ریاضی روی بوم نقاشی

روایت اثبات یک حدس قدیمی توسط اسپارک و قمی

حسن ملکی *

این نوشتار ترجمه‌ای از مطلبی با عنوان

‘Proving a longstanding conjecture about the area of negatively curved spaces’

است که در سایت phys.org منتشر شده است. اما به فراخور متن، مطالبی به آن اضافه شده است.

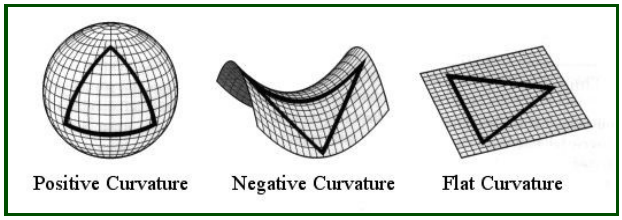
جوئل اسپراک[۱] ریاضیدان دانشگاه جان هاپکینز با همکاری دانشجوی سابقش، محمد قمی[۲]، ریاضیدان ایرانی مؤسسه فناوری جورجیا[۳] ، موفق به اثبات حدس مهم و تاریخی **کارتان- هادامارد** درباره حجم رویه‌های با انحنای منفی شدند. اسپراک درباره این کار می‌گوید: «تلاشی چندساله، پر از موانع غیرمنتظره و شب نخوابی‌های بسیار. ما هزاران بار مردیم و زنده شدیم. در پایان، شما حس می‌کنید خدایان شما را به گونه‌ای نجات داده‌اند.»

منشأ این حدس به یک مسئله قدیمی هندسی برمی‌گردد. که در منظومه حماسی آنه‌اید اثر ویرجیل شاعر روم باستان آمده و به نام مسئله ملکه دیدو[۴] معروف شده است. در حدود ۹۰۰ سال قبل از میلاد، دیدو شاهزاده فنیقی که توسط برادر بی‌رحم خود، پوگمالون به آفریقا تبعید شده بود، توسط جارباس، پادشاه تونس پناه داده شد. بر اساس آن‌چه در داستان آنه‌اید آمده است پادشاه جارباس برای دیدو یک مسئله ریاضی مطرح می‌کند. او می‌تواند زمینی را تصاحب کند که با یک پوست گاو محصور شده باشد. ملکه باهوش پوست گاو را به نوارهایی باریک تقسیم می‌کند و با بستن آن‌ها به هم ناحیه‌ای دایره شکل و وسیع که بعدها به عنوان شهر کارتاژ شناخته می‌شود را مال خود می‌کند. مسئله دیدو قدیمی‌ترین مسئله در حساب، دیفرانسیل و انتگرال و همچنین بهینه‌سازی به حساب می‌آید و مثالی از مسئله اصلی[۵] است: پیدا کردن ماکزیمم مساحت محصور توسط منحنی‌های بسته با طول ثابت یا یافتن ماکزیمم حجم محصور توسط رویه‌های بسته با مساحت ثابت.

اسپراک در توضیح این موضوع به یک اصل مهم در کار طبیعت اشاره می‌کند: «در طبیعت برای یک پدیده اشکال مختلفی وجود دارد که طبیعت شکلی را انتخاب می‌کند که کمترین میزان انرژی برای آن صرف شود. شکلی را که یک مساحت داده شده با کمترین محیط محصور می‌کند دایره و در حالت سه بعدی آن شکل کره است.» اما وقتی شما بخواهید این اصل را به فضاهای دیگر تعمیم دهید مسئله خیلی پیچیده می‌شود. اسپراک و قمی موفق شدند این چالش بزرگ را اثبات کنند که در قالب یک حدس قدیمی معروف به زبان ریاضیات فرمول‌بندی شده بود و نشان دهند اصل فوق در هندسه‌های دیگر نیز صادق است. اثبات گام بزرگی در شاخه فیزیک ریاضیاتی به حساب می‌آید و با بسیاری از مسائل مهم دیگر در ارتباط تنگاتنگ است. مقاله‌ی آن‌ها تیر خلاص به حدس کارتان – هادامارد[۶] بود. این حدس که در اوایل قرن ۲۰ بیان شده، در سال ۱۹۲۶ برای بعد ۲، در سال ۱۹۸۴ برای بعد ۴ و در سال ۱۹۹۲ برای بعد ۳ اثبات شده بود. در نهایت با این مقاله اسپراک و قمی آن را برای همه ابعاد اثبات کردند. در فضای اقلیدسی، در بین اشکالی که حجم ثابت دارند، کره کمترین مساحت جانبی را دارد. مقایسه حجم توپ با مساحت جانبی آن اندازه‌گیری کمّی از بهینه بودن این شکل به دست می‌دهد که یکی از بنیادی‌ترین نامعادله‌های ریاضیات و فیزیک است. مدل‌های کلی‌تری از فضاهای هندسی نسبت به فضای اقلیدسی مانند منیفلدها وجود دارند که بررسی این نابرابری در آن‌جا سوالی مهم و چالش‌برانگیز بوده است. برخی از طبیعی‌ترین و مهم‌ترین این منیفلدها که دارای انحنای منفی و بدون مرز هستند به منیفلدهای کارتان – هادامارد معروف هستند. ساده‌ترین مثال‌ها برای این منیفلدها، تکه‌های چیپس سیب زمینی[۷] و صخره‌های مرجانی[۸] هستند. ایده‌ی اصلی در این منیفلدها رسیدن به مساحت بیشتر در فضای کمتری است، مانند گلبرگ‌های گل اطلسی. فضاهایی با انحنای منفی فضاهایی شبیه به زین اسب هستند که با تغییر جهت حرکت روی رویه، انحنا و خمیدگی تغییر جهت (علامت) می‌دهد. اسپراک می‌گوید: «جهان ممکن است دارای انحنای منفی باشد، ما با قطعیت نمی‌دانیم.»

این فضاها جایی است که اسپراک و قمی حدس را برای همه ابعاد در یک مقاله ۸۰ صفحه‌ای اثبات می‌کنند. (اسپراک و قمی مقاله خود را در سایت آرشیو به اشتراک گذاشته‌اند.)

[1] Joel Spruck [2] Mohammad Ghomi [3] Georgia Tech [4] Queen Dido’s problem [5] Isoperimetric Problem [6] Cartan-Hadamard Conjecture [7] potato chips [8] coral reefs



اسپراک می‌گوید:« این کار سخت بود، زیرا مجبور بودیم همه چیز را از اول اختراع کنیم، نه شگردی و نه شیئی، هیچ چیزی وجود نداشت.» او مدت‌ها درباره‌ی حدس فکر کرده بود. در نهایت از دانشجوی سابقش محمد قمی خواست تا با وی در حل آن همکاری کند. محمد قمی هندسه‌دان ایرانی‌الاصلی است که روی مسائل کلاسیک هندسه درباره منحنی‌ها و رویه‌ها و به صورت کلی‌تر روی زیرمنیفلدهای ریمانی کار می‌کند. قمی دکترای خود را در سال ۱۹۹۸ از دانشگاه جان هاپکینز تحت هدایت اسپراک گرفته است، او به خاطر رساله دکتری خود جایزه سیلوستر را کسب کرد.

آن دو کار را شروع کردند. اسپراک ایده‌ای داشت اما فکر می‌کرد بسیار خطرناک و احتمالاً احمقانه باشد. او می‌گوید: «ریاضیات همه چیز را در مورد ایده‌ی شما مشخص می‌کند: شهود گرفتن و تبدیل‌کردن آن به چیزهای بسیار دقیق. بنابراین ما شروع کردیم و به تفصیل همه اجزای ایده را نوشتیم اما مسائل تکنیکی متناقضی وجود داشت.»

پس از یک سال و نیم آن‌ها موانع را یکی پس از دیگری پشت سر گذاشتند. آن‌ها از طریق رد و بدل کردن هزاران ایمیل و شب نخوابی‌های بسیار با هم در ارتباط بودند. یک پایان خوش خیلی دور از دسترس به نظر می‌رسید، اما آن‌ها سرانجام توانستند از روی یکی از موانع لغزنده مسئله به نام «مجموعه‌های تراز» و «برف‌های شاخه‌دار» بر مقاومت یک قضیه از شاخه‌ای کاملاً متفاوت در ریاضیات چیره شوند. اسپراک می‌گوید: «این به لحاظ احساسی خیلی سخت بود. ما هزاران بار مردیم و زنده شدیم. در پایان، شما حس می‌کنید خدایان شما را به گونه‌ای نجات داده‌اند.»

فرآیند ایده-حدس، ایده-اثبات نشان دهنده آشکار شدن پیشرفت در ریاضیات است. افراد در مورد یک مسئله‌ی خاص، چشم‌انداز و بینش روشن دارند در حالی که شواهد کافی برای اثبات آن وجود ندارد. آن‌ها چیزهایی را فرمول‌بندی می‌کنند که باور دارند درست هستند و به سرعت با دیگران به اشتراک می‌گذارند تا از جامعه بزرگی از ریاضیدانان بازخورد ببینند. اسپراک خاطر نشان می‌کند: «به همین دلیل است که همه چیز در ریاضیات مثل سایر علوم دیگر به سرعت در حال پیشرفت است.»

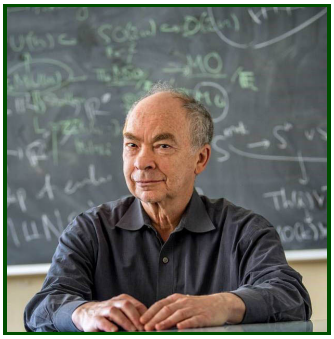
در گذر زمان، افراد حدسی را اثبات می‌کنند که تبدیل به قضیه‌ای می‌شود. سپس ریاضیدانان به شاخه‌های جدید ریاضی سرک می‌کشند و آن قضیه‌ها را به کار می‌گیرند. برای همیشه نام حدس‌زنندگان و اثبات‌کنندگان در یافته‌های جدید قید می‌شود. آیا این چیزی خواهد بود که نام‌های اسپراک و قمی ۱۰۰ سال بعد به خاطر آن ذکر شود؟ اسپراک می‌گوید : «این ممکن است اتفاق بیافتد، من از این موضوع واقعا خوشحالم.»

با توجه به همه قضایایی که در ریاضیات، پس از رسیدن به مرحله‌ی اثبات، به یک‌باره درستی‌شان آشکار می‌شود، روند ریاضیات به‌طرز عجیبی همچنان اسرارآمیز باقی می‌ماند. اسپراک درباره چگونگی روند حل مسئله خود می‌گوید که او معمولاً با چیزهایی شهودی درباره یک مسئله شروع می‌کند. او خط خطی کردن (Doodling) را به عنوان روشی برای تمرکز ذهن خود نام می‌برد، سپس ایده‌هایی که ناخودآگاه او روی آن‌ها کار کرده است، به تدریج شکل می‌گیرند. در نهایت او کشف می‌کند چگونه می‌تواند آن ایده‌ها را ملموس کند. برای اسپراک، ریاضی‌ورزی شبیه نقاشی کردن است. او هر دو را به عنوان نوعی مراقبه تجربه می‌کند. او می‌گوید: «شما در یک فضای مشخص قرار می‌گیرید. زمانی که روی چیزهایی متمرکز فکر می‌کنید، مثل این است که در حالت مراقبه قرار گرفته‌اید. ساعت‌های متمادی می‌گذرد و شما حتی متوجه گذر زمان نمی‌شوید. شما یک بوم نقاشی خالی و تعدادی قوانین اساسی معین دارید، اما دست‌تان در همه این‌ها باز است. شباهت دیگری که ریاضی و نقاشی دارد این است که شما عاشق چالش‌ها باشید. این مهم نیست که شما در لحظه موفق به حل آن چالش شوید، بلکه مهم این است که از غرق شدن در آن لذت ببرید.» مقاله دکتر اسپراک و دکتر قمی با عنوان

‘Total curvature and the isoperimetric inequality in Cartan-Hadamard manifolds’

منتشر شده است.

محمد قمی، ریاضیدان ایرانی مؤسسه فناوری جورجیا



جوئل اسپراک، ریاضیدان دانشگاه جان هاپکینز

* دانشگاه ملایر

تمدید عضویت

یادآوری می‌شود برای دوره عضویت مهر ۹۹ الی مهر ۱۴۰۰ می‌توانید عضویت خود را از طریق پرتال عضویت انجمن به نشانی http://imsmembers.ir تمدید نمایید.

(جهت تمدید عضویت وارد پروفایل شخصي خود شوید و از منوی نارنجی رنگ بر روی «نمایش عضویت‌های حقیقی» کلیك نموده و «عضویت جدید» را انتخاب نمایید.)

خواهشمند است در صورت بروز هرگونه ابهام با دبیرخانه انجمن تماس حاصل نمایید.

دعوت به ارسال خبر

خبرنامه انجمن ریاضی ایران از کلیه اعضای انجمن (به ویژه نمایندگان محترم انجمن در دانشگاه‌ها) صمیمانه دعوت می‌کند که با ارسال اخبار (ترجیحاً الکترونیکی)، مقالات، جملات کوتاه (ترجمه یا تألیف)، گزارش همایش‌ها، نکات خواندنی، دیدگاه‌ها، آگهی‌ها و ... به نشانی newsletter@ims.ir (همراه با نشانی کامل و تلفن تماس) به اعتلای اطلاعات جامعه ریاضی کشور کمک کنند.

اخبار و مقالات ارسالی پس از تصویب، همراه با نام نویسنده در خبرنامه درج خواهد شد.