، کمک کرده‌اند. اما اگر زمان را یک بُعد در نظر بگیریم، دنیای ما چهاربعدی است.

[14] pull the sword from the stone .این اصطلاح، اشاره به افسانه شاه آرتور دارد. نکته اصلی این افسانه، انجام کاری به ظاهر غیرممکن از کسی است که انتظارش نمی‌رفته است.

[1] Conway knot problem [2] homework [3] John Horton Conway [4] sliceness [5] crossings [6] Cameron Gordon [7] Annals of Mathematics [8] Brandeis University [9] knotted [10] smoothed out [11] Charles Livingston [12] Joshua Greene [13] Boston College [15] strands [16] structure of DNA

بنابراین طبیعی است بپرسیم که آیا نظریهٔ متناظری از گره‌ها برای فضای چهاربعدی وجود دارد؟ این سؤال، تنها برای این نیست که تمام گره‌هایی را که در فضای سه‌بعدی داریم، بگیریم و در فضای چهاربعدی بنشانیم. در فضای چهاربعدی و به کمک حرکت در جهت‌های مختلف، اگر رشته‌ها در بُعد چهارم روی همدیگر حرکت کنند، هر حلقه گره‌دار [17] را می‌توان باز کرد. برای ساختن یک شیء گره‌دار در فضای چهاربعدی، یک کُرهٔ دوبعدی لازم است نه یک حلقهٔ یک‌بعدی. همان طور که فضای سه‌بعدی جای کافی برای ساختن حلقه‌های گره‌دار دارد، ولی جای کافی برای بازکردن آن‌ها وجود ندارد، فضای چهاربعدی نیز چنین محیطی برای کُره‌های گره‌دار ایجاد می‌کند، گره‌هایی که ریاضی‌دان‌ها برای اولین‌بار در دههٔ ۱۹۲۰ ساختند. تصور یک کرهٔ گره‌دار در فضای چهاربعدی سخت است، اما این کُره کمک می‌کند که نخست، دربارهٔ یک کُره معمولی در فضای سه‌بعدی فکر کنیم. اگر شما این کُره را برش بزنید، یک حلقهٔ بدون گره می‌بینید. ولی وقتی یک کره را در فضای چهاربعدی برش می‌زنید، ممکن است که به جای آن، یک حلقهٔ گره‌دار یا شاید یک حلقهٔ بدون گره یا یک مدار بسته متشکل از چندین حلقهٔ ببینید. این موضوع به جایی که برش زده‌اید، بستگی دارد. به هر گره که بتوانید آن‌را از برش‌دادن یک کرهٔ گره‌دار بسازید، «برش[18] یا ورقه» گویند. بعضی گره‌ها برش نیستند که برای نمونه، می‌توان به گره‌ای با سه تقاطع اشاره کرد که به نام گرهٔ سه‌پایه[19] شناخته می‌شود. به گفته گِرین، گره‌های برش‌خورده، «پُلی بین داستان‌های سه‌بعدی و چهاربعدی در نظریهٔ گره‌ها ایجاد می‌کند.» ولی یک چین‌خوردگی [20] هست که به داستان چهاربعدی، غنا و ویژگی‌های شگفت‌انگیزی می‌دهد: در توپولوژیِ چهاربعدی، دو تفسیر مختلف از آنچه که بدان «برش» می‌گویند، وجود دارد. در سلسله‌ای از تحولات انقلابی در اوائل دهه ۱۹۸۰ (که سبب شد جایزهٔ فیلدز، به مایکل فریدمن[21] و سایمون دونالدسون[22] اهدا شود)، ریاضی‌دان‌ها کشف کردند که فضای چهاربعدی نه تنها حاوی کره‌های هموار است که می‌توانیم آن‌ها را به‌طور شهودی تصور کنیم، بلکه شامل کُره‌هایی هم است که چنان در هم پیچیده شده‌اند، که هیچ‌وقت نمی‌توانند صاف شوند. این سؤال که کدام گره‌ها برش هستند، بستگی به این دارد که آیا این کُره‌های چین‌خورده را به‌حساب می‌آوریم یا به‌حساب نمی‌آوریم. بنا به اظهار شِلی هاروی[23]، استاد دانشگاه رایس[24]، این کُره‌ها اشیای بسیار بسیار عجیبی هستند، آن‌قدر عجیب که انگار، وجودی جادویی دارند. پیکرِیلّو برای اولین‌بار، در سخنرانی هاروی در سال ۲۰۱۸، با مسئله گره کانویِ آشنا شد. این کره‌های عجیب، نه یک اِشکال[25]، بلکه یک ویژگیِ توپولوژی چهاربعدی هستند. گره‌ها «به طور توپولوژیکی[26]، برش خورده‌اند، ولی برش هموار[27] نیستند، که معنایش این است که آن‌ها، برشی از یک کُرهٔ چین‌خورده خردشده هستند، نه یک کرهٔ هموار. این به ریاضی‌دانان اجازه می‌دهد که به‌اصطلاح، نسخه‌های «عجیب و غریبی[28]» از فضای معمولی چهاربعدی بسازند. از منظر توپولوژیکی، این نسخه‌های فضای چهاربعدی، شبیه همان فضای عادی است، ولی به طور غیرقابل برگشتی، در هم پیچیده است. وجود این فضاهای عجیب و غریب بُعد چهارم را از سایر بُعدها، متمایز می‌کند. گِرین ابراز کرد که سؤال در مورد برش‌پذیر بودن، «کاوش در پائین‌ترین بُعد» این فضاهای چهاربعدی است.

در طول سال‌ها، ریاضی‌دانان مجموعه‌ای از گره‌ها را کشف کردند که توپولوژیکی بودند، ولی به طور هموار برش نخورده بودند. البته در بین گره‌هایی با ۱۲ تقاطع یا کمتر، شاید به‌جز گرهٔ کانویِ، به نظر نمی‌رسید که هیچ گره‌ای با این ویژگی وجود داشته باشد. ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که می‌توانند وضعیت برش تمام گره‌های دیگر را با ۱۲ تقاطع یا کمتر پیدا کنند، ولی گرهٔ کانویِ باعث شد از این ادعا اجتناب کنند. کانویِ که ماه گذشته براثر ابتلا به کرونا درگذشت، شهرتش به‌خاطر فعالیت‌های تأثیرگذاری است که بر حوزه‌های متعدد ریاضی از خود به جای گذاشته است. او برای اولین‌بار، زمانی که نوجوان بود، در دهه ۱۹۵۰ به نظریهٔ گره‌ها علاقه‌مند شد و توانست راهی اساسی برای فهرست‌کردن تمام گره‌ها تا ۱۱ تقاطع را پیدا کند. فهرست کامل قبلی، تنها شامل گره‌های تا ۱۰ تقاطع بود. در فهرستی که کانویِ ارائه داده بود، یک گره برجسته وجود داشت. به گفته گِرین، «فکر می‌کنم کانویِ تشخیص داد که چیز بسیار خاصی در مورد آن گره وجود دارد.» این گره که بعدها به نام گره کانویِ معروف شد، به‌طور توپولوژیکی برش خورده بود که این کشف یکی از کشف‌های انقلابی ریاضی‌دان‌ها در دهه ۱۹۸۰ بود. بااین‌حال، آن‌ها نفهمیدند که این گره به طور هموار برش خورده است یا خیر، اگرچه شک داشتند که برش هموار نخورده باشد؛ زیرا به نظر می‌رسید که این گره، برخلاف گره‌های با برش هموار، فاقد ویژگی «نواری‌بودن[29]» است. ولی این گره یک ویژگی داشت که از آن، در مقابل هر تلاشی برای نشان‌دادن اینکه برش هموار نخورده است، مقاومت می‌کرد. به عبارت روشن‌تر، گره کانویِ یک خواهر و برادر دارد که به‌نوعی جهش‌یافته (تغییریافته) آن است. اگر گره کانویِ را روی کاغذ بکشید، قسمت خاصی از آن را ببرید، آن قسمت را برگردانید و دو انتهای آزاد آن‌را به هم متصل کنید، گره‌ای به‌دست می‌آورید که به

[17]knotted loop [18]slice [19]trefoil knot [20]wrinkle [21]Michael Freedman [22]Simon Donaldson [23]Shelly Harvey [24]Rice University [25]bug [26]topologically slice [27]smoothly slice [28]exotic [29]ribbonness [30]Kinoshita-Terasaka knot

نام «گره کینوشیتا ـ تِراساکا[۳۰]» شناخته می‌شود. مشکل این است که این گره جدید، به طور هموار برش خورده است و چون گره کانوِی به‌شدت به گره‌ای مربوط است که به طور هموار برش خورده، توانسته است تمام ابزارهای فریبنده را (که ابزارهای پایا[۳۱] نامیده می‌شوند)، مدیریت کند. ریاضی‌دان‌ها از این ابزارها، برای پیداکردن گره‌های برش‌نخورده استفاده می‌کنند.

به گفته گرین، «هر وقت که با یک پایای جدید مواجه هستیم، سعی می‌کنیم با گرهٔ کانوِی آن‌را امتحان کنیم» و «تنها این مثال سمج است که صرف‌نظر از اینکه آن پایا چه باشد، به شما نمی‌گوید که آن چیز، برش هست یا نه.» پیکرِیلّو بیان کرد که گره کانوِی، «روی تقاطع نقاط کور» این ابزارهای مختلف، می‌نشیند. مارک هیوز[۳۲]، ریاضی‌دان دانشگاه یانگ بریگام [۳۳]، یک شبکهٔ عصبی ایجاد کرد که از گره‌های پایا و سایر اطلاعات استفاده می‌کند تا ویژگی‌هایی نظیر «قابلیت برش‌خوردن» را پیش‌بینی کند. برای اکثر گره‌ها، این شبکه پیش‌بینی‌های شفافی به دست می‌دهد. اما حدس همین شبکه دربارهٔ این که گره کانوِی برشی هموار است یا خیر، پنجاه‌پنجاه است. به گفتهٔ لیوینگستون[۳۴]، «در طول زمان، این طور تصور می‌شد که نمی‌توانیم از عهدهٔ این گره برآییم.»

پیچ‌وتاب‌های هوشمندانه[۳۶]

پیکرِیلّو از شهود بصری که مستلزم نظریهٔ گره است، لذت می‌برد، اما اساساً خودش را یک نظریه‌پرداز گره نمی‌داند. او در ایمیلی نوشت که «در واقع، شکل‌های سه و چهاربعدی برایم هیجان‌انگیزند، اما مطالعهٔ این چیزها، عمیقاً با نظریهٔ گره پیوندخورده است. به این دلیل، کمی هم به آن می‌پردازم.» الیسِندا گریگسبی[۳۷]، یکی از استادان پیکرِیلّو در کالج بوستون[۳۸]، دربارهٔ وی می‌گوید که وقتی او شروع به تحصیل در رشتهٔ ریاضی کرد، به‌عنوان «کودک نابغهٔ ریاضی با استاندارد طلایی»، برجستگی‌ای از خود نشان نداد. در عوض، خلاقیت پیکرِیلّو، توجه استادش را جلب کرد. او به دیدگاه خود بسیار اعتقاد داشت و همیشه هم، چنین بوده است. پیکرِیلّو زمانی با این سوال در مورد گرهٔ کانوِی مواجه شد که در حال فکر کردن به راه دیگری بود که علاوه بر جهش، می‌توان دو گره را به هم مرتبط کرد. هر گره دارای یک شکل چهاربعدی به نام «رد یا اثر[۳۹] آن» است که با قرار دادن گره در مرز یک توپ چهاربعدی و دوختن نوعی کلاه روی توپ در امتداد گره ایجاد می‌شود. به گفتهٔ گوردون، اثر یک گره، «رمزگذاری هوشمندانهٔ آن گره است.» ممکن است گره‌های مختلف «اثر»های چهاربعدی یکسان داشته باشند و پیش از این هم ریاضی‌دان‌ها می‌دانستند که دوگان این «اثر»ها، همیشه وضعیت برش یکسان دارند، به این معنی که یا هر دو برش هستند، یا هیچیک برش نیستند. ولی پیکرِیلّو و آلیسون[۴۰] که هر دو دوره پسادکترای خود را در دانشگاه رایس می‌گذراندند، نشان داده بودند که این اثرهای همزاد، الزاماً برای تمام ناورداهای گره‌ای که از آن‌ها برای مطالعهٔ «قابلیت برش» استفاده می‌شود، یکسان به نظر نمی‌آیند. این موضوع پیکرِیلّو را به سمت یک استراتژی برای اثبات اینکه گرهٔ کانوِی یک برش نیست هدایت کرد. اگر او می‌توانست یک هم‌تبار برای گرهٔ کانوِی بسازد، ممکن بود این سازه جدید، بهتر از گره کانوِی، بتواند با یکی از برش‌های ناوردا، همیار شود. ساختن اثر همزاد، کاری پیچیده و ظریف است، ولی پیکرِیلّو هم خبرهٔ این کار بود. به گفته او، «برای من، این کار مثل یک دادوستد عادی بود. برای همین، به خانه رفتم و انجامش دادم.» از طریق ترکیبی از پیچ‌وتاب‌های هوشمندانه، پیکرِیلّو موفق شد یک گرهٔ پیچیده بسازد که اثر آن با گرهٔ کانوِی، یکسان است. برای آن گره، ابزاری به نام «ثابت s راسموسن[۴۱]» نشان می‌دهد که برش همواری نیست، پس گره کانوِی هم برش هموار نیست. گوردون گفت که «این اثباتی بسیار زیباست. بنابراین، دلیلی وجود نداشت که انتظار برود حاصل گره‌ای که پیکرِیلّو ساخت، حاصلش ثابت s راسموسن شود، ولی شد و این به‌نوعی اعجاب‌آور است.» گرین در ایمیلی نوشت که اثبات پیکرِیلّو، «در قالب اثبات‌های کوتاه می‌گنجد، اثبات‌های شگفت‌آوری با نتایجی توصیف‌نشدنی و ظریف که محققانِ این حوزه، قادرند به‌سرعت آن‌ها را جذب و تحسین کنند و به‌دنبال تعمیم‌شان باشند. جای تعجب نیست که چرا این‌قدر طول کشید تا این نتیجه حاصل شود.» به گفته گرین، اثرهای گره، ابزار کلاسیکی هستند که دهه‌هاست وجود دارند، اما پیکرِیلّو، عمیق‌تر از هر کس دیگری آن‌را فهمید. به گفته گرین، کار پیکرِیلّو به توپولوژی‌دان‌ها نشان داد که اثرهای گره، مورد بی‌مهری قرار نگرفته‌اند. او می‌گوید که «پیکرِیلّو از بعضی ابزارهایی استفاده کرد که ممکن است روی آن‌ها را کمی خاک گرفته بود»، ولی حالا همان ابزارها «دارند می‌درخشند.»

*Erica Klarreich, Graduate student solves decades-old Conway knot problem, *Quanta Magazine*, May 19, 2020, available at `https://www.quantamagazine.org/graduate-student-solves-decades-old-conway-knot-problem-20200519/`.

** دانشگاه شهید بهشتی

[31] invariants [32] Mark Hughes [33] Brigham Young University [34] Livingston [36] clever twists [37] Elisenda Grigsby [38] Boston College [39] trace [40] Alison
[41] Rasmussen's s-invariant