

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t)$$

۱۵ امین

سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستم های دینامیکر

دانشگاه گیلان ۱۶ الی ۱۸ اسفند ماه ۱۳۹۹

**15th Seminar on
Differential Equations and Dynamical Systems**

6 - 8 March 2021 University of Guilan



Email: 15diffdyn@guilan.ac.ir

WebSite: WWW.15diffdyn.guilan.ac.ir



دانشگاه گیلان





خلاصه مقالات

۱۵ امین سمینار معادلات دیفرانسیل و

سیستم‌های دینامیکی

۱۶-۱۸ اسفند ۹۹

دانشگاه گیلان

فهرست مطالب

۱	گزارش دبیر سمینار
۴	کمیته برگزاری سمینار
۵	کمیته علمی سمینار
۶	سخنران کلیدی
۸	سخنرانان
۵۱	نمایه نویسندگان

گزارش دبیر سمینار

گروه ریاضی محض با پیشنهاد تیم معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی براساس هماهنگی با انجمن ریاضی ایران و با برنامه ریزی مناسب، پس از چند سال در نوبت برگزاری سمینار ماندن، قرار بود در تاریخ های ۴ الی ۵ تیر ماه ۱۳۹۹ پانزدهمین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی را به صورت حضوری برگزار نماید. ولی به علت شیوع بیماری کرونا که مردم همه کشورها از جمله مردم کشور عزیزمان ایران را تحت تاثیر قرار داد، برنامه ریزی برگزاری سمینار تغییر اساسی کرد. پس از بررسی روش های برگزاری غیر حضوری سمینار و با برنامه ریزی دوباره و با استفاده از امکانات دانشگاه گیلان، تصمیم به برگزاری مجازی در تاریخ های ۱۶ الی ۱۸ اسفند ۱۳۹۹ گرفته شد. سمینار با ۵۴ سخنرانی تخصصی و ۶ سخنرانی عمومی و ۱۰ پوستر در سه روز اعلام شده در آرامش کامل و با کیفیت مطلوب برگزار شد. لطفاً نقطه نظرات و پیشنهادات خود را در جهت هرچه بهتر برگزاری سمینارهای آتی با ما در میان بگذارید. بسیار علاقمند بودیم که سمینار به صورت حضوری برگزار می شد که با فراهم شدن فضای صادقانه آکادمیک، ضمن فراهم ساختن زمینه های تبادل نظر و مشارکت علمی برای دوستان در زمینه معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی، شما عزیزان را با دانشگاه گیلان و استان سرسبز گیلان بیشتر آشنا کنیم. دانشگاه گیلان در سال ۱۳۵۳ با تصویب شورای گسترش آموزش عالی در چارچوب قرارداد بین دولتهای ایران و آلمان غربی سابق تاسیس شد. با توجه به اینکه مدرسه عالی بازرگانی رشت و مدرسه عالی مدیریت لاهیجان از سال ۱۳۴۶ در استان گیلان فعال بودند در سال ۱۳۵۵ غیرفعال و کلیه فعالیت های آنان به دانشگاه گیلان منتقل شد. پس از پیروزی انقلاب اسلامی، دانشگاه گیلان بطور مستقل و بدون وابستگی به کشور آلمان، فعالیتهای آموزشی خود را در ۸ رشته تحصیلی و با حدود ۵۰۰ دانشجو از سرگرفت و با رشد و گسترش آموزش عالی در کشور، دانشکده های علوم پایه، فنی، علوم کشاورزی، علوم انسانی و پزشکی

ساخته شد و پس از آن نیز دانشکده تربیت بدنی و علوم ورزشی، دانشکده منابع طبیعی و معماری و هنر تاسیس شدند. دانشگاه گیلان هم اکنون در ۱۳۷ رشته گرایش کارشناسی، ۲۵۳ رشته گرایش کارشناسی ارشد، ۱۵۴ رشته گرایش دکتری و در مجموع در ۵۴۴ رشته گرایش دانشجویی می پذیرد. این دانشگاه در حال حاضر با ۱۰ دانشکده و یک واحد پردیس و دو پژوهشکده (حوضه آبی دریای خزر و گیلان شناسی) با بیش از ۶۰۰ عضو هیأت علمی، بالغ بر ۱۸ هزار دانشجو و به عنوان بزرگترین مراکز آموزش عالی در منطقه شمال کشور مشغول به فعالیت های آموزشی و پژوهشی است و سالانه حدود ۴۵۰۰ نفر دانشجو را در ۵۴۴ رشته - گرایش در مقاطع تحصیلی کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری برای دوره های روزانه، شبانه، پردیس و مجازی پذیرش می نماید و این دانشگاه با اعضای اتحادیه دانشگاه های دولتی کشور های حاشیه دریای خزر، برخی از دانشگاه های کشورهای جنوب شرق آسیا و اتحادیه اروپا ارتباطات علمی و تبادل استاد و دانشجو دارد. قرار گرفتن در جمع دانشگاه های برتر سه نظام بین المللی و رتبه بندی جهانی تایمز، لیدن، شانگهای و دسته دانشگاه های یک درصد برتر دنیا و ده دانشگاه برتر جامع کشور جزئی از توانمندیهای دانشگاه گیلان است. دانشکده علوم ریاضی در دیماه ۱۳۸۹ با ۳ گروه آموزشی ریاضی محض، ریاضی کاربردی و آمار تاسیس شد. این دانشکده در حال حاضر ۳۱ عضو هیات علمی دارد. پذیرش دانشجو در مقاطع کارشناسی، در رشته های ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر و آمار، کارشناسی ارشد، در رشته های ریاضی محض و ریاضی کاربردی و آمار ریاضی و بخش الکترونیکی (مجازی) در رشته ریاضی کاربردی و دکتری در رشته های ریاضی محض و ریاضی کاربردی با زمینه های جبر، آنالیز، هندسه، معادلات دیفرانسیل و سیستم های دینامیکی، گروه های توپولوژیک، آنالیز عددی، تحقیق در عملیات، فرایندهای تصادفی و ریاضیات کاربردها انجام می شود. اخذ مجوز پذیرش دانشجوی کارشناسی ارشد در رشته های علوم کامپیوتر و ریاضیات مالی در دستور کار دانشکده قرار دارد. اولین دوره دانشجویان ارشد و دکتری به ترتیب در سالهای ۱۳۷۰ و ۱۳۸۲ پذیرفته شدند. تا کنون ۸۳۰ دانشجوی ارشد و ۴۰ دانشجوی دکتری در این دانشکده دانش آموخته گردیده اند. در حال حاضر ۲۷۷ دانشجوی کارشناسی ارشد و ۷۲ دانشجوی دکتری در حال تحصیل و تحقیق می باشند. در مجموع ۱۰۳۹ دانشجو در مقاطع سه گانه کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری به تحصیل و پژوهش اشتغال دارند. امیدواریم با توجه به توانایی های علمی کشورمان و بالا

بودن سطح آگاهی مردم، مسائل بهداشتی رعایت شده و با ریشه کنی ویروس کرونا هرچه زودتر آرامش به کشور برگردد و سمینار ها بعدی به صورت حضوری برگزار شود. يك پیشنهاد با توجه به اینکه رشته های ریاضی محض و کاربردی از طرف وزارت علوم تحقیقات و فناوری به صورت ریاضیات و کاربردها مطرح و برنامه ریزی درسی شده است که هدف اصلی آن کاربردی کردن ریاضیات در جامعه است. با توجه به کاربرد رشته معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی در رشته های فیزیک ، شیمی ، مکانیک ، برق پیشنهاد می شود در رشته ریاضیات و کاربردها معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی به صورت یک گروه مستقل با برنامه ریزی درسی مناسب که کاربردها را به خوبی پوشش دهد، مطرح و پیگیری شود. در این جهت می شود از همه صاحب نظران این رشته بخصوص با همکاری انجمن ریاضی ایران درس های مربوطه را برنامه ریزی نموده که مطمئنا می تواند به اهداف وزارت علوم، تحقیقات و فناوری کمک کند.

دبیر علمی پانزهمین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی

دکتر نصیر تقی زاده

کمیته برگزاری سمینار

داوود احمدی دستجردی

نادر اسدی

مژگان اکبری خشکبیجار

حامد امکان پور

سعید انصاری

معصومه پورعبد

نصیر تقی زاده

میشم جعفری

هانیه حیاتی

حسین صمیمی

ساناز لامعی

سیده رودابه موسوی نوری

مونا نژند فومنی

منصور هاشمی براگوری

الهام یوسفی

کمیته علمی سمینار

ردیف	نام و نام خانوادگی	دانشگاه
۱	داود احمدی دستجردی	دانشگاه گیلان
۲	مژگان اکبری خشکیجاری	دانشگاه گیلان
۳	نصیر تقی زاده	دانشگاه گیلان
۴	علی اصغر جدیری اکبرفام	دانشگاه تبریز
۵	جعفر صابری نجفی	دانشگاه فردوسی مشهد
۶	عباس فخاری قوچانی	دانشگاه شهید بهشتی
۷	فاطمه هلم قانع	دانشگاه فردوسی مشهد
۸	ساناز لامعی جوان	دانشگاه گیلان
۹	احمد ماموریان	دانشگاه تهران
۱۰	میثم نصیری	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

سخنران کلیدی



۱۵ امین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی

۱۶ تا ۱۸ اسفند ۱۳۹۹، دانشگاه گیلان

پایداری آماری سیستم‌های دینامیکی

امین السادات طالبی

چکیده. پایداری ساختاری سیستم‌های دینامیکی سال‌هاست که مورد توجه دینامیک کارها قرار گرفته و مطالعات زیادی در رابطه با این موضوع صورت گرفته است. این نوع پایداری تغییر رفتار توپولوژیک مدار "تمام نقاط" برای نگاشت‌های نزدیک به نگاشت ابتدایی را مورد مطالعه قرار می‌دهد. در صورتی که اگر تنها قصد مطالعه رفتار آماری سیستم دینامیکی مورد نظر را داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم از تغییر رفتار نقاط در یک مجموعه اندازه صفر چشم‌پوشی کنیم و علاوه بر این، دیگر ترتیب سرزدن مدار یک نقطه به جاهای مختلف فضای فاز اهمیت نخواهد داشت و تنها نرخ سرزدن مدار یک نقطه به نواحی مختلف فضا مهم خواهد بود. برای این منظور مفهومی به نام پایداری آماری ارائه شده که تغییرات رفتار آماری برای نگاشت‌های نزدیک به یک سیستم دینامیکی را مورد مطالعه قرار می‌دهد. در این سخنرانی سعی داریم با ذکر چند مثال به ارائه این مفهوم و قضیه‌هایی در رابطه با آن بپردازیم.

سخنرانان

بررسی آشوب در یک خانواده از چندجمله‌ای‌های یک پارامتری با استفاده از دینامیک نمادین

منیره اکبری و مریم ربیعی

چکیده. با استفاده از دینامیک نمادین، یک خانواده از چندجمله‌ای‌های یک پارامتری f_a از درجه فرد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم زمانی که نقطه ماکزیمم موضعی f_a به یک نقطه تناوبی دافع با دوره تناوب ۲ تصویر می‌شود یک مجموعه ناوردای فشرده وجود دارد که f_a روی آن آشوبناک است.

۱. پیش‌گفتار

در مطالعه سیستم‌های دینامیکی گسسته، دینامیک نمادین بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی فضای دنباله‌ها با تعداد متناهی نماد، اغلب ابزاری مفید برای بررسی رفتار پیچیده یک سیستم تکرار شونده است. برای مثال، برای بررسی آشوب در نگاشت لجستیک، $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ به ازای $\mu > 4$ ، فضای دنباله‌ها از دو نماد ۰ و ۱ اساسی است ([۷، ۶] را ببینید). دینامیک مختلط نیز از دینامیک نمادین بهره می‌برد ([۴، ۳]). دینامیک نمادین و برخی از کاربردهای آن در [۵، ۲] مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

دینامیک خانواده توابع $f_a(x) = ax^2(x-1) + x$ در [۱] مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از مشتق شوارتزی منفی f_a نشان داده می‌شود که روی مجموعه‌ای ناوردای آشوبناک است. در اینجا به بررسی خانواده چندجمله‌ای‌های حقیقی $f_{a,d}(x) = ax^d(x-1) + x$ که تعمیمی است از خانواده چندجمله‌ای‌های $f_a(x) = ax^2(x-1) + x$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $a < 0$ عددی حقیقی و $d \geq 2$ عددی زوج است. به ازای برخی از مقادیر a مجموعه ناوردایی ارائه می‌دهیم که f_a روی آن آشوبناک است و خارج از آن رفتار ساده‌ای دارد. برای سادگی d را ثابت در نظر می‌گیریم و از این به بعد به جای $f_{a,d}$ می‌نویسیم f_a . در حالت $d \geq 4$ ، به دلیل اینکه مشتق شوارتزی f_a لزوماً منفی نیست، با استفاده از بعضی از قضایای دینامیک مختلط و نیز دینامیک نمادین، رفتار f_a روی این مجموعه ناوردای مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به خواص خانواده توابع f_a ، مجموعه شمارش‌پذیر A را که به یک توپولوژی ناهاوسدورف مجهز شده است، معرفی می‌کنیم و زیر مجموعه خاصی از $A^\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، را به کار می‌گیریم.

واژه‌های کلیدی: آشوب، ترویج، دینامیک نمادین، نقاط تناوبی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 37E05, 37E15

۲. فضای دنباله‌ها با تعداد نامتناهی نماد

فرض کنید $\mathcal{A} = \mathbb{N} \cup \{L, R, E, W, \star\}$ با ارائه پایه

$$\mathcal{B} = \{\{n\}, \{L\}, \{R\}, \{L, \star, R\}, \{E, 2n, 2n+2, 2n+4, \dots\}, \{W, 2n-1, 2n+1, \dots\} : n \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{A}$ را به یک توپولوژی مجهز می‌کنیم. فضای $\mathcal{A}^\omega$ با توپولوژی حاصلضرب را در نظر می‌گیریم. نگاشت انتقال $\sigma : \mathcal{A}^\omega \rightarrow \mathcal{A}^\omega$ که به صورت $\sigma(s_1, s_2, \dots) = (s_2, s_3, \dots)$ تعریف می‌شود، تحت توپولوژی حاصلضرب نگاشتی پیوسته است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^\omega$ شامل دنباله‌هایی به صورت $s = (s_1, s_2, \dots)$ باشد به طوری که به ازای هر $i \geq 0$ ، s_i, s_{i+1} در شرایط زیر صدق کند.

- i. به ازای $k \geq 2$ ، اگر $s_i = k$ آنگاه $s_{i+1} = k-1$.
- ii. اگر $s_i = \star$ آنگاه $s_{i+1} = E$.
- iii. اگر $s_i \in \{L, R\}$ آنگاه $s_{i+1} \in \{\star, L, R, 2, 4, 6, \dots\}$.
- iv. اگر $s_i = 1$ آنگاه $s_{i+1} \in \{\star, L, R\}$.
- v. اگر $s_i = W$ آنگاه $s_{i+1} = E$ ، همچنین اگر $s_i = E$ آنگاه $s_{i+1} = W$.

خواص Σ در گزاره‌های زیر بررسی می‌شود.

گزاره ۲.۲. Σ زیرفضایی هاوسدورف است که تحت σ ناوردا است.

گزاره ۳.۲. مجموعه نقاط تناوبی $\sigma|_\Sigma$ در مجموعه Σ چگال است.

گزاره ۴.۲. σ دارای یک مدار چگال در Σ است.

۳. وجود مجموعه ناوردا

در این بخش برخی از مشخصات مشترک خانواده توابع $f_a(x) = ax^d(x-1) + x$ را وقتی a عددی منفی و $d \geq 2$ عددی زوج است، ذکر می‌کنیم.

- ۱. نگاشت f_a در سه نقطه $x_1 < 0 < x$ محور x را قطع می‌کند.
- ۲. نگاشت f_a دارای دو نقطه بحرانی c_1 و c است. c_1 یک نقطه مینیمم موضعی است. c_1 یک نقطه ماکزیمم موضعی است و $x_1 < c_1 < 0 < c < x$.
- ۳. نقاط p_1 و p وجود دارند به طوری که $f_a(p_1) = p_1$ و $f_a(p) = p$ و هرگاه $x \notin [p_1, p]$ ، $|f_a^n(x)|$ به بینهایت می‌گراید.
- ۴. دنباله‌ای از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزای $(J_n)_{n \geq 1}$ و دنباله‌ای از بازه‌های بسته دوبه‌دو مجزای $(I_n)_{n \geq 1}$ وجود دارد به طوری که

$$c_1 \in I_1 \text{ و } c \in J_1. \quad ۱.۴$$

$$I_n \cap J_m = \emptyset, m, n \text{ به ازای هر } \quad ۲.۴$$

$$۳.۴ \text{ به ازای هر } n \geq 0, \text{ نقاط ابتدایی و انتهایی } I_n \text{ و } J_n \text{ نهایتاً به } 0 \text{ تصویر می‌شوند.}$$

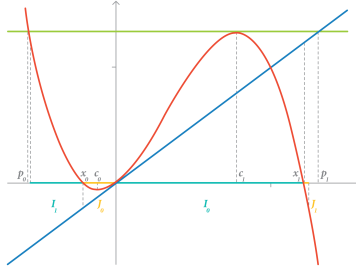
$$f_a(I_n) = I_{n-1} \text{ و } f_a(J_n) = J_{n-1}. \quad ۴.۴$$

$$۵.۴ \text{ به ازای هر } n, \text{ مدار هر نقطه در بازه } J_n \text{ به } 0 \text{ می‌گراید.}$$

$$۶.۴ \quad (p_1, p) = \left(\bigcup_{n \geq 1} I_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} J_n \right)$$

خواص بالا نشان می‌دهد که مدار هر نقطه‌ای که در بازه I_i قرار دارد می‌تواند به ۰ بگراید، به ∞ میل کند و یا همواره در مجموعه $\bigcup_{i \geq 1} I_i$ بماند. در این مقاله فرض می‌کنیم a چنان است که $f_a(c_1) = p_1$. محاسبات عددی برای $d = 2$ مقادیر تقریبی زیر را

بررسی آشوب در یک خانواده از چندجمله‌ای‌های یک پارامتری



شکل ۱: نمودار تابع $f_{-3/81585}$ به ازای $d = 2$

نشان می‌دهد (شکل ۱ را ببینید).

$$\begin{aligned} a &\approx -3/81585, & p_0 &\approx -0/55765, & p_1 &\approx 1/29075, \\ c_1 &\approx -0/11216, & c_1 &\approx 0/77883, & x_0 &\approx -0/21559, & x_1 &\approx 1/21559, \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\Lambda = \{x \in [p_0, p_1] : f_a^n(x) \in \cup_{i \geq 0} I_i \cup \{p_0, p_1\} \quad n \geq 0 \text{ به ازای هر } n\}$$

خواص مجموعه Λ را در گزاره‌های زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره ۱.۳. مجموعه Λ یک زیر مجموعه بسته $[p_0, p_1]$ است که تحت f_a ناوردا است.

گزاره ۲.۳. مجموعه Λ تماماً ناهمبند است.

۴. تزویج

در این بخش با استفاده از دینامیک نمادین معرفی شده در بخش ۲ به بررسی خواص f_a روی مجموعه ناوردا Λ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $f_a(c_1) = p_1$. در این صورت (f_a, Λ) با (σ, Σ) مزدوج است.

برای اثبات این قضیه تابع تزویج h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(x) = (s_0, s_1, s_2, \dots) \text{ که در آن}$$

$$s_n = \begin{cases} j & \text{اگر } f_a^n(x) \in I_j \text{ و } j \in \mathbb{N} \\ L & \text{اگر } f_a^n(x) \in [0, c_1) = I_L \\ R & \text{اگر } f_a^n(x) \in (c_1, x_1] = I_R \\ E & \text{اگر } f_a^n(x) = p_1 \\ W & \text{اگر } f_a^n(x) = p_0 \\ \star & \text{اگر } f_a^n(x) = c_1 \end{cases}$$

و نشان می‌دهیم h یک همسانریختی است. سپس با توجه به این که خواصی مانند وجود مدار چگال و چگال بودن نقاط تناوبی تحت تزویج حفظ می‌شوند، قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $f_a(c_1) = p_1$. در این صورت (f_a, Λ) روی Λ آشوبناک است.

مراجع

1. M. Akbari and M. Rabii, Real cubic polynomials with a fixed point of multiplicity two. *Indagationes Mathematicae* **26** (2015), 64–74.
2. H. Bai-lin, *Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems*. World Scientific, 1989.
3. S. Baldwin, Continuous itinerary functions and dendrite maps. *Topology and its Applications* **154** (2007), 2889–2938.
4. H. Bruin and D. Schleicher, *Symbolic dynamics of quadratic polynomials*. Institut Mittag-Leffler, report no. 7, 2001.
5. D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University, 1995.
6. R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2nd edition, Westview, 2003.
7. S. Elaydi, *Discrete chaos*. 2nd edition, Chapman and Hall/CRC, 2008.

گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

akbari@sru.ac.ir :address Email

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران.

mrabii@alzahra.ac.ir :address Email

بررسی تقارنهای دینامیکی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم با استفاده از میدانهای برداری نیوتونوید

فاطمه آهنگری

چکیده. موضوع محوری مقاله حاضر، به بررسی جامع تقارنهای دینامیکی نظیر دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم (TODE) با استفاده از رده مهمی از میدانهای برداری موجود روی کلاف مماس برش یافته مرتبه دوم، تحت عنوان میدانهای برداری نیوتونوید اختصاص دارد. بدین منظور، ابتدا با استفاده از فرمول بندی فرولیچر - نیجنهویس و ساختار برگ بندی کلاف مماس مرتبه دوم، برای ایجاد یک حساب دیفرانسیل قائم استفاده می کنیم تا بتوانیم یک دستگاه هندسی برای مطالعه میدان معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم ایجاد نماییم. در واقع، به هر TODE، یک شبه اسپری از مرتبه دوم نسبت می دهیم، که یک میدان برداری خاص روی کلاف مماس مرتبه دوم محسوب می گردد. سپس، به این شبه اسپری، یک التصاق غیرخطی نظیر نموده و به واسطه آن، به تعریف مفاهیمی کلیدی از جمله مشتقات کوواریان دینامیکی از مرتبه یک و بالاتر و درون ریختی ژاکوبی پرداخته می شود. به عبارت دیگر، وجود این التصاق غیرخطی، منجر به مشخصه یابی هندسی تقارنهای دینامیکی نظیر یک TODE برحسب مؤلفه های درون ریختی ژاکوبی متناظر خواهد شد. در نهایت، نشان داده خواهد شد که در حالت موضعی، مؤلفه های نظیر مشتق هموردای دینامیکی نشأت گرفته از التصاق غیرخطی کانونی القا شده توسط شبه اسپری از مرتبه دوم نظیر یک TODE، منجر به توصیف تقارنهای دینامیکی یک TODE برحسب میدانهای برداری نیوتونوید خواهد شد.

۱. پیشگفتار

در دهه های اخیر، پژوهش های قابل توجهی به مطالعه کیفی دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، با بکارگیری ساختارهای هندسی اختصاص داده شده است. در این راستا، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. به هر دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم (SODE) می توان به طور کانونی، یک التصاق غیرخطی نسبت داد. این التصاق غیرخطی، منجر به القا کردن اشیای هندسی حائز اهمیتی می گردد که نقشی کلیدی در مطالعه یک SODE ایفا می کند؛ از آن جمله، می توان به مفاهیمی چون مشتق کوواریان دینامیکی، انتقال موازی، تاب، انحنا و معادله ژاکوبی اشاره نمود. در واقع، مطالعه ساختاری ناورداهای هندسی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، منجر به ایجاد بستری قوی برای بررسی و بحث در خصوص مفاهیم اساسی از جمله تقارنهای تغییرات مرتبه اول، مسأله معکوس حساب تغییرات و همچنین، متریک پذیری تصویری و فینسلری گردید. از جمله پژوهش های مهم در این خصوص، می توان به [۱، ۴، ۵، ۷] اشاره نمود. یکی از موضوعات پژوهشی مهم اخیر، تلاش جهت تعریف یک التصاق غیرخطی کانونی نظیر

واژه‌های کلیدی: تقارنهای دینامیکی، شبه اسپری، میدانهای برداری نیوتونوید، درون ریختی ژاکوبی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A26, 34C14, 70H50, 70G45

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه بالاتر (HODE) می باشد. چالش اصلی موجود این است که به هر HODE می توان چندین التصاق غیرخطی نسبت داد که هرکدام از آنها، حاوی اطلاعات خاصی در مورد HODE مورد مطالعه است [۶، ۳، ۲]. هدف اصلی ما در مقاله حاضر، مطالعه تقارنهای دینامیکی نظیر دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم (TODE) با استفاده از میدانهای برداری نیوتونیومید می باشد. در واقع، با استفاده از [۵، ۳] به گسترش نظریه هندسی دستگاههای SODE، به دستگاههای TODE پرداخته می شود. بدین منظور، از فرمول بندی فرولیچر - نیجنهویس و ساختار برگ بندی کلاف های مماس برای ایجاد یک حساب دیفرانسیل قائم استفاده کنیم تا بتوانیم یک دستگاه هندسی برای مطالعه میدان معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه سوم (TODE) ایجاد کنیم. سپس، به معرفی ساختارهای هندسی روی T^2M و ارائه مفاهیم هندسی مهمی از جمله فضای جت مرتبه دوم، ساختار مماس مرتبه دوم، شبه اسپری مرتبه دوم، ضرایب التصاق غیرخطی، درون ریختی ژاکوبی روی کلاف مماس مرتبه دوم برش یافته و مؤلفه های انحنای متناظر با آن در حالت موضعی و مشتق کوواریان دینامیکی نظیر التصاق غیرخطی (h_α, v_γ) به ازای $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ پرداخته می شود.

۲. تقارنهای دینامیکی دستگاه TODE و میدانهای برداری نیوتونیومید

چارچوب مطالعه دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه سوم (TODE) روی منیفلد M ، کلاف مماس $T^3M = J^3_0M$ ، می باشد. دومین ترفیع جت آن که با نگاشت $j^3c : I \rightarrow T^3M$ نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود:

$$j^3c(t) = \left(x^i(t), \frac{1}{1!} \frac{dx^i}{dt}(t), \frac{1}{2!} \frac{d^2x^i}{dt^2}(t) \right).$$

مختصات های موضعی روی M را با نماد (x^i) معرفی نموده و مختصات های موضعی القایی روی T^3M را با $(x^i, y^{(1)i}, y^{(2)i})$ نمایش می دهیم که در آن

$$y^{(1)i}(j^3_0c) = \frac{d(x^i(c(t)))}{dt} \Big|_{t=0}, \quad y^{(2)i}(j^3_0c) = \frac{1}{2} \frac{d^2(x^i(c(t)))}{dt^2} \Big|_{t=0}.$$

در این جا $y^{(0)i} = x^i$ و $T^0M = M$ است. هم چنین، برای هر $\alpha \in \{0, 1\}$ ، سابرشن کانونی $\pi_\alpha^3 : T^3M \rightarrow T^\alpha M$ یک برگ بندی طبیعی از T^3M القا می کند. زیر کلاف $\{0\} = \{(x, y^{(1)}, y^{(2)}) \in T^3M, y^{(1)} \neq 0\}$ را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که $(T^3M \setminus \{0\})^{-1} = (\pi_1^3)^{-1}(T^3M \setminus \{0\})$. اگر $c : I \rightarrow M$ یک خم منظم باشد، آنگاه به ازای هر $t \in I$ ، $j^3c(t) \in T^3M \setminus \{0\}$.

به ازای یک شبه اسپری S از مرتبه ۲، التصاق های غیرخطی گوناگونی وجود دارد. در این بخش، به یک دستگاه TODE دلخواه، یک التصاق غیرخطی کانونی اختصاص می دهیم که توصیف کننده هندسه این TODE می باشد. سپس، با استفاده از آن، به محاسبه تمامی مؤلفه های انحنای نظیر درون ریختی ژاکوبی پرداخته می شود. با توجه به [۳] نشان داده می شود که مؤلفه های انحنای نتیجه شده، منجر به ایجاد یک معادله ژاکوبی می گردد که نه تنها حاوی اطلاعات مفیدی در خصوص ژئودزیک های نظیر TODE مورد مطالعه است، بلکه منجر به ایجاد توصیفی هندسی از تقارنهای دینامیکی دستگاه TODE برحسب میدانهای برداری نیوتونیومید خواهد شد.

تعریف ۱.۰۲. میدان برداری $X \in \mathcal{X}(T^3M \setminus \{0\})$ ، یک تقارن دینامیکی از ۲-شبه اسپری S است اگر $[S, X] = 0$. محاسبه مستقیم نشان می دهد که یک میدان برداری روی $T^3M \setminus \{0\}$ مانند:

$$(1.1) \quad X = X^i(x, y^{(\beta)}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^2 Y^{(\alpha)i}(x, y^{(\beta)}) \frac{\partial}{\partial y^{(\alpha)i}},$$

تقارن دینامیکی است، اگر و تنها اگر مؤلفه های آن در $S^\alpha(X^i) = \alpha! Y^{(\alpha)i}$ ، به ازای هر $\alpha \in \{1, 2\}$ ، صدق کند و

$$(2.2) \quad S^3(X^i) + 6X(G^i) = 0.$$

تعریف ۲.۲. در هنگام بررسی تقارن های دینامیکی برای یک ۲-اسپری S ، مجموعه زیر از میدان های برداری روی $\{0\} \setminus T^*M$ ، نقش مهمی را ایفا می کند.

$$(۳.۲) \quad \mathcal{X}_S^* = \left\{ X \in \mathcal{X}(T^*M \setminus \{0\}), X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\alpha!} S^\alpha(X^i) \frac{\partial}{\partial y^{(\alpha)i}} \right\}.$$

میدان برداری $X \in \mathcal{X}_S^*$ ، یک نیوتونیوید از مرتبه ۲ نامیده می شود.

با توجه به $[۵, ۳]$ نتایج زیر حاصل می گردد:

لم ۳.۲. شبه اسپری S و التصاق غیرخطی (h_α, v_α) و مشتق هموردای دینامیکی ∇ وابسته به زوج $(S, (h_\alpha, v_\alpha))$ را در نظر بگیرید. میدان برداری X روی $T^*M \setminus \{0\}$ یک نیوتونیوید است اگر و تنها اگر

$$(۴.۲) \quad X = X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{1}{1!} \nabla^{(1)} X^i \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}} + \frac{1}{2!} \nabla^{(2)} X^i \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}.$$

که به ازای هر $\alpha \in \{1, 2\}$ می نویسیم:

$$\frac{1}{\alpha!} \nabla^{(\alpha)} X^i = \frac{1}{\alpha} S^\alpha(X^i) + \sum_{\beta=1}^{\alpha} M_{(\beta)j}^i S^{\alpha-\beta}(X^j).$$

به ازای هر میدان برداری $X \in J^1 \mathcal{X}(T^*M \setminus \{0\})$ داریم که $X \in J^1(\mathcal{X}_S^*)$ اگر و تنها اگر $J(\nabla X) = v_\alpha(X)$.

گزاره ۴.۲. مشتق هموردای دینامیکی ∇ وابسته به زوج $(S, (h_\alpha, v_\alpha))$ را در نظر بگیرید. در این صورت، میدان برداری $X \in \mathcal{X}(T^*M \setminus \{0\})$ ، یک تقارن دینامیکی است اگر و تنها اگر نیوتونیوید بوده و رابطه زیر برقرار باشد:

$$(۶.۲) \quad \frac{1}{2!} \nabla(J^1 \nabla^{(2)} X) + \Phi(X) = 0.$$

اثبات. میدان برداری $X \in \mathcal{X}(T^*M \setminus \{0\})$ تقارن دینامیکی است اگر و تنها اگر روابط $v_k[S, X] = 0$ و $h_\alpha[S, X] = 0$ به ازای هر $\alpha \in \{0, 1\}$ برقرار باشند. اولین مجموعه روابط $h_\alpha[S, X] = 0$ به ازای هر $\alpha \in \{0, 1\}$ ، نتیجه می دهد: $[S, X] \in \ker J$ ، که آن هم معادل است با $X \in \mathcal{X}_S^*$. از طرفی، به ازای هر $X \in \mathcal{X}(T^*M \setminus \{0\})$ داریم:

$$\nabla(v_\alpha X) + \Phi(X) = v_\alpha[S, X].$$

بنابراین، مؤلفه های $\nabla^{(\alpha)} X^{(\beta)i}$ به ازای هر $\alpha \in \{1, 2\}$ ، همان مشخصات را خواهند داشت. بنابراین، α -امین مشتق هموردای دینامیکی از میدان برداری X را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$(۷.۲) \quad \nabla^{(\alpha)} X = \sum_{\beta=0}^2 \nabla^{(\alpha)} X^{(\beta)i} \frac{\delta}{\delta y^{(\beta)i}}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

و به ازای هر $X \in \mathcal{X}_S^*$ (که $h_\alpha X = X^i \frac{\delta}{\delta x^i}$) از روابط (۴.۲) و (۷.۲) رابطه زیر نتیجه می شود:

$$(v_\alpha X) = \frac{1}{2!} \nabla^{(2)} X^i \frac{\partial}{\partial y^{(2)i}} = \frac{1}{2!} J^1 \nabla^{(2)} X.$$

□

با استفاده از نتایج حاصل شده در بالا، اثبات کامل می گردد.

گزاره ۵.۲. مشتق هموردای دینامیکی ∇ وابسته به زوج $(S, (h_\alpha, v_r))$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\nabla J = 0$. آن گاه میدان برداری $X \in \mathcal{X}(T^r M \setminus \{0\})$ یک تقارن دینامیکی است اگر و تنها اگر X یک نیوتونیوید باشد و

$$(8.2) \quad \frac{1}{r!} \nabla(\nabla^{(r)} X^i) + \sum_{\alpha=0}^1 \frac{1}{\alpha!} R_{(\alpha)j}^i \nabla^{(\alpha)} X^j = 0,$$

که در آن، X^i ها مؤلفه های افقی X هستند به طوری که $h_0 X = X^i \frac{\delta}{\delta x^i}$.

در نهایت، با توجه به [۳]، لم (۳.۲)، گزاره (۴.۲) و (۵.۲) می توان به مشخصه یابی هندسی زیر از تقارنهای دینامیکی نظیر یک دستگاه TODE دلخواه، برحسب میدانهای برداری نیوتونیوید دست یافت:

قضیه ۶.۲. فرض کنید (h_α, v_r) یک التصاق غیر خطی کانونی القا شده توسط شبه اسپری S بوده و ∇ مشتق هموردای دینامیکی متناظر آن باشد. در این صورت، خواهیم داشت:

(۱): میدان برداری X روی $T^r M \setminus \{0\}$ ، یک تقارن دینامیکی است اگر و تنها اگر یک نیوتونیوید باشد و

$$(9.2) \quad \frac{1}{r!} \nabla^r J^r X + \Phi(X) = 0.$$

(۲): در دستگاه مختصات موضعی، یک میدان برداری نیوتونیوید X روی $T^r M \setminus \{0\}$ ، یک تقارن دینامیکی از S است، اگر و تنها اگر مؤلفه های افقی آن در معادله ژاکوبی زیر صدق کند:

$$(10.2) \quad \frac{1}{r!} \nabla^r X^i + \left(r \frac{\delta G^i}{\delta x^j} - S(N_{(r)j}^i) + N_{(r)l}^i N_{(1)j}^l \right) \nabla^0 X^i + \left(r \left(\frac{\delta G^i}{\delta y^{(\alpha)j}} - N_{(r)j}^i \right) \right) \nabla X^i = 0.$$

مراجع

1. I. Bucataru; Metric Nonlinear Connections. *Differential Geom. Appl.* 25(3) (2007), 335-343.
2. I. Bucataru; Canonical Semispray for Higher Order Lagrange Spaces. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris.* 345 (2007), 209-272.
3. I. Bucataru, O. Constantinescu; A Geometric Setting for Systems of Ordinary Differential Equations. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 8(6) (2011), 1291-1327.
4. I. Bucataru, M. F. Dahl; Semi-basic 1-Forms and Helmholtz Conditions for the Inverse Problem of the Calculus of Variations. *J. Geom. Mech.* 1(2) (2009), 159-180.
5. I. Bucataru, M. F. Dahl; A Complete Lift for Semisprays. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 7(2) (2010), 267-287.
6. I. Bucataru, R. Miron; The Geometry of Systems of Third Order Differential Equations Induced by Second Order Lagrangians. *Mediterr. J. Math.* 6(4) (2009), 483-500.
7. J. Grifone, Z. Muzsnay; Variational Principles for Second-Order Differential Equations. World Scientific, 2000.

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران.

f.ahangari@alzahra.ac.ir:address Email

fa.ahangari@gmail.com:address Email

یک مدل تصادفی زمان-گسسته شامل برنامه واکسیناسیون برای انتشار بیماری‌های عفونی

محمود پارسامنش

چکیده. در این مقاله یک مدل اپیدمی برای انتشار بیماری‌های عفونی معرفی می‌گردد و با تعمیم روش مدل‌سازی مدل غیرتصادفی، چگونگی مدل‌سازی تصادفی زمان-گسسته توسط زنجیرهای مارکف برای مدل مذکور تشریح می‌شود. سپس با استفاده از روش زنجیر انشعاب، احتمال انقراض و بقای بیماری بر حسب عدد مولد عمومی مدل غیرتصادفی بیان می‌گردد.

۱. مقدمه

بیماری‌های عفونی همواره جوامع بشری را به چالش کشیده و همواره یکی از عوامل اصلی مرگ و میر حتی در کشورهای توسعه یافته بوده‌اند. از آنجا که همواره ممکن است عفونت جدیدی پدید آید و یا عفونت‌های قبلی دوباره ظاهر شوند و اوج بگیرند، مطالعه عوامل و چگونگی انتشار و همچنین کنترل آنها از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشد. مدل‌های ریاضی و شبیه‌سازی کامپیوتری، امکان مطالعه رفتار یک جامعه را فراهم می‌کنند. مدل‌های ریاضی که به مطالعه یک بیماری عفونی در یک جامعه می‌پردازند معمولاً مدل‌های اپیدمی نامیده می‌شوند و ممکن است پیوسته و یا گسسته باشند که به ترتیب با معادلات دیفرانسیل و یا معادلات تفاضلی بیان می‌شوند. در مدل‌سازی اپیدمی، جمعیت مورد مطالعه با توجه به وضعیت افراد نسبت به پیشرفت بیماری به چند زیرجمعیت افراز می‌شود. سپس جابجایی‌ها و انتقال‌های بین افراد گروه‌های جمعیتی و همین‌طور هرگونه تغییرات جمعیتی از قبیل زاد و مرگ و مهاجرت، توسط معادلات ریاضی به یکدیگر مربوط می‌شوند و بدین ترتیب یک سیستم دینامیکی برای رفتار آن جمعیت حاصل می‌گردد. مدل زمان-پیوسته زیر که در غالب معادلات دیفرانسیل معمولی بیان گردیده است، در [۳] معرفی گردید و مورد مطالعه قرار گرفت.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (1 - \varepsilon)\Lambda - \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \rho)S + \gamma I + \theta V, \\ \dot{I} &= \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \gamma + \alpha)I, \\ \dot{V} &= \varepsilon\Lambda + \rho S - (\mu + \theta)V. \end{aligned} \quad (1.1)$$

واژه‌های کلیدی: مدل اپیدمی، زنجیر مارکف، واکسیناسیون.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 92D25.

در این مدل، جمعیت جامعه با توجه به پیشرفت بیماری به سه دسته افزاشده است. افرادی که عفونی هستند و میتوانند عفونت را انتقال دهند، افرادی که سالم هستند و در معرض عفونی شدن قرار دارند، و افرادی که در مقابل بیماری مصونیت دارند. تعداد افراد هر یک از این گروه‌ها در لحظه t به ترتیب با $S(t)$ ، $I(t)$ و $V(t)$ نشان داده می‌شوند. افراد سالم پس از یک تماس موفق با افراد عفونی، با نرخ $\frac{\beta SI}{N}$ که به آن نرخ استاندارد گفته می‌شود، بیمار می‌شوند و همچنین افراد بیمار با نرخ γ بهبود می‌یابند. مرگ طبیعی در تمامی گروه‌های جمعیتی با نرخ μ اتفاق می‌افتد و همچنین نرخ مرگ در اثر بیماری α در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم در هر واحد زمانی تعداد Λ عضو جدید به جامعه افزوده شود. این تعداد شامل افراد تازه متولد شده و حتی افراد مهاجر می‌باشد. برنامه واکسیناسیون به این ترتیب است که در واحد زمان افراد سالم و افراد تازه وارد به ترتیب با نسبت‌های ρ و ε واکسینه می‌شوند. واکسیناسیون با کارایی صد در صد در نظر گرفته می‌شود هرچند این واکسیناسیون موقتی است و افراد با نرخ θ ایمنی در برابر بیماری را از دست می‌دهند. بیان گردید اگر Λ و μ مقادیر مثبتی فرض شوند، ناحیه $\Gamma = \{(S, I, V) \in \mathbb{R}_+^3 : S + I + V \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ یک مجموعه پایای مثبت برای دستگاه ۱.۱ است، یعنی با شروع از Γ جواب‌های دستگاه همواره در Γ باقی می‌مانند. عدد مولد عمومی برای این مدل به صورت زیر داده شد:

$$\mathcal{R}_* = \frac{\beta(\mu(1 - \varepsilon) + \theta)}{(\mu + \gamma + \alpha)(\mu + \theta + \rho)},$$

و ثابت گردید که دستگاه همواره دارای نقطه تعادل بدون بیماری به صورت

$$(2.1) \quad E^* = (S^*, I^*, V^*) = \left(\frac{\Lambda(\mu(1 - \varepsilon) + \theta)}{\mu(\mu + \theta + \rho)}, \frac{\Lambda(\mu\varepsilon + \rho)}{\mu(\mu + \theta + \rho)}, \frac{\Lambda(\mu\varepsilon + \rho)}{\mu(\mu + \theta + \rho)} \right),$$

است که وقتی $\mathcal{R}_* < 1$ پایدار سراسری است. در حالی که وقتی $\mathcal{R}_* > 1$ ، نقطه تعادل بدون بیماری ناپایدار است و یک نقطه تعادل منحصر به فرد شامل بیماری به صورت زیر موجود است که پایدار سراسری است:

$$(3.1) \quad E^* = (S^*, I^*, V^*) = \left(\frac{\Lambda(\mu + \gamma + \alpha)}{\beta\mu} \left(1 - \frac{\alpha(\mathcal{R}_* - 1)}{\mu\mathbf{R} + \alpha(\mathbf{R} - 1)} \right), \frac{\Lambda(\mathcal{R}_* - 1)}{\mu\mathbf{R} + \alpha(\mathbf{R} - 1)}, \frac{\varepsilon\Lambda}{\mu + \theta} \left(1 + \frac{\rho(\mu + \alpha\varepsilon + \theta)/(\varepsilon(\mu + \rho + \theta))}{\mu\mathbf{R} + \alpha(\mathbf{R} - 1)} \right) \right),$$

که در آن عبارت $\mathbf{R} = \frac{\beta(\mu + \theta)}{(\mu + \gamma + \alpha)(\mu + \theta + \rho)}$ به منظور اختصار فرض شده است.

از آنجایی که ماهیت فرایند انتشار بیماری‌های عفونی ذاتاً به صورت تصادفی است، به نظر می‌رسد نمی‌توان از عوامل غیر مترقبه در دنیای واقعی چشم پوشی نمود. با در نظر گرفتن عوامل تصادفی در مدل‌های انتشار بیماری می‌توان به مدل‌های واقعی‌تری رسید. پیشرفت‌های اخیر در ابزارهای ریاضی آنالیز فرایندهای تصادفی، به وجود آمدن روش‌های عددی مناسب و در دسترس بودن کامپیوترهای به اندازه کافی توانمند باعث گردیده است توجه به مدل‌های تصادفی و به کارگیری آن‌ها افزایش یابد. در ادامه این مقاله ما به فرمول‌بندی تصادفی مدل داده شده توسط دستگاه ۱.۱ با استفاده از زنجیرهای مارکف خواهیم پرداخت و به بیان شرایط انقراض یا بقای بیماری در مدل تصادفی می‌پردازیم.

۲. مدل تصادفی زنجیر مارکفی

فرض کنیم $t \in [0, \infty)$ و $S(t)$ ، $I(t)$ و $V(t)$ متغیرهای تصادفی باشند که بیانگر تعداد افراد در هر یک از گروه‌های جمعیتی سالم (مستعد بیماری)، عفونی، و واکسینه شده در لحظه t باشند. بردارهای $X = (S, I, V)$ متشکل از تعداد افراد در هر یک از گروه‌های جمعیتی در لحظه t و $\Delta X = (\Delta S, \Delta I, \Delta V)$ که بیانگر تغییرات گروه‌های جمعیتی در بازه زمانی Δ می‌باشد، بردارهای تصادفی سه بعدی هستند. بازه زمانی Δ به اندازه کافی کوچک فرض می‌شود به طوری که تنها به تغییر یا جابجایی در گروه‌های جمعیتی رخ دهد. فرض می‌کنیم تمامی تغییرات جمعیتی و جابجایی بین گروه‌های جمعیتی در مدل به صورت احتمالاتی انجام شوند. احتمالات انتقال با استفاده از حاصل ضرب نرخ‌های جابجایی در مدل غیر تصادفی و بازه زمانی Δ تعریف می‌شوند. به عنوان

جدول ۱: تغییرات و جابجایی‌های ممکن در دستگاه ۱.۱ به همراه احتمال آن‌ها در بازه زمانی کوچک Δ

احتمال	تغییر جمعیتی	نماد
$p_1 = b_S \Delta$	$\Delta X^{(1)} = (1, 0, 0)$	$b_S = (1 - \varepsilon)\Lambda$
$p_2 = d_S \Delta$	$\Delta X^{(2)} = (-1, 0, 0)$	$d_S = \mu S$
$p_3 = m_{SI} \Delta$	$\Delta X^{(3)} = (-1, 1, 0)$	$m_{SI} = \frac{\beta SI}{N}$
$p_4 = m_{SV} \Delta$	$\Delta X^{(4)} = (1, 0, -1)$	$m_{SV} = \rho S$
$p_5 = m_{IS} \Delta$	$\Delta X^{(5)} = (1, -1, 0)$	$m_{IS} = \gamma I$
$p_6 = m_{VS} \Delta$	$\Delta X^{(6)} = (1, 0, -1)$	$m_{VS} = \theta V$
$p_7 = d_I \Delta$	$\Delta X^{(7)} = (0, -1, 0)$	$d_I = (\mu + \alpha)I$
$p_8 = d_V \Delta$	$\Delta X^{(8)} = (0, 0, -1)$	$d_V = \mu V$
$p_9 = b_V \Delta$	$\Delta X^{(9)} = (0, 0, 1)$	$b_V = \varepsilon \Lambda$
$p_{10} = 1 - \sum_{k=1}^9 p_k$	$\Delta X^{(10)} = (0, 0, 0)$	

مثال اگر نرخ یک مورد ابتلا (انتقال از S به I) با m_{SI} نشان داده شود، در این صورت این انتقال با احتمالی برابر با $m_{SI} \Delta$ رخ می‌دهد. چنین تغییری به زبان برداری به صورت $\Delta X = (-1, 1, 0)$ نشان داده می‌شود.

تمامی این تغییرات و جابجایی‌ها به همراه احتمال متناظر با آن‌ها در جدول ۱ آورده شده است. در قسمت احتمالات جدول، نرخ جابجایی بین دو گروه جمعیتی توسط اندیس نماد m ، نرخ مرگ در یک گروه جمعیتی توسط اندیس نماد d ، و نرخ زاد و مهاجرت به یک گروه جمعیتی توسط اندیس نماد b مشخص شده است. هر احتمال p_i متناظر با یک پیشامد $\Delta X^{(i)}$ می‌باشد که تنها بیانگر یک تغییر در جامعه است (برای آشنایی بیشتر با مدل‌سازی تصادفی به [۱] رجوع کنید).

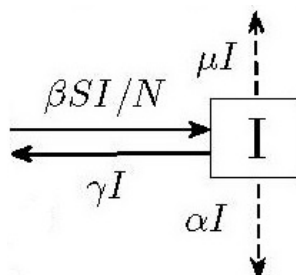
بنابراین احتمال‌های انتقال ناصفر در طول بازه Δ از زمان t تا $t + \Delta$ می‌تواند از جدول ۱ بدست آید:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} p_{X, X+\Delta X^{(n)}}(\Delta) &= \text{Prob}\{X(t+\Delta) = X + \Delta X^{(n)} | X\} = p_n, n = 1, \dots, 9, \\ p_{X, X}(\Delta) &= \text{Prob}\{X(t+\Delta) = X | X\} = p_{10}. \end{aligned}$$

۳. احتمال انقراض و بقا

با استفاده از روش زنجیر انشعاب (برای اطلاعات تکمیلی به [۲] رجوع کنید)، به تعیین احتمال‌های انقراض یا بقای زنجیر مارکف $\{S(t), I(t), V(t)\}$ می‌پردازیم. در این روش، دینامیک وضعیت I در نزدیکی نقطه تعادل بدون بیماری مدل غیرتصادفی بررسی می‌گردد و فرایند $\{I(t)\}$ به عنوان یک فرایند مستقل فرض می‌شود. در نقطه تعادل بدون بیماری E^* داریم $S^* = \frac{\Lambda(\mu(1-\varepsilon)+\theta)}{\mu(\mu+\theta+\rho)}$ و $N^* = \frac{\Lambda}{\mu}$. همچنین توجه می‌کنیم که $\mathcal{R}_* = \frac{\beta(\mu(1-\varepsilon)+\theta)}{(\mu+\gamma+\alpha)(\mu+\theta+\rho)} = \frac{\beta S^*}{N^*(\mu+\gamma+\alpha)}$ و $V(t) = V^*$ احتمال‌های زاد زنجیر انشعاب $\{I(t)\}$ با توجه به شکل ۱ به صورت زیر خواهد بود:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f(1) &= \frac{\mu + \gamma + \alpha}{\frac{\beta S^*}{N^*} + (\mu + \gamma + \alpha)} = \frac{1}{\mathcal{R}_* + 1}, \\ f(2) &= \frac{\frac{\beta S^*}{N^*}}{\frac{\beta S^*}{N^*} + (\mu + \gamma + \alpha)} = \frac{\mathcal{R}_*}{\mathcal{R}_* + 1}, \\ f(k) &= 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad k \neq 1, 2. \end{aligned}$$



شکل ۱: فرایند $I(t)$ و جابجایی‌های ممکن آن

بنابراین تابع مولد احتمال برای توزیع زاد را می‌توان برای $u \in [0, 1]$ به صورت زیر نوشت:

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)u^n = f(0) + f(1)u = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0 + 1}u + \frac{1}{\mathcal{R}_0 + 1},$$

بدست می‌آوریم $m = \varphi'(1) = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0 + 1}$. بنابراین $m \leq 1$ اگر و فقط اگر $\mathcal{R}_0 \leq 1$ و $m > 1$ اگر و فقط اگر $\mathcal{R}_0 > 1$. بنابراین فرایند $\{I(t)\}$ با احتمال یک به صفر جذب می‌شود اگر و فقط اگر $\mathcal{R}_0 \leq 1$ ، و با احتمال q جذب صفر می‌شود اگر و فقط اگر $\mathcal{R}_0 > 1$ ، که q کوچکترین مقدار ثابت تابع φ در $[0, 1]$ است. با حل معادله $\mathcal{R}_0 u^2 - (1 + \mathcal{R}_0)u + 1 = 0$ می‌یابیم $q = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$. بنابراین، مباحث مطرح شده قضیه زیر را اثبات می‌کنند:

قضیه ۱.۳. برای مدل تصادفی SVIS که توسط زنجیر مارکف گسسته با احتمال‌های انتقال بیان شده در جدول ۱ داده می‌شود،

(۱) اگر $\mathcal{R}_0 \leq 1$ ، آنگاه با احتمال یک انقراض بیماری رخ می‌دهد.

(۲) اگر $\mathcal{R}_0 > 1$ ، احتمال انقراض بیماری به صورت زیر داده می‌شود:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}\{I(t) = 0\} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)^{I(0)},$$

که در آن $I(0)$ تعداد افراد عفونی اولیه است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از معرفی یک مدل اپیدمی غیرتصادفی با نرخ استاندارد که شامل واکسیناسیون است، با تعمیم روش مدل‌سازی غیرتصادفی، یک مدل تصادفی زمان-گسسته برای مدل معرفی شده، با استفاده از زنجیرهای مارکف فرمول‌بندی گردید. سپس با بکارگیری روش زنجیر انشعاب نشان داده شد که وقتی عدد مولد عمومی مدل غیرتصادفی کمتر یا مساوی یک است با احتمال یک بیماری منقرض می‌شود و اگر این عدد بزرگتر از یک باشد این اتفاق با احتمال کمتر از یک رخ می‌دهد.

مراجع

1. Allen LJ; An introduction to stochastic processes with applications to biology. *CRC Press* 2010.
2. Kimmel M, Axelrod DE; Branching Processes in Biology. *Interdisciplinary Applied Mathematics 19. Springer, New York. MR1903571* 2002.
3. Parsamanesh, M, Erfanian, M; Global dynamics of an epidemic model with standard incidence rate and vaccination strategy. *Chaos, Solitons & Fractals* 117 (2018), 192–199.

فضای شیفت تعمیم یافته

داود احمدی دستجردی و روزبه تهمتن

چکیده. فضاهای شیفت ابزاری کارآمد برای مطالعه دستگاه‌های دینامیکی هستند و ضمن کاربرد در رشته‌های دیگر، خود نیز خواص دینامیکی متنوع و غنی را به نمایش می‌گذارند. هر نقطه در فضای شیفت کلاسیک یک دنباله از نمادهاست که نمادها از یک مجموعه به نام الفبا انتخاب شده و این دنباله توسط اعداد طبیعی یا صحیح اندیس‌گذاری می‌شوند. در این مقاله، مفهوم فضاهای شیفت را تعمیم داده‌ایم بطوریکه نقاط لزوماً توسط اعداد صحیح اندیس‌گذاری نشده بلکه توسط مجموعه‌ای کلی‌تر اندیس‌گذاری می‌شوند.

۱. پیش‌گفتار

پویایی نمادین عبارت از مدل‌سازی دستگاه پویای توپولوژیک یا هموار توسط دنباله‌هایی از نمادهای مجرد است و پویایی دستگاه توسط عملگر شیفت (یا نوبت) مدل‌سازی می‌شود که با σ نمایش داده می‌شود. معمولاً برای انجام این کار از افراز مارکوف استفاده می‌شود که نگاشت دستگاه هر عضو از افراز را به روی اجتماعی از عناصر افراز می‌انگارد. مهمترین چنین دستگاه‌هایی، دستگاه شیفت کامل است. در این دستگاه هر دنباله‌ای که مولفه‌های آن از الفبا تامین شده باشد عضوی از سیستم خواهد بود. به عبارت دیگر تابعی فضای فاز ما $A^{\mathbb{N}}$ یا $A^{\mathbb{Z}}$ خواهد بود که A مجموعه الفبای ما است. در این صورت، $\sigma: A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ با دستور $(\sigma(x))_n = x_{n+1}$ یا $(\sigma(x))_s = x_{f(s)}$ که $f(s) = s + 1$ برای $s \in \mathbb{N}$ داده می‌شود. در این مقاله، به جای $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Z}$ ، مجموعه دلخواه S و $f: S \rightarrow S$ هم دلخواه در نظر گرفته می‌شود.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید A و S دو مجموعه و $f: S \rightarrow S$ یک تابع باشد. تابع $\sigma_f: A^S \rightarrow A^S$ را به صورت

$$\sigma_f(x)(s) = x(f(s))$$

تعریف کرده و آنرا **تابع شیفت تعمیم یافته** نامیم. همچنین، سه‌تایی (A, S, f) **شیفت کامل تعمیم یافته** نامیده می‌شود.

گزاره ۲.۲. فرض کنید (A, S, f) یک فضای شیفت کامل تعمیم یافته باشد. در این صورت f یک به یک است اگر و تنها اگر σ_f پوشا باشد.

واژه‌های کلیدی: دینامیک نمادین، فضای شیفت.

گزاره ۳.۲. فرض کنید (A, S, f) یک فضای شیفت کامل تعمیم یافته باشد. در این صورت f پوشا است اگر و تنها اگر σ_f یک به یک باشد.

برای تعمیم طبیعی متر بر فضای شیفت کامل و لذا برای داشتن σ_f پیوسته به تعریف زیر نیازمندیم.

تعریف ۴.۲. فرض کنید (A, S, f) فضای شیفت کامل تعمیم یافته و $l: S \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی متناهی به یک باشد. برای هر x و y متعلق به A^S فرض کنید $N(x, y) := \min\{l(s) : x(s) \neq y(s), s \in S\}$ و قرار دهید

$$d_l(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)}, & x \neq y \end{cases}.$$

آنگاه چهارتایی (A, S, f, l) را فضای شیفت متریک نامیم.

مثال ۵.۲. فرض کنید $S = \mathbb{N}$ ، $A = \{0, 1, 2\}$ و تابع $l: S \rightarrow \mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف شود

$$l(n) = 5k, \quad 5(k-1) \leq n \leq 5k, \quad k \in \mathbb{N}$$

اکنون اگر $x, y \in A^S$ بصورت زیر باشند

$$x = 0 \dots 2 \dots 2 \dots 2 \dots, \quad y = 111121111211112 \dots$$

آنگاه $N(x, y) = 5$ زیرا به ازای هر n که $x(n) \neq y(n)$ داریم $l(n) \geq 5$

مثال ۶.۲. فرض کنید

$$S = \overbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}^{n \text{ times}}, \quad f(k_1, k_2, \dots, k_n) = (k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_n + 1)$$

و $l(k_1, k_2, \dots, k_n) = \max\{|k_1|, \dots, |k_n|\}$. در این صورت، گوی به مرکز x و شعاع $\frac{1}{2}$ در فضای A^S عبارت است از تمام y هایی که بر مربع واحد توپر با x برابراند.

بویژه اگر $n = 1$ ، آنگاه (A, S, f, l) همان فضای شیفت دوطرفه است.

مثال ۷.۲. فرض کنید $(S, *)$ یک نیم گروه باشد که توسط $G \subseteq S$ تولید شده است و $|G| < \infty$. برای $s \in S$ تعریف کنید $l(s) = \min\{|n_1| + \dots + |n_k| : s = g_1^{n_1} \dots g_k^{n_k}, g_i \in G\}$ (توجه کنید که l تابعی متناهی به یک است.) و فرض کنید $t \in S$ ثابت باشد. تابع $f: S \rightarrow S$ را بصورت $f(s) = s * t$ تعریف کنید. بویژه اگر $S = \mathbb{Z}$ و $t = 1$ آنگاه (A, S, f, l) همان فضای شیفت دوطرفه است.

قضیه ۸.۲. تابع d_l تعریف شده در تعریف ۴.۲ یک متر است.

قضیه ۹.۲. فرض کنید (A, S, f, l) و (A, S, f, l') دو فضای شیفت متریک به ترتیب با متر d_l و $d_{l'}$ ، یعنی مترهای معرفی شده در تعریف ۴.۲ باشند. آنگاه توپولوژی القاء شده توسط d_l و $d_{l'}$ روی A^S معادلند.

نکته ۱۰.۲. فرض کنید که (A, S, f, l) فضای شیفت متریک باشد. چون تابع $l: S \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی متناهی به یک است، S یک مجموعه حداکثر شماراست. اگر $|S| = m < \infty$ ، آنگاه فاصله هر دو نقطه متمایز در A^S حداقل $\frac{1}{2^m}$ است که این یعنی A^S یک فضای توپولوژیک گسسته است. به همین دلیل از این به بعد فرض را بر این می گذاریم که S مجموعه ای شمارا است.

نکته ۱۱.۲. بنابر نکته بالا و قضیه ۹.۲، هر فضای شیفت متریک همسانریخت^۱ با فضای شیفت $A^{\mathbb{Z}}$ است و بنابراین دارای خواص توپولوژیکی یکسان هستند. بخصوص اگر A متناهی باشد آنگاه A^S فشرده است.

^۱Homeomorph

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک باشد در اینصورت تابع شیفت σ_f نسبت به متر تعریف شده در تعریف ۴.۲ پیوسته است.

مثال بعد نشان می‌دهد که بدون شرط متناهی به یک بودن l در تعریف ۴.۲، قضیه بالا لزوماً درست نیست.

مثال ۱۳.۲. فرض کنید $A = \{0, 1\}$ و $S = \mathbb{N}$. همچنین $f: S \rightarrow S$ و $l: S \rightarrow \mathbb{N}$ را به صورت

$$f(s) = \begin{cases} (n, 0), & s = (n, n) \\ (n, n), & s = (n, 0) \\ s, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}, \quad l((m, n)) = n$$

تعریف کنید. حال برای $x \in A^S$ داریم

$$\begin{aligned} B(\sigma_f(x), \frac{1}{r}) &= \{y \in A^S : y|_l = \sigma_f(x)|_l\} \\ &= \{y \in A^S : y|_{\mathbb{N} \times \{0\}} = \sigma_f(x)|_{\mathbb{N} \times \{0\}}\} \end{aligned}$$

و لذا r مثبتی یافت نمی‌شود که $\sigma_f(B(x, r)) \subseteq B(\sigma_f(x), \frac{1}{r})$.

فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک و f به یک به یک باشد. در اینصورت $P = \{O(s) : s \in S\}$ یک افراز از S است و چون S شماراست، P حداکثر شماراست پس P را بصورت $P = \{O_j : j \in \mathbb{N}\}$ نمایش می‌دهیم. از هر $O_j \in P$ دقیقاً یک عضو انتخاب کنید و آنرا $\bar{s}_j$ بنامید. اکنون تعریف می‌کنیم $f^i(\bar{s}_j) = s_{i,j}$. بنابراین، هر $x \in A^S$ را می‌توان بصورت زیر نمایش داد

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & x(-2, 0) & x(-1, 0) & x(0, 0) & x(1, 0) & x(2, 0) & \dots \\ \dots & x(-2, 1) & x(-1, 1) & x(0, 1) & x(1, 1) & x(2, 1) & \dots \\ \dots & x(-2, 2) & x(-1, 2) & x(0, 2) & x(1, 2) & x(2, 2) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

که $x(i, j) = x(s_{i,j})$ ، این نمایش اعضای A^S را نمایش چندسطری می‌نامیم. (البته ممکن است f پوشا نباشد و برای بعضی j ، $s_{i,j}$ برای i های منفی تعریف نشود.)

با توجه به نمایش چندسطری هر $x \in A^S$ را می‌توان بصورت $x = (x'(0), x'(1), \dots)$ بنویسیم که $x'(i)$ سطر i از نمایش چندسطری x است. یعنی $A^S = \prod_{i=1}^n X_i$ یا $A^S = \prod_{i=1}^\infty X_i$ که $X_i = A^{\mathbb{Z}}$ یا $X_i = A^{\mathbb{N}}$ یا $X_i = A^{\{0,1,\dots,n\}}$. مخصوصاً اگر f نقطه متناوب نداشته باشد می‌توان گفت فضای شیفت متریک حاصل ضرب حداکثر شمارایی از فضاهای شیفت یک طرفه یا دو طرفه است.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک باشد. در اینصورت اگر σ_f تراپا باشد، آنگاه f نقطه متناوب ندارد.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک باشد. f تابعی یک به یک باشد و نقطه متناوب نداشته باشد. در اینصورت نقاط متناوب σ_f در A^S چگال هستند و σ_f تراپا است.

تعریف ۱۶.۲. فرض کنید (A, S, f) یک فضای شیفت کامل تعمیم یافته باشد و $w = w, w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathcal{L}_n(A)$ و $x \in A^S$ می‌گوییم w در x اتفاق می‌افتد اگر $s \in S$ موجود باشد بطوریکه

$$x(s) = w, \quad \sigma_f(x)(s) = w_1, \quad \dots, \quad \sigma_f^{n-1}(x)(s) = w_{n-1}.$$

در آنصورت می‌نویسیم $w \sqsubseteq x$.

تعریف ۱۷.۲. فرض کنید (A, S, f) یک فضای شیفت کامل تعمیم یافته باشد و $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(A)$. قرار دهید

$$X_{\mathcal{F}} := \{x \in A^S : \forall w \in \mathcal{F}, w \not\sqsubseteq x\}.$$

$X_{\mathcal{F}}$ را **زیرشیفت تعمیم یافته** از فضای شیفت متریک می‌نامیم.

قضیه ۱۸.۲. فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک باشد. در این صورت $X_{\mathcal{F}}$ بسته و تحت σ_f پایا است.

تعریف ۱۹.۲. فرض کنید $A = \{0, \dots, k-1\}$ و (A, S, f) یک فضای شیفت کامل تعمیم یافته باشد و M یک ماتریس $k \times k$ با درایه‌های صفر و یک باشد. تعریف می‌کنیم

$$X_M = \{x \in A^S : \forall s \in S, M(x(s), \sigma_f(x)(s)) = 1\}$$

در این صورت $\sigma_f|_{X_M}$ را یک **زیرشیفت (تعمیم یافته) از نوع متناهی** می‌نامیم.

قضیه ۲۰.۲. فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک و $\sigma_f|_{X_M}$ یک زیرشیفت از نوع متناهی باشد. در این صورت اگر $\sigma_f|_{X_M}$ تراپا باشد، آنگاه M تحویل ناپذیر است.

مثال بعد نشان می‌دهد عکس قضیه بالا لزوماً درست نیست.

مثال ۲۱.۲. فرض کنید $A = \{0, 1\}$, $S = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $f(m, n) = (m+1, n)$, $l(m, n) = 2m+n$ و $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. زیرشیفت از نوع متناهی X_M از فضای شیفت متریک (A, S, f, l) را در نظر گرفته و فرض کنید

$$U = \{x \in X_M : x(0, 0) = 0, x(0, 1) = 1\}, \quad V = \{x \in X_M : x(0, 0) = x(0, 1) = 0\}.$$

در این صورت

$$\sigma_f^{-n}(U) \cap V = \{x \in X_M : x(0, 0) = x(0, 1) = x(n, 0) = 0, x(n, 1) = 1\}.$$

توجه کنید که هر $x \in \sigma_f^{-n}(U) \cap V$ باید بر $n-1$ درایه در سطر اول که بین $(0, 0)$ و $(n, 0)$ هستند و $n-1$ درایه در سطر دوم که بین $(0, 1)$ و $(n, 1)$ هستند تعریف شود. اما چون

$$M^n(0, 0) \geq 1 \iff n \in 2\mathbb{Z}, \quad M^n(0, 1) \geq 1 \iff n \in 2\mathbb{Z} + 1,$$

به ازای هر n طبیعی یک مکان در سطر اول یا دوم قابل تعریف نمی‌باشد و بنابراین $\sigma_f^{-n}(U) \cap V = \emptyset$.

قضیه ۲۲.۲. فرض کنید (A, S, f, l) یک فضای شیفت متریک و $\sigma_f|_{X_M}$ یک زیرشیفت از نوع متناهی باشد و f یک به یک باشد و نقطه متناوب نداشته باشد در این صورت $\sigma_f|_{X_M}$ آمیختگی دارد اگر و تنها اگر M نامتناوب باشد.

مراجع

1. Lind, Douglas, et al. An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge university press, 1995.

دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

ahmadi@guilan.ac.ir :address Email

دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

ruzbe.tahamtan@gmail.com :address Email

فضای فوریه روی یک C^* -سیستم دینامیکی

مرضیه شمس یوسفی

چکیده. در این مقاله با کمک مفهوم C^* -سیستم دینامیکی، فضای فوریه C^* -مقداری می‌سازیم. این مفهوم ساختار کلاسیک ساخته شده توسط ایمارد را تعمیم می‌بخشد.

۱. پیش‌گفتار

جبر فوریه و فوریه اشتیل یس $A(G)$ و $B(G)$ برای یک گروه موضعاً فشرده دلخواه اولین بار توسط پ.ایمارد در سال ۱۹۶۴ معرفی شد. [۲] ایمارد سعی داشت گروه موضعاً فشرده G را از روی جبر گروهی شناسایی کند. پس از معرفی ایمارد، جبرهای از نوع فوریه تاریخچه مفصلی را طی کردند. در این مقاله سعی داریم جبر فوریه بردار-مقداری را معرفی کنیم که بر پایه C^* -سیستم‌های دینامیکی بنا می‌شود. تلاش‌های ارزشمندی برای ساختن جبر فوریه اشتیل یس بردار مقداری توسط بدش و کنتی در [۱] به ثمر نشسته است. نویسندگان در [۱] به کمک ابزار جبر ضربگرهای کاملاً کراندار - جبر (پر و تحدید شده) ضرب صلیبی - سیستم‌های دینامیکی، این جبر باناخ را شناسایی کردند. در این مقاله از دیدگاه دیگری به معرفی فضاهای فوریه روی C^* -سیستم‌های دینامیکی می‌پردازیم. در سرتاسر این مقاله A یک C^* -جبر یکدار و G یک گروه موضعاً فشرده است، مفروضات مکمل تصریح خواهد شد.

۲. C^* -سیستم‌های دینامیکی

تعریف ۱.۱.۲. یک C^* -سیستم‌های دینامیکی عبارت است از یک سه‌تایی (A, G, α) شامل C^* -جبر A ، گروه موضعاً فشرده G و همریختی پیوسته $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } A$ ، که در آن منظور از $\text{Aut } A$ همه یکرختی‌های روی A است که با توپولوژی همگرایی قوی (توپولوژی نرم نقطه‌ای) مجهز است.

برای راحتی در ادامه ممکن است به جای $\alpha(x)$ از نماد α_x بهره ببریم. فرض بر این است که خواننده با فضای $C_c(G, A)$ شامل توابع پیوسته C^* -مقداری با محمل فشرده روی G و مفهوم نمایش هموردا از سیستم‌های دینامیکی روی فضاهای مدولی هیلبرت [۳] آشنایی دارد.

واژه‌های کلیدی: جبر فوریه، نمایش هم وردا، C^* -سیستم دینامیکی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 46L55, 46L05

گزاره ۲.۲. [۴] فرض کنید (A, G, α) یک C^* -دینامیکی باشد، روی $f \in C_c(G, A)$ تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \sup \left\{ \|\pi U(f)\| : (\pi, U) \text{ از هموردا نمایش یک } (A, G, \alpha) \text{ است} \right\}$$

در این صورت $\|\cdot\|$ یک نرم روی $C_c(G, A)$ تعریف می‌کند، که نرم جامع نامیده می‌شود و تحت تسلط $\|\cdot\|_1$ است. کامل‌سازی $C_c(G, A)$ با نرم جامع، یک C^* -جبر است، که C^* -جبر صلیبی از A توسط G نامیده می‌شود و با $A_\alpha G$ نمایش داده می‌شود. خواص C^* -جبر صلیبی و ارتباط بین نمایش‌های $A_\alpha G$ و نمایش‌های هموردای (A, G, α) در [۴] به طور کامل مطالعه شده است.

۳. فضای فوریه C^* -مقداری

در این مقاله سعی می‌کنیم ایده ای برای جبر فوریه C^* -مقداری با استفاده از ابزارهای C^* -جبر صلیبی یک C^* -سیستم دینامیکی ارائه کنیم. این ایده نتایج اولیه کلاسیک به خصوص در مورد ارتباط بین نمایش‌ها و ضرب پیچشی را تعمیم می‌دهد. هرچند که ساختار جبری آن تا حدی در حاله‌ای از ابهام است. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* -سیستم دینامیکی باشد، به سادگی دیده می‌شود، فضای باناخ $L^\infty(G, A)$ یک هیلبرت مدول است. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \rho : A &\longrightarrow B(A) \\ a &\longrightarrow L_a \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : A &\longrightarrow B(L^\infty(G, A)) \\ a &\longrightarrow h \longrightarrow r \longrightarrow \rho(\alpha_{r^{-1}}(a))(h(r)), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} U : G &\longrightarrow B(L^\infty(G, A)) \\ s &\longrightarrow h \longrightarrow r \longrightarrow \alpha_s(h(S^{-1}r)). \end{aligned}$$

در این صورت U یک نمایش یکانی است و با $\tilde{\rho}$ هموردا است. در این حالت صورتی از ارتباط کلاسیک بین ضرب پیچشی و نمایش‌ها در فرم C^* -مقداری به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\langle U(s^{-1})\xi, \eta \rangle = \alpha_{s^{-1}}(\xi * \tilde{\eta}(s))$$

تعریف ۱.۳. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* -سیستم دینامیکی باشد، در این صورت منظور از فضای فوریه بردار مقداری، کامل‌سازی فضای برداری تولید شده توسط توابع به فرم

$$\begin{aligned} f : GA &\longrightarrow A \\ (s, x) &\longrightarrow \langle \tilde{\rho}(x)U(s^{-1})\xi, \eta \rangle \end{aligned}$$

برای یک ξ, η در $L^\infty(G, A)$ با نرم زیر است.

برای $f \in A(G, A)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\| = \inf \left\{ \|\xi\| \|\eta\| : f(s, x) = \langle \tilde{\rho}(x)U(s^{-1})\xi, \eta \rangle \right\}$$

این فضا را با $A(G, A)$ نمایش می‌دهیم. هر عضو به فرم $\langle \tilde{\rho}(x)U(s^{-1})\xi, \eta \rangle$ را یک تابع ضرب از نمایش هموردای $(\tilde{\rho}, U)$ و ξ, η را بردارهای متناظر آن می‌نامیم.

تعریف ۲.۳. فضای باناخ $A(G, A)$ ، را فضای فوریه A - مقدار می‌نامیم. هر عضو این فضا نمایشی به فرم

$$f : GA \longrightarrow A$$

$$(s, x) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \langle \tilde{\rho}(x) U(s^{-1}) \xi_i, \eta_i \rangle$$

دارد. بررسی این که فضای تعریف شده فوق یک جبر تشکیل می‌دهد یا خیر و این که، مشابه با آنچه در $A(G)$ برقرار است، آیا بر حسب بردارهای با محمل فشرده در $C_c(G, A)$ معرفی می‌شود، هنوز شناخته شده نیست. به این منظور باید نشان داده شود ضرب تانسوری طبیعی دو نمایش هموردای منظم $(\tilde{\rho}, U)$ روی ضرب تانسوری داخلی مدول‌های هیلبرت با $(\tilde{\rho}, U)$ یا صورت مناسبی از آن، هم ارز است.

گزاره ۳.۳. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* - سیستم دینامیکی باشد و $x \in A(G, A)$ و $a \in A$ در این صورت u^*, a, u و $\tilde{u}$ به $A(G, A)$ تعلق دارند.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* - سیستم دینامیکی باشد. در این صورت فضای فوریه $A(G, A)$ ، جبر فوریه ایمارد را به صورت طولی در بر دارد.

قضیه ذیل تعمیمی از نتایج موجود در حالت کلاسیک جبرهای فوریه است.

گزاره ۵.۳. ضرایب نمایش منظم یک سیستم دینامیکی با بردارهای یکسان یک نگاشت کاملاً مثبت روی C^* - جبر صلیبی تعریف می‌کنند.

عکس قضیه فوق به شکل کلی‌تری برقرار است.

تعریف ۶.۳. C^* - سیستم دینامیکی (A, G, α) را نمایش‌پذیر ریس می‌نامیم، هرگاه هر نگاشت خطی کراندار $T : L^1(G) \rightarrow B(A)$ بر حسب انتگرال معرفی شود، به این معنا که $g \in L^\infty(G, B(A))$ چنان موجود باشد که برای هر $f \in L^1(G)$ داشته باشیم $T(f) = \int fg$.

تحت شرایط متنوعی، C^* - سیستم دینامیکی (A, G, α) نمایش‌پذیر ریس است.

گزاره ۷.۳. فرض کنیم $T : A_\alpha G \rightarrow A$ یک نگاشت کاملاً مثبت از C^* - جبر صلیبی $A_\alpha G$ به A باشد. در این صورت نمایش هموردای (π, U) روی یک هیلبرت مدول X و بردار ξ در آن چنان موجودند، به طوری که برای هر $f \in A_\alpha G$

$$T : A_\alpha G \rightarrow A, \quad T(f) = \langle \pi U(f) \xi, \xi \rangle.$$

تعریف ۸.۳. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* - سیستم دینامیکی باشد. C^* - جبر A را تفکیک‌پذیر می‌نامیم، هرگاه هر نگاشت کاملاً کراندار $\varphi : A_\alpha G \rightarrow A$ به صورت ترکیب خطی نگاشت‌های کاملاً مثبت نوشته شود.

تعریف فوق یک تعریف موضعی برای همین مقاله است و صورت ضعیف‌تری از تعریف مشابه برای نگاشت‌های تفکیک‌پذیر در نظریه کلی C^* - جبرهاست. به عنوان مثال جبرهای فون نویمان انزکتیو، تفکیک‌پذیر هستند.

گزاره ۹.۳. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* - سیستم دینامیکی و A تفکیک‌پذیر باشد. در این صورت $A(G, A)$ زیرفضای بسته‌ای از فضای نگاشت‌های کاملاً کراندار از $A_\alpha G$ به A ، $CB(A_\alpha G, A)$ است.

نتیجه ۱۰.۳. فرض کنیم (A, G, α) یک C^* - سیستم دینامیکی و A تفکیک‌پذیر باشد. در این صورت $A(G, A)$ دارای ساختار عملگری طبیعی است.

مراجع

1. E. Bedos, R. Conti, The Fourier-Stieltjes algebra of a C -dynamical system, Int. J. Math. 27, no. 5 (2016) 1650050 (50 pages).
2. P. Eymard , *Lalgebra de Fourier dun groupe localment compact*, Bull. Soc. Math. France, 92, (1964), 181-236.
3. C. Lance, Hilbert C -modules, London Mathematical Society, 1995.
4. D. P. Williams, Crossed Products of C -algebras, American Mathematical Society, Vol 134, 2007.

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.
m.shams@guilan.ac.ir :address Email

حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه‌ی متغیر با استفاده از تقریب ریتز و چندجمله‌ایهای جنوچی

س. شیخی، م. متین‌فر، و م. عرب فیروزجایی

چکیده. در این مقاله با استفاده از تقریب ریتز به حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه‌ی متغیر می‌پردازیم. ابتدا تابع مجهول، با استفاده از تقریب ریتز و چندجمله‌ایهای جنوچی به عنوان توابع پایه تخمین زده می‌شود. سپس با کمک روش هم‌محلی و انتخاب ریشه‌های جنوچی به عنوان نقاط هم‌محلی دستگاهی جبری از معادلات غیرخطی بدست می‌آید که با استفاده از نرم‌افزار Mathematica 10 به حل آن می‌پردازیم. در انتها با حل یک مثال عددی و مقایسه‌ی نتایج عددی آن با روش‌های دیگر دقت و کارایی روش نشان داده می‌شود.

۱. پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل کسری در دهه‌های اخیر به دلیل دقت بالای آن در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی و علوم مهندسی کاربرد فراوانی یافته است. اما معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه‌ی ثابت در توصیف سیستم‌های دینامیکی پیچیده در انتشارهای زیستی و غلظت مواد در محیط‌های ناهمگن [۴] عملکرد مناسبی نداشته است. اولین بار توسط سامکو و رز^۱ عملگری تحت عنوان مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر معرفی گردید که می‌توانست تابعی از زمان، مکان یا پارامترهای سیستم باشد [۵]. در این مقاله با استفاده از تقریب ریتز، به حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه‌ی متغیر به فرم زیر می‌پردازیم:

$$(1.1) \quad \begin{cases} {}^c D^{\alpha(x)} u(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) + c(x)u(\tau(x)) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = \lambda_0, \quad u(1) = \lambda_1, \end{cases}$$

که $0 \leq \tau(x) \leq 1$ ، $a(x), b(x), c(x) \in C^r[0, 1]$ ، $\alpha(x), \tau(x), f(x) \in C[0, 1]$ و ${}^c D^{\alpha(x)}$ نشان‌دهنده‌ی مشتق کاپوتو^۲ است که بصورت زیر تعریف می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: تقریب ریتز، مشتق کاپوتو مرتبه متغیر، چندجمله‌ای جنوچی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A08, 65L60

^۱Samko and Ross^۲Caputo

تعریف ۱.۱. مشتق کسری کاپوتو مرتبه‌ی متغیر $n - 1 < \alpha(x) \leq n$ ، برای تابع پیوسته‌ی $u(x)$ بصورت زیر می‌باشد [۶]

$$(۲.۱) \quad {}^c D^{\alpha(x)} u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha(x))} \int^x (x-t)^{n-\alpha(x)-1} \frac{d^n u(t)}{dt^n} dt, & n-1 < \alpha(x) < n, \\ \frac{d^n u(x)}{dx^n}, & \alpha(x) = n, \end{cases}$$

که $\Gamma(\cdot)$ ، نشان‌دهنده‌ی تابع گاما است. با تعریف (۲.۱) می‌توان خواص زیر را برای مشتق کاپوتو در نظر گرفت:

(۱) مشتق کاپوتو عملگری خطی است

$${}^c D^{\alpha(x)} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda {}^c D^{\alpha(x)} f(x) + \mu {}^c D^{\alpha(x)} g(x), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{Z}$$

(۲) همچنین ویژگی‌های زیر نیز در محاسبات عددی کاربرد فراوانی دارند

$$\begin{aligned} {}^c D^{\alpha(x)} C &= 0, \quad C \text{ is a constant,} \\ {}^c D^{\alpha(x)} x^k &= \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha(x))} x^{k-\alpha(x)}, & n \leq k \in \mathbb{N}, \\ 0, & o.w. \end{cases} \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱. چندجمله‌ایهای جنوچی درجه‌ی n که معمولاً با نماد $G_n(x)$ نشان داده می‌شوند [۲] بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_{n-k} x^k,$$

که g_n را اعداد جنوچی گویند. همچنین چندجمله‌ایهای جنوچی و اعداد جنوچی در تعریف توابع مولد نمایی بصورت زیر ظاهر می‌گردند:

$$\begin{aligned} \frac{te^{xt}}{e^t + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!}, & (|t| < \pi), \\ \frac{t}{e^t + 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot \frac{t^n}{n!}, & (|t| < \pi). \end{aligned}$$

۲. شرح روش ریتز

روش تقریب ریتز روشی کارآمد و ساده در حل معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی و اولیه می‌باشد که اولین بار در سال ۱۹۰۸ توسط ریتز ارائه گردید. در این تقریب تابع مجهول $u(x)$ در معادله‌ی (۱.۱) بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(۱.۲) \quad u(x) \cong u_k(x) = \sum_{n=0}^k c_n x(x-1) G_n(x) + w(x).$$

تابع $w(x)$ را تابع برآورنده^۳ گویند و این تابع باید در شرایط مرزی مساله‌ی (۱.۱) صدق کند یعنی:

$$w(0) = u(0), \quad w(1) = u(1).$$

انتخاب تابع برآورنده نقش بسزایی در میزان دقت و حجم محاسبات دارد. در ساده‌ترین حالت می‌توان تابع برآورنده را با استفاده از شرایط مرزی مساله و روش درونیایی محاسبه کرد. با جایگذاری رابطه‌ی (۱.۲) در معادله‌ی (۱.۱) مساله به حالت گسسته‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$(۲.۲) \quad {}^c D^{\alpha(x)} u_k(x) + a(x) u'_k(x) + b(x) u_k(x) + c(x) u_k(\tau(x)) = f(x).$$

³satisfier function

حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه‌ی متغیر با استفاده از تقریب ریتز و چندجمله‌ایهای جنوچی

برای محاسبه‌ی ضرایب مجهول C_k در معادله‌ی (۲.۲) از ریشه‌های چندجمله‌ای جنوچی به عنوان نقاط هم‌محلی استفاده می‌کنیم. دستگاه جبری حاصله را با استفاده از نرم‌افزار Mathematica10 حل می‌کنیم. در ادامه با بیان یک قضیه و لم وجود این تقریب و کران خطای آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. مجموعه‌ای متناهی از چندجمله‌ایهای جنوچی $\{G_i(x)\}_{i=1,\dots,n} \subset L^2[0, 1]$ را در نظر می‌گیریم بطوریکه $Y = \text{Span}\{G_1(x), \dots, G_n(x)\}$. چون Y زیرفضایی با بعد متناهی از $L^2[0, 1]$ است لذا هر عضو دلخواه $u(x) \in L^2[0, 1]$ دارای بهترین تقریب $\tilde{u}(x) \subset Y$ می‌باشد بطوریکه

$$\forall y(x) \in Y, \quad \|u(x) - \tilde{u}(x)\| \leq \|u(x) - y(x)\|.$$

□

اثبات. برای اثبات به [۱] مراجعه شود.

از طرفی چون $\tilde{u}(x) \in Y$ می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب یکنای $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$ وجود دارند بطوریکه

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n c_i G_i(x).$$

لم ۲.۲. فرض کنید که $u: [x_., x_l] \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی پیوسته و $n+1$ مرتبه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه کران خطا برای بهترین تقریب به صورت زیر خواهد بود

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \frac{M(x_l - x_.)^{\frac{(n+1)}{2}}}{(n+1)! \sqrt{2n+3}},$$

که $M = \max_{x \in [x_., x_l]} |u^{(n+1)}(x)|$ است.

□

اثبات. برای اثبات به [۲] مراجعه شود.

۳. نتایج عددی

تقریب ریتز را برای حل یک مثال به کار می‌گیریم. خطای مطلق به صورت $E_k = |u(x) - u_k(x)|$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۱.۳. معادله دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر زیر را در نظر بگیرید

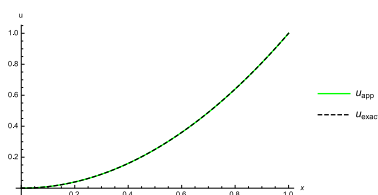
$$\begin{cases} D^{\alpha(x)} u(x) + \cos(x) u'(x) + 4u(x) + 5u(x^2) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, & u(1) = 1, \end{cases}$$

که $\alpha(x) = \frac{5+\sin x}{4}$ و $f(x) = \frac{2x^{2-\alpha(x)}}{\Gamma(3-\alpha(x))} + 5x^4 + 4x^2 + 2x \cos(x)$. جواب دقیق مساله $u(x) = x^2$ می‌باشد و $1 < \alpha(x) < 2$ قرار دارد. با توجه به شرایط مرزی مساله تابع برآورنده را می‌توان بصورت $w(x) = x$ در نظر گرفت. مقادیر C_k ها، به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} C_1 &= 1, & C_2 &= -2/20168 \times 10^{-15}, & C_3 &= 4/08304 \times 10^{-14}, \\ C_4 &= -1/84621 \times 10^{-15}, & C_5 &= 2/09908 \times 10^{-14}. \end{aligned}$$

در جدول ۱ خطای مطلق تقریب ریتز با روش‌های بیان شده در [۳، ۷] مقایسه شده است و همان‌طور که از نتایج مشخص می‌باشد روش تقریب ریتز با تعداد نقاط $k = 5$ جوابی با دقت بالا به دست آورده است، هم‌چنین در نمودار ۱ جواب دقیق و تقریبی رسم شده است.

س. شیخی، م. متینفر، و م. عرب فیروزجایی



شکل ۱: نمودار جواب دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۳.

جدول ۱: مقایسه خطای مطلق مثال ۱.۳

x	$ E_5 $ روش ریتز	$[7]E_7$	$[3]E_3$
۰/۱	$۱/۶۶۵۳۳ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۲/۷۹۶۵۵ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۱/۱۷ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۳	$۶/۶۶۱۳۴ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۳/۵۰۴۱۴ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۲/۱۷ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۵	$۱/۱۶۵۷۳ \times ۱۰^{-۱۵}$	$۴/۳۷۷۰۵ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۲/۴۵ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۷	$۷/۴۹۴۰۱ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۵/۳۷۹۰۳ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۲/۰۷ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۹	$۱/۶۶۵۳۳ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۶/۵۱۷۰۱ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۱/۱۱ \times ۱۰^{-۸}$

مراجع

1. K. Atkinson, W. Han, D.E. Stewart, Numerical solution of ordinary differential equations. *John Wiley and Sons*. 2011.
2. A. Isah, C. Phang, New operational matrix of derivative for solving non-linear fractional differential equations via Genocchi polynomials. *Journal of King Saud University-Science*. 31 (2019), 1-7.
3. Y. T. Jia, M. Q. Xu, Y. Z. Lin, A numerical solution for variable order fractional functional differential equation. *Appl. Math. Lett.* 64 (2017), 125-130.
4. H. Pedro, M. Kobayashi, J. Pereira and C. Coimbra, Variable order modeling of diffusive-convective effects on the oscillatory flow past a sphere. *J. Vib. Control*. 14 (2008), 1659-1672.
5. S.G. Samko and B. Ross, Integration and differentiation to a variable fractional order. *Integral Transforms. Spec. Funct.* 1 (1993), 277-300.
6. S. Sheikhi, M. Matinfar, M. A. Firoozjaee, Numerical Solution of Variable-Order Differential Equations via the Ritz-Approximation Method by Shifted Legendre Polynomials. *Int. J. Appl. Comput. Math.* 7(2021), 1-11.
7. J. Yang, H. Yao, Wu. Boying, An efficient numerical method for variable order fractional functional differential equation. *Appl. Math. Lett.* 76 (2018), 221-226.

دانشکده ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

s.sheikhi@stu.umz.ac.ir :address Email

دانشکده ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

m.matinfar@umz.ac.ir :address Email

دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران.

m_firoozjaee@mazust.ac.ir :address Email

طراحی یک کنترل کننده ردیاب مقاوم برای سیستم لورنز

محمد شیرازیان و محمد رضا دانشفر

چکیده. در این مقاله، یک روش کنترل ردیابی جدید برای سیستم لورنز ارائه شده است. طبق قانون کنترلی پیشنهادی، رفتارهای آشوبناک سیستم لورنز کنترل شده و حالت‌های سیستم می‌توانند مقادیر از پیش تعیین شده را ردیابی کنند. برای سیستم لورنز که در معرض اختلال قرار دارد، یک کنترل مسیر قوی مبتنی بر تابع لیاپانف طراحی شده است. اثربخشی کنترل پیشنهادی به خوبی توسط مطالعات شبیه سازی شده نشان داده شده است.

۱. پیش‌گفتار

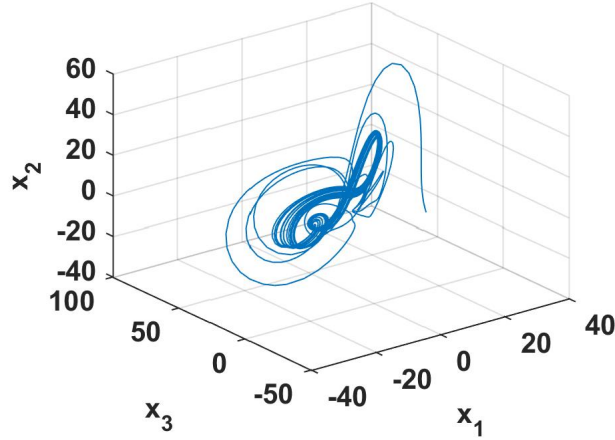
سیستم لورنز را می‌توان به شرح زیر توصیف کرد:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = r x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -b x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

که در آن، $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ به ترتیب نشان دهنده حرکت مایع همرفتی (شدت حرکت سیال) و تغییرات دما در راستای افقی و عمودی می‌باشند. پارامترهای σ ، r و b به ترتیب عدد پراوتل، شماره ریلی (با اختلاف دمای Δt متناسب است) و ضریب هندسی (خواص ماده) را نشان می‌دهند که همگی مثبت هستند [۱]. برای اختصار، نماد زمان t برای اختصار حذف می‌شود. در این مقاله، پارامترها به صورت $\sigma = 10$ ، $b = \frac{8}{3}$ و $r = 28$ انتخاب شده اند که اغلب برای آنالیز سیستم لورنز استفاده می‌شوند. همچنین شرایط اولیه به صورت $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (10, 5, -15)$ تنظیم می‌شوند. با این خصوصیات، پاسخ حالت سیستم از الگویی آشوبناک به نام اثر پروانه‌ای پیروی می‌کند [۳]. خاطرنشان می‌شود که آشوب معمولاً به واسطه حساسیت به شرایط اولیه غیرقابل پیش‌بینی است، که ممکن است خطراتی در عملکرد سیستم به همراه داشته باشد؛ در نتیجه، جالب است که در مورد چگونگی کاهش و سرکوب رفتار آشوبناک مطالعه شود. یکی از این روش‌ها، افزودن یک کنترل کننده ردیاب به سیستم است (ر. ک. [۲] و [۴]). در حضور عدم قطعیت، پاسخ حالت سیستم در شکل ۱ به تصویر کشیده شده است که مجدداً آشوبناک بودن سیستم را

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل، سیستم لورنز، کنترل ردیاب، تابع لیاپانف، رفتار آشوبناک.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34D20, 34H15.

نشان می دهد. در این مقاله، با استفاده از تابع لیپانوف یک کنترل کننده ردیاب جدید برای سیستم لورنز در حضور عدم قطعیت، با بهره های قابل تغییر ارائه می دهیم. این کار، رفتار آشوبناک سیستم را به یک حالت از پیش تنظیم شده همگرا و پایدار می کند.



شکل ۱. دینامیک سیستم لورنز دارای اختلال.

۲. استفاده از تابع لیپانوف برای طراحی کنترل ردیاب مقاوم

در یک محیط عملی نمی توان از عدم قطعیت ها جلوگیری کرد. در نتیجه، مایلیم که مقاوم بودن سیستم در هنگام وجود عدم قطعیت برای کنترل ردیاب در نظر گرفته شود. فرض کنید اختلالاتی در پارامترهای سیستم وجود داشته باشد، سیستم لورنز غیرقطعی می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$(۱.۲) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -(\sigma + \Delta\sigma)x_1 + (\sigma + \Delta\sigma)x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = (r + \Delta r)x_1 - x_2 - x_1x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - (b + \Delta b)x_3 + u_3 \end{cases}$$

برای این سیستم، کنترل کننده پیشنهادی ما به شرح زیر است:

$$(۲.۲) \quad \begin{cases} u_1 = k_1(x_2 - x_{2r}) + \sigma(x_{1r} - x_{2r}) \\ u_2 = k_2(x_2 - x_{2r}) - (rx_{1r} - x_{2r} - x_{1r}x_{3r}) \\ u_3 = k_3(x_2 - x_{2r}) + bx_{3r} - x_{1r}x_{2r} \end{cases}$$

با جایگذاری (۲.۲) در (۱.۲)، دینامیک خطاهای ردیابی حلقه بسته می تواند به شرح زیر نوشته شوند:

$$(۳.۲) \quad \begin{cases} \dot{e}_{1r} = -\sigma e_{1r} + (k_1 + \sigma)e_{2r} + d_1 \\ \dot{e}_{2r} = (r - x_{3r})e_{1r} + (k_2 - 1)e_{2r} - x_{1r}e_{3r} + d_2 - e_{1r}e_{3r} \\ \dot{e}_{3r} = x_{2r}e_{1r} + (k_3 + x_{1r})e_{2r} - be_{3r} + d_3 + e_{1r}e_{2r} \end{cases}$$

که در آن $e_i = x_i - x_{i,r}$ ، $i = 1, 2, 3$ ، $d_i = \Delta\sigma(x_2 - x_1)$ ، $d_2 = \Delta rx_1$ ، $d_3 = -\Delta bx_3$ و اکنون تابع درجه دوم زیر را در نظر می گیریم:

$$(۴.۲) \quad V = \frac{1}{2}e_{1r}^2 + \frac{1}{2}e_{2r}^2 + \frac{1}{2}e_{3r}^2$$

در اینصورت با مشتق گیری از V نسبت به زمان و استفاده از (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e_{1r}\dot{e}_{1r} + e_{2r}\dot{e}_{2r} + e_{3r}\dot{e}_{3r} \\ &= e_{1r}(-\sigma e_{1r} + (k_1 + \sigma)e_{2r} + d_1) \\ &\quad + e_{2r}((r - x_{3r})e_{1r} + (k_2 - 1)e_{2r} - e_{1r}e_{3r} - x_{1r}e_{3r} + d_2) \\ &\quad + e_{3r}(x_{2r}e_{1r} + (k_3 + x_{1r})e_{2r} - be_{3r} + d_3 + e_{1r}e_{2r})\end{aligned}$$

با ساده سازی عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= [-\sigma e_{1r}^2 + d_1 e_{1r}] + [(k_2 - 1)e_{2r}^2 + d_2 e_{2r}] + [-be_{3r}^2 + d_3 e_{3r}] \\ &\quad + (k_1 + \sigma + r - x_{3r})e_{1r}e_{2r} + x_{2r}e_{1r}e_{3r} + k_3 e_{1r}e_{3r} \\ &\leq [-\sigma e_{1r}^2 + d_1 e_{1r}] + [(k_2 - 1)e_{2r}^2 + d_2 e_{2r}] + [-be_{3r}^2 + d_3 e_{3r}] \\ &\quad + \alpha_1^2 e_{1r}^2 + \alpha_2^2 e_{2r}^2 + \alpha_3^2 e_{1r}^2 + \alpha_4^2 e_{2r}^2 + \alpha_5^2 e_{2r}^2 + \alpha_6^2 e_{3r}^2 \\ &\leq (-\sigma + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) e_{1r}^2 + d_1 e_{1r} + (k_2 - 1 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) e_{2r}^2 \\ &\quad + d_2 e_{2r} + (-b + \alpha_5^2 + \alpha_6^2) e_{3r}^2 + d_3 e_{3r} \\ (5.2) \quad &\leq \sum_{i=1}^3 \left\{ -p_i \left(e_{ir} - \frac{d_i}{2p_i} \right)^2 - p_i \frac{d_i^2}{4p_i^3} \right\}\end{aligned}$$

که در آن،

$$p_1 = -(-\sigma + \alpha_1^2 + \alpha_2^2), p_2 = -(k_2 - 1 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2), p_3 = -(-b + \alpha_5^2 + \alpha_6^2),$$

همچنین

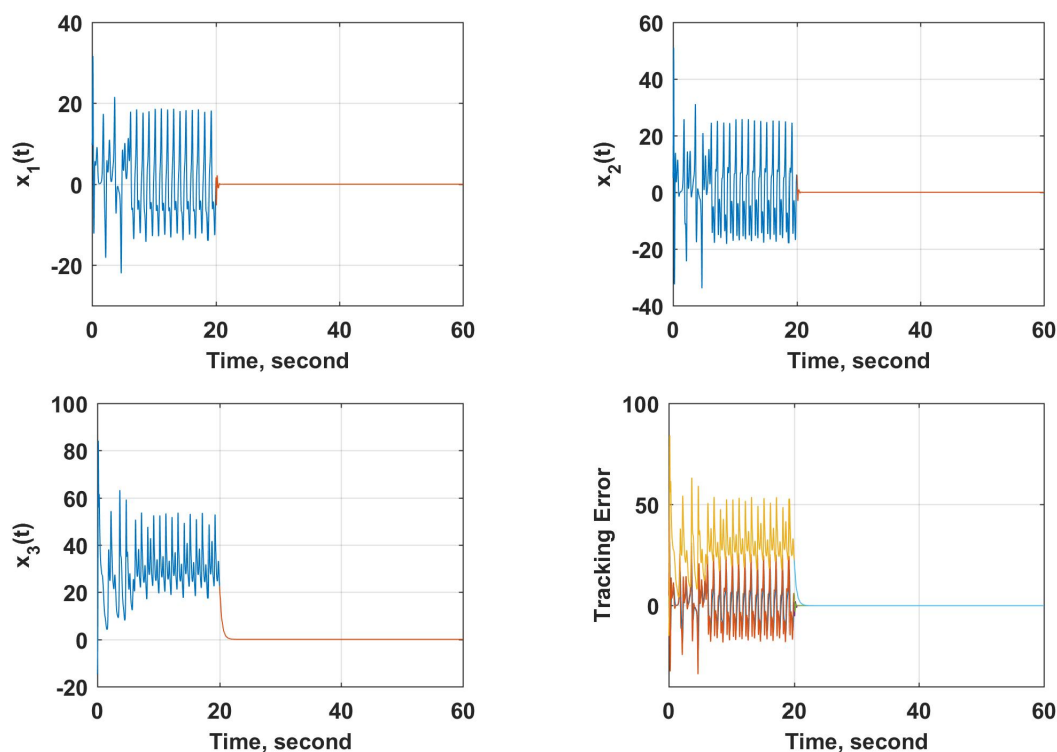
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_4 = \frac{k_1 + \sigma + r - x_{3r}}{2}, \alpha_5 = \frac{x_{2r}}{2}, \alpha_6 = \frac{k_3}{2}$$

قضیه ۱.۲. کنترل کننده (۲.۲) برای سیستم دینامیکی (۱.۲)، یک کنترل کننده ردیاب با خطای مجانبی پایدار به صفر می باشد، هرگاه $i = 1, 2, 3, p_i < 0$ یا به طور معادل:

$$(6.2) \quad \begin{cases} -\sigma - r + x_{3r} - 2\sqrt{\sigma - 1} < k_1 < -\sigma - r + x_{3r} + 2\sqrt{\sigma - 1} \\ k_2 < -1 \\ -\sqrt{4b - x_{3r}^2} < k_3 < +\sqrt{4b - x_{3r}^2} \end{cases}$$

اثبات. اگر برای هر $i = 1, 2, 3$ داشته باشیم $p_i < 0$ ، آنگاه از نامعادله (۵.۲)، به وضوح می توان دید $\dot{V} < 0$ و لذا (۴.۲) $\square$ یک تابع لیاپانف برای سیستم (۱.۲) حول نقطه $(0, 0, 0) = (e_1, e_2, e_3)$ می باشد.

با استفاده از مجموعه بهره های بهینه بدست آمده $(k_1, k_2, k_3) = (-\sigma - r + x_{3r}, -1, 0)$ کنترل کننده های ردیابی رابطه (۲.۲) به ترتیب در ثانیه ۲۰-ام اعمال می شوند و دینامیک متناظر با آن ها برای سیستم لورنز در شکل ۲ نشان داده شده است. خطای ردیابی کل در هر بار توسط $|e_{1r}| + |e_{2r}| + |e_{3r}|$ توصیف شده است، که در آن $|\cdot|$ بیانگر قدر مطلق است. خطای ردیابی کل تحت کنترل ردیاب با سه مجموعه بهره های مختلف نیز توسط شکل ۲ نشان داده شده است. در شبیه سازی صورت گرفته فرض کرده ایم که $(x_{1r}, x_{2r}, x_{3r}) = (0, 0, 0)$ مراجع ردیابی و $d_1 = \sin(2\pi t)(x_2 - x_1)$ ، $d_2 = 14 \sin(4\pi t)x_1$ و $d_3 = \sin(6\pi t)x_3$ اختلال های سیستم لورنز باشند.



شکل ۲. پاسخ‌های حالت با بهره‌های مقاوم به همراه خطای ردیابی.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مراتب سپاس‌گزاری خود را از دانشگاه نیشابور بابت حمایت از این پژوهش اعلام می‌دارند.

مراجع

1. Chen H , Liao B , Hou Y . Hardware implementation of Lorenz circuit systems for secure chaotic communication applications. *Sensors*, 13(2013),2494–505.
2. Fu, Shihui, et al. Control chaos to different stable states for a piecewise linear circuit system by a simple linear control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 130 (2020) 109431.
3. Gao, R, A novel track control for Lorenz system with single state feedback. *Chaos, Solitons & Fractals*, 122 (2019), 236-244.
4. Peng C , Chen C . Robust chaotic control of Lorenz system by back-stepping design. *Chaos, Solitons & Fractals* ,37(2008),598–608.

دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران.

shirazian@neyshabur.ac.ir :address Email

دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران.

mohammadrezadaneshfar@gmail.com :address Email



۱۵ امین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی

۱۶ تا ۱۸ اسفند ۱۳۹۹، دانشگاه گیلان

تشخیص پایداری عفونت در بدن میزبان ویروس HIV

زهرا قلی‌پور، زهره دادی، و محمد علی نژادمفرد

چکیده. در این مقاله یک مدل بیماری HIV معرفی می‌شود و با استفاده از روش‌های تحلیلی وضعیت عاری از بیماری و عفونت در بدن میزبان تعیین می‌گردد و با کمک شبیه‌سازی‌های عددی رفتار کیفی مدل در نزدیکی این نقاط بررسی می‌شود. مشاهده می‌شود که در صورت وجود ویروس در بدن میزبان و عدم درمان مناسب، وضعیت عاری از بیماری یک وضعیت ناپایدار و وضعیت عفونت، وضعیتی پایدار می‌شود.

۱. مقدمه

ویروس نقص ایمنی انسان (HIV) عامل بیماری ایدز از خانواده رترو ویروس‌ها می‌باشد که این ویروس‌ها می‌توانند عفونت‌های نهفته طولانی مدت و همچنین اثر کوتاه‌مدت در سلول را داشته باشد که تاکنون دو نوع ویروس HIV، شامل HIV-1 و HIV-2 شناخته شده است. ویروس HIV-1 نوعی از ویروسی بود که زودتر شناخته شد و از قدرت تهاجمی و واگیر بودن بیشتری برخوردار می‌باشد ولی از آنجا که HIV-2 توانایی سرایت کمتری دارد ابتلای آن محدود به غرب آفریقا (از جنوب سنگال تا غرب ساحل عاج) است [۱]. پرلسون و کریشنر جزء اولین محققین در حوزه مطالعه دینامیک HIV از منظر شبیه‌سازی عددی می‌باشند و همچنین ونگ و الرمیر، دینامیک‌های عفونت HIV در صورت حضور سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۲]. پس از آن این مدل‌ها مورد توجه قرار گرفت به طوری که ونگ و سانگ در سال ۲۰۰۷ در این مدل آلودگی را با نرخ غیر خطی در نظر گرفته و دینامیک سراسری آن را بررسی کرده‌اند [۳]. در سال ۱۹۸۱، پرلسون یک مدل عفونت HIV به سیستم ایمنی دفاعی بدن را توسعه داد [۴]. که این مدل شامل سه متغیر

(۱) اندازه جمعیت سلول‌های غیرآلوده

(۲) سلول‌های آلوده

(۳) ذرات ویروس آزاد

واژه‌های کلیدی: مدل غیرخطی، ویروس، پایداری، ناپایداری.

می‌باشد. مدل حاضر بیانگر عفونت HIV در بدن میزبان است که به صورت یک معادله دیفرانسیل غیر خطی ارائه شده است:

$$\begin{aligned}\dot{T} &= S - \alpha T + rT \left(1 - \frac{T + I}{T_{max}}\right) - kT^q V \\ \dot{I} &= kT^q V - \beta I \\ \dot{V} &= N\beta I - dV\end{aligned}$$

که در این جا T و I و V به ترتیب نشان‌دهنده سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ سالم و سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ آلوده و ویروس‌های آزاد HIV می‌باشند و همچنین پارامترهای $\alpha, \beta, d, T_{max}$ نیز به ترتیب نشان‌دهنده نرخ مرگ طبیعی سلول‌های T سالم، نرخ مرگ سلول‌های T آلوده به ویروس HIV، نرخ مرگ ویروس آزاد HIV و حداکثر غلظت سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ است و S منبع تولید سلول‌های T سالم با مارکر $CD4^+$ می‌باشد. عبارت $kT^q V$ ، بروز عفونت HIV از سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ سالم را توصیف می‌کند به طوری که $k > 0$ نشان‌دهنده میزان عفونت و $q > 0$ یک ثابت مثبت می‌باشد و همچنین فرض می‌شود که هر سلول T با مارکر $CD4^+$ ، در طول عمر خود N ذرات ویروس را باز تولید می‌کند. مقادیر پارامترهای این مدل براساس داده‌های مقاله [۴] به صورت زیر انتخاب می‌شوند و به کمک روش‌های تحلیلی نقاط تعادل زیر را به دست می‌آوریم:

- نقطه تعادل اول (عاری از بیماری): $(T, I, V) \rightarrow (1490.03, 0, 0)$
- نقطه تعادل دوم (عفونت): $(T, I, V) \rightarrow (888889, 521.503, 651.941)$
- نقطه تعادل سوم: $(T, I, V) \rightarrow (-0.335563, 0, 0)$

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
α	۰/۰۲	β	۰/۳
d	۲/۴	r	۳
N	۱۰	T_{max}	۱۵۰۰
S	۰/۱	K	۰/۰۰۲۷
q	۱		

بایستی توجه نمود که نقطه تعادل سوم با توجه به لزوم نامنفی بودن متغیرها، برای مدل مورد نظر قابل قبول نیست. حال قبل از اجرای شبیه‌سازی عددی، توجه خواننده را به نکات زیر جلب می‌کنیم.

جریان معمول عفونت ویروس HIV در طول یک دهه توسعه می‌یابد که این مراحل شامل عفونت اولیه، آلوده کردن اندام‌های لنفوئیدی، افزایش بیان ویروس HIV، نهفتگی بالینی، بیماری بالینی و مرگ است. ویروس ایدز در واقع سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ بدن را آلوده می‌کند و باعث می‌شود که در همان مراحل اولیه سیستم ایمنی بدن را تضعیف و یا حتی از بین ببرد و اتفاقی که در مرحله بعد خواهد افتاد این است که ویروس به حالت نهفته درآمده یعنی به ازای هر ۷۰ عدد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ یک عدد از آن سلول‌ها آلوده هستند که قابل رویت نیستند ولی از آنجایی که سلول‌های سیستم بدن ما در حال چرخش هستند و ممکن است در جاهای مختلفی از بدن از جمله مغز، قلب و ... ظهور پیدا کنند در این حالت است که سیستم دفاعی بدن انسان تشخیص نمی‌دهد که یکی از سلول‌های بدن ما آلوده می‌باشد.

با به کارگیری نظریه پایداری مشاهده می‌شود:

قضیه ۱.۱. نقطه تعادل عاری از بیماری ناپایدار و نقطه تعادل عفونت پایدار است.

ماتریس ژاکوبین مدل به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 0.027 \cdot 0 - T/500 + 3(1 - (T+I)/1500) - 0.2 \cdot 0 - V & -(T/500) & 0.027T \cdot 0 - \\ 0.027 \cdot 0 \cdot V & 3 \cdot 0 - & 0.027 \cdot 0 \cdot T \\ 0 & 3 & 4.2 - \end{pmatrix}$$

که به ترتیب مقادیر ویژه برای نقطه تعادل اول و دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

● نقطه تعادل عاری از بیماری:

$$-4/97929, -2/98012, 2/27929$$

● نقطه تعادل عاری از بیماری:

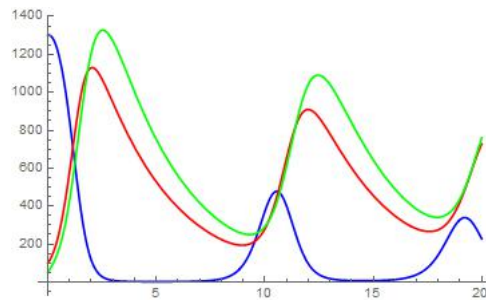
$$-2/84825, -0/0153283 + 0/841678i, -0/0153283 - 0/841678i$$

بنابراین قضیه به وضوح برقرار است. در ادامه برای نمودارهای رسم شده، دو مطلب واضح را می‌توان بیان کرد: یک سری از نمودارها نشان‌دهنده این هستند که سیستم ایمنی بدن ما آلوده شده‌اند و سپس تضعیف و بعد از آن شروع به بازسازی می‌کنند و در نهایت به حالت اولیه برمی‌گردند و یک سری دیگر نشان‌دهنده این هستند که با تکثیر خود ویروس به همان اندازه که تعداد سلول‌های آلوده بدن زیاد است به همان اندازه هم سیستم ایمنی بدن انسان در حال بازسازی خود می‌باشد.

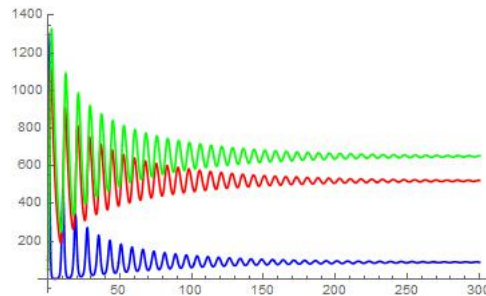
در نمودارهای ۱ و ۲ به چهار تا مرحله می‌توان اشاره کرد. مرحله اول، مرحله‌ای است که علائم بالینی ظهور پیدا می‌کند. مثال بارز می‌توان به علائم سرماخوردگی اشاره کرد که با ظهور آن سیستم ایمنی بدن به شدت پایین می‌آید یعنی از تعداد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ که معمولاً بین ۸۰۰ تا ۱۲۰۰ میلی‌متر مکعب است حتی پایین‌تر آمده است. آنچه که در نمودار ۱ مشاهده می‌شود این است که تعداد سلول‌های سیستم ایمنی بدن در مرحله‌ای ثابت است و در واقع این بدان معنا است که سیستم ایمنی بدن خود را بازسازی می‌کند و به همین دلیل برای رسیدن به سلول‌های سالمی که قبلاً دارا بوده مدت زمان کوتاهی لازم است. مرحله دوم، مرحله‌ای می‌باشد که ویروس نهفته است و این بدان معنی است که تعداد سلول‌های سالم به همان نسبت سلول‌های آلوده پایین می‌آید. در این مرحله پس از افزایش نسبی سلول‌های سالم ایمنی به ۴۸۰ در صورت عدم حفظ ایستایی، مجدداً وارد فاز مشابه مرحله ۱ می‌شود این بدان معناست که در این مرحله به جای اینکه بدن ۴۸۰ سلول سالم داشته باشد تعداد آن به ۳۵۰ کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که به جلو پیش برویم در مرحله آخر، تعداد سلول‌های ایمنی بدن ما به شدت پایین می‌آید و همان‌طور که در نمودار ۲ مشاهده می‌کنید تعداد سلول‌های ایمنی بدن در مرحله اول ۱۳۰۰ عدد بوده در حالی که در مرحله آخر این تعداد از سلول‌ها به عدد ۲۸۹ می‌رسد و دیگر بدن فرصت بازسازی خود را ندارد و این یعنی شروع بیماری ایدز. با توجه به نمودار ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که با شرط اولیه در نزدیکی نقطه تعادل عاری از بیماری به مرور از آن وضعیت دور شده‌ایم و این به معنای ناپایداری این نقطه است. در نمودار ۳ برای یک بیمار با وضعیت (۵۲۲, ۵۹, ۶۵۲) نقطه تعادل دوم مشاهده می‌شود که سیستم ایمنی بدن و میزان آلودگی در فرد هیچ تغییری نکرده است و به نظر می‌رسد شروع درمان در این فرد به وی کمک می‌نماید تا سیستم ایمنی را تقویت نموده و میزان آلودگی در بدن را کاهش بدهد. در نمودار ۴ در یک بازه یک‌ساله مشاهده می‌شود که نوسان مکرر بین تعداد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ ، سلول‌های آلوده به ویروس و ذرات ویروسی وجود دارد و پس از تقریباً ۶ ماه بیمار به وضعیت (۵۲۲, ۵۹, ۶۵۴) یعنی تقریباً همان نقطه تعادل عفونت می‌رسد و این به معنای پایداری نقطه تعادل دوم است.

مراجع

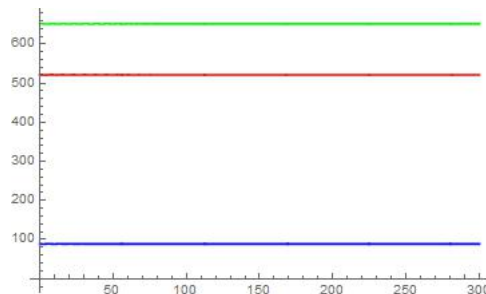
۱. ف. بروکس و همکاران ترجمه قایمی و همکاران، میکروپزشکی، انتشارات ابن سینا، ۱۳۹۲.
2. L. Wang, S. Erlenmeyer, HIV infection and $CD4 + T$ cell dynamics , Discrete & continuous dynamical system, 6(2006) 27-39.
3. X. Wang, X. Song, Global stability and periodic solution of a model for HIV infection of $CD4 + T$ -cells, *Applied mathematics and computation*, 198 (2007) 1331-1340



شکل ۱: در این نمودار ۲۰ روزه رنگ آبی معرف تعداد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ ، رنگ قرمز معرف تعداد سلول‌های آلوده به ویروس و رنگ سبز تعداد ذرات ویروس در بدن میزبان است. شرط اولیه $(T, I, V) = (1300, 100, 50)$ می‌باشد



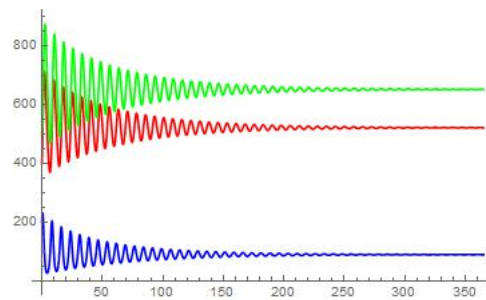
شکل ۲: در این نمودار ۳۶۰ روزه رنگ آبی معرف تعداد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ ، رنگ قرمز معرف تعداد سلول‌های آلوده به ویروس و رنگ سبز تعداد ذرات ویروس در بدن میزبان است. شرط اولیه $(T, I, V) = (1300, 100, 50)$ می‌باشد



شکل ۳: در این نمودار ۳۶۰ روزه رنگ آبی معرف تعداد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ ، رنگ قرمز معرف تعداد سلول‌های آلوده به ویروس و رنگ سبز تعداد ذرات ویروس در بدن میزبان است. شرط اولیه $(T, I, V) = (89, 522, 652)$ می‌باشد

4. M. Khalid, M. Sultana F. Zaidi, F. S. Khalid, A Numerical of a model for HIV infection $CD4^+$ T-Cell, *international of innovation and scientific research*, 16(2015)79-85

تشخیص پایداری عفونت در بدن میزبان ویروس HIV



شکل ۴: در این نمودار ۳۶۰ روزه رنگ آبی معرف تعداد سلول‌های T با مارکر $CD4^+$ ، رنگ قرمز معرف تعداد سلول‌های آلوده به ویروس و رنگ سبز تعداد ذرات ویروس در بدن میزبان است. شرط اولیه $(T, I, V) = (200, 400, 500)$ می‌باشد

دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران.

zahragholipour5364@gmail.com :address Email

دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران.

z.dadi@ub.ac.ir :address Email

دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران.

m.alinejad@ub.ac.ir :address Email

برآورد جواب مساله مقدار مرزی غیرخطی ناشی از بینایی سنجی

س. مجیدی فرو ر. کتانی

چکیده. در این مقاله یک مدل ریاضی از شکل قرنیه چشم که بصورت مساله مقدار مرزی غیرخطی است، معرفی می‌شود. سپس از روش هم‌مکانی تکه‌ای خطی برای حل عددی معادله انتگرال غیرخطی حاصل از مساله مقدار مرزی استفاده خواهیم نمود و در نهایت مقاله را با تایید عددی نتایج تحلیلی پایان می‌دهیم.

۱. پیش‌گفتار

حدود دو سوم قدرت انکساری را قرنیه چشم فراهم می‌نماید و بسیاری از اختلالات بینایی از برخی خطاهای هندسه قرنیه ناشی می‌شود. موفقیت جراحی انکساری و لنزهای تماسی بستگی زیادی به دانش توپوگرافی قرنیه و مدل‌های توصیف کننده آن دارد. بنابراین، برای اهداف چشم پزشکی، توصیف دقیق شکل قرنیه بسیار مهم است. مدل‌های متنوعی برای شکل قرنیه توسط پژوهش‌گران پیشنهاد شده است. دسته‌ای از این مدل‌ها براساس تئوری پوسته ساخته شده‌اند. این مدل‌ها معمولاً پیچیده هستند اما جزییات فیزیکی زیادی را توصیف می‌کنند [۲]. برخی از مدل‌های کامپیوتری قرنیه بر اساس روش‌های اجزا محدود ارایه شده‌اند [۱]. در این مقاله مدلی که ابتدا در [۳] ارایه و سپس در [۵] تعمیم یافت را در نظر می‌گیریم. با تبدیل مساله مقدار مرزی بدست آمده در این مدل به یک معادله انتگرال، درصدد حل آن با روش هم‌مکانی تکه‌ای خطی خواهیم بود. در نهایت کارایی روش را با مقایسه نتایج عددی بدست آمده با نتایج ارایه شده در [۴] خواهیم آزمود.

۲. مدل ریاضی شکل قرنیه

در شروع فرض می‌کنیم هندسه قرنیه متقارن با شعاع R است. این فرضیه‌ای است که به طور گسترده استفاده می‌شود و تقریب خوبی برای شکل قرنیه فراهم می‌آورد. فرض می‌کنیم قرنیه یک غشاء است به این معنا که خمش نداشته و دارای تنش ثابتی است. در نهایت، تنوع در توزیع ضخامت را نادیده می‌گیریم و بنابراین کافی است فقط یک سطح از قرنیه مدل‌سازی شود.

واژه‌های کلیدی: مساله مقدار مرزی غیرخطی، مدل‌بندی قرنیه چشم، معادله انتگرال غیرخطی، روش هم‌مکانی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65R20, 45G15

با توجه به تقارن شعاع، تنها قسمت $h = h(x)[m]$ از قرنیه را در نظر می‌گیریم و برآیند نیروهای وارد بر آن را محاسبه می‌کنیم. همچنین فشار ثابت $P[\frac{N}{m}]$ که در جهت نرمال به برش مقطعی از قرنیه وارد می‌شود را حساب می‌کنیم. تنش $T[N]$ به صورت مماس و نیروهای ارتجاعی متناسب با h عمل می‌کنند (شکل ۱)، نیروهای ارتجاعی به دلیل ویژگی الاستیکی قرنیه برای مدل در نظر گرفته شده‌اند. فرض می‌کنیم $h \in C^2$ ، فاصله x از مرکز تقارن ثابت است و اختلال کوچک Δx را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم که فشار در طول این بخش ثابت است و نیروها در جهت y برآیند می‌شوند (شکل ۱)، در این صورت داریم

$$(۱.۲) \quad T \sin(\phi) + T \sin(\psi) + P \cos(\phi) \Delta x - kh \Delta x = 0,$$

که در آن k ثابت متناسب با نیروی ارتجاعی است. در ادامه به شکل و روابط مثلثاتی مربوط به $\sin(x)$, $\cos(x)$ داریم

$$\sin(\phi) = \frac{-h'(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}, \quad \sin(\psi) = \frac{h'(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (h'(x + \Delta x))^2}}, \quad P \cos(\phi) = \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}},$$

با جایگذاری این روابط در رابطه (۱.۲) و سپس تقسیم دو طرف رابطه بر Δx و حدگیری با استفاده از قاعده هوییتال نتیجه می‌شود

$$(۲.۲) \quad \frac{-h''(x)}{(1 + (h'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} + kh(x) = \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$$

در ادامه چون انحراف سطح قرنیه اندک است، برخی ساده‌سازی‌ها را انجام می‌دهیم به این معنا که می‌توان نوشت

$$(۳.۲) \quad \sin(\phi) \approx \tan(\phi) = -h'(x), \quad \sin(\psi) \approx \tan(\psi) = h'(x + \Delta x).$$

بنابراین مشابه قبل معادله ساده شده زیر برای توصیف شکل قرنیه حاصل می‌شود

$$(۴.۲) \quad -Th''(x) + kh(x) = \frac{P}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$$

منحنی $h(x)$ یک نصف النهار از سطح دورانی است که هندسه قرنیه را توصیف می‌کند. به وضوح می‌خواهیم $h(R) = 0$ باشد چون شعاع قرنیه است و می‌خواهیم در حاشیه ارتفاع نداشته باشیم. شرط مرزی دومی که تحمیل می‌کنیم، $h'(0) = 0$ است، چون می‌خواهیم یک ارتباط هموار بین نصف النهارها در مبدا و سطح محور تقارن داشته باشیم.

سرانجام با انتخاب متغیرهای جدید $x^* = \frac{x}{R}$, $h^* = \frac{h}{R}$ ، معادله (۴.۲) را به یک معادله بدون بعد تبدیل می‌کنیم. به این ترتیب معادله غیرخطی

$$(۵.۲) \quad -h''(x) + ah(x) = \frac{b}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}, \quad h(1) = 0, \quad h'(0) = 0,$$

برای شکل قرنیه حاصل می‌شود که در آن $a := \frac{KR^2}{T}$, $b := \frac{PR}{T}$ و همانطور که مشخص است a, b ثابت‌های مثبت هستند.

۳. روش هم مکانی تکه‌ای خطی

در ابتدا مساله مقدار مرزی (۵.۲) که حاصل از مدل بندی قرنیه می‌باشد را به معادله انتگرال تبدیل می‌کنیم. برای این منظور تعریف می‌کنیم $u(x) := h''(x)$. انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه و استفاده از شرایط مرزی $h'(0) = 0$ ، نتیجه می‌دهد $h'(x) = \int_0^x u(t) dt$ با انتگرال‌گیری مجدد داریم

$$h(x) - h(0) = \int_0^x h'(t) dt = \int_0^x \int_0^t u(x_1) dx_1 dt = \int_0^x (x-t)u(t) dt,$$

شکل ۱: سطح مقطع قرنيه

شکل ۲: نتایج عددي

در نظر بگیرید $\alpha := h(0)$ ، در این صورت از شرط مرزی $h(1) = 0$ و رابطه قبل داریم

$$\alpha = - \int_0^1 (1-t)u(t)dt.$$

با جایگذاری روابط بالا، مساله مقدار مرزی (۵.۲) به معادله انتگرال

$$(۱.۳) \quad -u(x) + a \left(- \int_0^1 (1-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \right) = \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\int_0^x u(t)dt \right)^2}}$$

تبدیل می‌شود که می‌توان آن را به صورت

$$(۲.۳) \quad -u(x) + a \int_x^1 (t-1)u(t)dt + a \int_0^x (x-1)u(t)dt = \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\int_0^x u(t)dt \right)^2}},$$

نوشت.

۴. روش عددي

در این بخش از روش هم مکانی تکه‌ای خطی برای حل معادله انتگرال (۲.۳) استفاده خواهیم کرد. برای این منظور شبکه یکنواخت از نقاط را بر بازه $[0, 1]$ به صورت $x_j = jh$ ، $j = 0, 1, \dots, n$ با طول گام $h = \frac{1}{n}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید X_n زیر فضایی از مجموعه همه توابع تکه‌ای خطی روی $[0, 1]$ در نقاط گره‌ای $\{x_0, \dots, x_n\}$ باشد به این ترتیب عملگر تصویر درونیاب $P_n : X = C(D) \rightarrow X_n$ به صورت $P_n u(x) = \sum_{j=0}^n u(x_j)l_j(x)$ ، تعریف می‌شود که در آن توابع کلاهی $l_j(t)$

هستند.

فرض کنید $u_i \approx u(x_i)$ ، در این صورت با در نظر گرفتن شرط هم‌مکانی در نقاط شبکه، برای معادله (۲.۳) می‌توان نوشت

$$-\sum_{i=0}^n u_i l_i(x_j) + a \int_0^{x_j} (x_j - \tau) \sum_{i=0}^n u_i l_i(\tau) d\tau + a \int_{x_j}^1 (1 - \tau) \sum_{i=0}^n u_i l_i(\tau) d\tau - \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\int_0^{x_j} \sum_{i=0}^n u_i l_i(\tau) d\tau \right)^2}} = 0,$$

از خواص توابع کلاهی و با شکستن انتگرال روی زیربازه‌ها داریم

$$-u_j + a(x_j - \tau) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{i=0}^n u_i l_i(\tau) d\tau + a \sum_{k=j}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1 - \tau) \sum_{i=0}^n u_i l_i(\tau) d\tau - \frac{b}{\sqrt{1 + \left[\sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{i=0}^n u_i l_i(\tau) d\tau \right]^2}} = 0.$$

از آنجایی که برای $x_k \leq x_{k+1}$ تنها مقادیر $l_k(t)$ و $l_{k+1}(t)$ غیر صفر هستند. می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر خلاصه نمود

$$-u_j + a(x_j - \tau) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (u_k l_k(t) + u_{k+1} l_{k+1}(t)) dt + a \sum_{k=j}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1 - \tau) (u_k l_k(t) + u_{k+1} l_{k+1}(t)) dt - b / \left[1 + \left(\sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u_k l_k(t) + u_{k+1} l_{k+1}(t) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

در ادامه با تعریف

$$\alpha_k := \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_k(t) dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_{k+1}(t) dt, \quad \beta_k := \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1 - \tau) l_k(t) dt, \quad \theta_k := \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1 - \tau) l_{k+1}(t) dt,$$

داریم

$$-u_j + a(x_j - \tau) \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k [u_k + u_{k+1}] + a \sum_{k=j}^{n-1} [u_k \theta_k + u_{k+1} \beta_k] - b / \left[1 + \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k u_k + \beta_k u_{k+1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

رابطه بالا به ازای $j = 0, 1, \dots, n$ دستگاه معادلات غیرخطی از تابع مجهول $u(t)$ را در نقاط شبکه تشکیل می‌دهد. با حل این دستگاه از روش‌های تکراری مانند نیوتون، مقادیر $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)$ حاصل می‌شود.

۵. نتایج عددی

شکل ۲ نتایج عددی حاصل از روش هم‌مکانی معرفی شده را برای مقادیر پارامترهای $a = 0.216$ و $b = 0.5$ نشان می‌دهد. بعلاوه در این شکل کران‌های بدست آمده در [۴] نیز نشان داده شده‌اند که در آن $D = \frac{\tau}{a} \left(\frac{\sqrt{a^2 b^2 - 2ab\tau + 1}}{ab} - 1 \right), C = \frac{1 - \sqrt{1 - 2ab\tau + a^2 b^2}}{ab}$ و $D_1 = b\sqrt{1 - b^2}, C_1 = b + \frac{1}{ab} + b$ تعریف شده و ثابت شده است که $H_D(t) \leq h(t) \leq H_C(t), H_{D_1}(t) \leq h(t) \leq H_{C_1}(t)$. همانطور که از شکل ۲ مشخص است، تقریب‌های به دست آمده از روش هم‌مکانی در محدوده کران‌های محاسبه شده توسط نویسندگان [۴] قرار دارند.

مراجع

1. E. Ahmed, *Finite element modeling of corneal biomechanical behavior*, J. Refractive Surgery 26 (2010) 289–300.
2. K. Anderson, A. El-Sheikh, T. Newson, *Application of structural analysis to the mechanical behaviour of the cornea*, J. Royal Society, 1 (2004) 3–15.

3. W. Okraśiński, L. Płociniczak, *A nonlinear mathematical model of the corneal shape*, Nonlin. Anal. RWA 13 (2012), 1498–1505.
4. W. Okraśiński, L. Płociniczak, *Solution estimates for a system of nonlinear integral equations arising in optometry, journal of integral equations and applications*, 1 (2018), 167-179.
5. L. Płociniczak, W. Okraśiński, et al., *On a nonlinear boundary value problem modeling corneal shape*, J. Math. Anal. Appl. 414 (2014), 461–471.

دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
katani@yu.ac.ir :address Email

دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.
s.majidifar74@gmail.com :address Email

روش جدید در حل مساله قیمت‌گذاری

زینب یاسینی، الهام دسترنج، و حسین صاحبی‌فرد

چکیده. دینامیک دارایی پایه تحت تاثیر عوامل مختلف سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و ... می‌باشد. لذا استفاده از مدل‌های کلاسیک حرکت دارایی پایه در قیمت‌گذاری اختیار معاملات کارایی چندانی ندارد. در این مقاله قیمت‌گذاری اختیار معامله توانی تحت مدل رژیم سوئیچینگ انجام شده‌است. در این مدل، برای دارایی پایه نظام‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود و معادله قیمت‌گذاری با روش زیرفضای ناورد حل شده‌است.

۱. پیش‌گفتار

ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در اقتصادهای مالی است. بی‌شک مدل بلک-شولز انقلابی در شیوه قیمت‌گذاری اختیار معامله به وجود آورد. اما این مدل دارای نقص‌هایی نیز بود. بعد از بلک-شولز متخصصان زیادی برای رهایی از نقص‌های آن، مدل‌هایی برای دینامیک‌های تلاطم ارائه کردند [۲]. در سال‌های اخیر اکثر مطالعات تجربی بر روی شکست‌های ساختاری بازار دارایی پایه (سهام) تمرکز یافته‌است. مدلی که می‌تواند این تغییر را توضیح دهد و اندازه‌گیری کند مدل رژیم سوئیچینگ است. مدل رژیم سوئیچینگ به‌طور موثر خواص سری‌های زمانی پیچیده از چندین متغیر مهم، از جمله نرخ بهره و نرخ ارز و غیره را محاسبه می‌کند. تحقیقات و پژوهش‌های رسیده، اقتصادسنجی را با مدل‌های رژیم سوئیچینگ توسعه داده و برتری این مدل را نسبت به سایر مدل‌ها ثابت کرده است. بدین ترتیب مدل رژیم سوئیچینگ به‌طور گسترده در بازارهای سهام و مشتقات مورد استفاده قرار گرفت [۳]. در این مقاله روشی جدید برای حل معادلات دیفرانسیلی مربوط به قیمت‌گذاری اختیار معامله ارائه شده‌است.

۲. مدل

فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال مفروض، $\{F_t : t \geq 0\}$ فیلتر تولید شده توسط فرایند براونی و Q اندازه ریسک خنثی باشد. همچنین فرض کنید که حالت اقتصادی مفروض به وسیله یک زنجیر مارکوف $\{X_t : t \geq 0\}$ روی (Ω, F, P) مدل‌سازی شده‌باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توان فضای حالت $\{X_t : t \geq 0\}$ را با یک مجموعه متناهی از بردارهای

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، زیرفضاهای ناوردا، ریاضی مالی، قیمت‌گذاری اختیار.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42, 47A15

واحد $\chi := \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ شناخت. در این جا $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. فرض کنید $\{X_t : t \geq 0\}$ و $\{W_t : t \geq 0\}$ مستقل باشند. همچنین فرض کنید H مولد $[q_{ij}]$ ، $i, j = 1, 2, \dots, M$ ، از زنجیره مارکوف مذکور باشد [۴]. با استفاده از قضیه نیم-مارتینگلی می توان ثابت کرد برای $\{X_t : t \geq 0\}$

$$(۱.۲) \quad X_t = x. + \int_0^t H X_s ds + M_t,$$

که $\{M_t : t \geq 0\}$ فرایند مارتینگلی R^M مقدار نسبت به فیلتر تولید شده به وسیله $\{X_t : t \geq 0\}$ است. قیمت دارایی پایه S_t در لحظه t از فرایند زیر تبعیت می کند

$$dS_t = \mu X_t S_t dt + \sigma X_t S_t dW_t,$$

که سود ارزش سهام $\{\mu_t : t \geq 0\}$ و نوسان دارایی پایه $\{\sigma_t : t \geq 0\}$ به $\{X_t : t \geq 0\}$ وابسته است که به صورت زیر تعریف می شود

$$(۲.۲) \quad \mu X_t := \mu(t, X_t) = \langle \mu, X_t \rangle, \quad \sigma X_t := \sigma(t, X_t) = \langle \sigma, X_t \rangle,$$

فرض کنید $V_i := V(t, s, e_i)$ ، $i = 1, 2, \dots, M$. بنابراین V در معادله رژیم سوئیچینگ زیر صدق می کند.

$$-r_i V_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} + r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} + \frac{1}{\gamma} \sigma_i^\gamma S^\gamma \frac{\partial^\gamma V_i}{\partial S^\gamma} + \langle V, H_{ei} \rangle = 0,$$

یک معادله دیفرانسیل سهموی است که با معادله زیر برابر است

$$-r_i V_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} + r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} + \frac{1}{\gamma} \sigma_i^\gamma S^\gamma \frac{\partial^\gamma V_i}{\partial S^\gamma} + \sum_{i \neq j} q_{ij} (V_j - V_i) = 0,$$

$$V(T, s, e_i) = V(s), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

۳. یافتن جواب دقیق با روش زیر فضای ناورد

می توان تعمیم زمان کسری معادله (۴.۲) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial^\alpha V_i}{\partial t^\alpha} = r_i V_i - r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} - \frac{1}{\gamma} \sigma_i^\gamma S^\gamma \frac{\partial^\gamma V_i}{\partial S^\gamma} - \sum_{i \neq j} q_{ij} (V_i - V_j) = 0,$$

که $\frac{\partial^\alpha V_i}{\partial t^\alpha}$ ، مشتق کسری کاپوتو است. با فرض $0 < \alpha < 1$. با قرار دادن $M = 2$ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری زیر به دست می آیند.

$$\frac{\partial^\alpha V_1}{\partial t^\alpha} = r_1 V_1 - r_1 S \frac{\partial V_1}{\partial S} - \frac{1}{\gamma} \sigma_1^\gamma S^\gamma \frac{\partial^\gamma V_1}{\partial S^\gamma} - q_{12} (V_1 - V_2) = 0.$$

$$\frac{\partial^\alpha V_2}{\partial t^\alpha} = r_2 V_2 - r_2 S \frac{\partial V_2}{\partial S} - \frac{1}{\gamma} \sigma_2^\gamma S^\gamma \frac{\partial^\gamma V_2}{\partial S^\gamma} - q_{21} (V_2 - V_1) = 0.$$

می توان یک مجموعه جواب دقیق وابسته به زیر فضای ناوردای $W_2 = \langle 1, s^\gamma \rangle \times \langle 1, s^\gamma \rangle$ که یک جواب دقیق برای معادله فوق است به شکل زیر یافت

$$V_1(t, s) = A_1(t) + S^\gamma A_2(t),$$

$$V_2(t, S) = B_1(t) + S^\gamma B_2(t).$$

با قرار دادن جواب در معادلات اخیر و بازسازی مجدد آنها معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری زیر حاصل می‌شود

$$(۳.۳) \quad \frac{d^\alpha A_1}{dt^\alpha} = q_{12}A_1(t) + r_1A_1(t) - q_{12}B_1(t),$$

$$(۴.۳) \quad \frac{d^\alpha B_1}{dt^\alpha} = q_{21}B_1(t) + r_2B_1(t) - q_{21}A_1(t),$$

$$(۵.۳) \quad \frac{d^\alpha A_2}{dt^\alpha} = q_{12}A_2(t) - r_1A_2(t) - \sigma_1^*A_2(t) - q_{12}B_2(t),$$

$$(۶.۳) \quad \frac{d^\alpha B_2}{dt^\alpha} = q_{21}B_2(t) - r_2B_2(t) - \sigma_2^*B_2(t) - q_{21}A_2(t).$$

فرض کنید $\alpha \in (0, 1)$. با تبدیل لاپلاس گرفتن از هر دو طرف معادلات (۳.۳) و (۴.۳) داریم

$$s^\alpha L\{A_1(t)\} - s^{\alpha-1}A_1(0) = q_{12}L\{A_1(t)\} + r_1L\{A_1(t)\} - q_{12}L\{B_1(t)\},$$

$$s^\alpha L\{B_1(t)\} - s^{\alpha-1}B_1(0) = q_{21}L\{B_1(t)\} + r_2L\{B_1(t)\} - q_{21}L\{A_1(t)\}.$$

فرض کنید $A_1(0) = A_2(0) = B_1(0) = B_2(0) = 1$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{cases} L\{A_1(t)\}(s^\alpha - q_{12} - r_1) + q_{12}L\{B_1(t)\} = s^{\alpha-1}, \\ L\{B_1(t)\}(s^\alpha - q_{21} - r_2) + q_{21}L\{A_1(t)\} = s^{\alpha-1}. \end{cases}$$

جواب دستگاه معادلات فوق به صورت زیر می‌باشد

$$(۹.۳) \quad L\{A_1(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}(s^\alpha - q_{21} - r_2 - q_{12})}{(s^\alpha - q_{12} - r_1)(s^\alpha - q_{21} - r_2) - q_{12}q_{21}},$$

که می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} L\{A_1(t)\} &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + s^\alpha(-q_{12}-r_1-q_{21}-r_2)+q_{12}r_2+q_{21}r_1+r_1r_2} \\ &+ \frac{s^{\alpha-1}(-q_{21}-r_2-q_{12})}{s^\alpha + s^\alpha(-q_{12}-r_1-q_{21}-r_2)+q_{12}r_2+q_{21}r_1+r_1r_2}. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر برای پیدا کردن تابع $A_1(t)$ از تبدیل لاپلاس، از لم زیر استفاده می‌شود.

لم ۱۰.۳. برای $\alpha \leq \beta, \alpha > \gamma, a \in R, S^{\alpha-\beta} > |a|, |S^\alpha + aS^\beta| > |b|$ داریم

$$(۱۲.۳) \quad L^{-1} \left[\frac{s^\gamma}{s^\alpha + aS^\beta + b} \right] = x^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^n (-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(K(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha - \gamma)} x^{k(\alpha-\beta)+n\alpha}.$$

[۱]. با استفاده از لم فوق می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-q_{12}r_2 - q_{21}r_1 - r_1r_2)^n (q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2)^k \binom{n+k}{k} t^{(n+k)\alpha} \\ &\times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + r_1\alpha + 1)} - (q_{12} + r_2 + q_{21}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + r_1\alpha + \alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

$$B_{\downarrow}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot (-q_{\downarrow\downarrow}r_{\downarrow} - q_{\downarrow\downarrow}r_{\downarrow} - r_{\downarrow}r_{\downarrow})^n (q_{\downarrow\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow} + r_{\downarrow} + r_{\downarrow})^k \binom{n+k}{k} t^{(n+k)\alpha} \\ \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + \downarrow\alpha n + \downarrow)} - (q_{\downarrow\downarrow} + r_{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \downarrow\alpha n + \alpha + \downarrow)} \right).$$

به طور مشابه، با به کارگیری تبدیل لاپلاس روی هر دو طرف معادله (۵.۳) و (۶.۳) و بازنشانی آنها خواهیم داشت

$$L\{A_{\downarrow}(t)\} = \frac{s^{\alpha-\downarrow}(s^{\alpha}-q_{\downarrow\downarrow}+r_{\downarrow}-q_{\downarrow\downarrow}+\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})}{(s^{\alpha}-q_{\downarrow\downarrow}+r_{\downarrow}+\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})(s^{\alpha}-q_{\downarrow\downarrow}+r_{\downarrow}+\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})-q_{\downarrow\downarrow}q_{\downarrow\downarrow}}, \\ L\{B_{\downarrow}(t)\} = \frac{s^{\alpha-\downarrow}(s^{\alpha}-q_{\downarrow\downarrow}+r_{\downarrow}-q_{\downarrow\downarrow}+\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})}{(s^{\alpha}-q_{\downarrow\downarrow}+r_{\downarrow}+\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})(s^{\alpha}-q_{\downarrow\downarrow}+r_{\downarrow}+\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})-q_{\downarrow\downarrow}q_{\downarrow\downarrow}}.$$

با تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از معادلات اخیر و با استفاده از لم فوق جواب های زیر را داریم.

$$A_{\downarrow}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot (q_{\downarrow\downarrow}r_{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}r_{\downarrow} - r_{\downarrow}r_{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - r_{\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - r_{\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - \sigma_{\downarrow}^{\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})^n \\ \times (q_{\downarrow\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow} - r_{\downarrow} - r_{\downarrow} - \sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - \sigma_{\downarrow}^{\downarrow})^k \binom{n+k}{k} t^{(n+k)\alpha} \\ \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + \downarrow\alpha n + \downarrow)} - (\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - q_{\downarrow\downarrow} + r_{\downarrow} - q_{\downarrow\downarrow}) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \downarrow\alpha n + \alpha + \downarrow)} \right). \\ B_{\downarrow}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot (q_{\downarrow\downarrow}r_{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}r_{\downarrow} - r_{\downarrow}r_{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - r_{\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - r_{\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - \sigma_{\downarrow}^{\downarrow}\sigma_{\downarrow}^{\downarrow})^n \\ \times (q_{\downarrow\downarrow} + q_{\downarrow\downarrow} - r_{\downarrow} - r_{\downarrow} - \sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - \sigma_{\downarrow}^{\downarrow})^k \binom{n+k}{k} t^{(n+k)\alpha} \\ \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + \downarrow\alpha n + \downarrow)} - (\sigma_{\downarrow}^{\downarrow} - q_{\downarrow\downarrow} + r_{\downarrow} - q_{\downarrow\downarrow}) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \downarrow\alpha n + \alpha + \downarrow)} \right).$$

مراجع

۱. م. حصارکی، م. فتوحی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، موسسه انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.
۲. ح. صاحبی فرد، مقایسه قیمت گذاری اختیار معامله توان تحت چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده ریاضی، ۱۳۹۸.
۳. ز. یاسینی، روش جدید در قیمت گذاری اختیار معامله از طریق معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده ریاضی، ۱۳۹۸.
4. Elliott R.J., Chan L. and Siu T.K., *Option pricing and Esscher transform under regime switching*, Annals of finances (2005) (4) 423-432.

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

zeynab.yasini.3110.z@gmail.com :address Email

استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

elham.dastranj@shahroodut.ac.ir :address Email

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

sahebi.hosein@shahroodut.ac.ir :address Email

نویسندگان نمایه

آهنگری، ۱۴

احمدی، ۲۲

اکبری، ۹

تہمتن، ۲۲

شمس یوسفی، ۲۶

شیخی، ۳۰

شیرازیان، ۳۴

طالبی، ۷

فاتحی نیا، ۳۸

قلی پور، ۳۸

مجیدی فر، ۴۳

پارسامنش، ۱۸

یاسینی، ۴۸